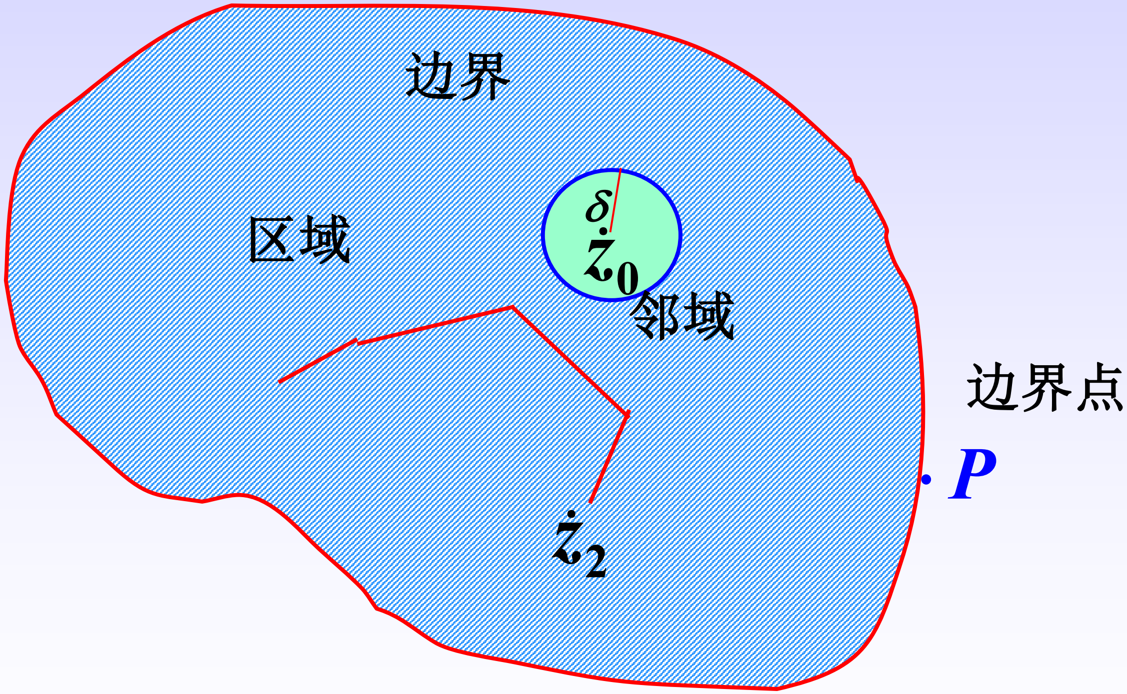
第二节 平面概念及复球面

- 一、复平面上的曲线和区域
- 二、复球面
- 三、小结与思考

一、复平面上的曲线与区域

1. 区域



邻域:

平面上以 z_0 为中心, δ (任意的正数)为半径的圆: $|z - z_0| < \delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域.

去心邻域:

称由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的点的集合为 z_0 的去心邻域.

内点:

设 G 为一平面点集, z_0 为 G 中任意一点. 如果存在 z_0 的一个邻域, 该邻域内的所有点都属于 G, 那末 z_0 称为 G 的内点.

开集:

如果 G 内每一点都是它的内点, 那末 G 称为开集.

聚点:

若点 z_0 的任意邻域内都含有 G 的无穷多个点, 则称 z_0 为 G 的聚点.

闭集:

若 G 的聚点都属于 G, 则称 G 为闭集.

有界点集和无界点集:

如果存在 $M > 0$, 对于点集 G 的每一个点都满足 $|z| < M$, 那末 G 称为有界的, 否则称为无界的.

区域:

如果平面点集D满足以下两个条件, 则称它为一个区域.

(1) D是一个开集;

(2) D是连通的, 就是说D中任何两点都可以用完全属于D的一条折线连结起来.

有界区域和无界区域:

如果存在$M>0$, 对于区域D的每一个点都满足$|z|<M$, 那末D称为有界的, 否则称为无界的.

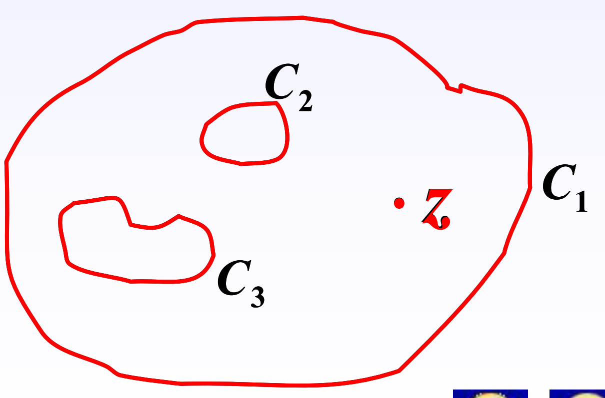
边界点、边界:

设D是复平面内的一个区域,如果点P 的任意小的邻域内总有D中的点, 也有不属于D的点, 这样的点P 我们称为D的边界点.

D的所有边界点组成 D 的边界.

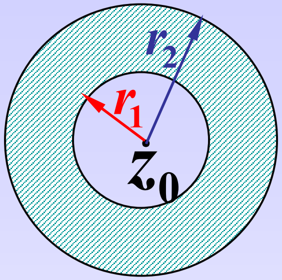
说明

区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的.

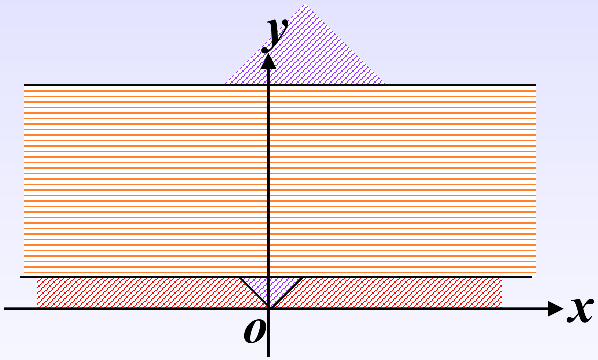


课堂练习 判断下列区域是否有界?

(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;



(2) 上半平面: $\mathrm{Im}\, z > 0$;



(3) 角形域: $\alpha < \arg z < \beta$;

(4) 带形域: $a < \mathrm{Im}\, z < b$.

答案 (1)有界; (2) (3) (4)无界.

2、单连通域与多连通域

连续曲线:

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数， 那么

由复数方程:

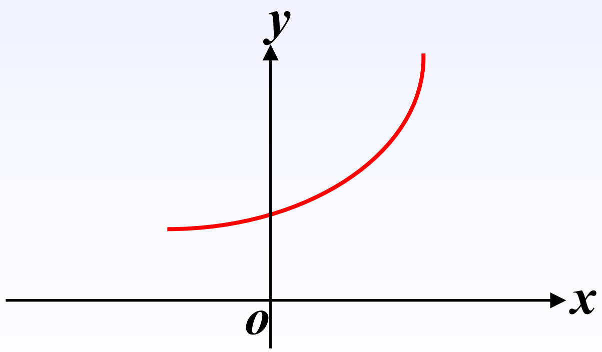
$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \le t \le b)$$

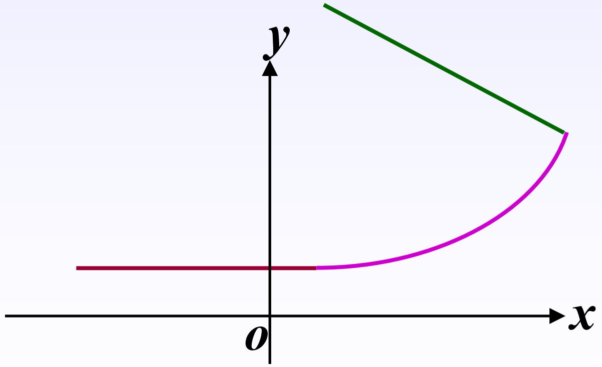
所确定的平面点集称为复平面上的连续曲线.

光滑曲线:

如果在 $a \le t \le b$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是连续的, 且对于 t 的每一个值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \ne 0$,那末称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.





简单曲线:

设$C: z = z(t)\ (a \le t \le b)$为一条连续曲线, $z(a)$与$z(b)$分别称为C的起点和终点.

对于满足$a < t_1 < b,\ a \le t_2 \le b$的$t_1$与$t_2$,当$t_1 \ne t_2$而有$z(t_1) = z(t_2)$时,点$z(t_1)$称为曲线$C$的重点.

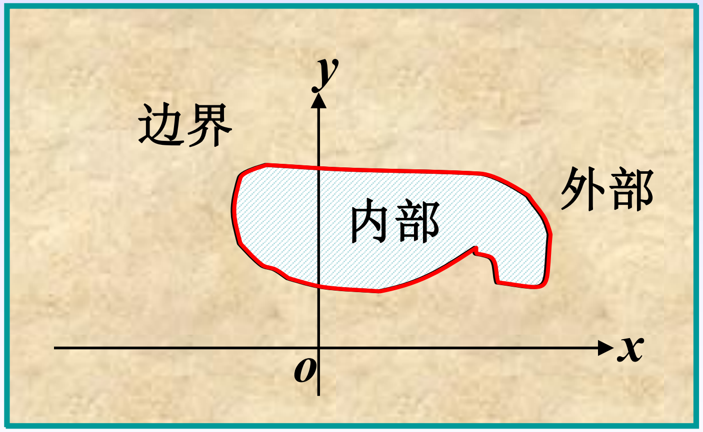
没有重点的曲线C称为简单曲线(或若尔当曲线).

如果简单曲线 C 的起点和终点重合,即 $z(a)=z(b)$,那末称 C 为简单闭曲线.

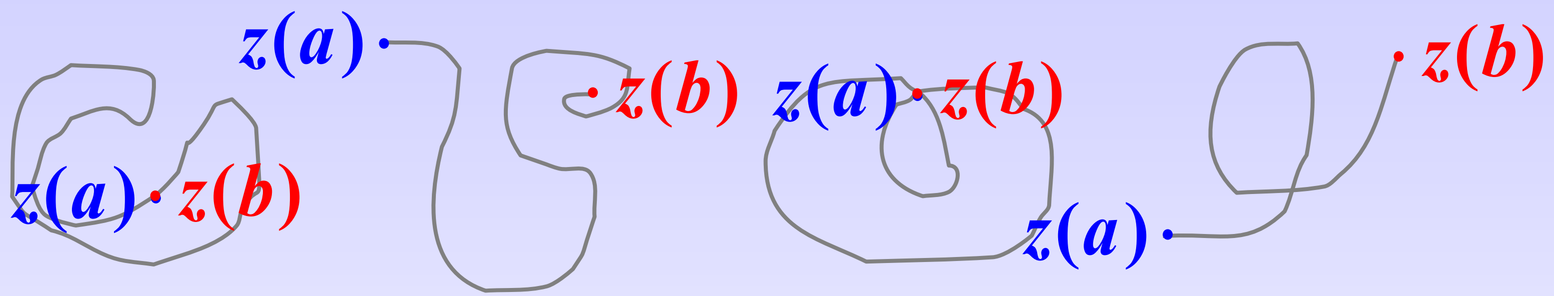
换句话说,**简单曲线自身不相交**.

简单闭曲线的性质:

任意一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成三个互不相交的点集.



课堂练习 判断下列曲线是否为简单曲线?

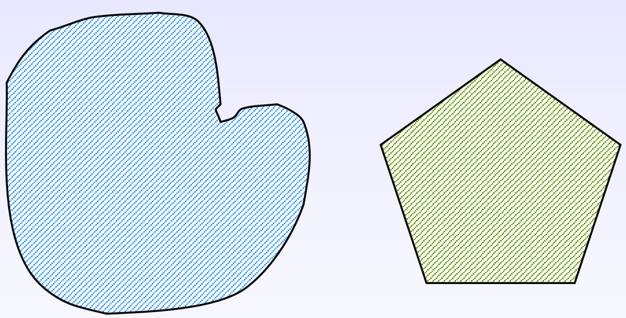


答案

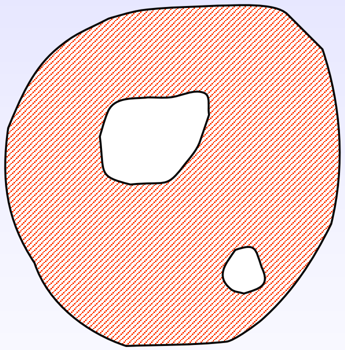
简单 闭	简单 不闭	不简单 闭	不简单 不闭

单连通域与多连通域的定义:

复平面上的一个区域B, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于B, 就称为单连通域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通域.



单连通域



多连通域

平面上曲线或区域可用复数形式的方程或不等式表示,反之亦然.

例1 将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解 通过两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的直线的方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

所以它的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad \text{参数 } t \in (-\infty, +\infty),$$

故,由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

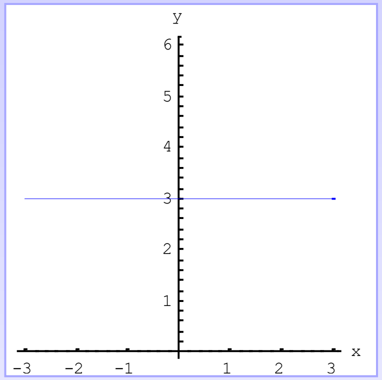
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \le t \le 1)$$

若取 $t = \frac{1}{2}$,

得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点坐标为 $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

例2 满足下列条件的点集是什么, 如果是区域, 指出是单连通域还是多连通域?

解 (1) $\operatorname{Im} z = 3$,



是一条平行于实轴的直线,

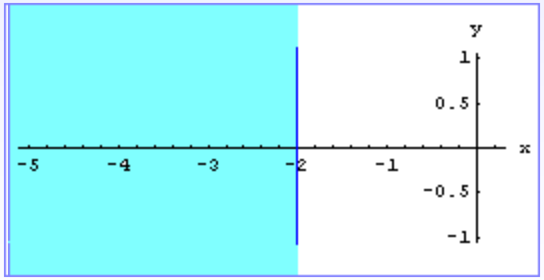
不是区域.

(2) $\operatorname{Re} z < -2$,

以 $\operatorname{Re} z = -2$ 为界的左半平面

(不包括直线 $\operatorname{Re} z = -2$),

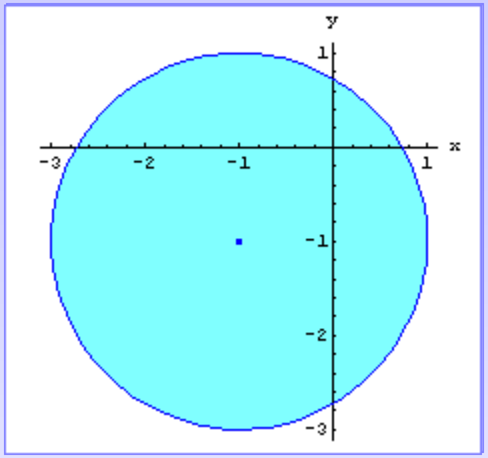
单连通域.



(3) $0 < |z+1+i| < 2$,

以 $-(1+i)$ 为圆心, 2为半径的去心圆盘,

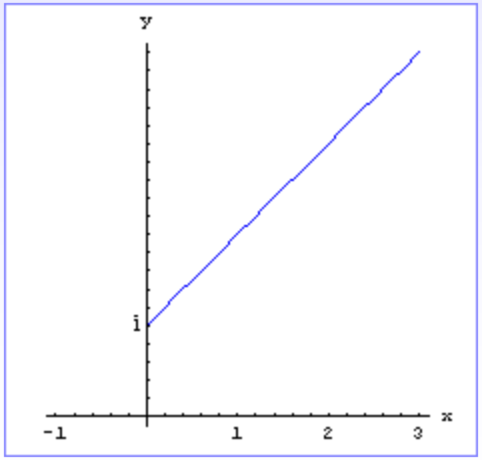
是多连通域.



(4) $\arg(z-i) = \dfrac{\pi}{4}$,

以 i 为端点, 斜率为1的半射线(不包括端点 i),

不是区域.



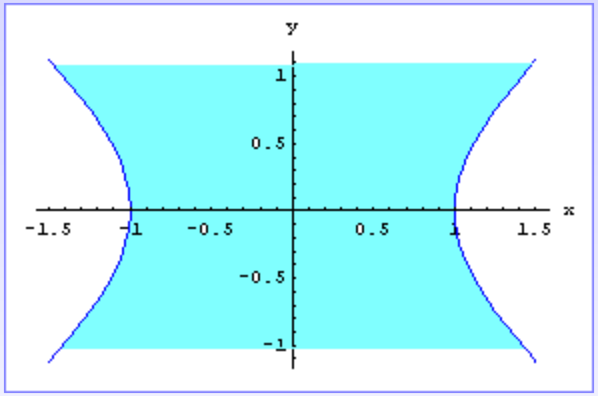
(5) $\operatorname{Re}(z^2) < 1$

当 $z = x + iy$ 时,

$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$,

$\operatorname{Re}(z^2) < 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 1$,

无界的单连通域(如图).



例3 求满足不等式 $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$ 的点 z 所构成的点集，作出它的图形. 并指出它是有界还是无界区域，是单连通还是多连通的?

解 由 $\left|\dfrac{z-2}{z+2}\right|<3$ 得 $|z-2|<3|z+2|\ (z\neq-2)$, 即

$$(z-2)(\bar{z}-2)<9(z+2)(\bar{z}+2),$$

整理得

$$z\bar{z}+\frac{5}{2}(z+\bar{z})+4>0,$$

从而有

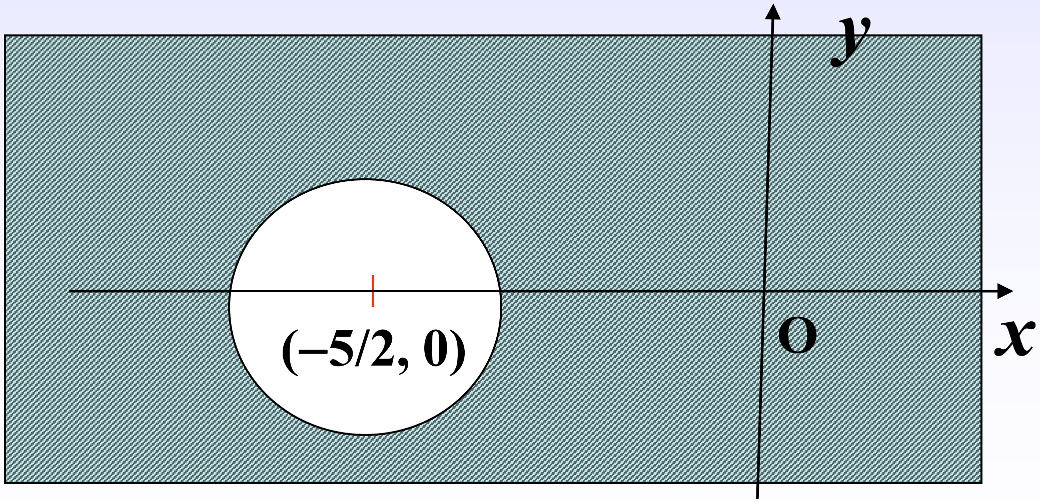
$$\left(z+\frac{5}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{5}{2}\right)>\frac{9}{4},$$

即

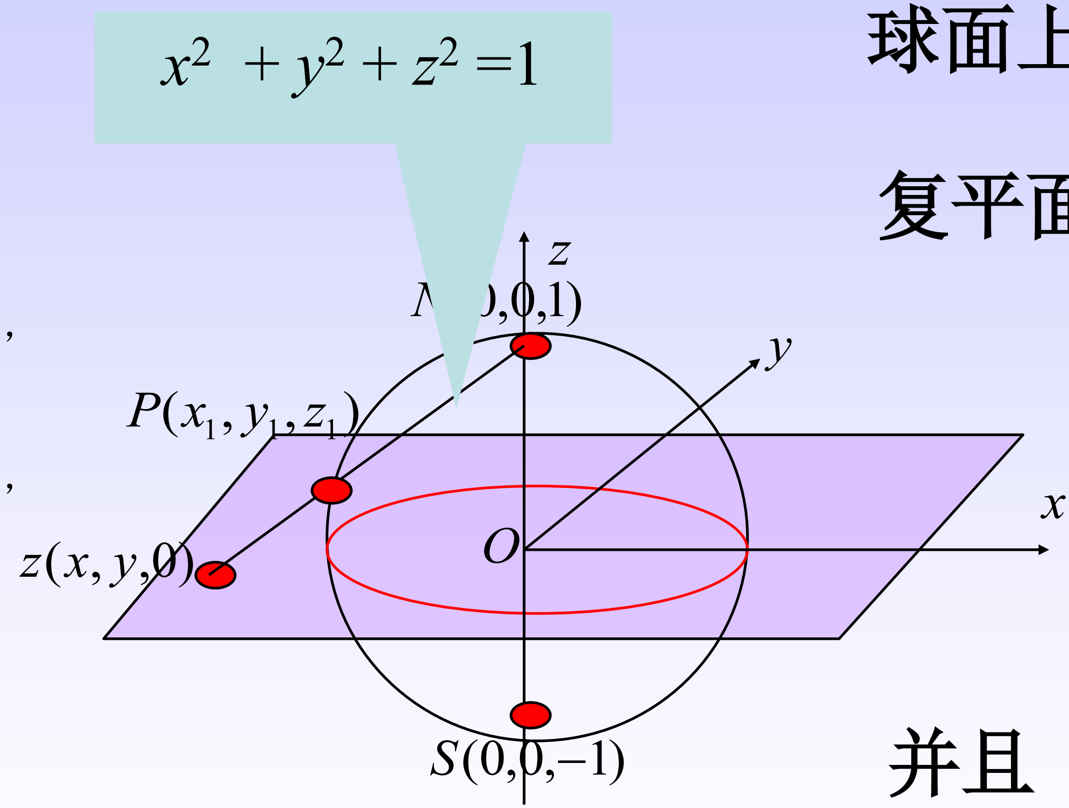
$$\left|z+\frac{5}{2}\right|>\frac{3}{2}.$$

它是以(–5/2, 0)为圆心，以3/2为半径的圆周的外部，

是无界多连通区域.



三、复球面



球面上点 $N(0, 0, 1)$ 称为北极.

复平面上点 z 对应球面上点 P.

点 P 坐标为

$$((1-t)x, (1-t)y, t)$$

并且

$$(1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = 1$$

解得 $t=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$,

点 P 坐标为

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1} \qquad y_1=\frac{z-\bar{z}}{(|z|^2+1)i} \qquad z_1=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

反过来，球面上点$P\,(x_1, y_1, z_1)$对应着平面上的点

$$z=x+iy=\frac{x_1+iy_1}{1-z_1}$$

复球面的定义

球面上的点, 除去北极 N 外, 与复平面内的点之间存在着一一对应的关系. 我们可以用球面上的点来表示复数.

我们规定: 复数中有一个唯一的 “无穷大” 与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞. 复平面上的无穷远点与球面上的北极 N 相对应. 因而球面上的北极 N 就是复数无穷大 ∞ 的几何表示.

球面上的每一个点都有唯一的复数与之对应, 这样的球面称为复球面.

3. 扩充复平面的定义

包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面, 或简称复平面.

对于复数∞来说, 实部,虚部,辐角等概念均无意义, 它的模规定为正无穷大.

关于∞的四则运算规定如下:

(1) 加法: $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(2) 减法: $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$

(3) 乘法: $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$

(4) 除法: $\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \dfrac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

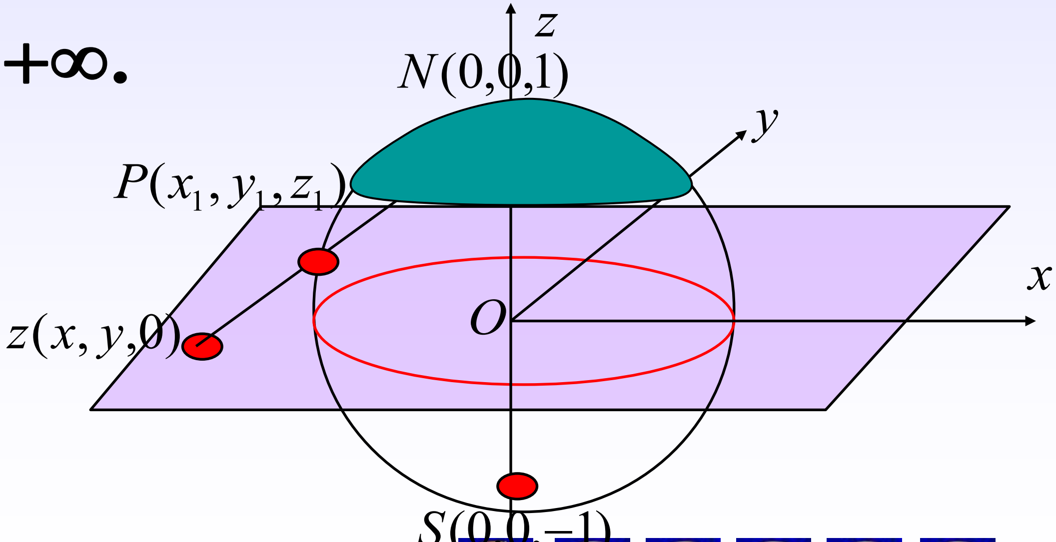
四、总结与思考

1. 掌握曲线和区域的概念，重点是判别不等式或方程代表的是否是区域、何种区域.
2. 重点掌握复平面上的点和复球面上的点如何对应.

思考： 无穷远点的邻域和去心邻域应如何定义？

包括无穷远点自身在内且满足 $|z| > M$ 的所有点的集合，其中实数 $M > 0$，称为无穷远点的邻域。

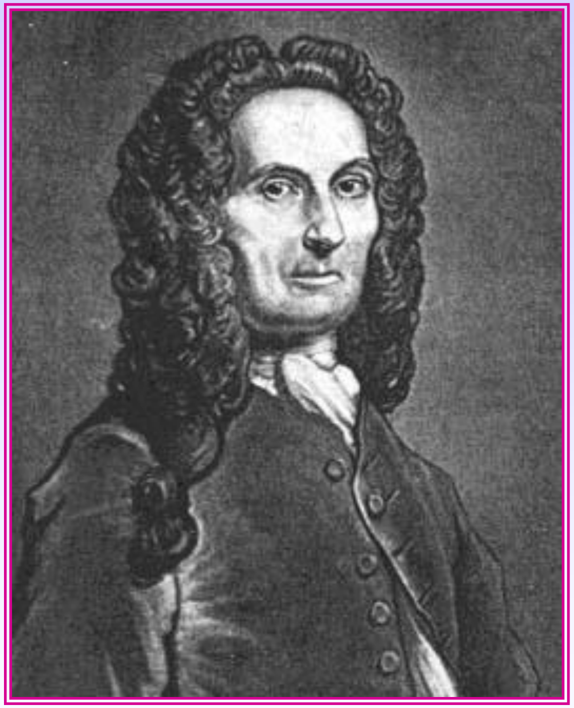
不包括无穷远点自身在内，仅满足 $|z| > M$，的所有点的集合，称为无穷远点的去心邻域。可以表示为 $M < |z| < +\infty$。



作业：P13　4，　6，　10(3), (4)

放映结束，按Esc退出.

棣莫佛资料



Abraham de Moivre

Born: **26 May 1667 in Vitry (near Paris), France**
Died: **27 Nov 1754 in London, England**