第三节 卷积

- 一、卷积的概念
- 二、卷积定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、卷积的概念

$$f_1(t)*f_2(t)=\boxed{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

Laplace变换的卷积

Laplace变换的卷积同Fourier变换的卷积定义一致.

例1 求$f_1(t)=t$与$f_2(t)=\sin t$的卷积.

解　根据卷积的定义

$$t*\sin t=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=t-\sin t.$$

卷积运算满足：

(1)交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$;

(2)结合律 $f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

$$= [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t);$$

(3)分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t)$

$+ f_1(t) * f_3(t)$;

此外,卷积还满足

$$|f_1(t) * f_2(t)| \leq |f_1(t)| * |f_2(t)|.$$

二、卷积定理

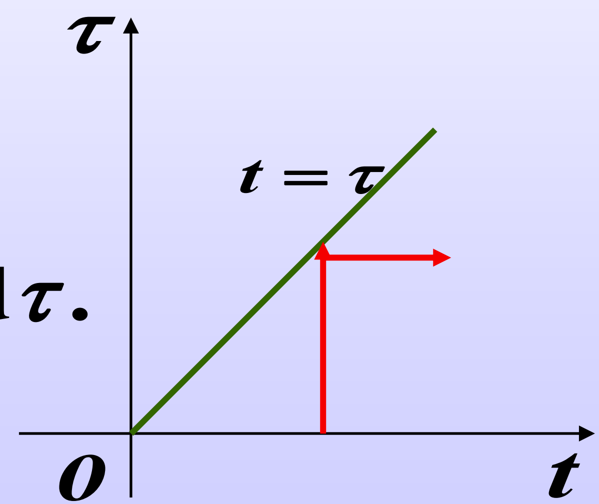
假设$f_1(t)$，$f_2(t)$满足$Laplace$变换存在定理的条件，且$\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$，则$f_1(t) * f_2(t)$的$Laplace$变换一定存在，且

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \\ \text{或}\quad &\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) \end{aligned}\right\}.$$

证 容易验证$f_1(t) * f_2(t)$满足$Laplace$变换存在定理的条件，它的变换式为

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-st}\mathrm{d}t$$

积分区域如图所示,由于二重积分绝对可积,可以交换积分顺序,即



$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]$$
$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}[f_2(t-\tau)e^{-st}]\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau.$$

令$t-\tau=u$,则

$$\int_{\tau}^{+\infty}[f_2(t-\tau)e^{-st}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty} f_2(u)e^{-s(u+\tau)}\mathrm{d}u = e^{-s\tau}F_2(s).$$

所以

$$\mathrm{L}\,[f_1(t)*f_2(t)] = \int_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau}F_2(s)\mathrm{d}\tau$$

$$= F_2(s)\int_0^{+\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$= F_1(s)\cdot F_2(s).$$

这个性质表明两个函数卷积的Laplace变换等于这两个函数Laplace变换的乘积.

一般地，若$f_k(t)$满足$Laplace$变换存在定理的条件,且$\mathcal{L}[f_k(t)]=F_k(s),(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]$$
$$=F_1(s)\cdot F_2(s)\cdot\cdots\cdot F_n(s).$$

三、典型例题

例2 若$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$,求$f(t)$.

解 因为$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}=\dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$,

取$F_1(s)=\dfrac{1}{s^2}$,$F_2(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$, 于是

$$f_1(t)=t,\ f_2(t)=\sin t,$$

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=t-\sin t.$$

例3 若$F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$,求$f(t)$.

解 因为$F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$,

所以，$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}]=\cos t*\cos t$

$$=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

例4 若$F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}$,求$f(t)$.

解 因为$F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4s+13)^2}=\dfrac{1}{[(s+2)^2+3^2]^2}$,

$$=\frac{1}{9}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+3^2}.$$

根据位移性质,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right]=e^{-2t}\sin 3t,$$

所以

$$f(t)=\frac{1}{9}(e^{-2t}\sin 3t)*(e^{-2t}\sin 3t)$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t e^{-2\tau}\sin 3\tau e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t \sin 3\tau \sin 3(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t)-\cos 3t]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{54}e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

例5 若$F(s)=\dfrac{e^{-bs}}{s(s+a)}$,其中$b>0$，求$f(t)$.

解　法一：因为$\dfrac{1}{s(s+a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}\right)$,

所以，$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s+a)}\right]=\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$,

由延迟性质，有

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-bs}}{s(s+a)}\right]=\frac{1}{a}[1-e^{-a(t-b)}]u(t-b).$$

法二：因为$\dfrac{e^{-bs}}{s(s+a)}=\dfrac{e^{-bs}}{s}\cdot\dfrac{1}{s+a}$,所以

$$f(t)=u(t-b)*e^{-at}$$

$$=\int_0^t u(\tau-b)e^{-a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{cases}\int_b^t e^{-a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$$

$$=\frac{1}{a}[1-e^{-a(t-\tau)}]u(t-b).$$

四、小结与思考

本节课学习了Laplace变换的卷积以及卷积定理，对卷积定理要知道如何运用.

思考题

求函数Laplace逆变换的一般方法有哪些？

思考题答案

一、用公式(验证条件，借助留数),

二、用Laplace变换的性质(包括卷积).

具体情况具体分析.

作业： P170 7(2)(3)(4)(5)