第四章　一阶电路与二阶电路

基本理论与内容

1.一阶电路的零输入响应

2.一阶电路的零状态响应

3.一阶电路的全响应

4.求解一阶电路的三要素法

5.一阶电路的冲激响应

6.二阶电路的冲激响应

根据微分方程通解和特解的形式或特性不同,作如下解释:

$$u_C = u_{CS} + u_{Ct} = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (1)$$

观察式(1), u_{cs}与外激励形式相同,称为强制响应;当$t \rightarrow \infty$时,这一分量不随时间变化,故又称稳态响应.

u_{ct}按指数规律变化是由电路自身特性所决定,是电路的自然响应在有损耗的电路中,当$t \rightarrow \infty$时,这一分量将衰减至0,故又称暂态响应.

所以,按电路的响应形式来分:

全响应 = 强制响应 + 自然响应

按电路的响应特性来分:

全响应 = 稳态响应 + 暂态响应

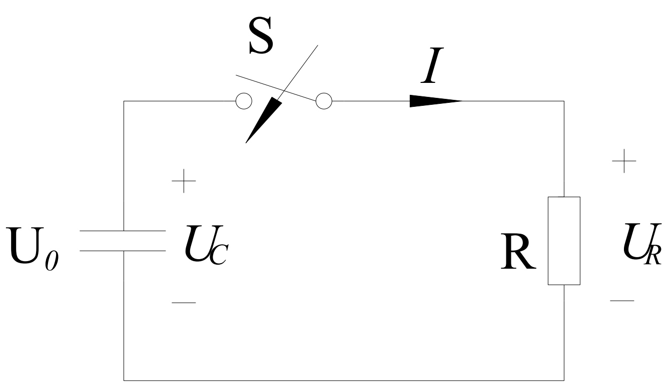
一阶电路——凡是可用一阶常微分方程描述的电路

§4-1 一阶电路的零输入响应

零输入响应—— 电路在没有外加激励时,由储能所引起的响应.

1. RC 串联电路的零输入响应

电路中，已知电容在开关前已带有电荷



设$T=0$时 S闭合

$U_C(0-)=U_0$

S闭合后,由KVL,可知

$U_C=U_R$

$$u_R = Ri \qquad i = -C\frac{du_C}{dt}$$

得 $RC\dfrac{du_c}{dt} + u_C = 0$ (1)

由开关定理可知：

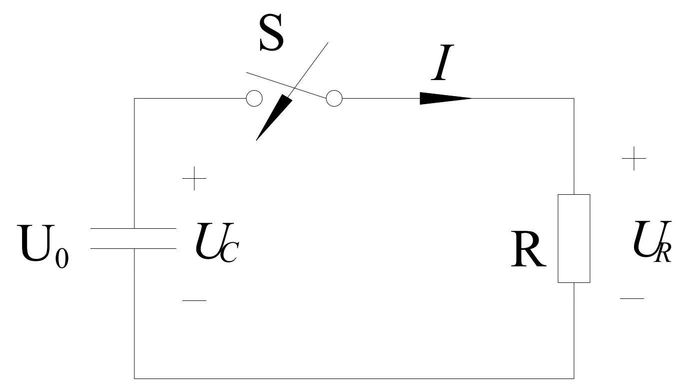
$U_C(0_+)=U_C(0-)=U_0$ (2)

齐次方程的通解为：$u_c = Ae^{pt}$

P为齐次方程的特征方程的根,求得

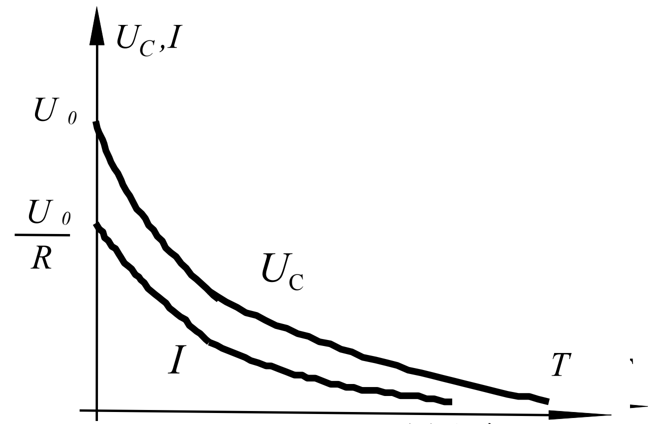
$$RCp + 1 = 0 \qquad p = -\frac{1}{RC}$$

$$u_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$



式中常数A需由起始条件确定

$$u_C(0) = Ae^{-\frac{t}{RC}}\Big|_{t=0} = U_0$$



$U_C(T)$, $I_C(T)$曲线

$$\therefore \quad A = U_0$$

$$\therefore \quad u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = -C\frac{du_C}{dt} = -C\frac{d}{dt}U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

RC串联电路的时间常数

$$U_C, I \propto e^{-t/RC}$$

令 $\tau = RC$ （时间常数） $\Omega \cdot F = \frac{V}{A} \cdot \frac{C}{V} = \frac{A \cdot s}{A} = s$

显然，零输入响应衰减的快慢也可以用τ来衡量，以UC为例说明τ的意义

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$T=0$时，　$U_C=U_0$

$T=\tau$时，　$U_C=U_0 E^{-1} = 0.36788\ U_0$

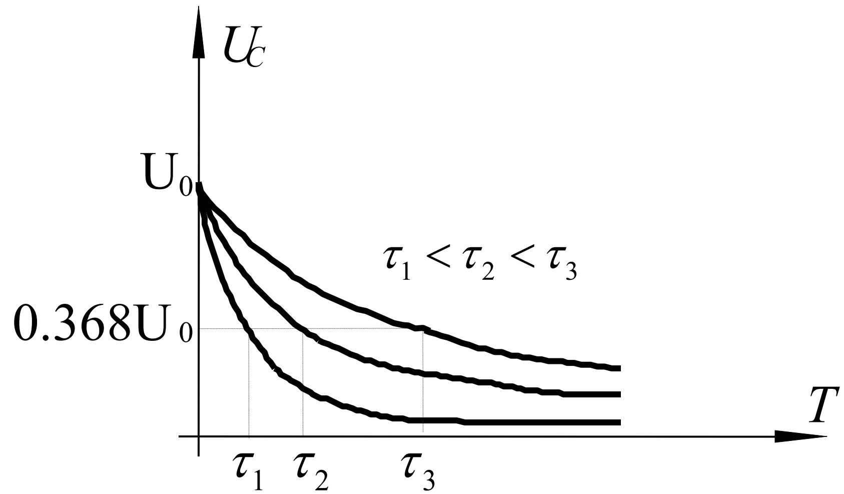
$T=2\tau$时，　$U_C=U_0 E^{-2} = 0.13534\ U_0$

$T=3\tau$时，　$U_C=U_0 E^{-3} = 0.049787 U_0$

$T=4\tau$时，　$U_C=U_0 E^{-4} = 0.018316\ U_0$

$T=5\tau$时，　$U_C=U_0 E^{-5} = 0.006738\ U_0$

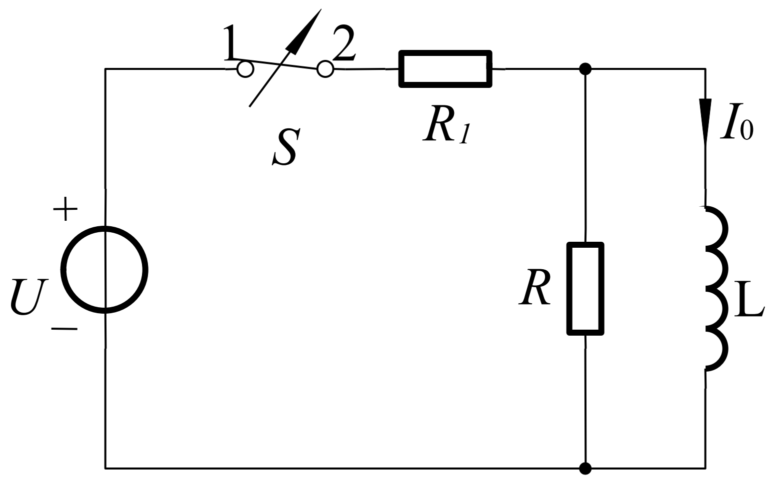
一般U_C衰减到5%,就认为零输入响应已基本结束.即动态电路的过渡过程结束,从而进入稳定工作状态



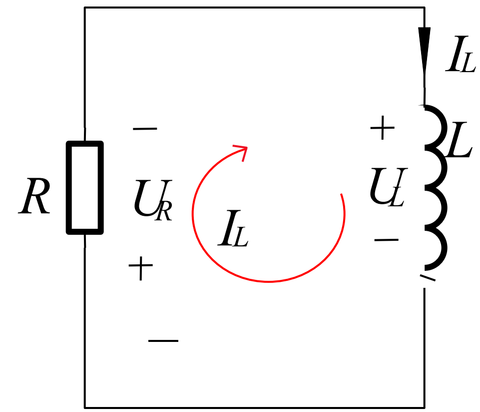
三种不同时间常数下U_C的变化曲线

时间常数越小,过渡过程越短;反之越长.

例：RL串联电路的零输入响应



A)原图



B) RL串联电路

A)图, $T<0$ 时 S 在位置1, 电路处于稳定状态, R中无电流. $I_L(0-)=I_0=U/R_1$,

$T=0$,S 由1倒向2

根据开关定理: $I_L(0_+)=I_L(0-)=I_0$ $$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0$$

令 $i_L=Ae^{pt}$ 由它的特征方程 $Lp+R=0$

解出特征根 $p = -\frac{R}{L}$

故电流 $i_L = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

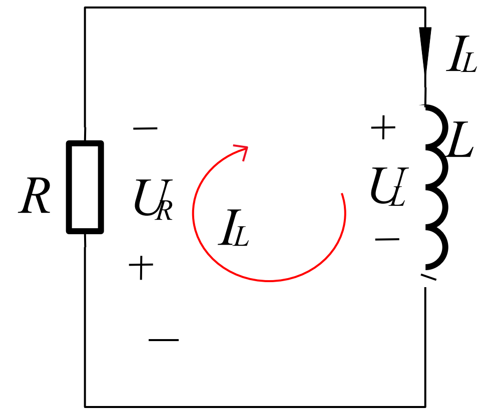
令 $\tau = \frac{L}{R}$

则有 $i = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

由初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$

可得 $A = I_0$

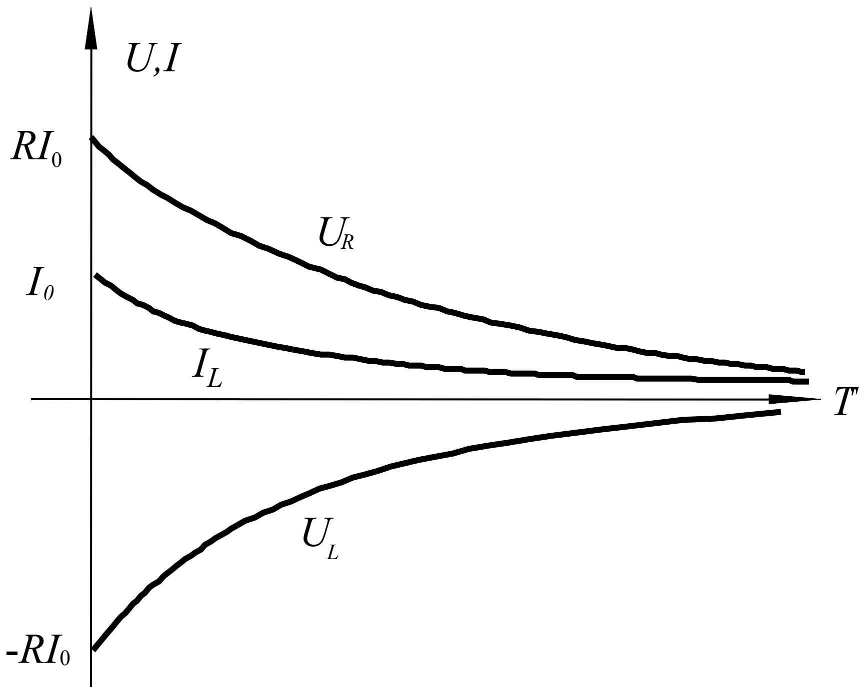
电流得解为 $i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

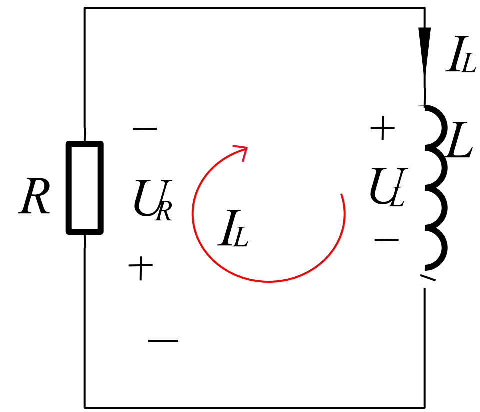


B) RL 串联电路

则 $u_R = Ri_L = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ $i_L = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$





B) RL 串联电路

RL电路的时间常数

$\tau = L/R$

I_L, U_R, U_L随时间变化的曲线

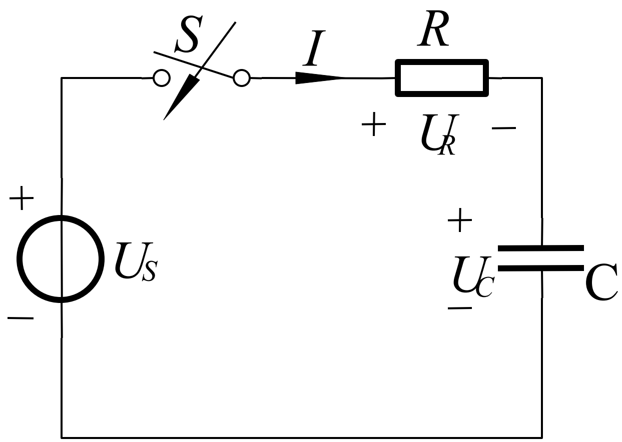
§4-2 一阶电路的零状态响应

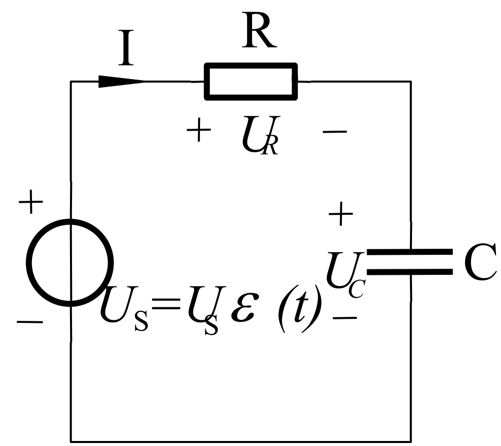
零状态响应——在零初始条件下,电路仅由外激励引起的响应

$$U_C(0-)=0,\ \ I_L(0-)=0$$

1. RC串联电路

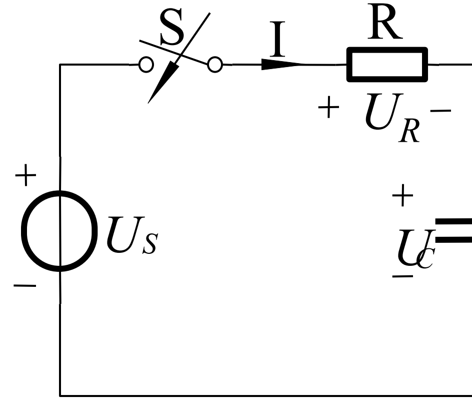
RC串联电路在$T=0$时接入直流电压源时的零状态响应(相当于该电路在阶跃电压$U_S(t)=U_S\varepsilon(t)$激励时的零状态响应).

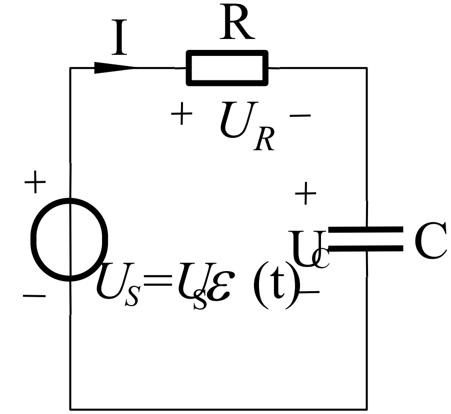




RC 串联电路接至恒定电压源的电路

由KVL,有 $U_R+U_C=U_S$





由于 $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, $u_R = Ri$

得: $$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$

非齐次方程的特解

其解 $U_C= U_{CS}+ U_{CT}$ 齐次方程的通解

解得 $U_{CS}=U_S$ $U_{CT}=Ae^{-t/RC}$ 也称自由响应

也称强制响应

所以: $U_C= U_{CS}+ U_{CT} =U_S+Ae^{-t/RC}$

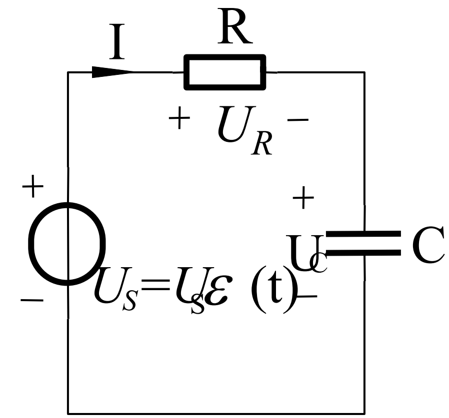
由 $U_C(0_+)=U_C(0-)=0$ 代入方程得解,确定A

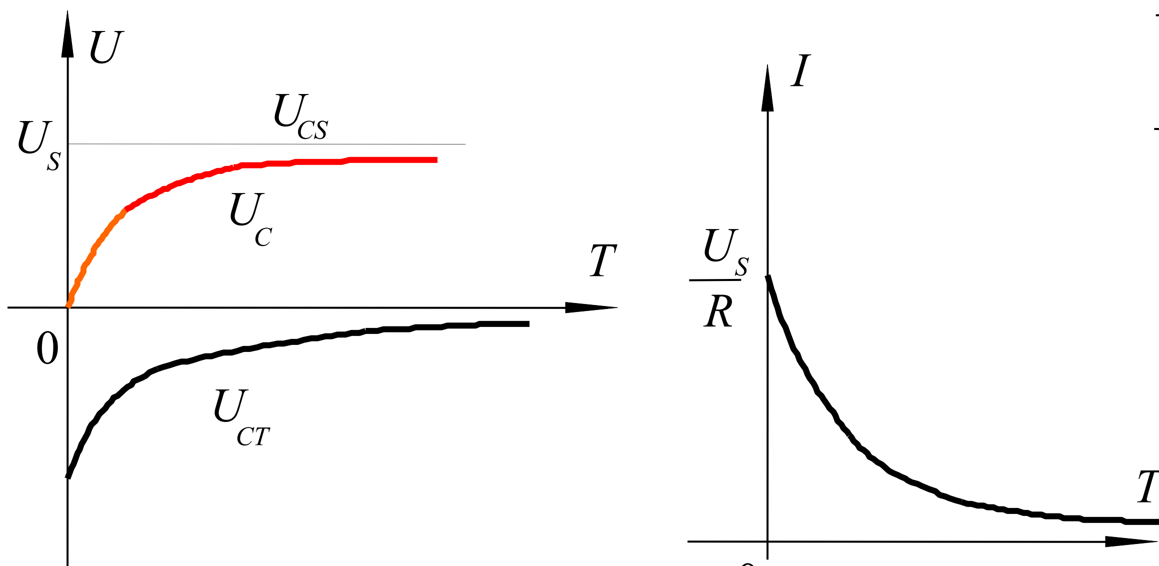
$$U_C(0_+)=U_S+A=0$$

得 $A = -U_S$

所以得解为：$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$





A) U_C 的曲线　　B) I 的曲线

充电过程的U,I曲线

电容充电过程中的能量关系

$$C:\quad W_C=\frac{1}{2}CU_S^2$$ （充电过程储能不断增加，最后达到该值）

$$R:\ W_R=\int_0^{\infty} i^2R\,dt=\int_0^{\infty}\left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\,dt$$

$$=\frac{U_S^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}CU_S^2$$

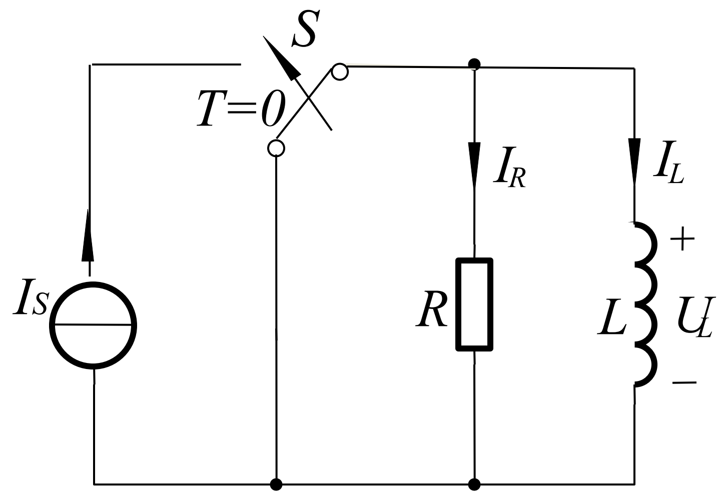
可以看出，不论R、C为何值，在充电过程中，电源所提供的能量一半转换为电容储能，另一半消耗在电阻上

另外，电路理论中将某电路对于单位阶跃输入时的零状态响应称为该电路的阶跃响应.

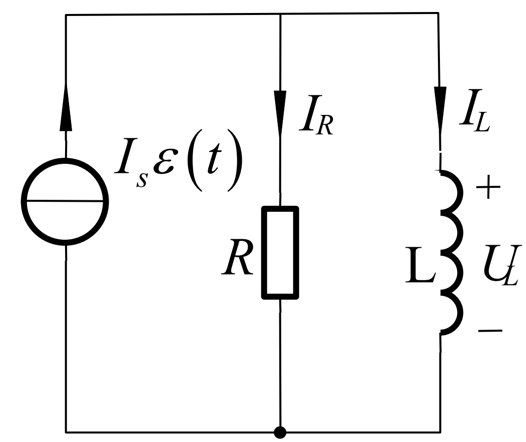
上述RC串联电路在电压源输入时的阶跃响应为

$$u_C=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\qquad\qquad i=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

2. RL并联电路



A) RL并联电路接至恒定电流源电路



B) 等效电路

$I_L(0-)=0,t=0$时S断开,电路接入I_S (相当于阶跃电流源,即$I_S=I_S\varepsilon(t)$),

由KCL,有　　$I_R+I_L=I_S$

$$i_R = \frac{u_L}{R} = \frac{1}{R} L \frac{di_L}{dt}$$

得　　$$\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$

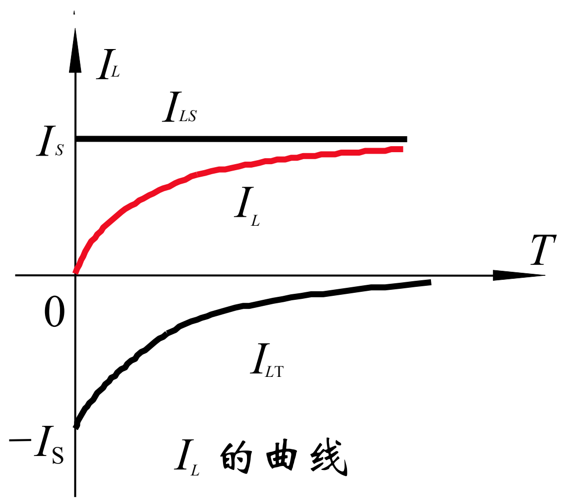
初始条件为 $I_L(0_+)=I_L(0-)=0$

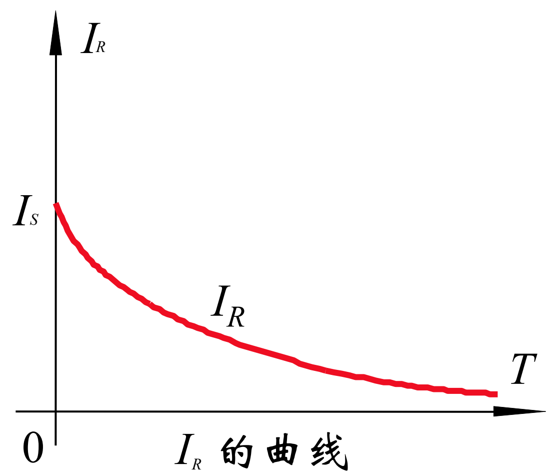
$$i_L = i_{LS} + i_{Lt}$$

由起始条件，$I_L(0_+)=I_S+A=0$，可知$A=-IS$,可得

$$i_L = I_S - I_S e^{\frac{-Rt}{L}} = I_S(1-e^{\frac{-Rt}{L}})$$

$$i_R = \frac{1}{R} L \frac{di_L}{dt} = I_S e^{\frac{-Rt}{L}}$$



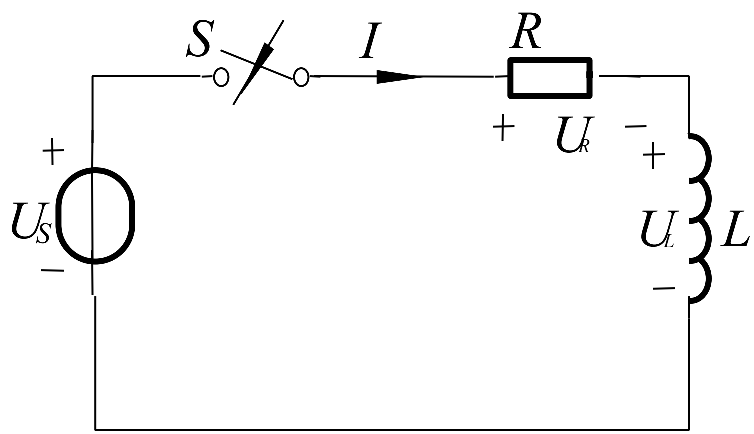


并联电路在电流源输入时的阶跃响应为:

$$i_L = (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})\varepsilon(t)$$

$$i_R = e^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$

3. RL串联电路



RL串联电路接入直流电压源

$I_L(0-)=0, t=0$时,S合上,接入U_S

由KVL可得微分方程

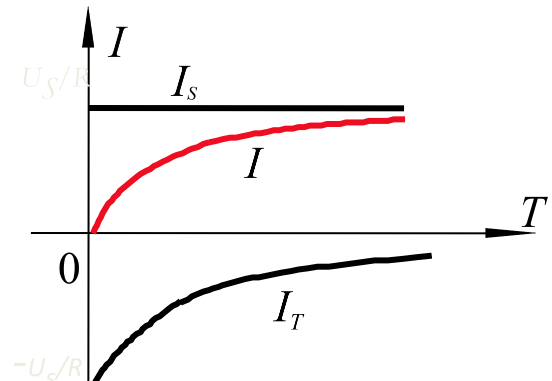
$$L\frac{di}{dt} + Ri = U_S$$

初始条件为 $I(0_+)=I(0-)=0$

则微分方程的解为：$i=i_S+i_t=\dfrac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{Rt}{L}}$

由于 $i(0_+)=\dfrac{U_S}{R}+A=0$

$\therefore \quad A=-\dfrac{U_S}{R}$

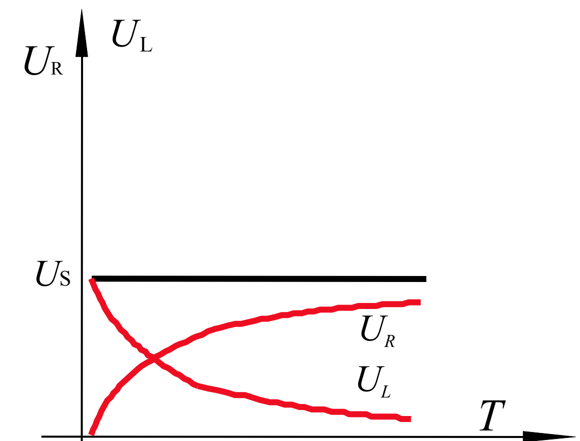


I 的曲线

可得解为 $i=\dfrac{U_S}{R}-\dfrac{U_S}{R}e^{-\frac{Rt}{L}}=\dfrac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$

则 $u_R=Ri=U_S(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=U_Se^{-\frac{Rt}{L}}$$



U_R和U_L的曲线

作业：

4-5

4-6

3-32

4-2-2