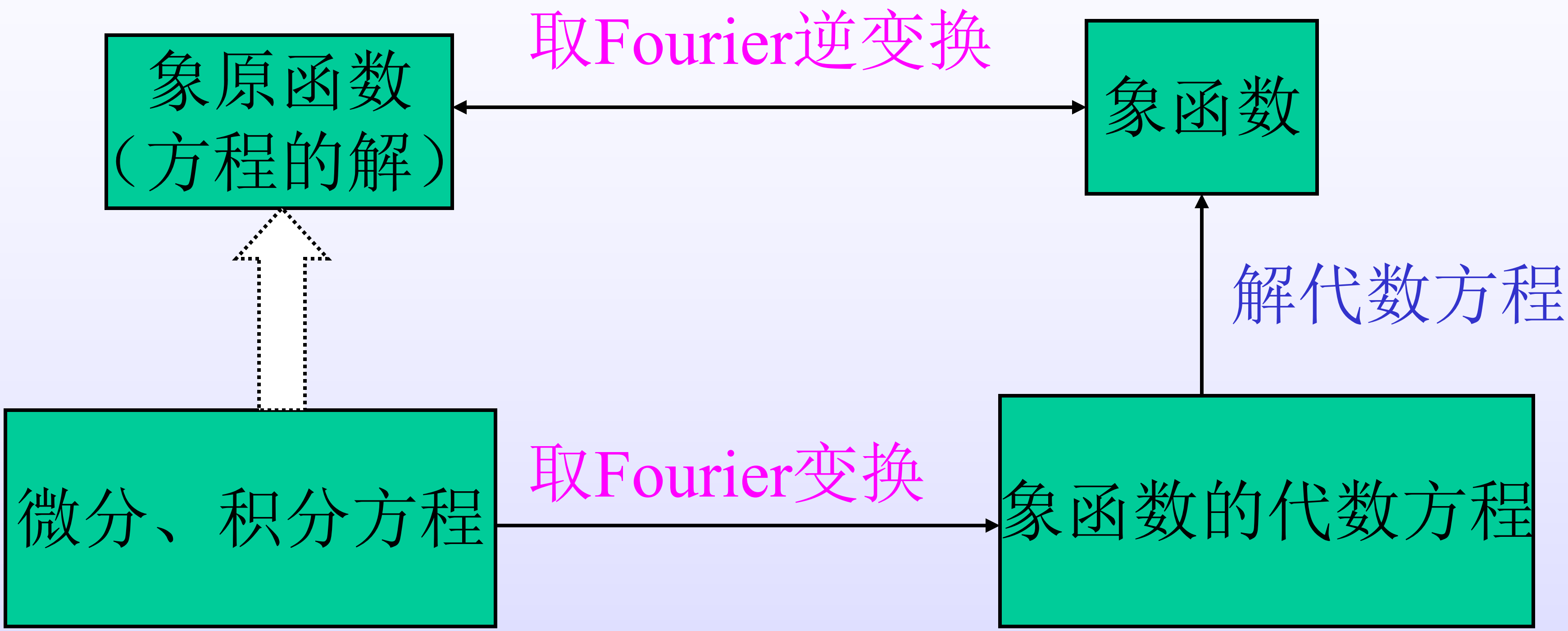
第四节 Fourier变换的应用

- 一、微分方程、积分方程的Fourier变换解法
- 二、在电路方面的应用
- 三、在通信方面的应用
- 四、信号处理及图像处理中的应用
- 五、 快速傅立叶变换
- 六、小结与思考

一、微分、积分方程的Fourier变换解法



例1 若$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 证明

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

证　由前面介绍的积分性质知, 当$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$满足*Fourier*积分定理的条件时, 有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

当$g(t)$为一般情况时, 可以将$g(t)$表示为$f(t)$与$u(t)$的卷积, 即

$$g(t) = f(t) * u(t).$$

这是因为

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用卷积定理

$$\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[u(t)]$$

$$= F(\omega) \cdot [\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

说明：当 $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ 的条件不满足时，它的 *Fourier* 变换就包括一个脉冲函数，即

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

特别，当 $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ 时，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

时，由于 $f(t)$ 是绝对可积的，所以

$$F(0)=\lim_{\omega\to 0}F(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\omega\to 0}[f(t)e^{-i\omega t}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此可见，当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$时，就有 $F(0)=0$，从而与前面的古典意义下的积分性质相一致.

例2 求积分方程 $f(t)=\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$的解 $g(\omega)$, 其中

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & 0<t\le\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}.$$

解　因为积分方程可以改写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} g(\omega)\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}f(t),$$

由正弦逆变换公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

知 $\frac{2}{\pi}f(t)$为$g(\omega)$的 *Fourier* 正弦逆变换，所以

$$g(\omega)=\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{\pi}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sin t\sin\omega t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(1-\omega)t-\cos(1+\omega)t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

例3 求解积分方程

$$g(t) = h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau,$$

其中 $h(t), f(t)$为已知函数，且$g(t), h(t)$和$f(t)$的*Fourier*变换都存在．

解 设$\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$, $\mathcal{F}[h(t)] = H(\omega)$和$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega$

由卷积定义，积分方程右端第二项

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau = f(t) * g(t).$$

因此,对上述积分方程两端取Fourier变换,由卷积定理有

$$G(\omega)=H(\omega)+F(\omega)\cdot G(\omega),$$

所以

$$G(\omega)=\frac{H(\omega)}{1-F(\omega)}.$$

由Fourier逆变换,可得积分方程的解

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(\omega)}{1-F(\omega)}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

例4 求常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)-y(t)=-f(t)$$

的解，其中 $f(t)$为已知函数 .

设$\mathcal{F}[y(t)]=Y(\omega)$,$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$.

解 利用Fourier变换的线性性质和微分性质，对上述微分方程两端取Fourier变换得

$$(i\omega)^2Y(\omega)-Y(\omega)=-F(\omega),$$

所以 $Y(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}F(\omega)$.

从而

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+\omega^2}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

又$\frac{1}{2}e^{-|t|}$与$\frac{1}{1+\omega^2}$构成一个*Fourier*变换对,因此,

由卷积定理可得

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)*f(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-|t-\tau|}\mathrm{d}\tau.$$

例5 求解微分积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t=h(t)$$

的解，其中 $-\infty<t<+\infty,a,b,c$均为常数 .

解 利用Fourier变换的线性性质、微分性质和积分性质，

且设$\mathcal{F}[x(t)]=X(\omega)$,$\mathcal{F}[h(t)]=H(\omega)$.

对上述微分方程两端取Fourier变换得

$$ai\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega)=H(\omega),$$

$$X(\omega)=\frac{H(\omega)}{b+i(a\omega-\frac{c}{\omega})}.$$

而上式的Fourier逆变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(\omega)}{b+i(a\omega-\frac{c}{\omega})}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

二、傅立叶变换在电路方面的应用

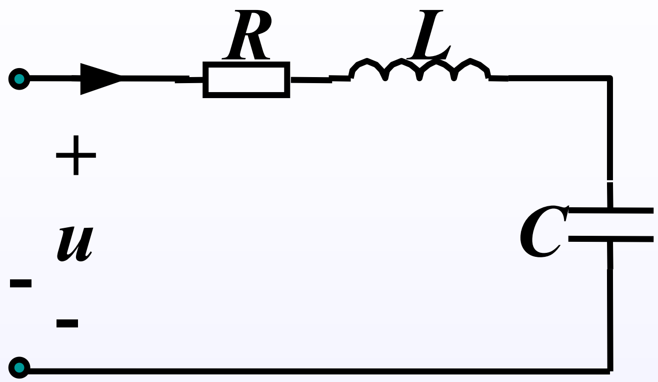


图1

对于如图3.1所示的 RLC 串联电路，由

$$u = Ri_*, i_* = C\frac{du}{dt}, u = L\frac{di_*}{dt}, \quad (3.1)$$

这里用 i_* 表示电流，用 U、I 分别表示电压 u、电流 i_* 的傅立叶变换，则由傅立叶变换的微分性质，有

$$U = RI，\ I = iC\omega U，\ U = iL\omega I \quad (3.2)$$

可得到复阻抗

$$Z=\frac{U}{I}=\begin{cases} Z_R=R，\text{对电阻}R, \\ Z_C=1/iC\omega，\text{对电容}C, \\ Z_L=iL\omega，\text{对电感}L, \end{cases}\text{（3.3）}$$

对于串联电路，因为

$$U=U_1+U_2=Z_1I+Z_2I=(Z_1+Z_2)I=ZI,\text{（3.4）}$$

则 $Z=Z_1+Z_2$ 是此电路的等效复阻抗。

对于并联电路，因为

$$I=I_1+I_2=\frac{U_1}{Z_1}+\frac{U_2}{Z_2}=(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2})U=\frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2}U=\frac{U}{Z}$$

（3.5）

而 $Z=\dfrac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$ 是此电路的等效复阻抗。

以上复阻抗与使用复数欧姆定律求得的是相同的。

对于图3.1所示的*RLC*串联电路，其总复阻抗为

$$Z=Z_R+Z_L+Z_C=R+iL\omega+\frac{1}{iC\omega}=R+i(L\omega-\frac{1}{C\omega})$$

以 $U_{入}$、$U_{出}$ 分别表示输入电压 $u_{入}(t)$、输出电压 $u_{出}(t)$ 的傅立叶变换，则

$$U_{入}=ZI=[R+i(L\omega-\frac{1}{C\omega})]I,\quad U_{出}=Z_C I=\frac{1}{iC\omega}I$$

因而得RLC串联电路的频率特性

$$\frac{U_{出}}{U_{入}}=\frac{Z_C I}{ZI}=\frac{Z_C}{Z}=\frac{1}{1-LC\omega^2+iRC\omega} \qquad (3.7)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}}e^{-i\varphi},$$

其中

$$\varphi=arctg\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}+\begin{cases}0, & 当1-LC\omega^2\geq 0,\\ \pi, & 当1-LC\omega^2<0,\end{cases}$$

此外，从上述RLC串联电路的频率特性还可列出描述电路的微分方程，因为由（3.7），可得

$$(1 - LC\omega^2 + iRC\omega)U_{出} = U_{入}$$

即

$$-LC\omega^2 U_{出} + iRC\omega U_{出} + U_{出} = U_{入}$$

所以输出复电压$U_{出}$ 满足复形式的微分方程

$$LCU''_{出} + RCU'_{出} + U_{出} = U_{入}$$

将上式两边取实部，便得输出电压$u_{出}$ 所满足的微分方程

$$LCu''_{出} + RCu'_{出} + u_{出} = u_{入} = u_0 \cos\omega t$$

三、傅立叶变换在通讯方面的应用

下面介绍傅立叶变换在无线电通讯中的某些应用。近代通讯中，一种传递信号的重要方式是借助于高频电磁波在空间中进行传播，如短波无线电话就是这样，其中还要用到连续信号或脉冲的调制和调解，而在数学理论上则要使用傅立叶分析的方法。脉冲调制是用需要传输的消息信号去调制一串矩形脉冲的某些参量（如幅值、相位等）随消息信号的强弱而变化，以下，我们只讨论脉冲调幅。

今考虑幅度为1,宽度为 τ, 周期为T的矩形脉冲，作为取样脉冲，即

$$u(t+nT)=u(t)=\begin{cases}1, |t|<\dfrac{\tau}{2}, \\ 0, \dfrac{\tau}{2}<|t|<\dfrac{T}{2},\end{cases} \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

则可求得其傅立叶级数为

$$u(t)=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\Omega\tau}{2}}{\dfrac{n\Omega\tau}{2}}e^{in\Omega t} \quad （3.30），$$

其中 $\Omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{1/2B}=4\pi B$ 为重复圆频率。

以$f(t)$表示调制信号，调制过程实际上就是$f(t)$与$u(t)$相乘的过程，即

$$f(t)u(t)=\begin{cases}0, & 当u(t)=0,\\ f(t), & 当u(t)=1,\end{cases}$$

设$f(t)$的频谱函数

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\begin{cases}\neq 0, & 当|\omega|<\omega_1=2\pi f_1,\\ =0, & 当|\omega|>\omega_1,\end{cases}$$

这里 $\omega_1(=2\pi f_1)$，$-\omega_1$ 是上边频与下边频。

由（3.30），有

$$f(t)u(t)=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}f(t)e^{in\Omega t}$$

其频谱函数为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)u(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i(n\Omega-\omega)t}dt$$

$$=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}F(\omega-n\Omega),$$

当n=0时，其频谱函数为$\frac{\tau}{T}F(\omega)$, 与$f(t)$的频谱函数只差一个常数$\frac{\tau}{T}$倍，当n=1时，其频谱函数为

$$\frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}F(\omega-\Omega),$$

相当于将$f(t)$的频谱函数乘以常数因子$\frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$，并在频率轴上向右移动$\Omega$.

对n的其余情形可类似讨论。只要 $\Omega > 2\omega_1$,

则各块频谱图不会重迭。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

如果将已调幅的脉冲通过频率函数近似于

当 $|\omega| > \omega_1$，　　$H(\omega) = 0$,

当 $|\omega| \le \omega_1 = 2\pi f_1$，$H(\omega) = 1$,

的低通滤波器，由于 ω_1，$-\omega_1$ 恰为调制信号 $f(t)$ 的上边频与下边频，所以只要 $\Omega > 2\omega_1 = 4\pi f_1$，则已调幅的脉冲通过此滤波器后再放大 $\dfrac{T}{\tau}$ 倍，就还原为调制信号。

四、离散傅立叶变换在信号处理及图像处理中的应用

时间函数 $\Longleftrightarrow$ 频率函数

连续时间、连续频率—傅里叶变换

连续时间、离散频率—傅里叶级数

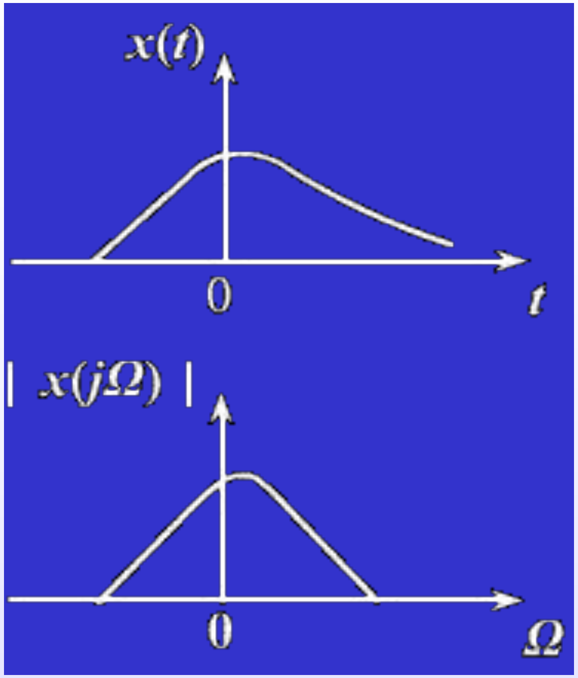
离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

离散时间、离散频率—离散傅里叶变换

连续时间、连续频率—傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$



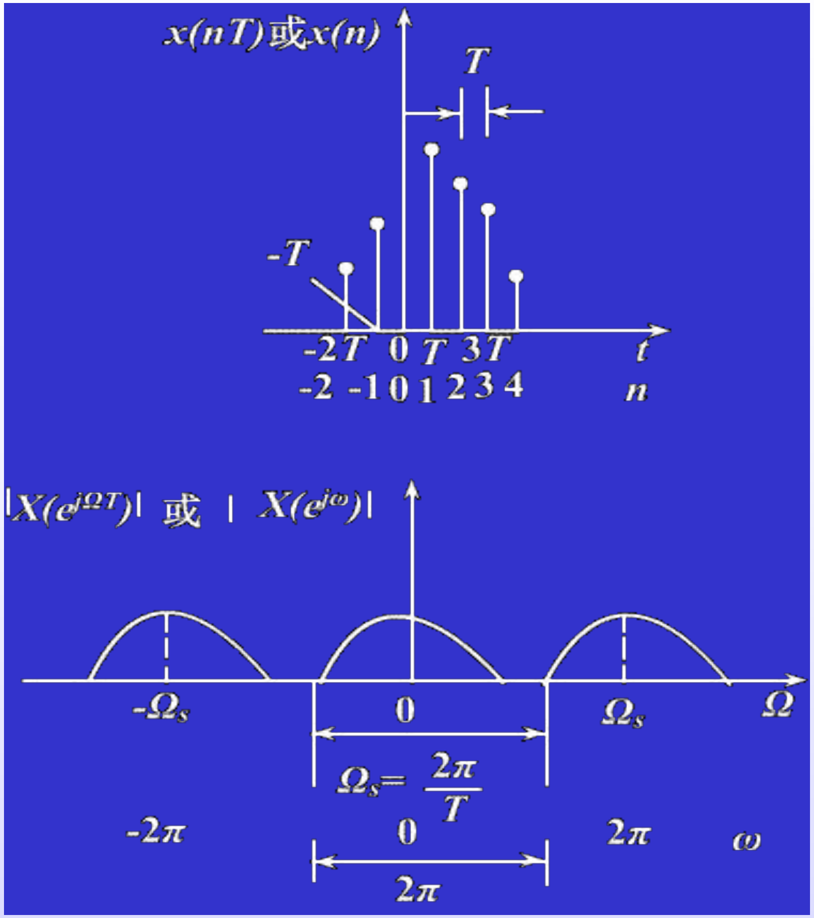
时域连续函数造成频域是非周期的谱，

而时域的非周期造成频域是连续的谱密度函数。

离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$



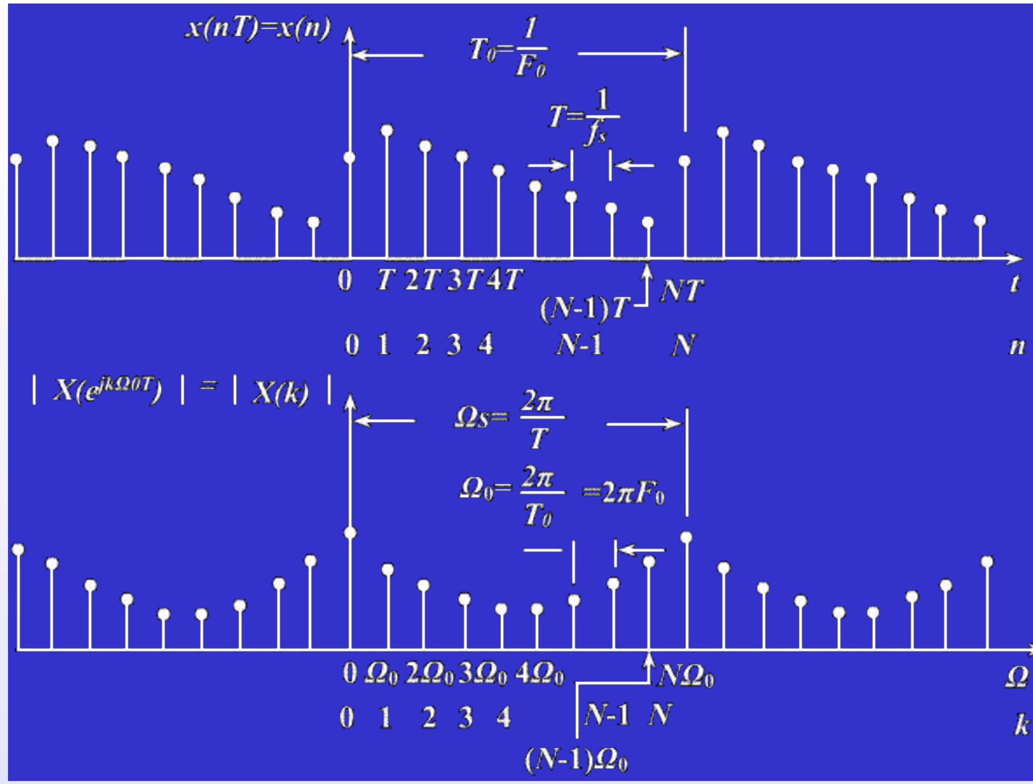
时域的离散化造成频域的周期延拓，而时域的非周期对应于频域的连续

机动 目录 上页 下页 返回 结束

离散时间、离散频率—离散傅里叶变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$



一个域的离散造成另一个域的周期延拓，因此离散傅里叶变换的时域和频域都是离散的和周期的

四种傅里叶变换形式的归纳

	时间函数	频率函数
傅里叶变换	**连续和非周期**	**非周期和连续**
傅里叶级数	**连续和周期(T_0)**	**非周期和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)**
序列的傅里叶变换	**离散(T)和非周期**	**周期($\Omega s=2\pi/T$)和连续**
离散傅里叶变换	**离散(T)和周期(T_0)**	**周期($\Omega s=2\pi/T$)和离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)**

(DFS：离散傅里叶级数，DTFT：序列的傅里叶变换，DFT：离散傅里叶变换）

在人们刚开始利用无线电技术传输信号时，是将连续信号进行某种调制处理后直接传送的，本质上传送的还是连续信号（也叫模拟信号）。这样的传输方式抗干扰能力差，失真严重，尤其经过长距离传送或多级传递后，信号可能面目全非，质量自然难尽人。

以后发展了离散的传输方法，它不是传送连续信号本身，而是每隔一段时间 Δt，从信号中提取一个数值脉冲（称为数值抽样），将连续信号转化成数据序列 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$，再经过编码后发送。

只要抽取的时间间隔足够小，这列数据就能很好地反映原信号，接收方通过逆向处理，可以复原出所传递的信号。这种方法称为数字信号传输，具有抗干扰能力强、信号还原质量高、易于加密和解密等优点，问世后便受到广泛的重视，至今方兴未艾。

为了保证接收的质量，Δt 必须取的很小，即N非常之大。

因此，直接发送这列数据将会长时间地占用传输设备和线路，这不但需要支付昂贵的费用，在紧急时甚至会误事。

所以，在抽样之后需要对数据序列 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$,

进行简化和压缩，但由于序列中数据大小是散乱的，因此一方面我们不能随意舍弃某些数据，另一方面压缩的效果也比较差。

后来经过研究发现，若对数据序列

$$x(0), x(1), \cdots, x(N-1),$$

施以如下的离散傅立叶变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j\frac{nk}{N}} \left(k=0,1,2,\cdots,\ N-1,\ j=\sqrt{-1}\right)$$

就可以有效地解决上面的问题。

利用正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i\frac{nj}{N}} e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,\ k}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$

可以导出离散傅立叶逆变换

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)e^{2\pi i\frac{jk}{N}}(k=0,1,2,\cdots,\ \ N-1)$$

这是因为

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)e^{2\pi i\frac{jk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}]$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\delta_{n,\ \ k}=x(k)。$$

也就是说，若发送方将 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$ 做了离散傅立叶变换后传输出去，接受方可以对接收到的数据进行离散傅立叶逆变换，再现原始信号。

离散傅立叶变换优点：

1. 传输过程的抗干扰能力进一步提高。

从变换公式容易看出，变换后的序列中的每个$X(j)$都包含了原序列中所有信号的信息。因此，即使丢失了某些$X(j)$，仍可望由其余数据基本正确地还原出原始数据。

2. 使需传输的序列大为缩短。

剔除某些其模较小的数据（通常这类数据数量很大）

3. 易于作高效的压缩处理。

$X(0), X(1), \cdots, X(N-1)$ 的排列将很有规律，模较大的数据往往集中在序列中一两个较窄的范围内。

长度为N的有限长序列$x(n)$

周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$ $\tilde{x}(n)$的主值序列

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)=x((n))_N$$ $x(n)$的周期延拓

同样：X(k)也是一个N点的有限长序列

$$\tilde{X}(k)=X((k))_N$$

$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

有限长序列的DFT正变换和反变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\quad 0\le n\le N-1$$

或 $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

例　求有限长序列 $x(n)=\begin{cases} a^n, 0\le n\le N-1 \\ 0,\ \text{其他} \end{cases}$ 的DFT.

其中　$a=0.8,\quad N=8$

解

$$X(k)=DFT(x(n))=\sum_{n=0}^{N-1}a^nW_N^{kn}=\sum_{n=0}^{7}(ae^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n=\frac{1-a^8}{1-ae^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$0\le k\le 7.$

$x(0)=4.16114$

$x(1)=0.71063-j0.92558$　　$x(2)=0.50746-j0.40597$

$x(3)=0.47017-j0.16987$　　$x(4)=0.46235$

$x(5)=0.47017+j0.16987$　　$x(6)=0.50746+j0.40597$

$x(7)=0.71063+j0.92558$

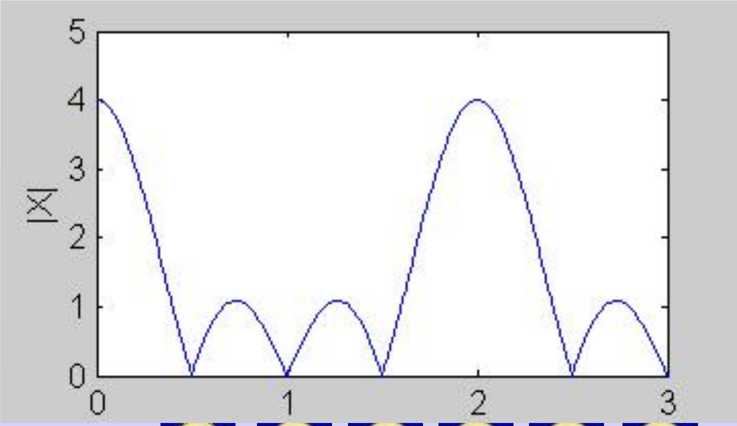
例：已知序列$x(n)=R_4(n)$,求$x(n)$的8点和16点DFT。

解：求$x(n)$的DTFT

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

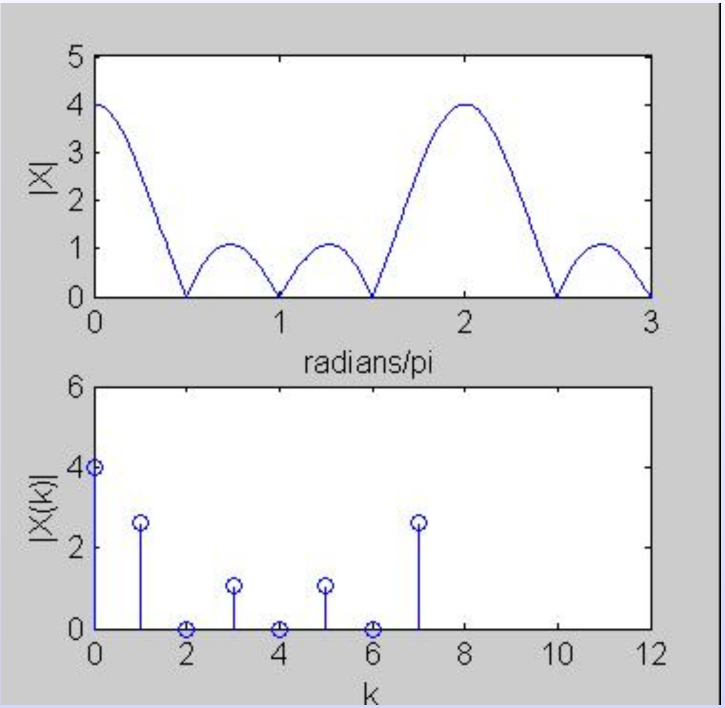


求$x(n)$的8点$DFT \quad N=8$

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}k}\,\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$



五、 快速傅立叶变换

尽管早就发现离散傅立叶变换有如此诱人的好处，但在一个相当长的时期中，人们还只基本上限于纸上谈兵。这是因为做一次变换需要进行 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法，而实际使用中的 N 总是极为巨大的，相应的高昂代价令人望而却步。

20世纪60年代中期， Cooley和Tukey发现了计算离散傅立叶变换的高效（同时又特别适合于计算机硬件操作）的方法 —— 快速傅立叶变换（简称FFT—Fast Fourier Transform）之后，它才真正获得了生命力。

直接计算DFT的特点及减少运算量的基本途径

长度为N的有限长序列$x(n)$的DFT为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, k=0,1,\cdots,N-1$$

考虑$x(n)$为复数序列的一般情况，对某一个k值，直接按上式计算$X(k)$值需要N次复数乘法、$(N-1)$次复数加法。

如前所述，N点DFT的复乘次数等于N^2。显然，把N点DFT分解为几个较短的DFT，可使乘法次数大大减少。另外，旋转因子$W^m{}_N$具有明显的周期性和对称性。其周期性表现为

$$W_N^{m+lN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(m+lN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}m} = W_N^m \qquad (4.2.2)$$

其对称性表现为

$$W_N^{-m} = W_N^{N-m} \quad \text{或者} \quad [W_N^{N-m}]^* = W_N^m$$

$$W_N^{m+\frac{N}{2}} = -W_N^m$$

时域抽取法基2FFT基本原理

FFT算法基本上分为两大类：时域抽取法FFT(Decimation In Time FFT,简称DIT-FFT)和频域抽取法FFT(Decimation In Frequency FFT,简称DIF—FFT)。下面先介绍DIT—FFT算法。

设序列$x(n)$的长度为N，且满足

$$N = 2^M, \quad M \text{ 为自然数}$$

按n的奇偶把$x(n)$分解为两个N/2点的子序列

$$x_1(r) = x(2r), \qquad r = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

$$x_2(r) = x(2r+1), \quad r = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

则$x(n)$的DFT为

$$X(k)=\sum_{n=} x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=} x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2kr}+\sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}$$

$$=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_N^{2kr}+\sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_N^{2kr}$$

由于

$$W_N^{2kr}=e^{-j\frac{2\pi}{N}2kr}=e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}kr}=W_{N/2}^{kr}$$

所以

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr}=X_1(k)+W_N^kX_2(k)$$

其中$X_1(k)$和$X_2(k)$分别为$x_1(r)$和$x_2(r)$的N/2点DFT，即

$$X_1(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_1(r)W_{N/2}^{kr}=DFT[x_1(r)] \qquad (4.2.5)$$

$$X_2(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1} x_2(r)W_{N/2}^{kr}=DFT[x_2(r)] \qquad (4.2.6)$$

由于$X_1(k)$和$X_2(k)$均以$N/2$为周期，且

$W_N^{k+\frac{N}{2}}=-W_N^k$，所以$X(k)$又可表示为

$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k) \quad k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1 \qquad (4.2.7)$$

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k) \quad k=0,1,\cdots\frac{N}{2}-1 \qquad (4.2.8)$$

与第一次分解相同，将$x1(r)$按奇偶分解成两个$N/4$长的子序列$x_3(l)$和$x_4(l)$，即

$$\left.\begin{aligned} x_3(l) &= x_2(2l) \\ x_4(l) &= x_1(2l+1) \end{aligned}\right\}, l = 0,1,\cdots,\frac{N}{4}-1$$

那么，$X_1(k)$又可表示为

$$X_1(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2l)W_{N/2}^{2kl} + \sum_{i=0}^{N/4-1} x_1(2l+1)W_{N/2}^{k(2l+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^{N/4-1} x_3(l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^{k} \sum_{i=0}^{N/4-1} x_4(l)W_{N/4}^{kl}$$

$$= x_3(k) + W_{N/2}^{k} X_4(k), k = 0,1,\cdots N/2-1 \qquad (4.2.9)$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

式中 $$x_3(k)=\sum_{i=0}^{N/4-1} x_3(l)W_{N/4}^{kl}=DFT[x_3(l)]$$

$$x_4(k)=\sum_{i=0}^{N/4-1} x_4(l)W_{N/4}^{kl}=DFT[x_4(l)]$$

同理，由X_3(k)和X_4(k)的周期性和$W^m{}_{N/2}$的对称性 $W^{k+N/4}{}_{N/2}=-W^k{}_{N/2}$ 最后得到：

$$\left.\begin{aligned} X_1(k)&=X_3(k)+W_{N/2}^{k}X_4(k)\\ X_1(k+N/4)&=X_3(k)-W_{N/2}^{k}X_4(k)\end{aligned}\right\},k=0,1,\cdots,N/4-1 \qquad (4.2.10)$$

用同样的方法可计算出

$$\left.\begin{aligned} X_2(k) &= X_5(k) + W_{N/2}^{k} X_6(k) \\ X_2(k+N/4) &= X_5 k - W_{N/2}^{k} X_6(k) \end{aligned}\right\}, k = 0,1,\cdots N/4-1 \qquad (4.2.11)$$

其中

$$X_5(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_5(l) W_{N/4}^{kl} = DFT[x_5(l)]$$

$$X_6(k) = \sum_{i=0}^{N/4-1} x_6(l) W_{N/4}^{kl} = DFT[x_6(l)]$$

$$\left.\begin{aligned} x_5(l) &= x_2(2l) \\ x_6(l) &= x_2(2l+1) \end{aligned}\right\}, l = 0,1,\cdots N/4-1$$

DIT—FFT算法与直接计算DFT运算量的比较

每一级运算都需要N/2次复数乘和N次复数加)。所以，M级运算总共需要的复数乘次数为

$$C_M(2)=\frac{N}{2}\cdot M=\frac{N}{2}\log_2 N$$

复数加次数为

$$C_A(2)=N\cdot M=N\log_2 N$$

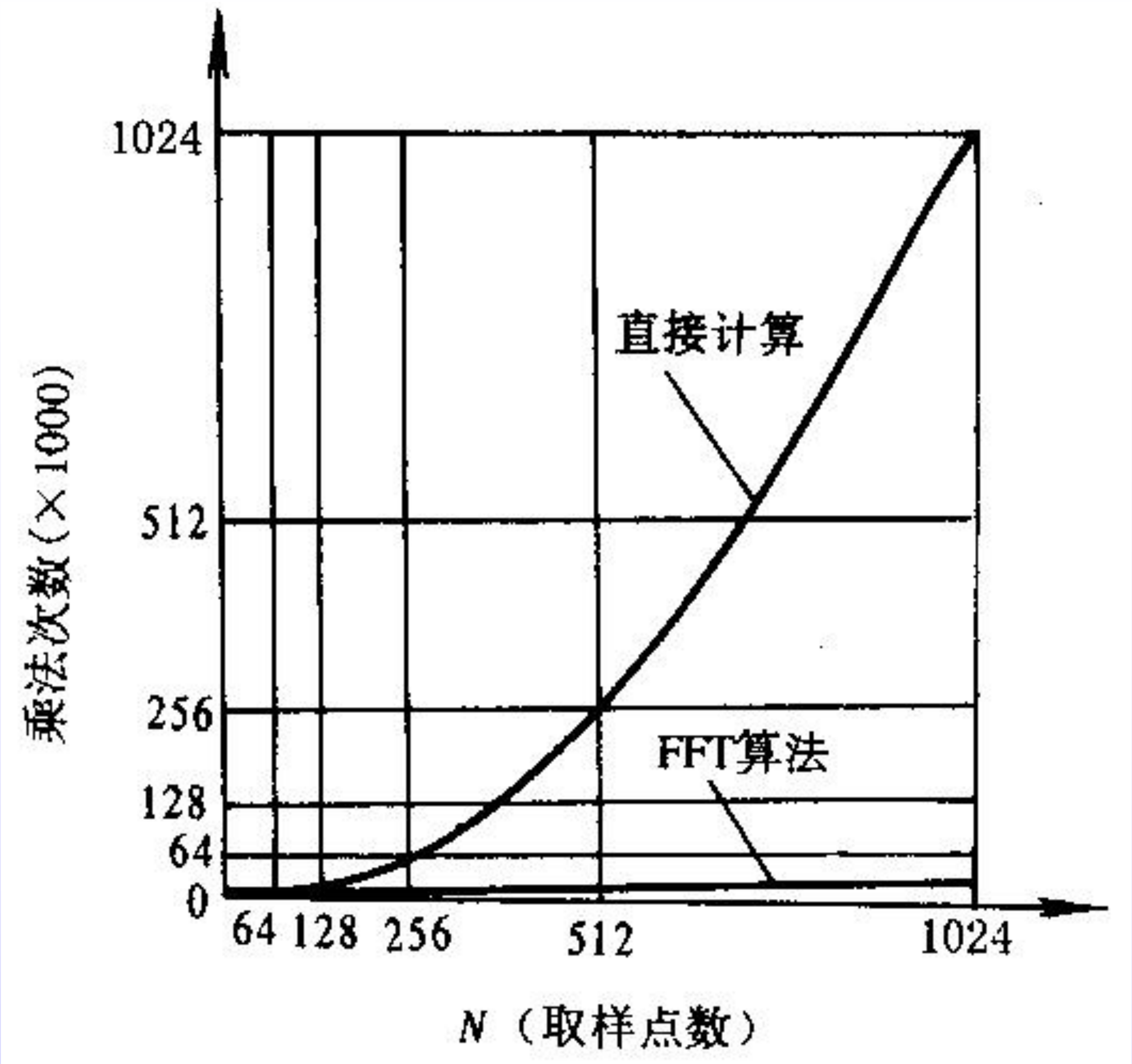


图4.2.5 FFT算法与直接计算DFT所需乘法次数的比较曲线

频域抽取法FFT(DIF—FFT)

在基2快速算法中，频域抽取法FFT也是一种常用的快速算法，简称DIF—FFT。

设序列x(n)长度为$N=2^M$，首先将x(n)前后对半分开，得到两个子序列，其DFT可表示为如下形式：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{k(n+N/2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+W_N^{kN/2}x(n+\frac{N}{2})]W_N^{kn}$$

$$W_N^{kN/2}=(-1)^k=\begin{cases}1, & k= \text{偶数}\\ -1 & k= \text{奇数}\end{cases}$$

将X(k)分解成偶数组与奇数组，当k取偶数

(k=2r,r=0,1,…,N/2-1)时

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})]W_N^{2rn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})]W_{N/2}^{2rn} \qquad (4.2.14)$$

当k取奇数(k=2r+1,r=0,1,...,N/2-1)时

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})]W_N^{n(2r+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})]W_N^{n}\bullet W_{N/2}^{nr} \qquad (4.2.15)$$

将$x_1(n)$和$x_2(n)$分别代入(4.2.14)和(4.2.15)式，可得

$$\begin{cases} X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_1(n)W_{N/2}^{rn} \\ X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_2(n)W_{N/2}^{rn} \end{cases} \qquad (4.2.16)$$

基于FFT的离散傅立叶变换技术，是当今信息传输、频谱分析、图象处理、数据压缩等领域中最重要的数学工具之一。目前国际上任何一个综合数学软件中，必定含有FFT的计算程序。

设 $N=2m$，将 j 和 n 分别写成

$$j = mj_1 + j_0, \begin{cases} j_0 = 0,1,\cdots, & m-1, \\ j_1 = 0,1 \end{cases}$$

和

$$n = 2n_1 + n_0, \begin{cases} n_0 = 0,1 \\ n_1 = 0,1,\cdots, \quad m-1, \end{cases}$$

记 $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$， 则

$$W_N^2 = e^{-\frac{2\pi i}{m}} = W_m, W_N^m = e^{-\pi i} = -1, W_N^{2m} = W_N^N = 1.$$

而

$$e^{-2\pi i\frac{ni}{N}} = (W_N)^{nj} = (W_N)^{(2n_1+n_0)(mj_1+j_0)}$$

$$= (W_N)^{2mn_1j_1}(W_N)^{mn_0j_1}(W_N)^{2n_1j_0}(W_N)^{n_0j_0}$$

$$= (-1)^{n_0j_1} \cdot (W_m)^{n_1j_0} \cdot (W_N)^{n_0j_0}。$$

将上式代入离散傅立叶变换公式，并记$X(j)$为$X(j_1, j_0)$.

$$X(j) = X(j_1,\ j_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{ni}{N}}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{m-1} \sum_{n_0=0}^{1} x(2n_1 + n_0)(-1)^{n_0 j_1} \cdot (W_m)^{n_1 j_0} \cdot (W_N)^{n_0 j_0}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{1} (-1)^{n_0 j_1} [(W_N)^{n_0 j_0} \sum_{n_1=0}^{m-1} x(2n_1 + n_0)(W_m)^{n_1 j_0}],$$

将方括号中的部分记为$z(n_0,\ j_0)$，则计算 $X(j)$可分解为两个步骤进行：

$$
\begin{cases}
z(n_0,\ j_0)=(W_N)^{n_0 j_0}\sum\limits_{n_1=0}^{m-1}x(2n_1+n_0)(W_m)^{n_1 j_0} \\
\qquad\qquad (n_0=0,1,\ j_0=0,1,\cdots,\ m-1), \\
X(j_1,\ j_0)=\sum\limits_{n=0}^{1}(-1)^{n_0 j_1}\cdot z(n_0,\ j_0) \\
\qquad\qquad (j_1=0,1,\ j_0=0,1,\cdots,\ m-1)。
\end{cases}
$$

实际处理数据时，因子 $(W_m)^{n_1 j_0}$ 和 $(W_N)^{n_0 j_0}$ 都是事先算好储存在计算机内的。因此，在第一式中，每一个 $z(n_0,\ j_0)$ 需要进行m次复数乘法和$m-1$次复数加法，第二式中，每一个$z(n_0,\ j_0)$ 只需要进行$m-1$次复数加法，

所以总共需要做mN次复数乘法和 $2(m\text{-}1)N$次复数加法。

一式： m次复数乘法和$m-1$次复数加法，

二式： $m-1$次复数加法，

总计： mN次复数乘法和 $2(m\text{-}1)N$次复数加法。

特殊情况：若 $N=2^k$，则$m=2^{k-1}$仍是偶数，因此可对第一式中的

$$\sum_{n_0=0}^{m-1} x(2n_1+n_0)(W_m)^{n_1 j_0}$$

继续进行上述处理，以进一步减少计算量。只需进行

$\dfrac{kN}{2}=\dfrac{1}{2}N\log_2 N$ 次复数乘法和$kN=N\log_2 N$次复数加法。