第五节　高阶导数公式

- 一、高阶导数公式
- 二、柯西不等式与刘维尔定理
- 三、小结与思考

一、高阶导数公式

定理　设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，则$f(z)$ 在D内有各阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=1,2,\cdots)$$

证　先证 $n=1$的情况，即证对 D 内任一点 z, 有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$$

由柯西积分公式得

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{2\pi\Delta z i}\left[\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}\mathrm{d}\zeta-\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right],$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

从而

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$$

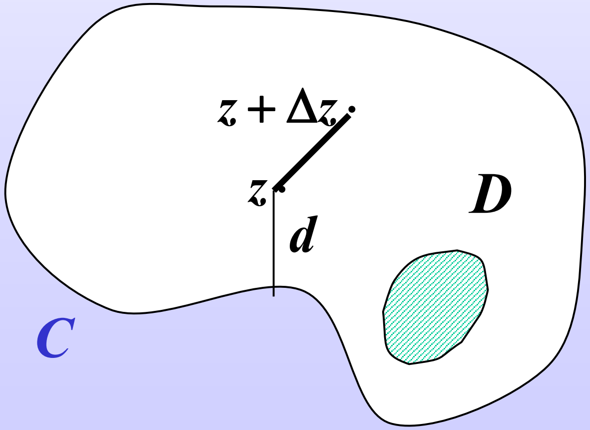
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)^2}\right]\mathrm{d}\zeta$$

由于$f(\zeta)$在$\overline{D}$上连续，所以在$\overline{D}$上有界，即存在正数M，使得$|f(\zeta)|\le M$.　设$d>0$为z到曲线C的距离，

则有$|\zeta-z|\ge d\ (\zeta\in C)$.

取$|\Delta z|$充分小，满足$|\Delta z|<\frac{1}{2}d$，



则有$z+\Delta z\in D$.　从而对于C上任一点ζ，有

$$|\zeta-(z+\Delta z)|=|(\zeta-z)-\Delta z|\geq d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}.$$

所以

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)\Delta z}{(\zeta-(z+\Delta z))(\zeta-z)^2}\right]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}M|\Delta z|\int_C\frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta-(z+\Delta z)||\zeta-z|^2}$$

$$< \frac{1}{2\pi} M |\Delta z| \cdot \frac{2}{d^3} l = \frac{Ml}{\pi d^3} |\Delta z|.$$

所以当$\Delta z \to 0$时，

$$\left| \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta \right| \to 0.$$

即

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \mathrm{d}\zeta.$$

因为 z 为 D 内任一点，所以$n = 1$时，定理成立.

利用数学归纳法可证

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta .$$

推论： 设$f(z)$在复平面上的区域 D 内处处解析， 则 $f(z)$在 D 内具有各阶导数，并且它们也在 D 内解析.

例1 求积分 (1) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4} dz$; (2) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2} dz$.

解 (1) 函数 z^3+1 在复平面内解析,

$z_0 = -1$ 在 $|z| \le 2$ 内, $n = 3$,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3+1}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} [z^3+1]''' \Big|_{z=-1} = 2\pi i;$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$(2)\ \oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z$$

函数 $e^{-z}\cos z$ 在复平面内解析,

$z_0 = 0$ 在 $|z| \le 1$ 内, $n = 1$,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}(e^{-z}\cos z)'\Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i[-e^{-z}\cos z - e^{-z}\sin z]\Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

例2 计算下列积分,其中 C 为正向圆周: $|z| = r > 1$.

(1) $\oint_C \dfrac{\cos z}{(z-i)^3}\mathrm{d}z$; (2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$.

解 (1) 函数 $\dfrac{\cos z}{(z-i)^3}$ 在 C 内 $z=i$ 处不解析,

但 $\cos z$ 在 C 内处处解析,

根据公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

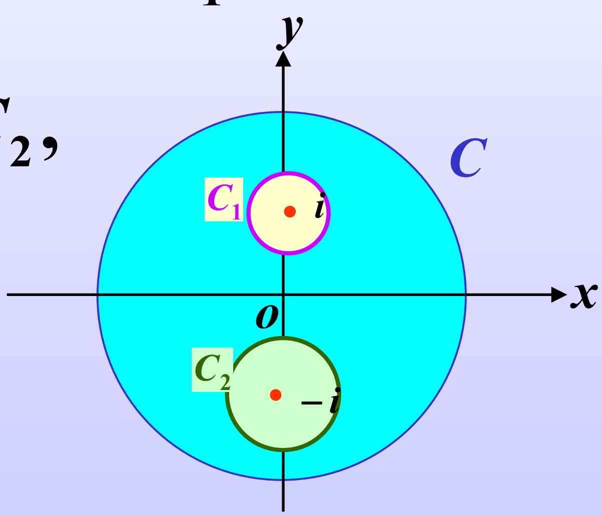
机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(3-1)!}(\cos z)^{(2)}\Big|_{z=i} = -\pi i\,\mathrm{ch}1.$$

(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 C 内的 $z=\pm i$ 处不解析,

在 C 内以 i 为中心作一个正向圆周 C_1,

以 $-i$ 为中心作一个正向圆周 C_2,



则函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 C, C_1, C_2

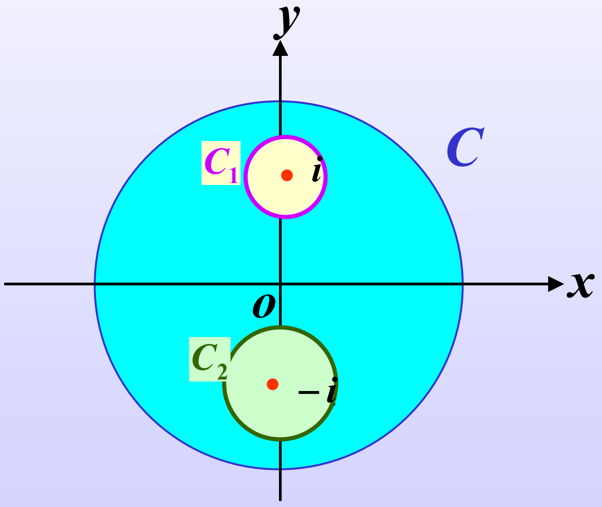
围成的区域内解析,

根据多连通区域的柯西积分定理

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2}\pi,$$



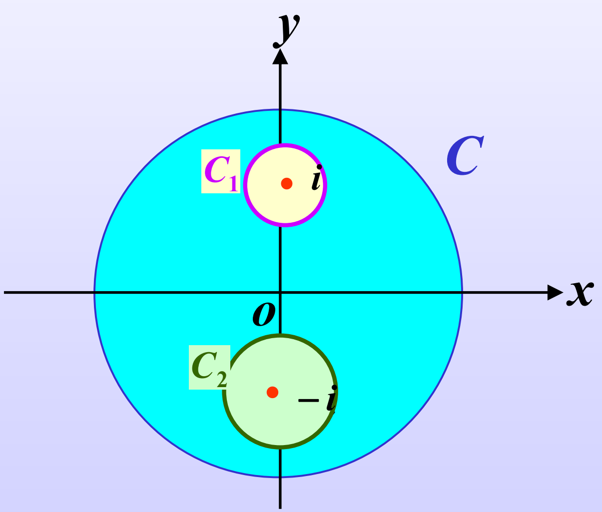
同理可得 $\oint_{C_2} \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \dfrac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi,$

于是 $\oint_{C} \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \dfrac{(1-i)e^{i}}{2}\pi + \dfrac{-(1+i)e^{-i}}{2}\pi$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i} - ie^{-i})$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)^2(\cos 1 - \sin 1)$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$



例3 求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z.$ (n为整数)

解 (1) $n \le 0,$ $\frac{e^z}{z^n}$ 在 $|z| \le 1$ 上解析,

由柯西一古萨基本定理得 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z = 0;$

(2) $n = 1,$ 由柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (e^z)\Big|_{z=0} = 2\pi i;$$

(3) $n>1$,

根据公式 $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^n}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(n-1)!}(e^z)^{(n-1)}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

课堂练习 设 C 是不通过 z_0 的简单闭曲线,

求 $g(z_0)=\oint_C \frac{z^4+z^2}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$

答案 z_0 在 C 外, $g(z_0)=0;$

z_0 在 C 内, $g(z_0)=2(6z_0^2+1)\pi i.$

例4 求积分 $\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z.$

其中C为正向圆周：$|z|=r, r\neq 1,2.$

解 函数 $\frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}$ 有三个奇点 $2, -1$ 和 0,

(1) $0<r<1$时，取 $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$,

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\frac{1}{(z+1)(z-2)}}{z^3}\mathrm{d}z$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+1)(z-2)}\right)''\Big|_{z=0}=-\frac{3}{4}\pi i.$$

(2) $1<r<2$时， 圆$|z|=r$内有$z=0, z=-1$两个奇点，

在 C 内分别以$z=0, z=-1$为心作小圆 C_1和 C_2, 则

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{3}{4}\pi i+2\pi i\frac{1}{z^3(z-2)}\Big|_{z=-1}=-\frac{1}{12}\pi i.$$

(3) $2<r$时，在C内分别以 $z=0, z=-1$以及$z=2$为心，

作小圆C_1，C_2，C_3，则

$$\oint_C \frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{C_1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\mathrm{d}z+\oint_{C_3}\frac{1}{(z-2)(z+1)z^3}\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{1}{12}\pi i+2\pi i\left.\frac{1}{z^3(z+1)}\right|_{z=2}$$

$$=-\frac{1}{12}\pi i+\frac{1}{12}\pi i=0.$$

例5 证明

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

其中C是围绕原点的闭曲线.

证 令$f(\zeta)=\dfrac{z^n e^{z\zeta}}{n!}$，由于$f(\zeta)$在复平面上解析，则

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

而

$$f^{(n)}(0)=\left(\frac{z^{n}e^{z\zeta}}{n!}\right)^{(n)}\bigg|_{\zeta=0}=\frac{(z^{n})^{2}}{n!}.$$

所以

$$\left(\frac{z^{n}}{n!}\right)^{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{z^{n}e^{z\zeta}}{n!\zeta^{n}}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

二、柯西不等式与刘维尔定理

柯西不等式 设 $f(z)$ 在圆 $|z-a|\le R$内解析，且 $|f(z)|\le M(R)$，则有

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\le\frac{n!M(R)}{R^n}.$$

证 由高阶导数公式有

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\int_C\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta|\le\frac{n!M(R)}{2\pi R^{n+1}}\cdot 2\pi R$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

即

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M(R)}{R^n}.$$

刘维尔定理 有界整函数$f(z)$ 必为常数.

整个复平面上解析

证 设$|f(z)|$ 的上界为M …… 复平面上的任意一点,

R为任意正整数, $f(z)$ …… z_0 …… 解析, 则

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R},$$

上式对一切 R 均成立, 让$R \to +\infty$, $f'(z_0) = 0$. 而z_0是复平面上任一点, 故$f(z)$ 在复平面上的导数为 0.

所以$f(z)$ 必为常数.

三、小结与思考

高阶导数公式是复积分的重要公式. 它表明了解析函数的导数仍然是解析函数这一异常重要的结论, 同时表明了解析函数与实变函数的本质区别.

高阶导数公式 $$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

作业：P50 11, 12, 14

思考：用刘维尔定理证明代数学基本定理.

代数学基本定理　在复平面上，非常值n 次多项式

$$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

至少有一个零点.

提示：用反证法，假设 $p(z)$ 在复平面上无零点，

然后证明 $1/p(z)$ 是有界整函数.

证明 $1/p(z)$ 是有界的:

(1) $|z| \le r$，$1/p(z)$连续

(2) $|z| > r$，$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{p(z)} = 0$

又$1/p(z)$无零点，所以在整个复平面上解析，即$1/p(z)$

是有界整函数， 从而使常值函数，矛盾.