第八章 非正弦周期电流电路的分析

基本理论与内容

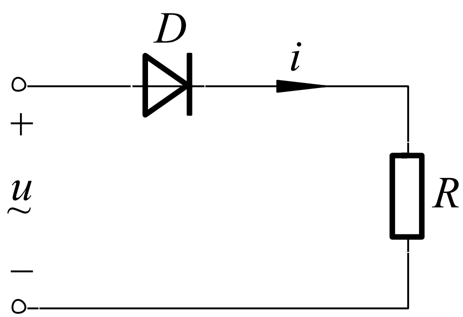
1、非正弦电压和电流
2、谐波的合成和分解
3、线性电路对周期性激励的稳态响应（谐波分析法）
4、非正弦周期电流和电压的有效值以及平均功率

傅里叶（1768～1830）Fourier Jean-BaptisteJoseph，法国数学家。1768年3月21日生于奥塞尔，1817年任科学院院士，1830年5月16日卒于巴黎。他的著作《热的解析理论》已成为数学史上一部经典性的文献。傅里叶的创造性工作为偏微分方程的边值问题提供了基本的求解方法——傅里叶级数法，从而极大地推动了微分方程理论的发展。

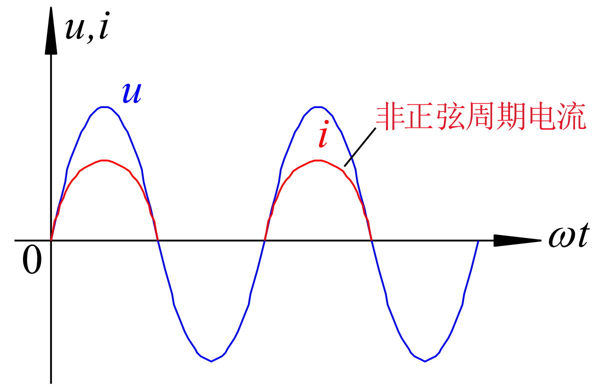
狄利赫里（1805～1859）Dirichlet，Peter Gustav Lejeune德国数学家。1805年2月13日生于迪伦，1822～1826年在巴黎求学，深受J.-B.-J.傅里叶的影响，1859年5月5日卒于格丁根。1829年，发表了代表作“关于三角级数的收敛性”(Sur la convergence des séries trigonométri-ques)。

§ 8-1 非正弦电压和电流

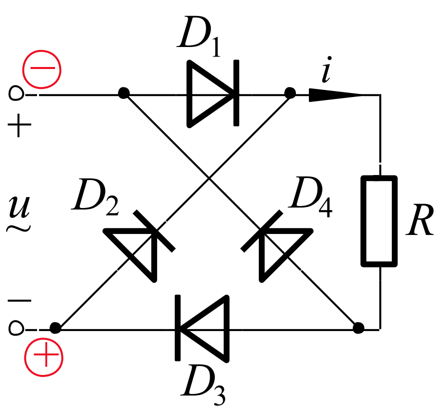
—— 正弦电压、电流以外的，随时间作周期变化的电压和电流



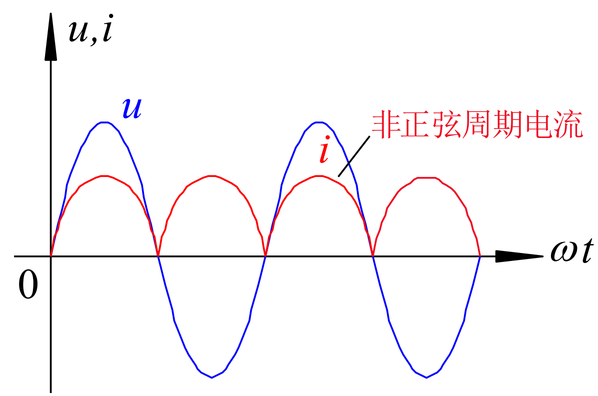
半波整流电路



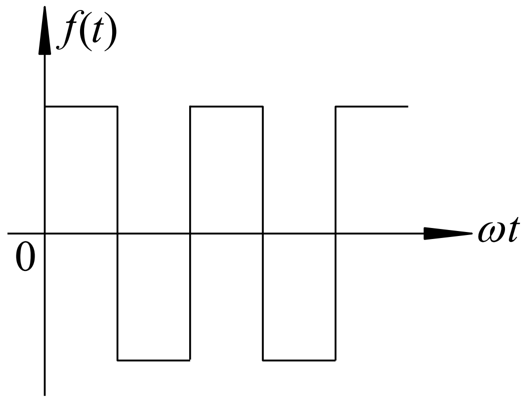
u 为正半周时，D导通，R中有 i 流过；u 为负半周时，D截止，R中无 i 流过



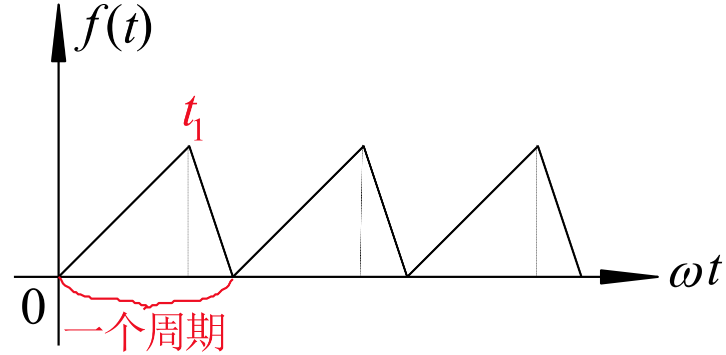
全波整流电路



正半周：D_1、D_3导通；负半周：D_2、D_4导通



方波

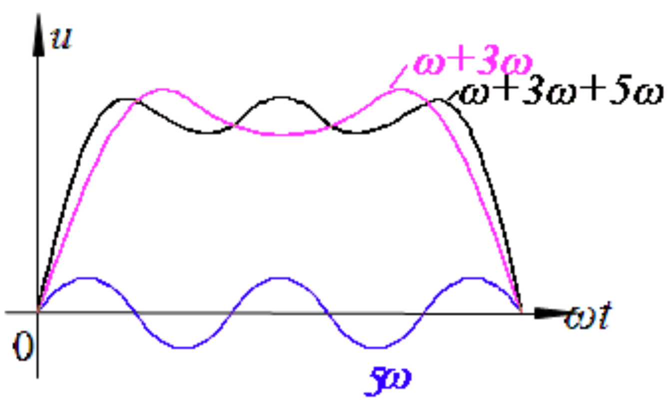


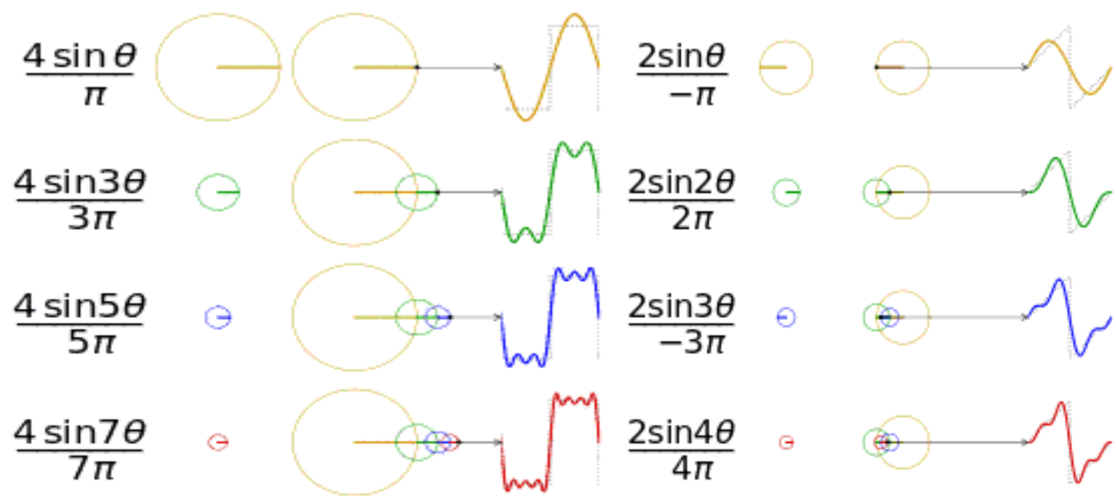
锯齿波

§ 8-2 谐波的合成和分解

1. 谐波的合成

$$u=\underbrace{\sin\omega t}_{\text{基波项}}+\underbrace{\frac{1}{3}\sin 3\omega t}_{\text{3次谐波项}}+\underbrace{\frac{1}{5}\sin 5\omega t}_{\text{5次谐波项}}+\cdots\cdots$$





2. 谐波分解、傅里叶级数

若满足狄利赫里条件（Dirichlet condition）的周期函数$f(t)$ 可以展开成傅里叶级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_{km}\cos k\omega t+\sum_{k=1}^{\infty}B_{km}\sin k\omega t \qquad (1)$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)d(\omega t)$$

$$A_{km}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos k\omega t\cdot dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(k\omega t)d(\omega t)$$

$$B_{km}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin k\omega t\cdot dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(k\omega t)d(\omega t)$$

若将 (1) 式中相同角频率的正弦项和余弦项合并，则 $f(t)$ 的傅里叶级数还可以写成：

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_{km}\sin(k\omega t+\varphi_k)$$

$$\varphi_k=arctg\frac{B_{km}}{A_{km}} \qquad C_{km}=\sqrt{A_{km}^2+B_{km}^2}$$

A_0 — 直流分量

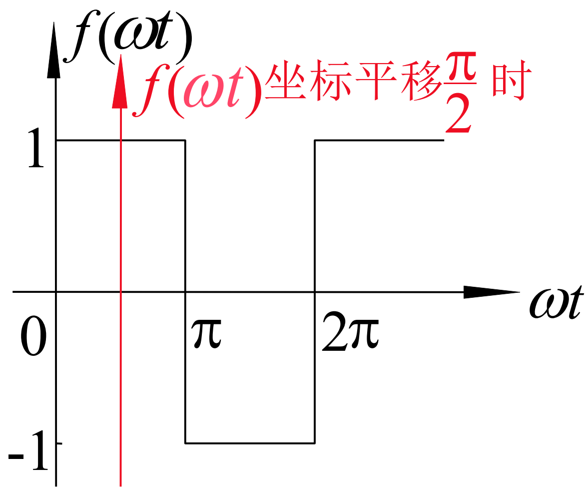
ω — 基波频率

$k\omega$ — 谐波频率

$k=1、3、5\cdots\cdots$ 为奇次谐波

$k=2、4、6\cdots\cdots$ 为偶次谐波

例：将对称方波分解为谐波序列



解：该方波可以表示为

$$f(\omega t)=\begin{cases}1 & 2m\pi<\omega t<(2m+1)\pi \\ -1 & (2m+1)\pi<\omega t<2(m+1)\pi\end{cases}$$

平均数显然为0

$$\therefore A_0=0$$

$$A_{km}==\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega t)d(\omega t)=0$$

$$B_{km}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega t)d(\omega t)=\frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)$$

$$=\begin{cases}0 & k=\text{偶数} \\ \dfrac{4}{k\pi} & k=\text{奇数}\end{cases}$$

幅度为 1 的对称方波的谐波展开式为

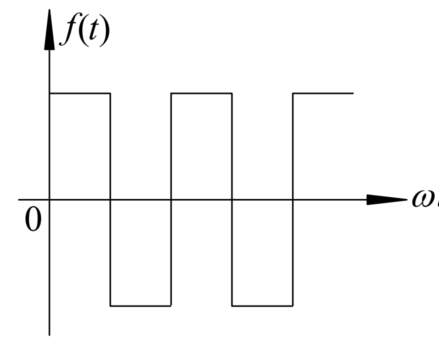
$$f(\omega t)=\frac{4}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\cdots)$$

当坐标平移$\pi/2$

$$f(\omega t)=\frac{4}{\pi}(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t-\cdots\cdots)$$

3、波形与系数的特殊关系

例如：对称方波



(a)

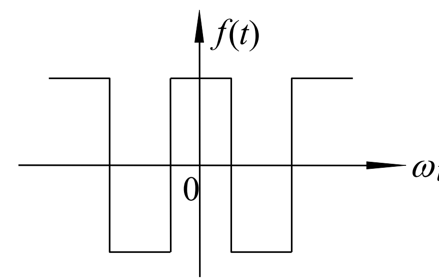
a) 若 $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ 奇函数

则 $A_{km} = 0, \quad B_{km} \neq 0$

在 (1) 式的展开式中只有正弦项，没有余弦项

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t \qquad (1)$$

例如：



(b)

b) 若 $f(\omega t) = f(-\omega t)$ 偶函数

则 $A_{km} \neq 0, \quad B_{km} = 0$

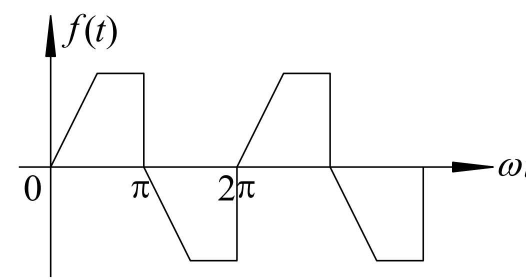
在 (1) 式的展开式中只有余弦项，没有正弦项

c) 若 $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ 镜像对称

在 (1) 式的展开式中只有奇次谐波，没有偶次谐波

负半波左移 π 翻过来正好与正半波相合 ⟶

例如：



(c)

多种波形的谐波系数为：

方波	三角波	抛物线波
$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{k^3}$

包含的谐波分量最丰富

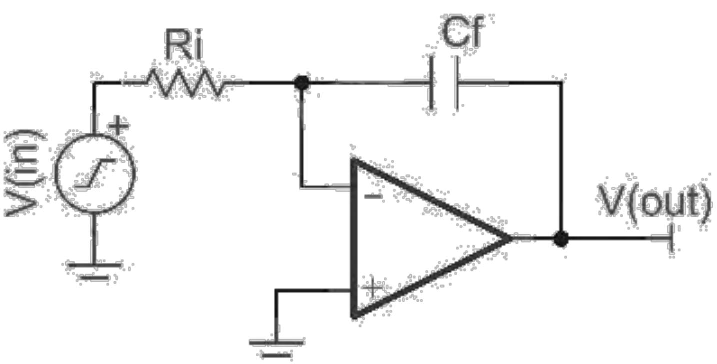
方波积分后为三角波

三角波积分后为抛物线波

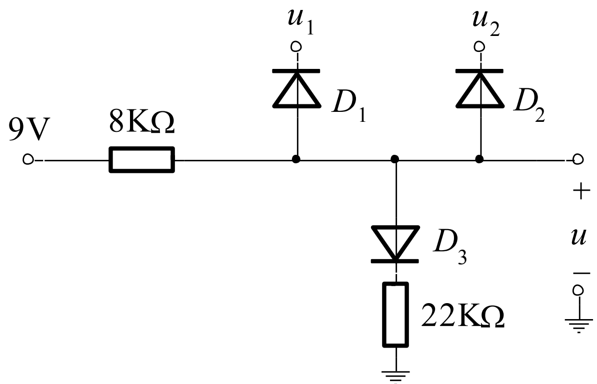
积分过程是丢失谐波的过程

$$\frac{0-\dot{U}_i}{R_i}+\frac{0-\dot{U}_o}{\frac{1}{j\omega C_f}}=0$$

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=-\frac{1}{j\omega R_i C_f}$$



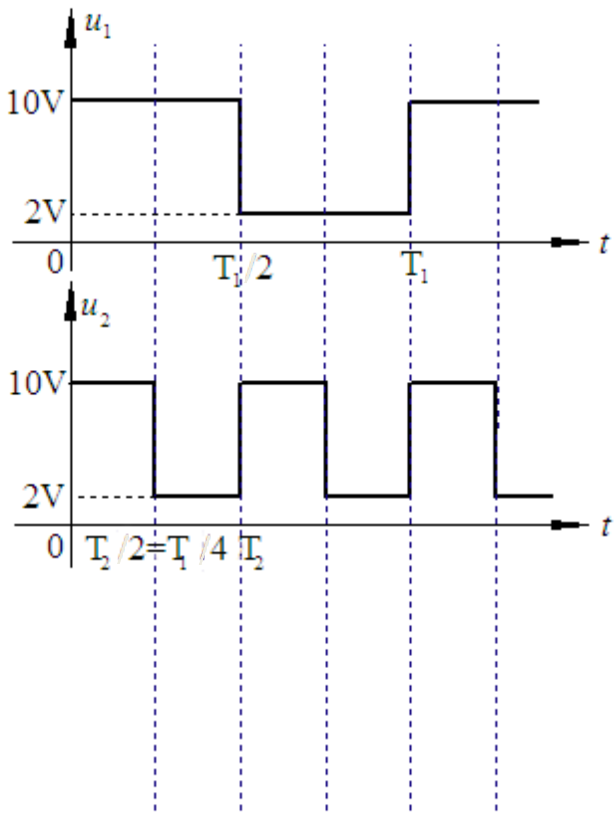
例： 图中电路，D_1~D_3 为理想二极管，u_1，u_2 如图所示，求 u 的基波

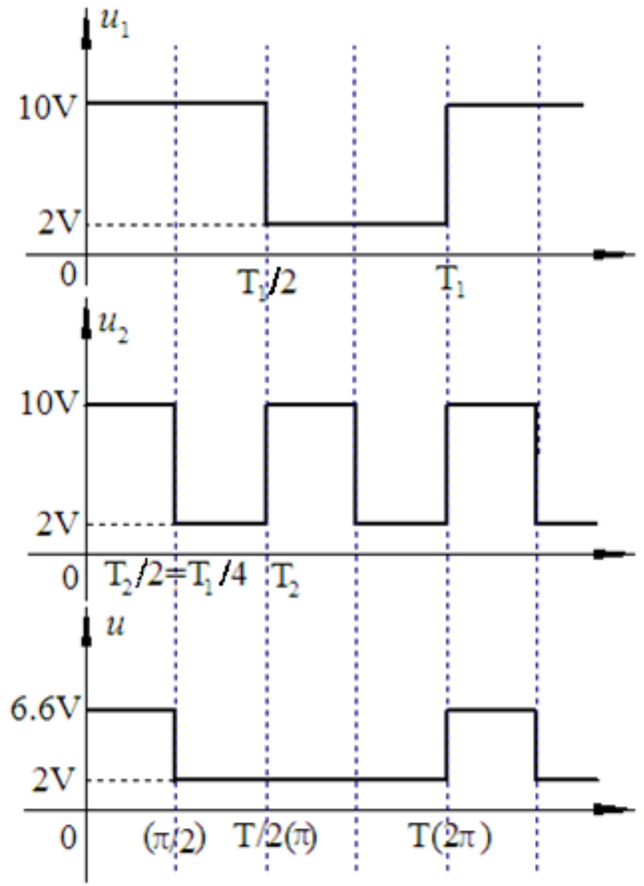


解： 当 u_1、u_2 为 10V 时，D_1、D_2 为截止状态

$$u = \frac{22}{8+22} \cdot 9 = 6.6V$$

当 u_1、u_2 有一个为 2V 时，u 为2V





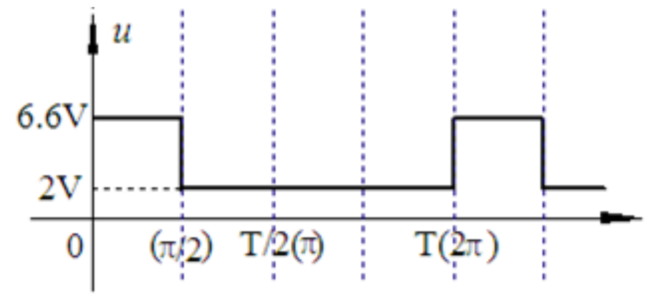
← u 的波形

u 在该电路中起箝位作用

$$A_{km}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega t)\cos k\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}6.6\cos\omega t d(\omega t)+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}2\cos\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{6.6}{\pi}-\frac{2}{\pi}=\frac{4.6}{\pi}$$



$$B_{km}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega t)\sin k\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}6.6\sin\omega t d(\omega t)+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}2\sin\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{6.6}{\pi}-\frac{2}{\pi}=\frac{4.6}{\pi}$$

$$C_{km}=\sqrt{A_{km}^2+B_{km}^2}=\sqrt{(\frac{4.6}{\pi})^2+(\frac{4.6}{\pi})^2}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times 4.6$$

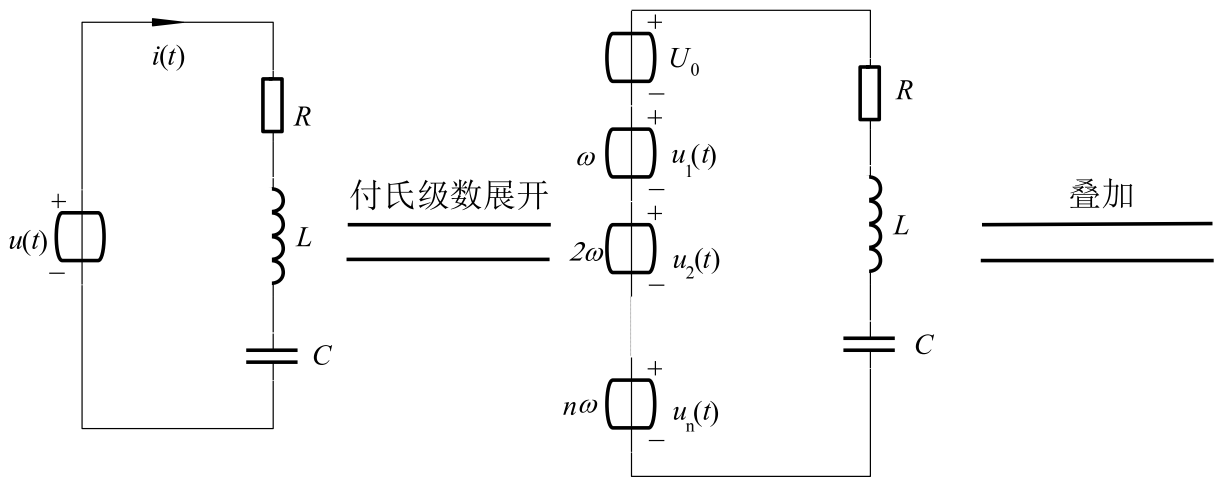
$$\phi_k=\arctan\frac{A_{km}}{B_{km}}=\arctan 1=45^\circ$$

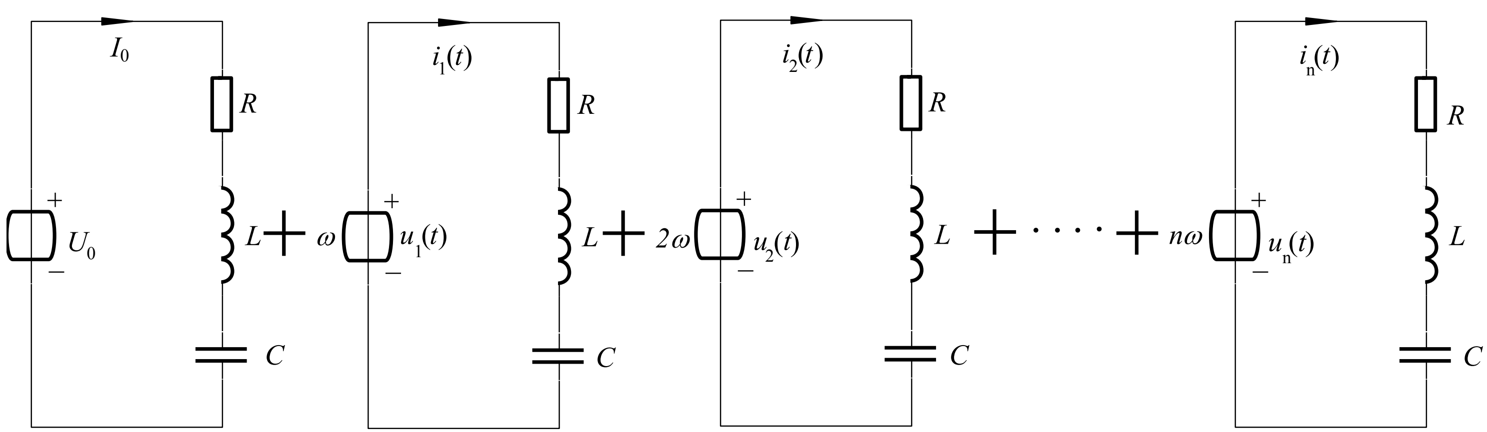
$$\therefore u\text{的基波为}u_1=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\times 4.6\sin(\omega t+45^\circ)V$$

§8-3 线性电路对周期性激励的稳态响应（谐波分析法）

对线性非正弦周期电路进行稳态分析时，一般是将给定的激励源展开，然后再应用叠加原理

傅氏级数展开 ⟶ 叠加原理

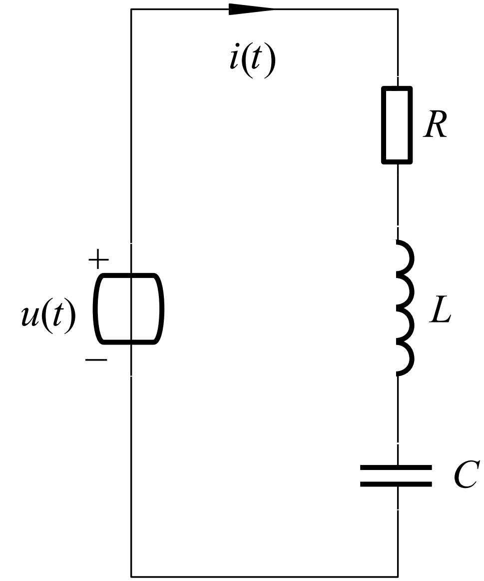




例： 已知 $u(t)=50\sin\omega t+25\sin(3\omega t+60°)\mathrm{V}$

电路对基波的阻抗 $Z_1=R+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})=8+j(2-8)\Omega$

求稳态电流 i (t)



解： 用相量法解，对基波

$$\dot{U}_1=\frac{50}{\sqrt{2}}\angle 0°V$$

$$Z_1=8-j6=10\angle -36.87°\Omega$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{Z_1}=\frac{5}{\sqrt{2}}\angle 36.87°A$$

$$i_1=5\sin(\omega t+36.87°)A$$

对三次谐波：

$$\dot{U}_3=\frac{25}{\sqrt{2}}\angle 60°V$$

$$Z_3=8+j(3\times 2-\frac{8}{3})$$

$$=8.67\angle 22.62°\Omega$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_3}{Z_3}=\frac{2.88}{\sqrt{2}}\angle 37.4°A$$

$$i_3(t)=2.88\sin(3\omega t+37.4°)A$$

$$\therefore i(t)=i_1(t)+i_3(t)$$

$$=5\sin(\omega t+36.87°)+2.88\sin(3\omega+37.4°)A$$

§8-4 非正弦周期电流和电压的有效值•平均功率

1、非正弦电压、电流的有效值

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

假设一非正弦周期电流 i 可以分解为付里叶级数

$$i=I_0+\sum_{k=1}^{n} I_{km}\sin(k\omega t+\phi_k)$$

将 i 代入有效值公式，则得此电流的有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[I_0+\sum_{k=1}^{n} I_{km}\sin(k\omega t+\phi_k)\right]^2 dt}$$

上式中 i 的展开式平方后将含有下列各项

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^{\ 2} dt = I_0^{\ 2}$$ 直流分量的平方

$$\frac{1}{T}\int_0^T I^2{}_{km}\sin^2(k\omega t+\varphi_k)dt = I_k^2 \qquad (k=1,2,3\cdots)$$

各次谐波分量的平方

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 I_{km}\sin(k\omega t+\varphi_k)dt=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\sin(k\omega t+\varphi_k)I_{qm}\sin(q\omega t+\varphi_q)dt=0$$

$$(k,q=1,2,3\cdots,k\neq q)$$

由此可求得 i 的有效值为：

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\cdots}=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$$

非正弦周期电流的有效值

$I_1, I_2\ldots$为各次谐波电流的有效值

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2+\cdots}=\sqrt{U_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

非正弦周期电压的有效值

$U_1, U_2\ldots$为各次谐波电流的有效值

2. 功率

设二端网络电流、电压各为：

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{n} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_{ik})$$

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_{km} \sin(k\omega t + \phi_{uk})$$

网络N吸收的平均功率为：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T [U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \phi_{uk)}] \times [I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_{ik)}] dt$$

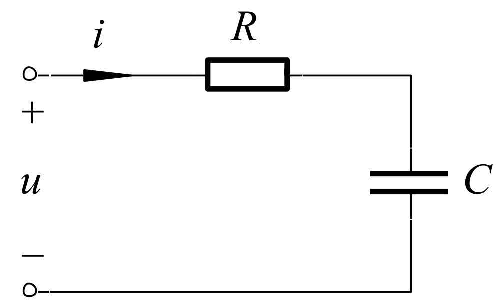
$$= \underline{U_0 I_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{U_k I_k} \cos\phi_k$$

直流分量　　各次谐波电压、电流有效值

例：图示电路中 $R=3\Omega$，$\dfrac{1}{\omega C}=9.45\Omega$

$$u=[10+141.40\sin(\omega t)+47.13\sin(3\omega t)+28.28\sin(5\omega t)+20.20\sin(7\omega t)+15.71\sin(9\omega t)+....]\quad \text{V}$$

求电流 I 以及电阻吸收的平均功率



解：电路中的非正弦周期电压已为傅里叶级数形式，电流相量的一般表达式为：

$$\dot{I}_m(k)=\frac{\dot{U}_m(k)}{R-j\dfrac{1}{k\omega C}}$$

表示振幅最大值

根据叠加定理，按 $k=0,1,2\ldots$ 顺序逐一求解如下：

$k=0$，直流分量，$U_0=10$，$I_0=0$，$P_0=0$

$k=1$，$\dot{U}_m(1)=141.4\angle 0^\circ \quad V$

$$\dot{I}_m(1)=\frac{141.4\angle 0^\circ}{3-j9.45}=14.26\angle 72.39^\circ \quad A$$

$$P(1)=\frac{1}{2}I_m^2(1)R=305.02 \quad W$$

有效值 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}*\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$k=3$，$\dot{U}_m(3)=47.13\angle 0^\circ \quad V$

$$\dot{I}_m(3)=\frac{47.13\angle 0^\circ}{3-j3.15}=10.83\angle 46.4^\circ \quad A$$

$$P(3)=\frac{1}{2}I_m^2(3)R=175.93 \quad W$$

同理得：

$$\dot{I}_m(5)=7.98\angle 32.21^\circ \quad A,\quad P(5)=95.52 \quad W$$

$$\dot{I}_m(7)=6.14\angle 24.23^\circ \quad A,\quad P(7)=56.55 \quad W$$

$$\dot{I}_m(9)=4.94\angle 19.29^\circ \quad A,\quad P(9)=36.60 \quad W$$

最后按时域叠加：

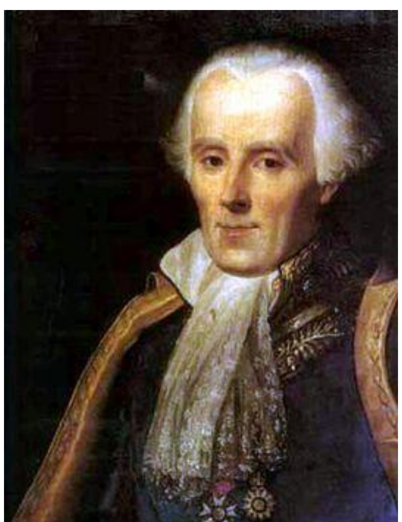
$$\begin{aligned} i=&[14.26\sin(\omega t+72.39^\circ)+10.83\sin(3\omega t+46.4^\circ)\\ &+7.98\sin(5\omega t+32.21^\circ)+6.14\sin(7\omega t+24.23^\circ)\\ &+4.94\sin(9\omega t+19.29^\circ)+\ldots] \quad A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P&=P_0+P(1)+P(3)+P(5)+P(7)+P(9)\\ &=669.80 \quad W \end{aligned}$$

- 非正弦周期电流电路分析步骤：
  - 1、将激励源进行傅里叶级数分解；
  - 2、用向量法对每次谐波求频域响应；
  - 3、将频域响应变为时域，再相加；
  - 4、有效值等于各次谐波有效值的“方和根”；
  - 5、平均功率等于各次谐波平均功率之和。

第九章 拉普拉斯变换•复频域分析（不考）

傅里叶（1768～1830）Jean-BaptisteJoseph Fourier，法国数学家。1768年3月21日生于奥塞尔，1817年任科学院院士，1830年5月16日卒于巴黎。他的著作《热的解析理论》已成为数学史上一部经典性的文献。傅里叶的创造性工作为偏微分方程的边值问题提供了基本的求解方法——傅里叶级数法，从而极大地推动了微分方程理论的发展。



拉普拉斯(1749 – 1827) Pierre-Simon Laplace,是法国分析学家、概率论学家和物理学家，法国科学院院士。1749年3月23日生于法国西北部卡尔瓦多斯的博蒙昂诺日，1827年3月5日卒于巴黎。1816年被选为法兰西学院院士，1817年任该院院长。。

定义因果函数$f(t)$的拉普拉斯变换$\mathcal{L}(s)$：

$$\mathcal{L}(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt,\quad s=\sigma+j\omega$$

$$\mathcal{L}(\delta(t))=\int_{0-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$

$$\mathcal{L}(\varepsilon(t))=\int_{0-}^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_{0-}^{\infty}=\frac{1}{s},\quad real(s)>0$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t})=\int_{0-}^{\infty}e^{\alpha t}e^{-st}dt=\frac{1}{\alpha-s}e^{(\alpha-s)t}\Big|_{0-}^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha},\quad real(s-\alpha)>0$$

叠加性： $$\mathcal{L}(\cos(\omega t))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad real(s)>0$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad real(s)>0$$

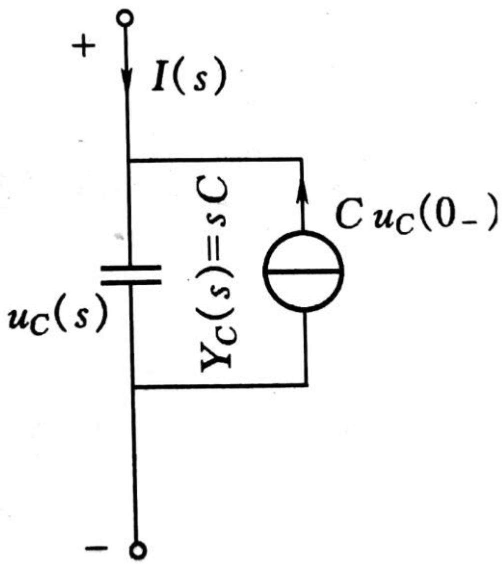
$$\mathcal{L}(1-e^{-\alpha t})=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}=\frac{\alpha}{s(s+\alpha)},\quad real(s)>0, real(s+\alpha)>0$$

微分性：$$\mathscr{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\int_{0-}^{\infty}s^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt=\int_{0-}^{\infty}s^{-st}df(t)=\left[s^{-st}f(t)\right]\Big|_{0-}^{\infty}-\int_{0-}^{\infty}f(t)ds^{-st}$$

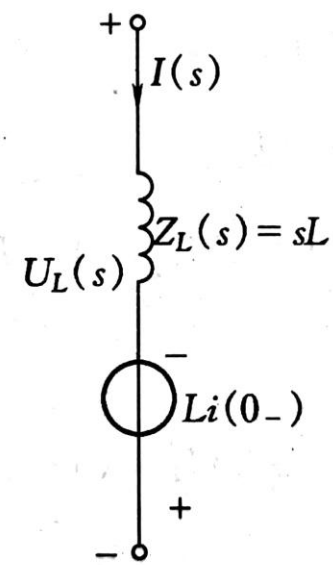
$$=0-f(0-)+s\int_{0-}^{\infty}f(t)s^{-st}dt=s\mathscr{L}(s)-f(0-)$$

电容： $i_C(t)=C\dfrac{du_C(t)}{dt}$ $\quad\therefore I_C(s)=\mathscr{L}\left(C\dfrac{du_C(t)}{dt}\right)=C\left[sU_C(s)-u_C(0-)\right]$

同理对于电感： $U_L(s)=L\left[sI_L(s)-i_L(0-)\right]$

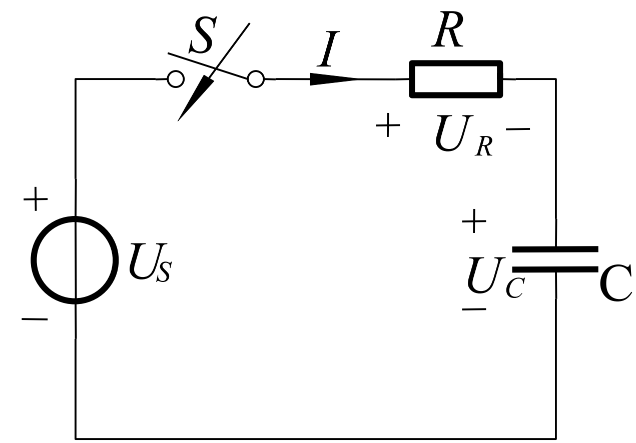


电容诺顿模型



电感戴维南模型

例：0-时刻电容电压为$u_C(0-)$，求全响应$u_C(t)$

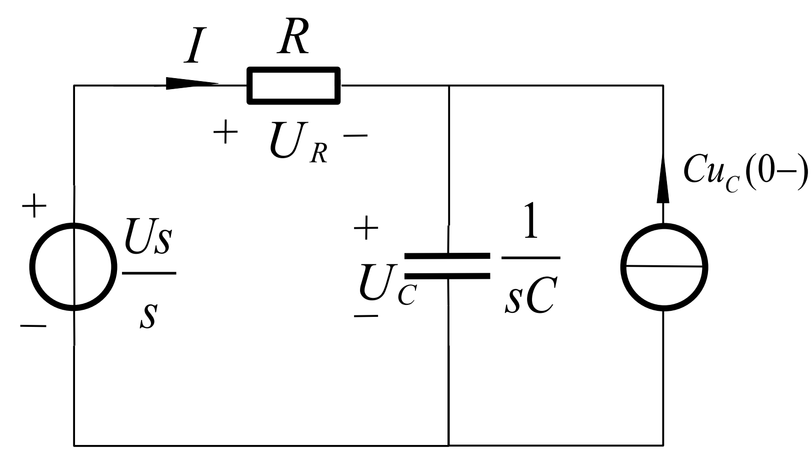


解：电路复频域模型如图所示，由节点法：

$$\frac{U_C(s)-\frac{Us}{s}}{R}+sCU_C(s)=Cu_C(0-)$$

$$U_C(s)-\frac{Us}{s}+sRCU_C(s)=RCu_C(0-)$$

$$U_C(s)=\frac{\frac{Us}{s}+RCu_C(0-)}{1+sRC}=\frac{\frac{Us}{RC}}{s(s+\frac{1}{RC})}+\frac{u_C(0-)}{s+\frac{1}{RC}}$$



$$U_C(t)=\left[Us\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)+u_C(0-)e^{-\frac{t}{RC}}\right]\varepsilon(t)$$

作业：

8-5

8-7

8-9

8-13