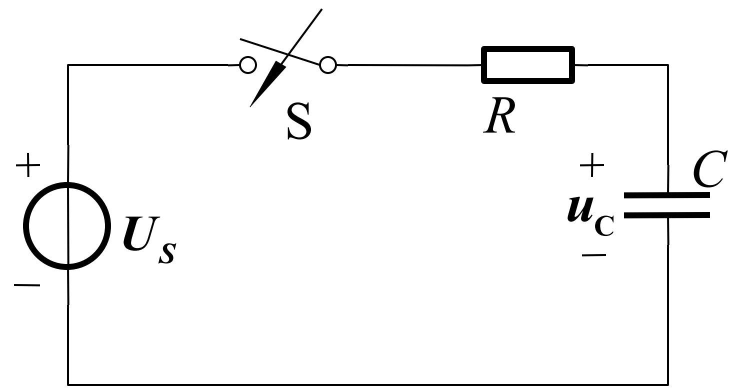
## §4-3 一阶电路的全响应

全响应—— 一个具有非零状态的电路受到外加激励所引起的响应.




$RC$电路的全响应

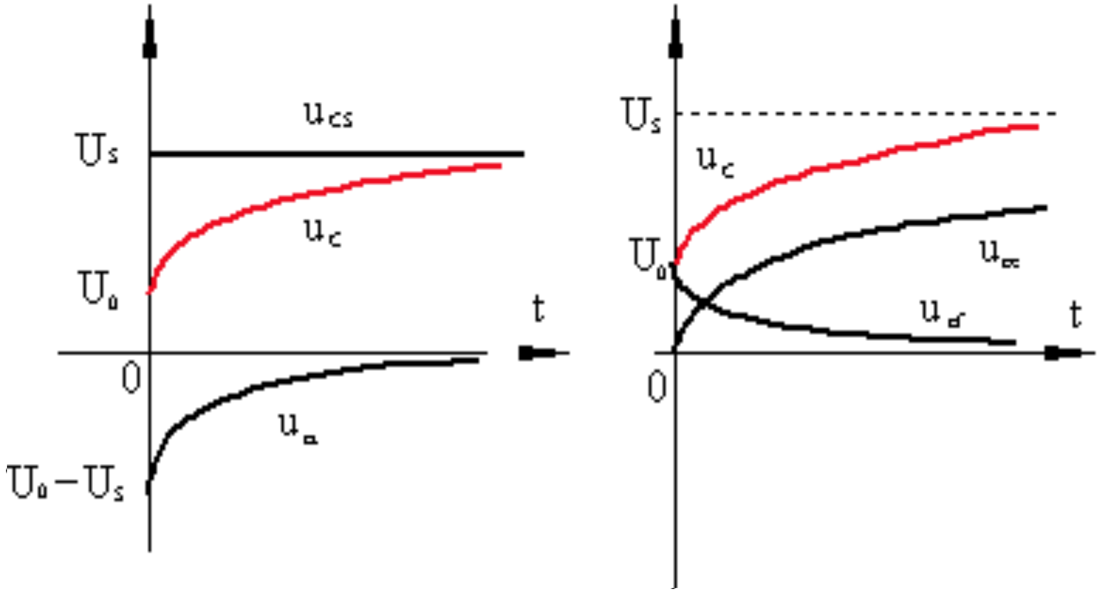
$$u_C(0_-)=U_0 \qquad\qquad U_0<U_S$$

接入直流电压源，列微分方程：

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad (1)$$

初始条件为 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$

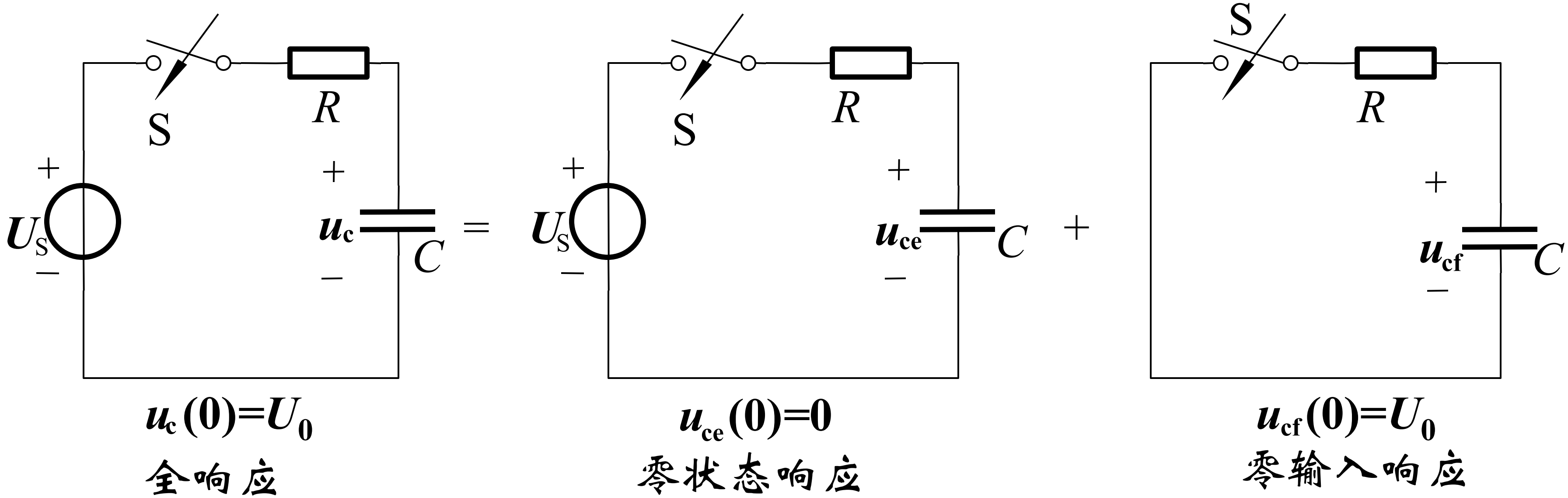
全响应为 $u_C = u_{CS} + u_{Ct} = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$ (2)




$$u_C = U_S + \left(U_0 - U_S\right)e^{-\frac{t}{RC}} = \underline{U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})} + \underline{U_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \qquad (3)$$

$u_{ce}$（零状态响应） $u_{cf}$（零输入响应）

全响应 = 零状态响应 + 零输入响应 (4)




上述结论证明如下:

零状态响应满足原有非齐次方程和零初始条件,即:

$$RC\frac{du_{ce}}{dt}+u_{ce}=U_S \qquad (5)$$

$$u_{ce}(0)=0 \qquad (6)$$

$$RC\frac{du_{ce}}{dt}+u_{ce}=U_S \qquad (5) \qquad\qquad u_{ce}(0)=0 \qquad (6)$$

而零输入响应Ucf满足原方程的齐次方程和非零初始条件$U_0$,即

$$RC\frac{du_{cf}}{dt}+u_{cf}=0 \qquad (7)$$

$$u_{cf}(0)=U_0 \qquad (8)$$

将式(5),式(6)分别与式(7),式(8)相加,得

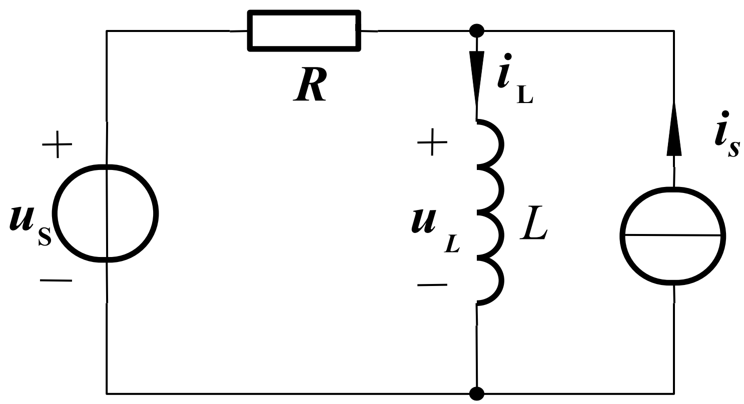
$$RC\frac{d(u_{ce}+u_{cf})}{dt}+(u_{ce}+u_{cf})=U_S$$

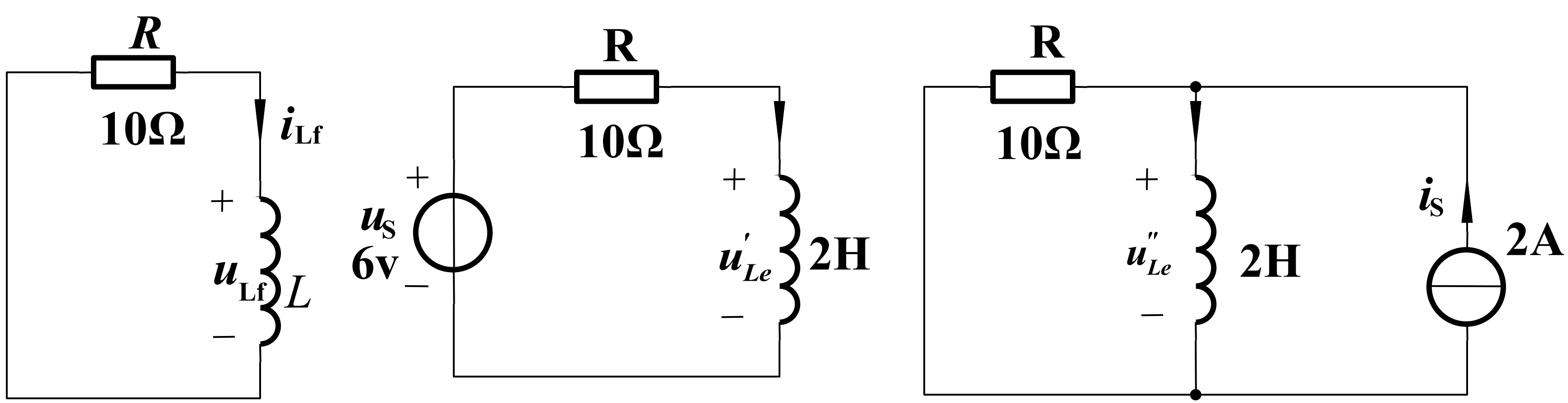
$$u_{ce}(0)+u_{cf}(0)=U_0$$

显然,$(u_{ce}+u_{cf})$既满足原非齐次方程式(1),又满足原初始条件$U_0$,因此$(u_{ce}+u_{cf})$是满足初始条件的唯一解.即待求的全响应.

$$\boxed{RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad (1)}$$

**例：** 图示电路中，$R$=10Ω, $L$=2H, $u_s=6\varepsilon(t)$V, $is=2\varepsilon(t)$A，$i_L(0)$=1A, 求$i_L$, $u_L$的全响应,零输入响应和零状态响应。

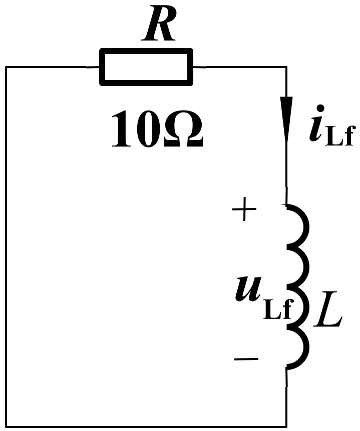


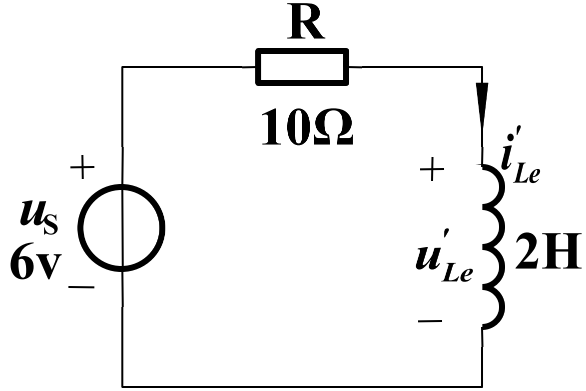

(a)零输入响应

$u_S$ 单独作用时
(b)零状态响应

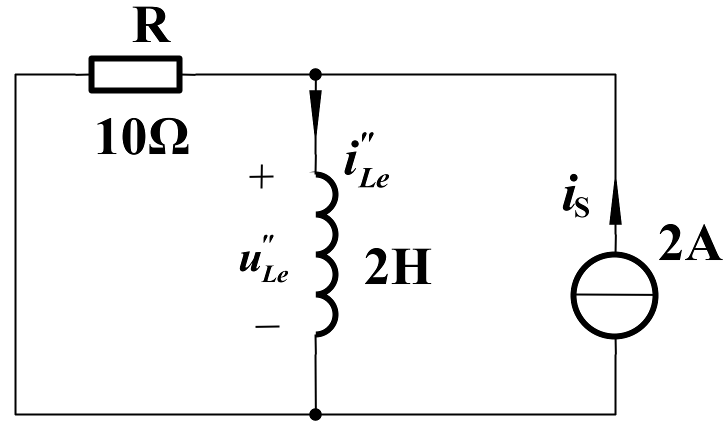
$i_S$单独作用时
(c)零状态响应




(a)零输入响应




$u_S$ 单独作用时
( b)零状态响应



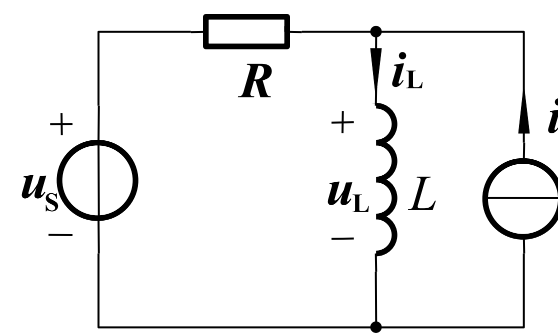

$i_S$单独作用时
( c )零状态响应

解:

$$i_L = i_{Lf} + i'_{Le} + i''_{Le}$$

$$u_L = u_{Lf} + u'_{Le} + u''_{Le}$$

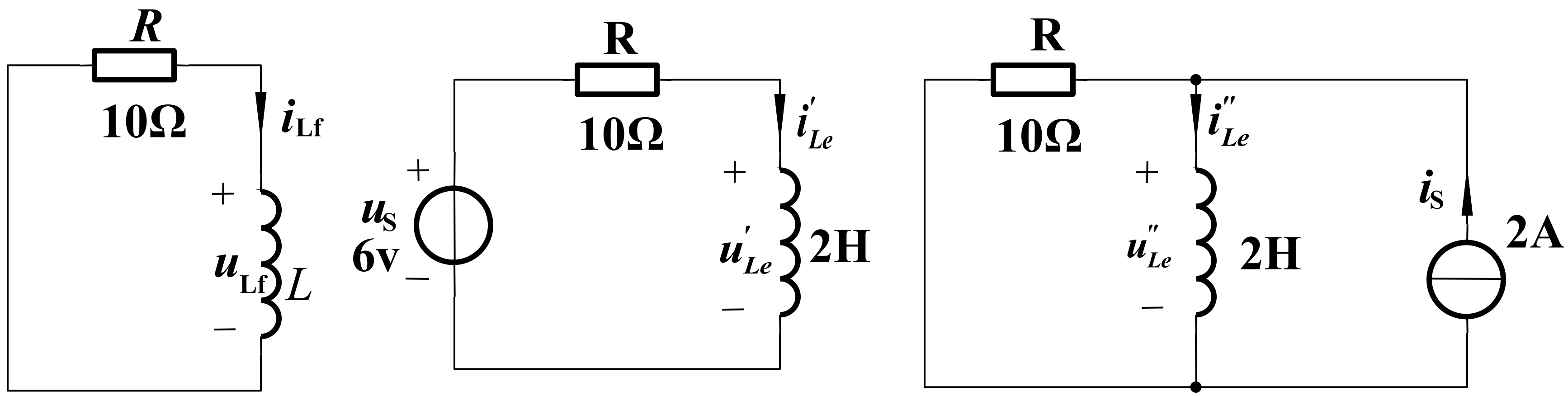
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2}{10} = 0.2S$$




由各电路求出各相应情况下的响应

由图(a)得 $$i_{Lf} = i_L e^{-\frac{Rt}{L}} = 1e^{-\frac{Rt}{L}} = e^{-5t} A$$

$$u_{Lf} = L\frac{di_{Lf}}{dt} = -10e^{-5t} V$$




(a)零输入响应

$u_S$ 单独作用时
( b)零状态响应

$i_S$单独作用时
( c )零状态响应

由图(b)得:

$$i'_{Le}=\frac{u_S}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}}) \;=\frac{6}{10}(1-e^{-5t})=0.6(1-e^{-5t})A$$

$$u'_{Le}=L\frac{di'_{Le}}{dt} \;=6e^{-5t}V$$

由图(c)得

$$i''_{Le}=i_S(1-e^{-\frac{Rt}{L}}) \;=2(1-e^{-5t})A$$

$$u''_{Le}=L\frac{di''_{Le}}{dt}=20e^{-5t}V$$

所以，　$$i_{Lf}=e^{-5t}A$$

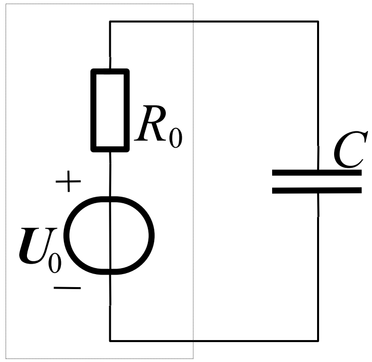
零输入响应为：　$$u_{Lf}=-10e^{-5t}V$$

零状态响应为：　$$i_{Le}=i'_{Le}+i''_{Le}=2.6(1-e^{-5t})A$$

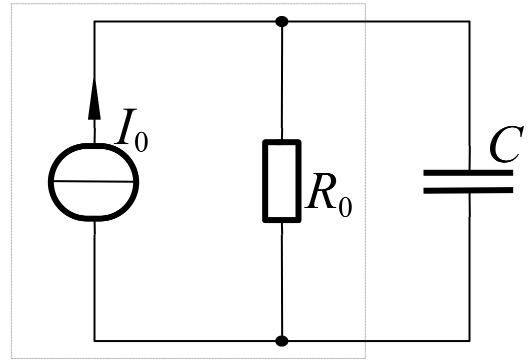
$$u_{Le}=u'_{Le}+u''_{Le}=26e^{-5t}V$$

全响应为：　$$i_{L}=i_{Lf}+i_{Le}=2.6-1.6e^{-5t}A$$

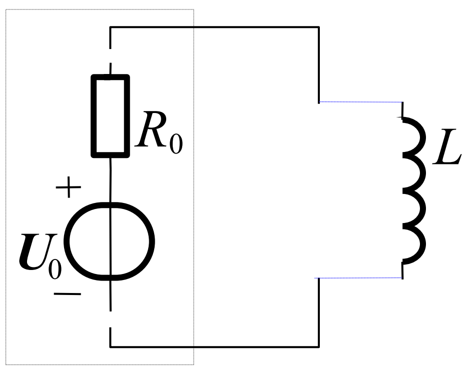
$$u_{L}=u_{Lf}+u_{Le}=16e^{-5t}V$$



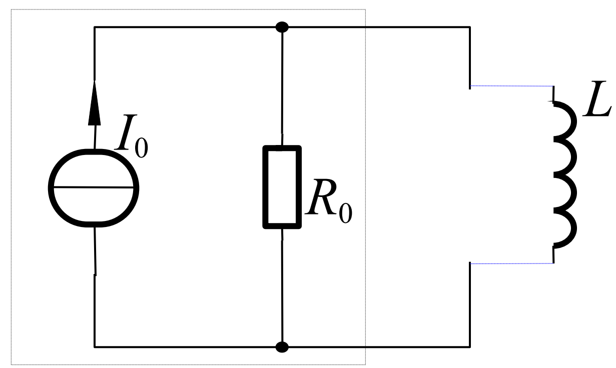

戴




诺




戴




诺

# §4-4 求解一阶电路的三要素法

1. 三要素的含义

(1) 三要素　　一阶电路中的三要素是指

初始值$x(0+)$

稳态值$x(\infty)$

时间常数$\tau$

(2) 三要素的含义

初始值$x(0+)$—响应的起始点

稳态值$x(\infty)$—换路后当$t\rightarrow\infty$时的电路状态

时间常数$\tau$—从起始点到稳态这一“过渡过程”的时间

2. 求解一阶电路响应的三要素公式

$$x(t)=\text{稳态解}+\text{暂态解}=x(\infty)+[x(0_+)-x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

3. 三要素的确定

(1) 初始值$x(0_+)$的确定

初始值是指任一响应$x(\mathrm{t})$在换路后$t$=$0_+$时的数值,它不仅与电路的输入有关,同时也与电路的初始状态有关.要确定$x(0_+)$,必须首先确定$u_\mathrm{c}(0-)$或$i_\mathrm{L}(0-)$,然后根据开关定理求出$u_\mathrm{c}(0_+)$,$i_\mathrm{L}(0_+)$.

(2) 稳态值$x(\infty)$的确定—将电路中的$C$看成开路,$L$看成短路,由此算出电流,电压的稳态值.

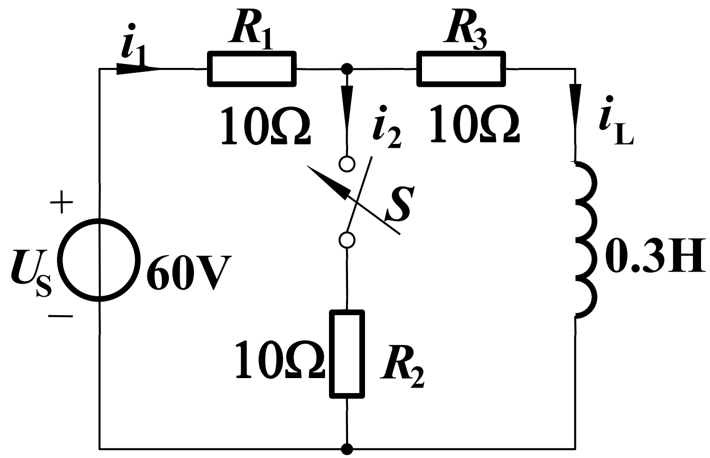
(3) 时间常数$\tau$的确定—同一电路中只有一个时间常数

$$RC\text{一阶电路的}\tau = R_0C$$

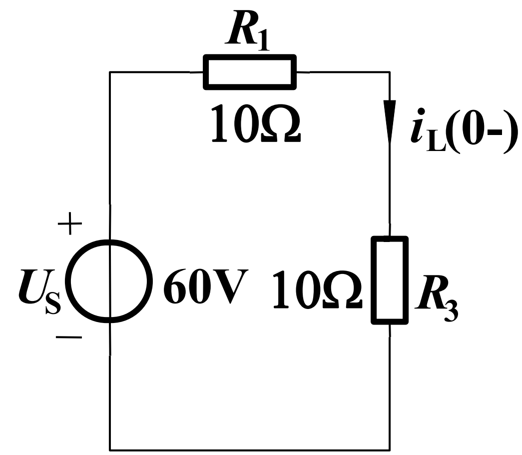
$$RL\text{一阶电路的}\tau = L/R_0$$

$R_0$—从储能元件两端看进去的戴维南等效电路的等效电阻

**例：** 求图示电路在开关闭合后的电流$i_1, i_2, i_L$。设换路前电路已工作了很长时间。




(a)原图

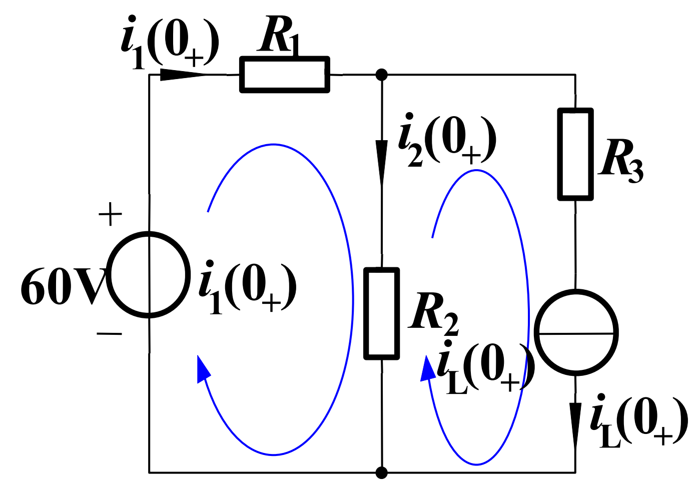



(b) $t$=0-时的等效电路

**解：**(1) 求初始值.

$$i_L(0_-)=\frac{60}{R_1+R_3}=3A$$

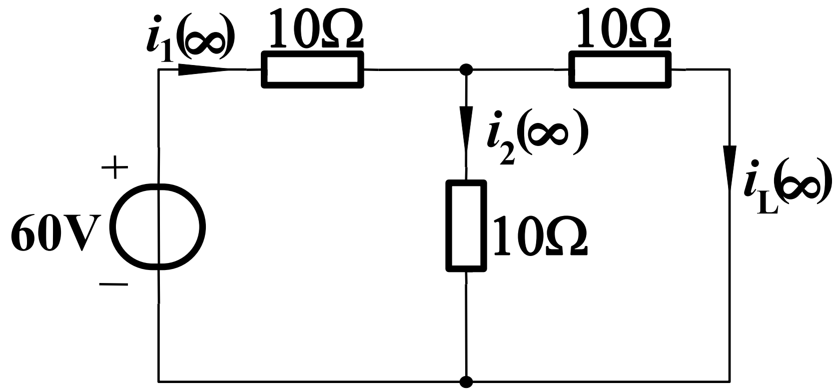
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3A$$




(c) $t$=$0_+$时的等效电路(瞬间)

$i_1(0_+)=4.5A$　　$i_2(0_+)=1.5A$

(2) 求稳态值(视$L$为短路)

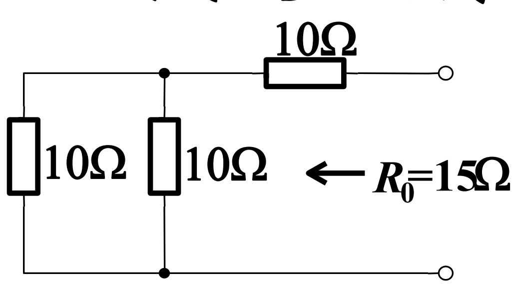



(d)换路后的稳态等效电路

$$i_1(\infty)=\frac{60}{10+10//10}=4A \qquad i_2(\infty)=i_L(\infty)=2A$$

(3) 求 $\tau$

由$L$两端看进去的戴维南等效电阻




$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{0.3}{15}=0.02S$$

(e)求等效电阻

(4) 写出待求电流的表达式

电路图

$$i_L = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 2 + (3\text{-}2)e^{-\frac{t}{0.02}} = 2 + e^{-50t}A$$

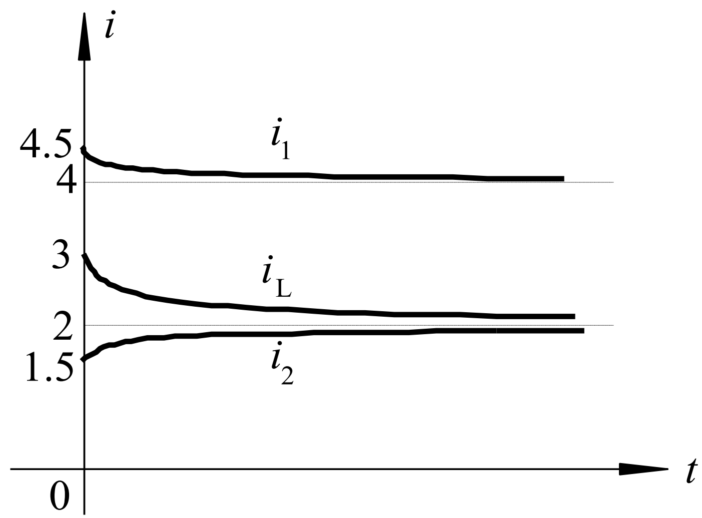
$$i_1 = i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 4 + (4.5\text{-}4)e^{-\frac{t}{0.02}} = 4 + 0.5e^{-50t}A$$

$$i_2 = i_2(\infty) + [i_2(0_+) - i_2(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

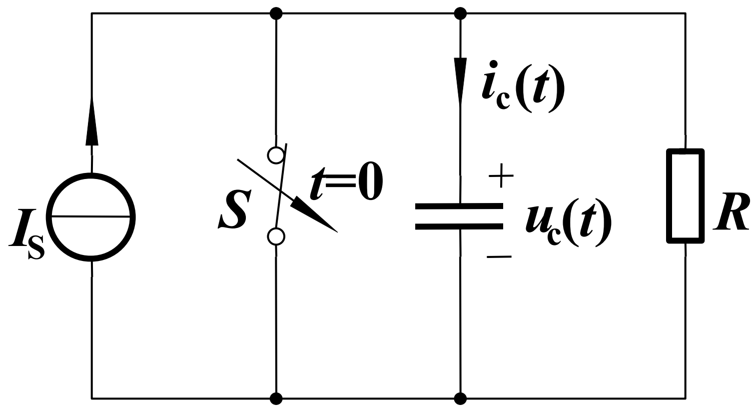
$$= 2 + (1.5\text{-}2)e^{-\frac{t}{0.02}} = 2 - 0.5e^{-\frac{t}{0.02}}$$

(5) 画出各电流曲线




(f)各电流曲线

**例：** 如图所示电路，已知$t<0$时S闭合，电路已达到稳定状态，现于$t=0$时打开S，求$t>0$时的$u_c(t)$,$i_c(t)$.

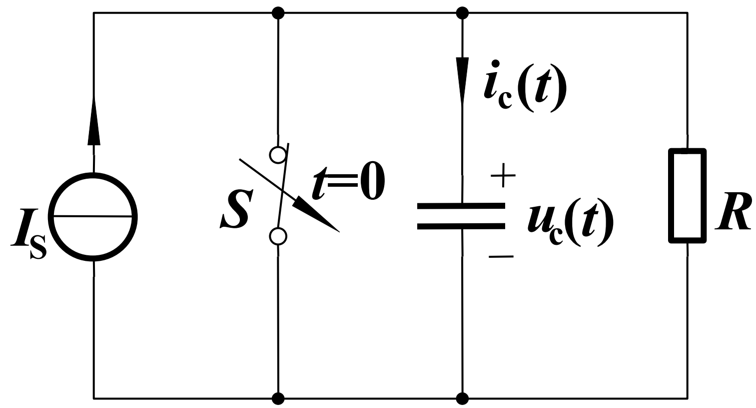



(a)原图

**解：** (1) 求初始值 $u_c(0_+)$

由于$t<0$ 时,S闭合,电路已经达到稳态,故$u_c(0-)=0$

$$u_c(0_+)= u_c(0-)=0$$

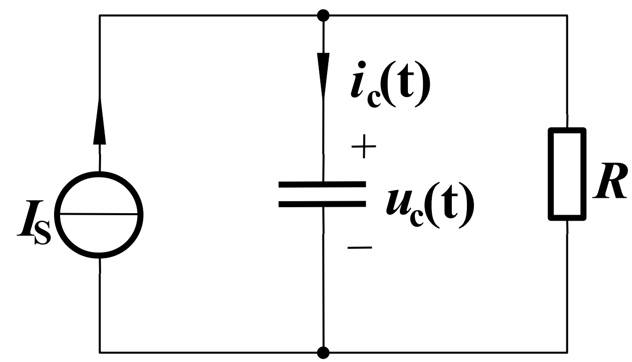



(a)原图

(2)求$u_c(\infty)$ (视电容为开路)

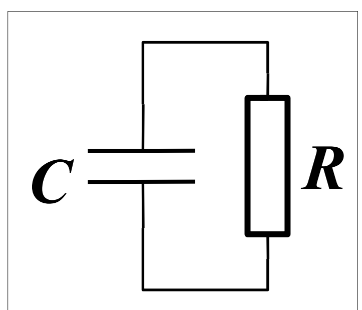
此时电路为

$$u_c(\infty)= RI_S$$




(b)求$u_c(\infty)$

(3) 求$\tau$ $S$




(c)求τ

$$\tau = RC$$

(4) 求出待求表达式

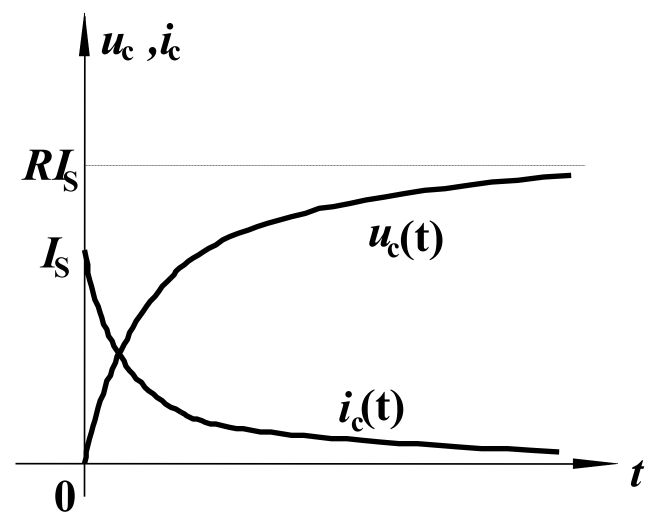
$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=RI_S+(0-RI_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=RI_S-RI_Se^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=I_Se^{-\frac{t}{\tau}}$$

(5) 画出$u_c$,$i_c$曲线




(d) $u_c$ 、$i_c$曲线

**例：** 某含有电容元件的一阶电路全响应为$u_c(t)=(5+3e^{-t})\ \varepsilon(t)$，求下列各条件下的该电路的全响应。

1、初始状态不变，激励加倍；

2、初始状态减半，激励不变；

3、初始状态减半，激励加倍。

**解：** 由全响应得：$u_c(0_+)=8\text{ V}$， $u_c(\infty)=5\text{ V}$

1、 $u_c(0_+)=8\text{ V}$， $u_c(\infty)=10\text{V}$， $u_c(t)=(10-2e^{-t})\ \varepsilon(t)$

2、 $u_c(0_+)=4\text{ V}$， $u_c(\infty)=5\text{V}$， $u_c(t)=(5-1e^{-t})\ \varepsilon(t)$

3、 $u_c(0_+)=4\text{ V}$， $u_c(\infty)=10\text{V}$， $u_c(t)=(10-6e^{-t})\ \varepsilon(t)$

4. 三要素的使用条件

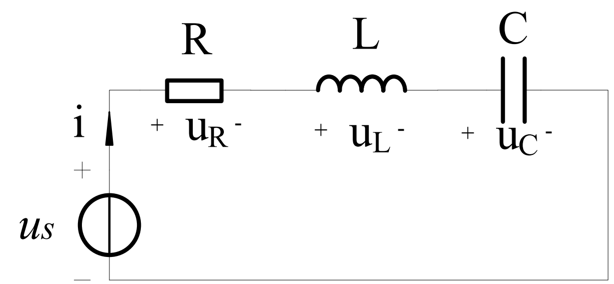
(1) 一阶电路

(2) 外激励必须为直流、阶跃，冲激或正弦交流

为什么要有这个限制呢？因为用三要素法求电路的响应是想避免列微分方程，直接通过求稳态值，初始值，$\tau$ 代入三要素公式中而得到响应。不列微分方程求特解，实际上就是把电路的稳态解作为电路的特解，而可以求稳态电路的只有阶跃，冲激，直流和正弦交流激励的情况。

# 5、RLC串联电路的通解

$$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_s$$




特征方程： $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$

令特征方程的判别式为零得： $R_0 = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

当 $|R| > R_0$ 时： $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ $\quad u_{Ct}(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$

过阻尼

当 $|R| = R_0$ 时： $p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$ $\quad u_{Ct}(t) = (At + B)e^{pt}$

临界阻尼

当 $|R| < R_0$ 时： $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ $\quad u_{Ct}(t) = Ue^{at}\sin(\omega t + \varphi)$

欠阻尼

其中： $a = -\frac{R}{2L}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$

阻尼系数 角频率

## 作业：

4-4-1

4-2

4-22

4-30

4-31