第二节　一些常用函数的傅氏变换

- 一、单位脉冲函数
- 二、广义Fourier变换
- 三、小结与思考

一、单位脉冲函数

- （1）工程中描述
- （2）物理学家狄拉克给出的定义

满足下列两个条件的函数称为 δ 函数：

I $\qquad \delta(t)=0 \quad (t\neq 0)$

II $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$

- (3) 函数的数学定义

定义1

对于任何一个无穷次可微的函数$f(t)$,如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)f(t)\mathrm{d}t,$$

其中$\delta_{\varepsilon}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\le t\le\varepsilon\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases}$,则称$\delta_{\varepsilon}(t)$的弱极限为$\delta$函数.

记为$\delta(t)$,即

$$\delta_{\varepsilon}(t)\overset{\text{弱}}{\underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow}}\delta(t),\text{或简记为}\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_{\varepsilon}(t)=\delta(t).$$

定义2 如果对于$(-\infty, +\infty)$的任意一个区间上连续的函数$f(t)$都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0).$$

则称$\delta(t)$为δ–函数.

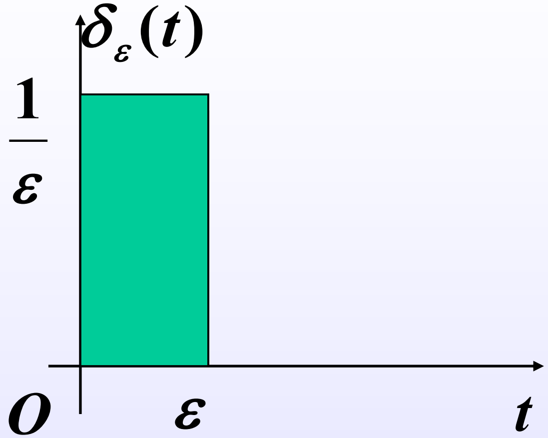
注：（1）定义1左端不是反常积分，只是等式右端极限值的记号.

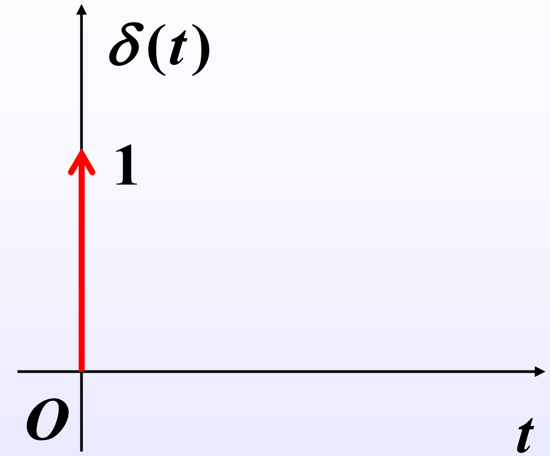
(2) 定义2可由定义1推出:

由于$f(t)$在$[t_0, t_0+\varepsilon]$上连续， 由积分中值定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t \quad = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}f(t)\mathrm{d}t = f(t_0+\theta\varepsilon)$$

令$\varepsilon\to 0$即可.





工程上常将δ–函数称为单位脉冲函数. 有时将δ–函数用一个长度等于1的有向线段表示， 线段的长度表示δ–函数的积分值称为δ–函数的强度.

δ－函数的其他性质：

1.δ－函数是偶函数,即$\delta(t)=\delta(-t)$;

2.$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t),\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$,其中$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$

称为单位阶跃函数;

3.若$f(t)$为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)f(t)\mathrm{d}t=-f'(0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n f^{(n)}(0).$$

二、广义的Fourier变换

根据δ–函数和Fourier变换的定义, 容易求出δ–函数的Fourier变换及逆变换.

$$F(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}=1.$$

可见,单位脉冲函数$\delta(t)$与常数1构成了一个*Fourier*变换对.

$$\mathscr{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=1.$$

所以， 1与$2\pi\delta(\omega)$ 构成了一个*Fourier*变换对.

进而得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega).$$

推广

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t_0)}\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t-t_0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

即$\delta(t-t_0)$与 $e^{-i\omega t_0}$ 构成了傅里叶变换对，$e^{i\omega_0 t}$ 与

$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$构成了傅里叶变换对.

例1 求正弦函数$f(t)=\sin\omega_0 t$的Fourier变换

解 由Fourier变换公式，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0 t e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t}-e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2i}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

例2 证明单位阶跃函数$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t>0\end{cases}$的$Fourier$变换为$\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$.

证 事实上，若$F(\omega)=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$,则由$Fourier$逆变换可得

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

利用*Dirichlet*积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, t < 0 \\ 0, \quad\quad t = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \quad\quad t > 0 \end{cases}$$

则当$t \neq 0$时,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{2} = 1, \quad t > 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}(-\dfrac{\pi}{2}) = 0, t < 0 \end{cases}$$

这就表明$\dfrac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$的$Fourier$逆变换为$f(t) = u(t)$.

三、小结与思考

本节课我们引入了δ–函数概念及其广义Fourier变换，重点掌握利用单位脉冲函数及其Fourier变换求一些常见函数的广义Fourier变换的方法.

熟记δ–函数的定义2（性质）：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = f(t_0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega).$$

思考题

为什么引入δ–函数？广义**Fourier**变换和古典**Fourier**变换有什么不同？

思考题答案

在工程技术中,有很多重要函数不满足Fourier积分定理中的绝对可积条件,例如常数、符号函数、单位阶跃函数以及正、余弦函数等，这时只能利用单位脉冲函数求出它们的广义Fourier变换.
δ–函数可以使一些普通意义下不存在的积分，有了确定的数值。

但要注意这时的广义积分来定义的,不是普通意义下的积分.只是仍旧写成古典定义的形式.

作业：P150　8，9

放映结束，按Esc退出.