第五章　正弦电流电路导论

基本理论与内容

1. 正弦电压和正弦电流的基本概念
2. 线性电路对正弦激励的响应-正弦稳态响应
3. 正弦量的相量表示方法
4. 电路元件方程的相量形式
5. 基尔霍夫定律的相量形式
6. 阻抗与导纳
7. 阻抗的串联与并联
8. 阻抗导纳的等效变换

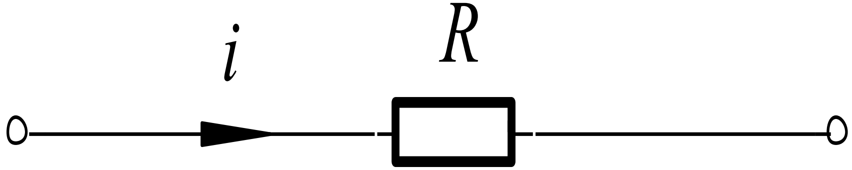
§5-1 正弦电压和正弦电流的基本概念

1. 正弦量——随时间按正弦规律变化的电量.

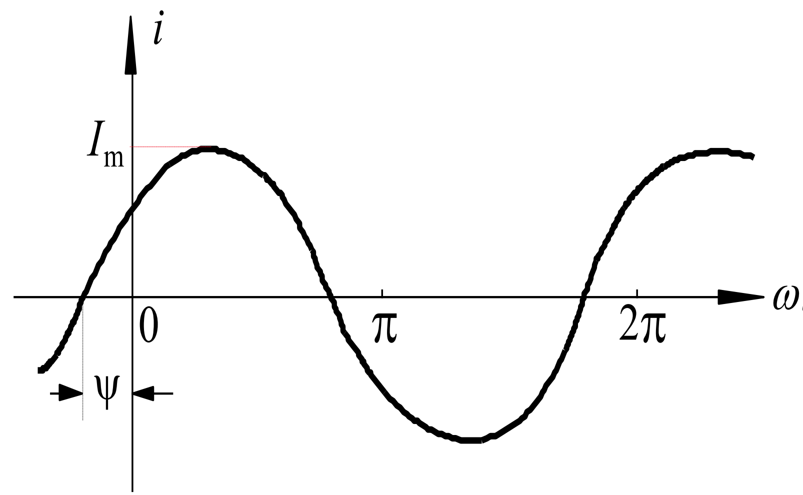
$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi) \qquad (1)$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta)$$

式中 $\theta=\psi-\dfrac{\pi}{2}$



(a)



(b)

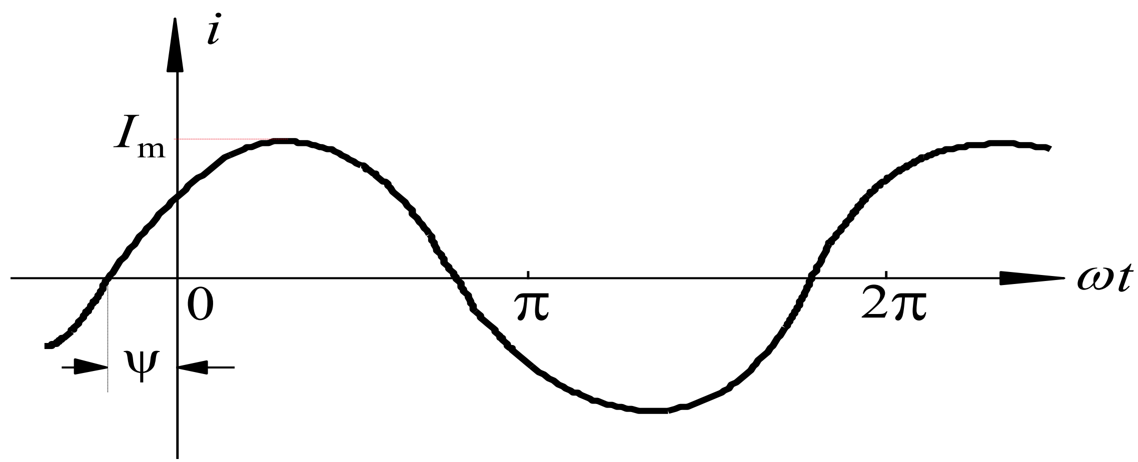
瞬时值—电流(电压)在任一瞬时的值称为电流(电压)的在该时刻的瞬时值

2. 正弦量的三要素: 振幅,角频率,初相

I_m—电流的幅值(最大值)

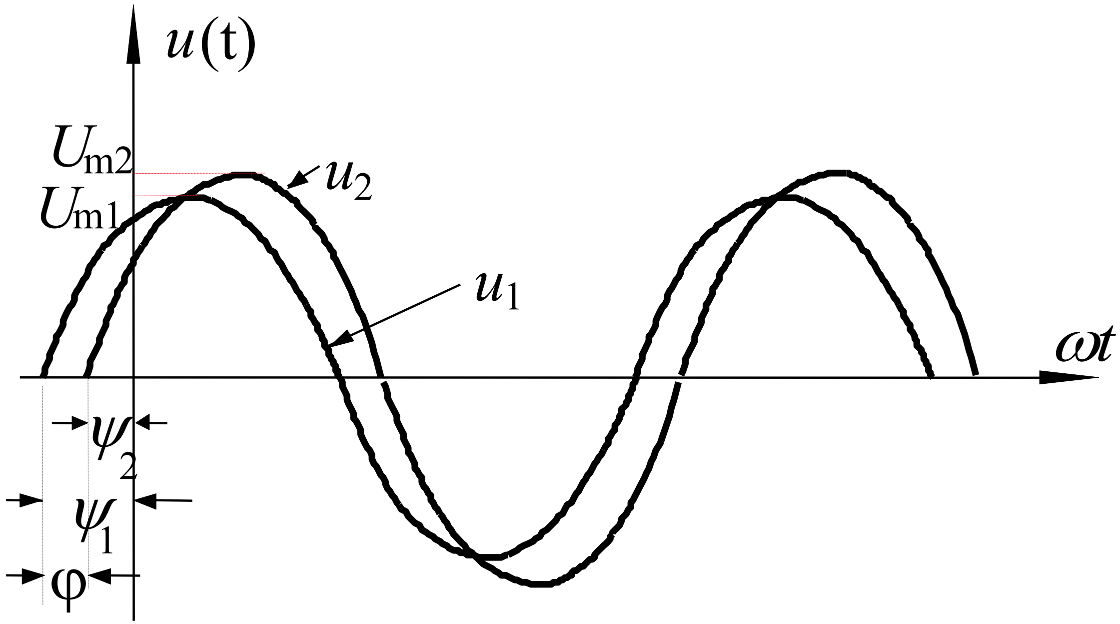
ω—角频率($\omega=2\pi f$) rad/s

ψ —初相 (t=0时刻的相位)



(b)

3. 正弦量的相位差和振幅的大小



$$u_1 = U_{m1}\sin(\omega t + \psi_1)$$

$$u_2 = U_{m2}\sin(\omega t + \psi_2)$$

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2$$

结论：频率相同的两个正弦量的相位差为初相位之差.

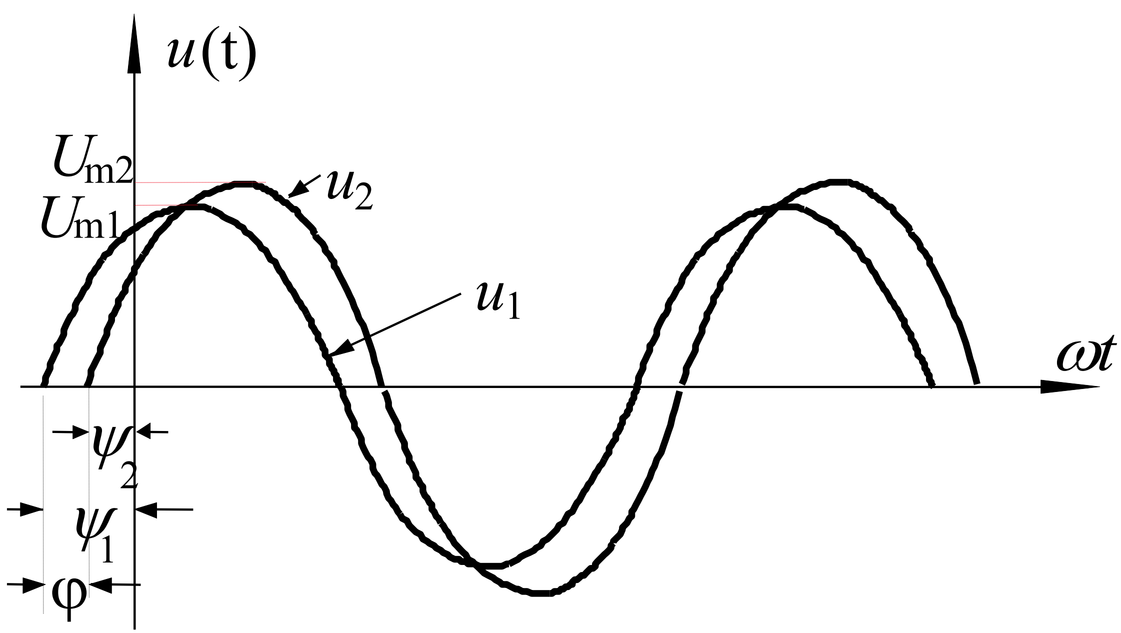
$\varphi > 0$ u_1在相位上超前u_2一个φ角。

$\varphi < 0$ 则相反

$\varphi = 0$ u_1，u_2同相

$\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ u_1与u_2在相位上相互正交

$\varphi = \pm\pi$ u_1与u_2反相



4.周期性电流，电压的有效值

有效值——周期电流 i 流过电阻R在一个周期内所作功与直流电流 I 流过电阻R在时间T内所做功相等，称此直流电流的量值为此周期性电流的有效值。

周期电流i流过R，在时间T内，i所作功为

$$W_1 = \int_0^T i^2 R dt$$

直流电流I流过电阻R在时间T内所作功为

$$W_2 = I^2 R \mathrm{T}$$

当两个电流在一个周期T内所做的功相等时，有

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$$

5. 正弦电流i的最大值I_m与有效值I之间的关系

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} I_m^2 \left[1 - \cos 2(\omega t + \psi)\right] dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2(\omega t + \psi)}{2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T}[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2(\omega t + \psi)}{4\omega}]\Big|_0^T}$$

$$= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m$$

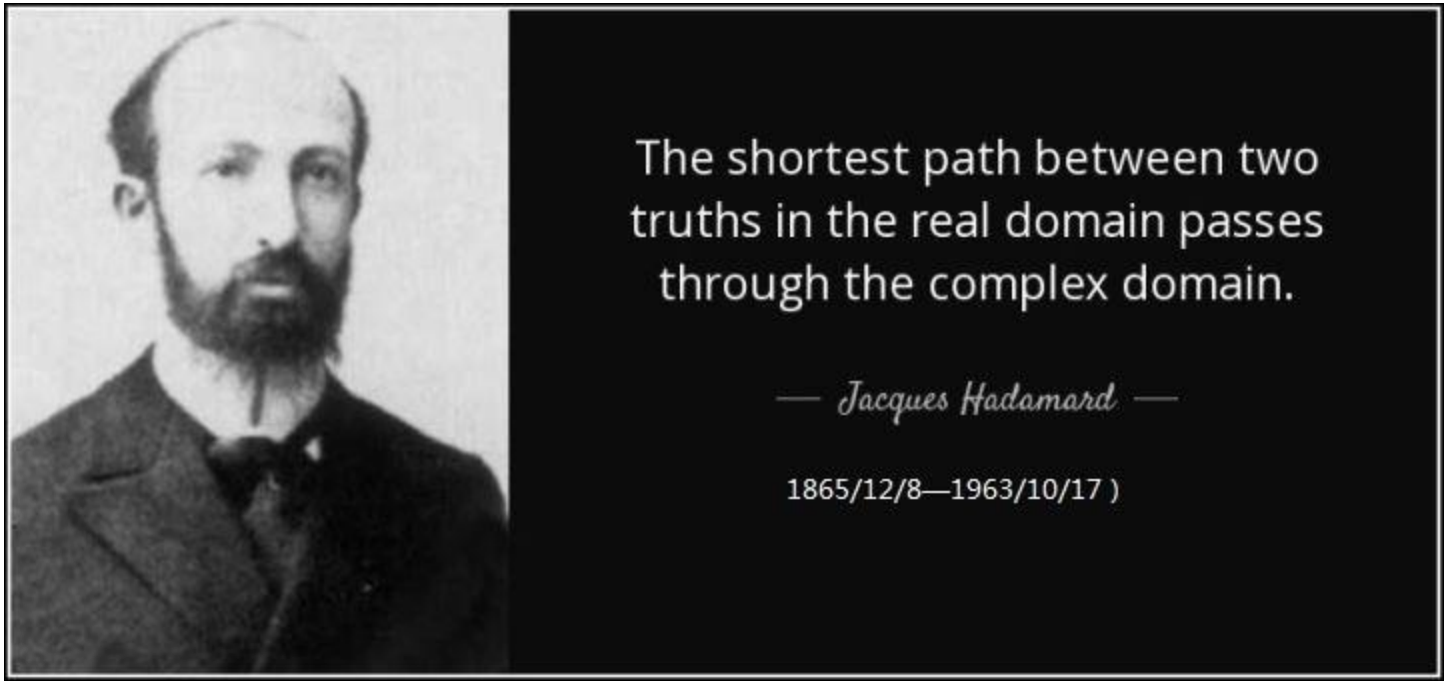
同理可得 $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$

结论：正弦量的最大值与有效值之比为

$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_i)$$

§5-2 线性电路对正弦激励的响应、正弦稳态响应

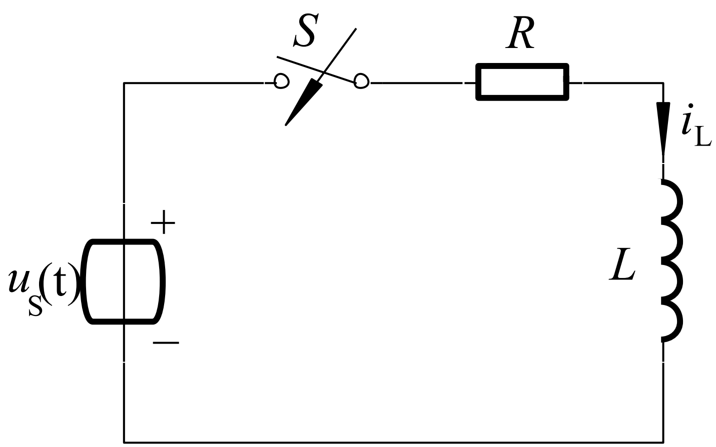


实数域两个真理间的最短路径要穿过复数域

阿达玛（Jacques Hadamard，1865—1963），数学学术泰斗，首次将集合论引进复变函数研究，1896年证明了著名的素数分布定理。

$$\mathrm{Im}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\frac{d\,\mathrm{Im}\left[f(t)\right]}{dt}$$

求下图RL串联电路电感电流的正弦稳态响应



已知 $u_s = U_m \sin(\omega t + \psi)$

$i_L(0_-) = 0$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (1)$$

假设式1方程的特解是一与电源同频的正弦时间函数

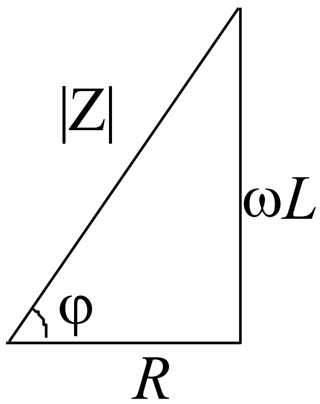
设 $i_{LS} = I_m \sin(\omega t + \theta)$

I_m, θ —— 分别为待求正弦电流的振幅和初相

将其代入(1)式得：

$$\omega L I_m \cos(\omega t + \theta) + R I_m \sin(\omega t + \theta) = U_m \sin(\omega t + \psi) \quad (2)$$

$$\boxed{\omega L I_m \cos(\omega t+\theta)+R I_m \sin(\omega t+\theta)=U_m \sin(\omega t+\psi) \quad (2)}$$



$$tg\varphi=\frac{\omega L}{R} \qquad |Z|=\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega L &= |Z|\sin\varphi \\ R &= |Z|\cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{代入(2)式}$$

则：

$$I_m|Z|\sin\varphi\cos(\omega t+\theta)+I_m|Z|\cos\varphi\sin(\omega t+\theta)$$

$$=I_m|Z|\sin(\omega t+\theta+\varphi)$$

于是得

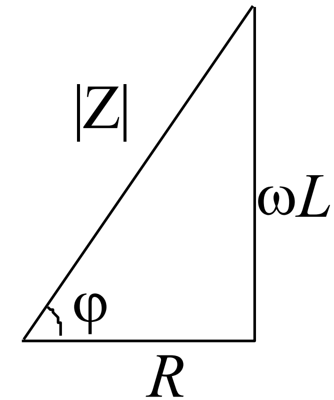
$$I_m|Z|\sin(\omega t+\theta+\varphi)=U_m\sin(\omega t+\psi)$$

可求得常数

$$I_m={U_m}\big/{|Z|} \qquad \theta=\psi-\varphi$$

或 $I_m = \dfrac{U_m}{|Z|} = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

$$\theta = \psi - \varphi = \psi - arctg\frac{\omega L}{R}$$



则特解为 $i_{LS} = \dfrac{U_m}{|Z|}\sin(\omega t + \psi - \varphi)$

而电路的微分方程的全解为：

$$i_L = i_{LS} + i_{Lt} = \frac{U_m}{|Z|}\sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

代入初始条件 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$

故有 $\dfrac{U_m}{|Z|}\sin(\psi - \varphi) + A = 0$

$$\therefore \quad A = -\frac{U_m}{|Z|}\sin(\psi - \varphi)$$

最后得解 $$i_L=\frac{U_m}{|Z|}\sin(\omega t+\psi-\varphi)-\frac{U_m}{|Z|}\sin(\psi-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(强制分量)　　(自由分量)

$$i_{LS}=\frac{U_m}{|Z|}\sin(\omega t+\psi+\varphi)$$ 是随时间变化的，

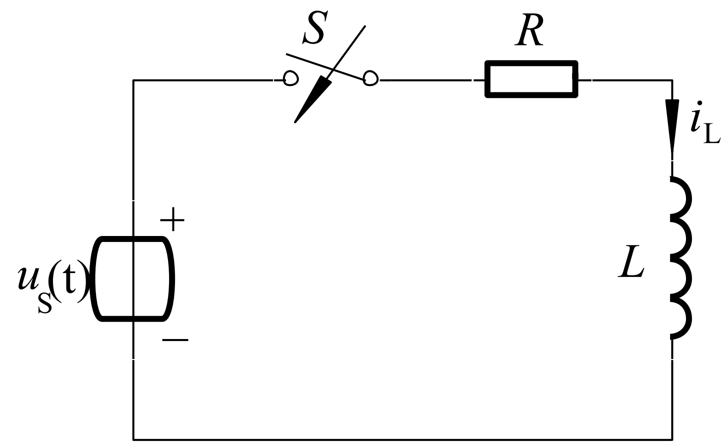
并且开关在不同时刻闭合（即不同ψ下），i_{LS}将不同。

自由分量中的系数$A=-\frac{U_m}{|Z|}\sin(\psi-\varphi)$在不同的$\psi$值下也具有不同的数值。且当t趋于无穷时，自由分量趋于零。

下面只关注强制分量（特解部分）。

复数域解法：

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_m\sin(\omega t+\psi)$$



将正弦函数扩展到复数域：

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_m e^{j(\omega t+\psi)}$$

设 $i_{LS}=\mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$　将其带入上式：　$j\omega LAe^{j\omega t}+RAe^{j\omega t}=U_m e^{j(\omega t+\psi)}$

消去公因子：　$A\left(j\omega L+R\right)=U_m e^{j\psi}$

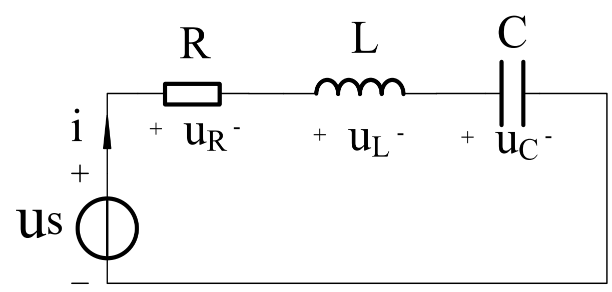
特解：　$i_{LS}=\mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{U_m}{(R+j\omega L)}e^{j(\omega t+\psi)}\right)=\frac{U_m}{|Z|}\sin(\omega t+\psi-\varphi)$$

其中：　$\left|Z\right|=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$　　$tg\varphi=\frac{\omega L}{R}$

例：已知 $u_s = U_m \sin(\omega t + \psi)$，求图示正弦稳态响应$u_C(t)$

解：电路输入输出方程如下：



$$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U_m}{LC}\sin(\omega t + \psi)$$

将正弦函数扩展到复数域：

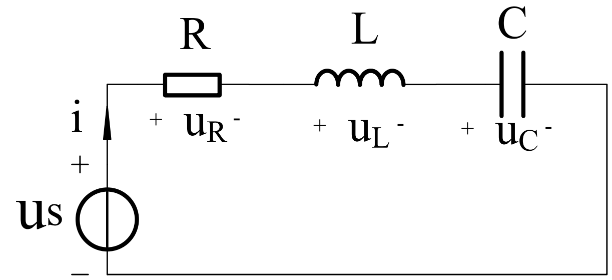
$$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{U_m}{LC}e^{j(\omega t + \psi)}$$

设 $u_{CS} = \mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$　将其带入上式：

$$-\omega^2 Ae^{j\omega t} + j\omega\frac{R}{L}Ae^{j\omega t} + \frac{1}{LC}Ae^{j\omega t} = \frac{U_m}{LC}e^{j(\omega t + \psi)}$$

消去公因子：　$$A\left(-\omega^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right) = \frac{U_m}{LC}e^{j\psi}$$

解得：$A=\dfrac{U_m}{\left(1-\omega^2LC+j\omega RC\right)}e^{j\psi}$



特解：$u_{CS}=\mathrm{Im}(Ae^{j\omega t})$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{U_m}{\left(1-\omega^2LC+j\omega RC\right)}e^{j(\omega t+\psi)}\right)$$

设：$|X|=\sqrt{\left(1-\omega^2LC\right)^2+\left(\omega RC\right)^2}$ $\quad\varphi=arctg\left(\dfrac{\omega RC}{1-\omega^2LC}\right)$

则：$u_{CS}=\dfrac{U_m}{|X|}\sin\left(\omega t+\psi-\varphi\right)$

电容电压正弦稳态响应的幅值和初相会随着激励信号角频率的变化而发生改变。

作业：

5-1-1

5-1-4

5-1-5

5-5 (2) , (3)

5-7