第二节　初等函数

- 一、指数函数
- 二、对数函数
- 三、幂函数
- 四、三角函数和双曲函数
- 五、小结与思考

一、指数函数

1. 指数函数的定义:

对于复变数 $z = x + iy$，由关系式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

所确定的函数称为**指数函数**.

2. 指数函数的性质

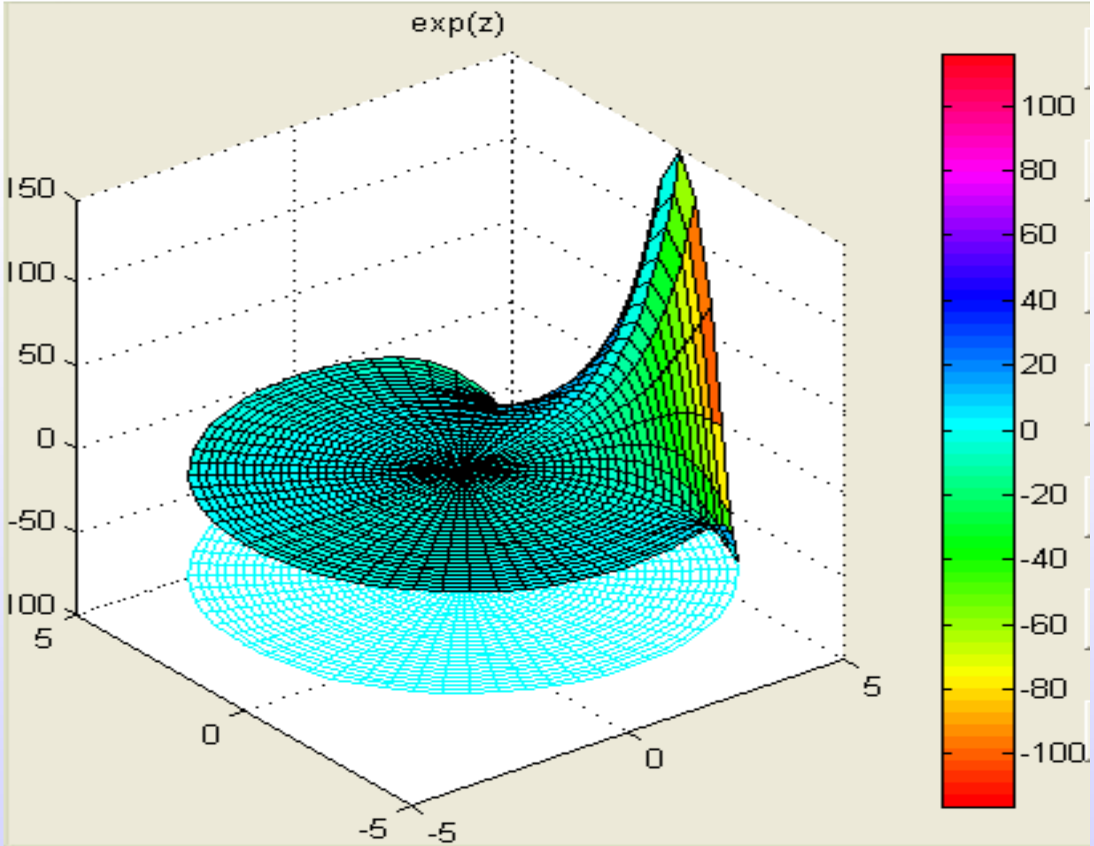
(1) 指数函数在复平面处处不为零.

(2) 加法定理 $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

(3) e^z 的周期是$2k\pi i$,

即 $e^{z+2k\pi i}=e^z\cdot e^{2k\pi i}=e^z$. (其中$k$为任何整数)

(4) e^z在复平面内处处解析, $(e^z)'=e^z$.



Exp(z)的图像 z=4*cplxgrid(30); cplxmap(z, exp(z)) .

例1 设 $z=x+iy$, 求(1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\operatorname{Arg}(e^{z^2})$; (3) $\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 (1) $e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)}$,

$$\left|e^{i-2z}\right|=e^{-2x};$$

(2) $e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi}$,

$$\operatorname{Arg}(e^{z^2})=2xy+2k\pi,\quad k\text{取任意整数}$$

(3) $e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+yi}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$,

$$\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期.

解 e^{z} 的周期是$2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}$$

$$=f(z+10k\pi i),$$

故函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是$10k\pi i$.

二、对数函数

1. 定义

满足方程 $e^{w}=z\ (z\neq 0)$ 的函数 $w=f(z)$ 称为对数函数, 记为 $w=\mathrm{Ln}z$.

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i.$$

由于 $\mathrm{Arg}z$ 为多值函数, 所以对数函数 $w=f(z)$ 也是多值函数, 并且每两值相差 $2\pi i$的整数倍.

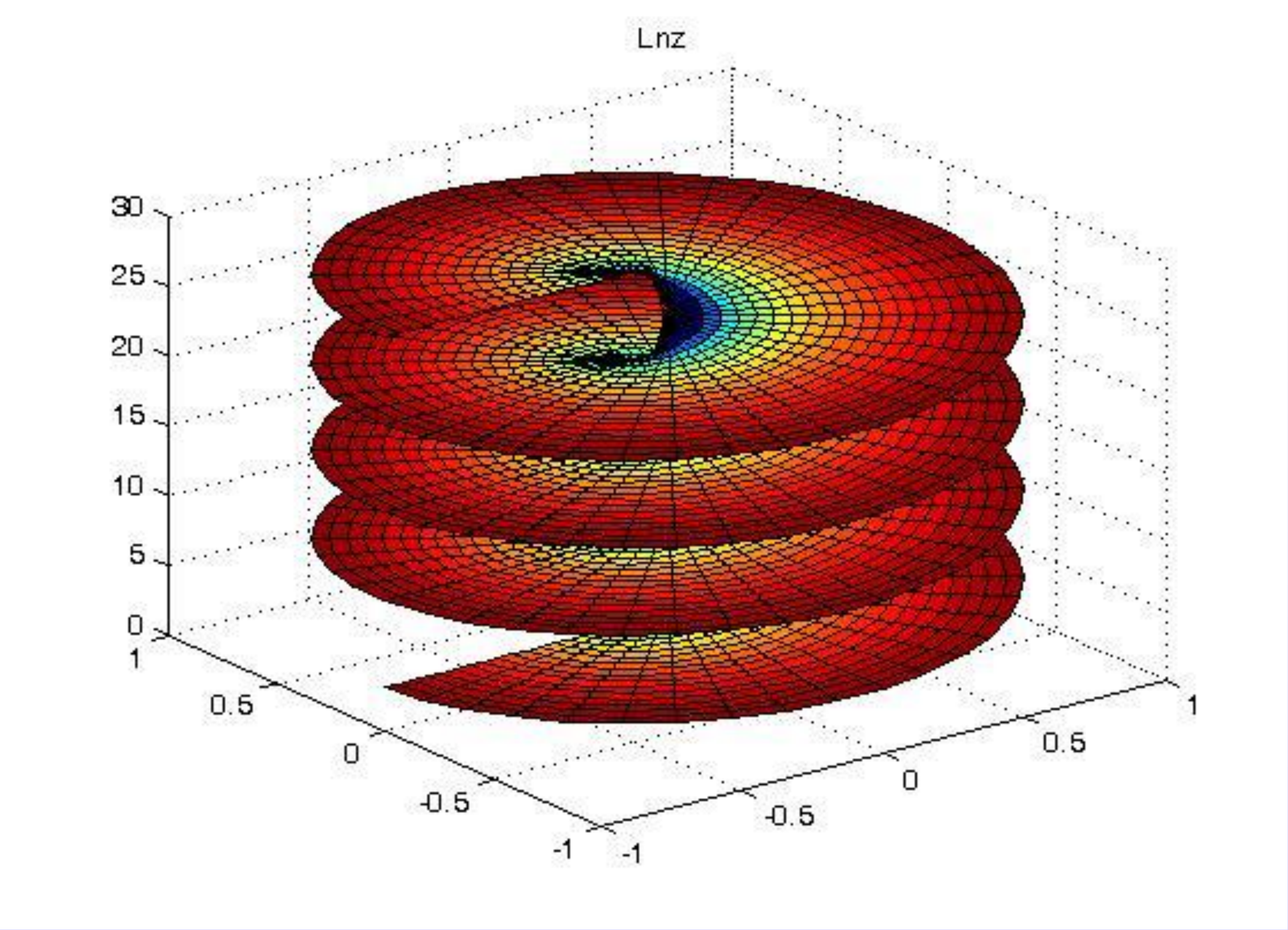
对于每一个固定的k,可得一个单值函数,称为$\mathrm{Ln}z$的第k个分支.

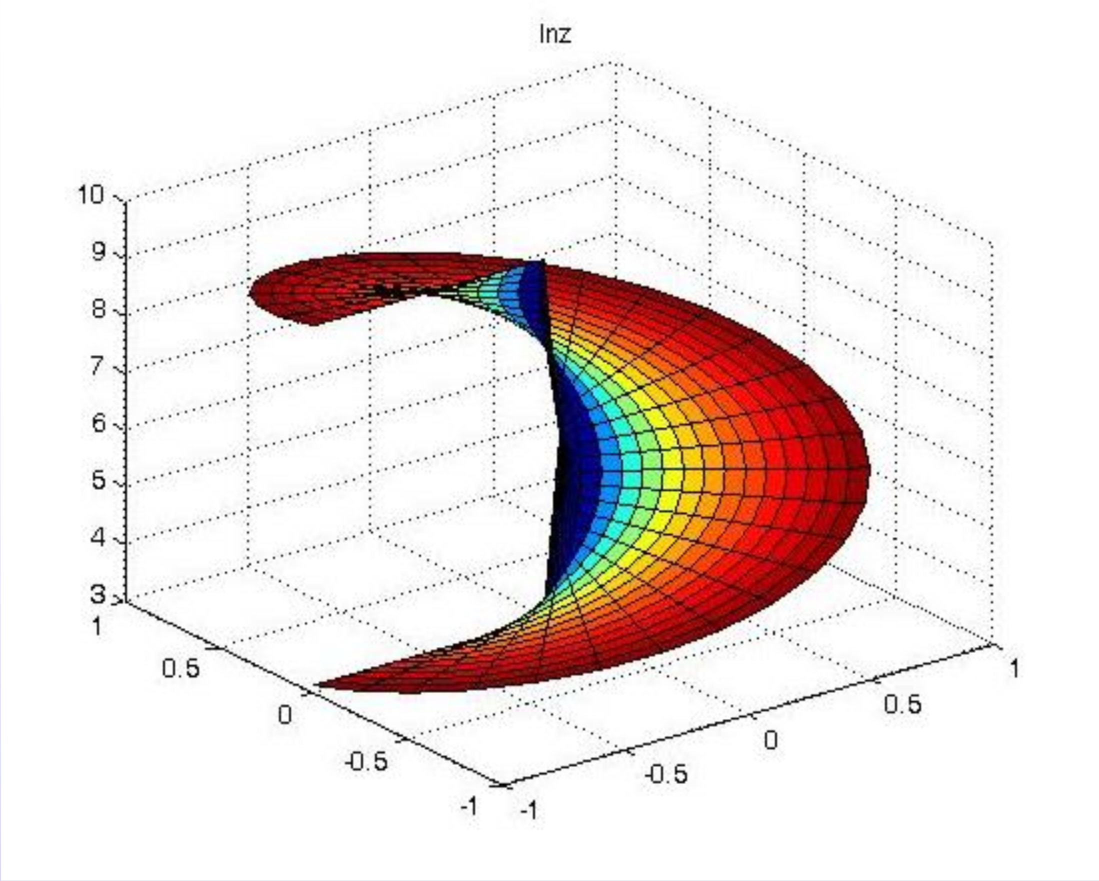
$k=0$时，称

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

为对数函数的主值，记为$\ln z$.

其余各值为 $\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i \quad (k=\pm1,\pm2,\cdots)$,


Lnz
30
25
20
15
10
5
0
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


lnz
10
9
8
7
6
5
4
3
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

例4 求 $\mathrm{Ln}(-1)$, $\mathrm{Ln}(1+i)$以及与它们相应的主值.

解 因为 $\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i\mathrm{Arg}(-1)$

$$=(2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

所以 $\mathrm{Ln}(-1)$的主值就是 πi.

因为 $\mathrm{Ln}(1+i)=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}i+2k\pi i$,

所以 $\mathrm{Ln}(1+i)$的主值就是 $\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}i$.

注意: 在实变函数中, 负数无对数, 而复变数对数函数是实变数对数函数的拓广.

例5 求下列各式的值:

$$(1)\mathrm{Ln}(-2+3i);\quad (2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i);\quad (3)\mathrm{Ln}(-3).$$

解 $(1)\mathrm{Ln}(-2+3i)$

$$=\ln\left|-2+3i\right|+i\mathrm{Arg}(-2+3i)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}+2k\pi\right).$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(2)\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln\left|3-\sqrt{3}i\right|+i\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(\arctan\frac{-\sqrt{3}}{3}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right). \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$(3)\mathrm{Ln}(-3)=\ln\left|-3\right|+i\mathrm{Arg}(-3)$$

$$=\ln 3+(2k+1)\pi i. \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

例6 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0.$

解 因为 $e^z = 1 + \sqrt{3}i,$

所以 $z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$

$$= \ln\left|1 + \sqrt{3}i\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

2. 性质

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$,

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2$,

(3) 在除去负实轴(包括原点)的复平面内,主值支和其它各分支处处连续,处处可导,且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}.$$

证 (3) 设 $z = x + iy$, 当 $x < 0$ 时,

$$\lim_{y\to 0^-} \arg z = -\pi, \qquad \lim_{y\to 0^+} \arg z = \pi,$$

所以,除原点与负实轴,在复平面内其它点 $\ln z$ 处处连续.

利用C - R方程可以验证，对数函数的各个分支在复平面上除去原点与负实轴外处处解析，并且

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

[证毕]

（4） $\mathrm{Ln}z^n \neq n\mathrm{Ln}z$

$$\mathrm{Ln}z + \mathrm{Ln}z \neq 2\mathrm{Ln}z$$

原因：有限个无穷集合相加，不一定是对应部分相加.

例：

Bernoulli 悖论

原因

$$(1)\because z^2=(-z)^2$$

$$\Rightarrow (2)\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}(-z)^2$$

$$\Rightarrow (3)\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)$$

$$\Rightarrow (4)2\mathrm{Ln}z=2\mathrm{Ln}(-z)$$

$$\Rightarrow (5)\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(-z)$$

因为 $\mathrm{Ln}(-1)=(2k+1)\pi i \quad k=0,\pm1,\pm$

$\mathrm{Ln}(1)=2k\pi i \quad k=0,\pm1,\pm$

Lnz是集合记号，应该理解为两个集合相加

A={0,1}

A+A={0,1,2}

2A={0,2}

A+A≠2A

机动 目录 上页 下页 返回 结束

三、幂函数

1. 幂函数的定义

对于任意复数α, 当$z \neq 0$时,

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}$$

称为z的幂函数.

注意: 由于 $\mathrm{Ln} z$是多值的, 因而z^{α} 也是多值的.

$$z^{\alpha} = e^{\alpha(\ln|z| + i\mathrm{Arg} z)} = e^{\alpha \ln|z| + i\alpha \arg z + 2k\pi\alpha i}$$

$$= |z|^{\alpha}\, e^{i\alpha \arg z + 2k\pi\alpha i} \quad (k\text{为整数})$$

(1) 当$\alpha = n$为整数时,

$$z^{\alpha} = e^{n\mathrm{Ln}z} = |z|^{n} e^{in\arg z}.$$

单值函数.

(2) 当$\alpha = \dfrac{1}{n}(n > 1)$ 时,

$$z^{\alpha} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}.$$

即为根式函数$\sqrt[n]{z}$.

(3) 当$\alpha=\dfrac{m}{n}$为有理数时,

$$z^{\alpha}=e^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}z}=|z|^{\frac{m}{n}}e^{\frac{im\arg z+2mk\pi}{n}(k=0,1,\cdots,n-1)}.$$

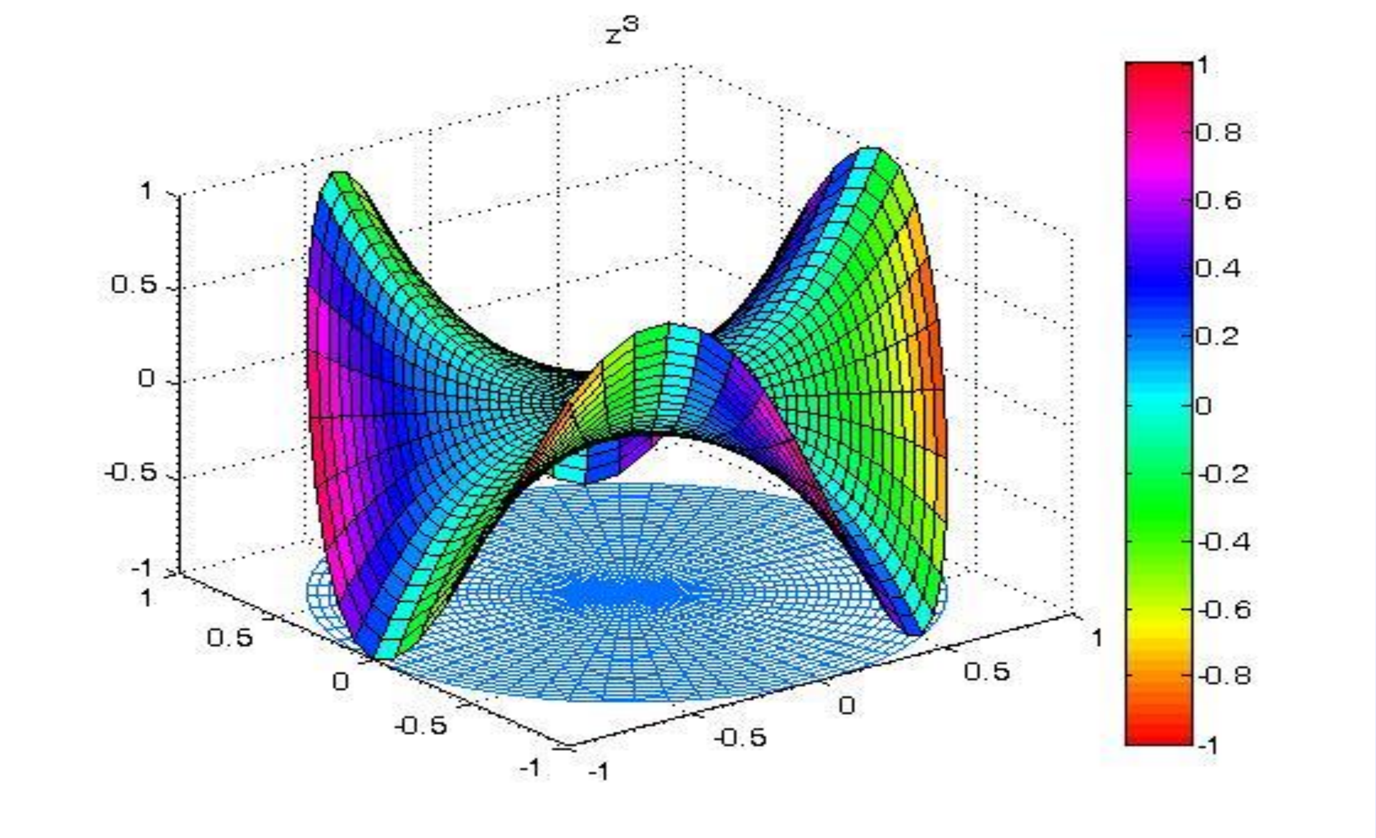
也是一个n值函数.

(4) 当α为无理数或任意复数时,

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\ln z}=e^{\alpha(\ln|z|+i\mathrm{Arg}z)}$$

导数为

$$(z^{\alpha})'=\alpha z^{\alpha-1}.$$



z^3
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1

例7 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1}=e^{2k\pi i\cdot\sqrt{2}}$

$=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

$i^{i}=e^{i\mathrm{Ln}i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

课堂练习 计算 $(-3)^{\sqrt{5}}.$

答案 $(-3)^{\sqrt{5}}=3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(2k+1)\pi+i\sin\sqrt{5}(2k+1)\pi].$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

例8 求 $(1+i)^i$ 的辐角的主值.

解 $(1+i)^i = e^{i\mathrm{Ln}(1+i)} = e^{i[\ln|1+i|+i\mathrm{Arg}(1+i)]}$

$$= e^{i\left[\frac{1}{2}\ln 2+\left(\frac{\pi}{4}i+2k\pi i\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

故 $(1+i)^i$ 的辐角的主值为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

四、三角函数和双曲函数

1. 三角函数的定义

因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y,$

将两式相加与相减, 得

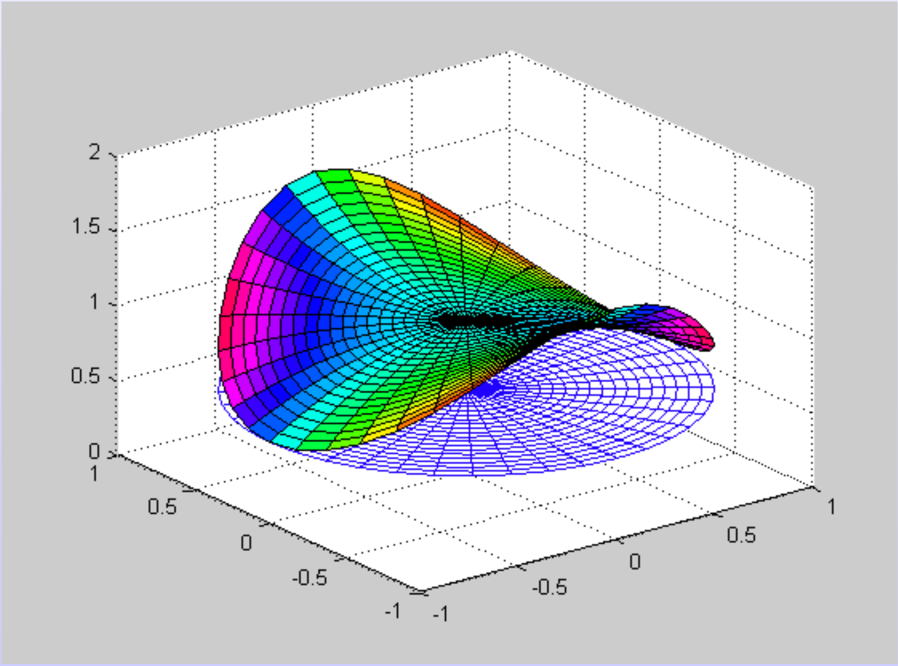
$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

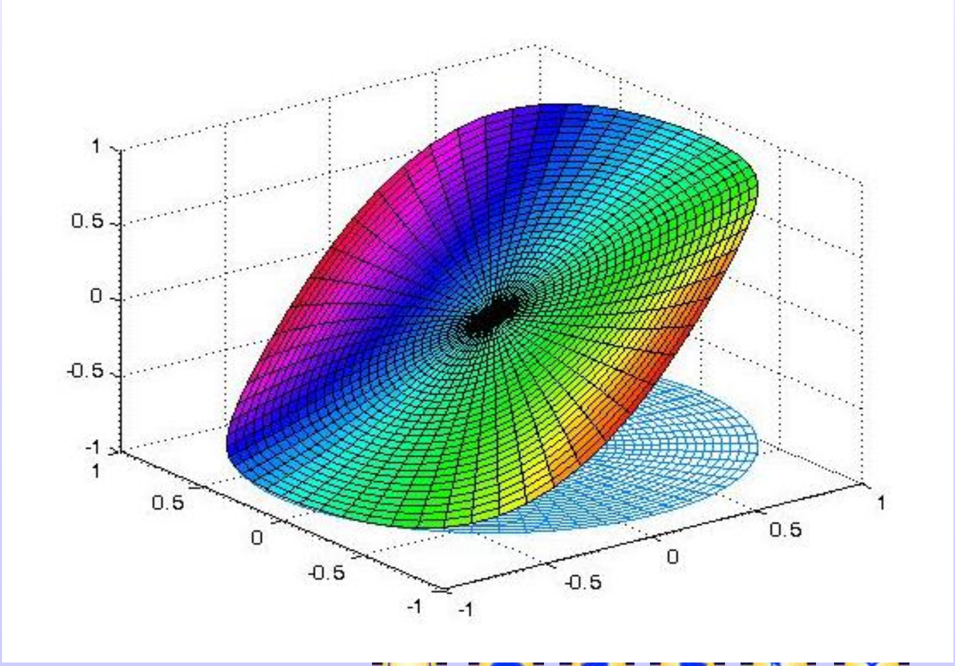
现在把余弦函数和正弦函数的定义推广到自变数取复值的情况.

定义： 余弦函数$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，

正弦函数为$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

cos(z)的图像 z=cplxgrid(30); cplxmap(z,cos(z)) .





性质：

1.正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的.

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z.$$

2.正弦函数和余弦函数在复平面内都是解析函数.

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z.$$

3. $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数.

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z.$$

4.有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

(1) $$\begin{cases}\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,\\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,\\ \sin^2 z+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi,\\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi.\end{cases}$$

5. $\sin z, \cos z$ 不再有界.　　当 z 为纯虚数 yi 时,

$$\cos yi = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y,$$

$$\sin yi = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \sinh y.$$

当 $y \to \infty$ 时, $|\sin yi| \to \infty$, $|\cos yi| \to \infty$.

（注意：这是与实变函数完全不同的）

其他复变数三角函数的定义

正切函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$, 余切函数 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$, 余割函数 $\csc z=\dfrac{1}{\sin z}$.

与 $\sin z$ 和 $\cos z$ 类似,我们可以讨论它们的周期性,奇偶性,解析性.

例9 求 $\cos(1+i)$ 的值.

解 $$\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1$$

$$=\cos 1\cosh 1-i\sin 1\sinh 1.$$

2. 双曲函数的定义

我们定义双曲余弦函数为 $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2},$

双曲正弦函数为 $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2},$

双曲正切函数为 $\tanh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$

当 z 为实数 x 时,它与高等数学中的双曲函数的定义完全一致.

容易证明, $\sinh z$ 是奇函数, $\cosh z$ 是偶函数.

它们都是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数,

它们的导数分别为

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

并有如下公式:

$$\cosh yi = \cos y, \qquad \sinh yi = i \sin y.$$

$$\begin{cases} \cosh(x+yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \\ \sinh(x+yi) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \end{cases}$$

五、反三角函数和反双曲函数

1. 反三角函数的定义

设 $z=\cos w$，那么称 w 为 z 的反余弦函数，记作 $w=\operatorname{Arccos} z$.

由 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$，得 $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$，

方程的根为 $e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$，两端取对数得

$$\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

同样可以定义反正弦函数和反正切函数,

重复以上步骤, 可以得到它们的表达式:

$$\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\mathrm{Arctan}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

2. 反双曲函数的定义

反双曲正弦 $\mathrm{Arsinh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}),$

反双曲余弦 $\mathrm{Arcosh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$

反双曲正切 $\mathrm{Artanh}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$

六、小结与思考

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了后者的某些基本性质，又有一些与后者不同的特性. 如:

1. 指数函数具有周期性 (周期为 $2\pi i$)

2. 负数无对数的结论不再成立

3. 三角正弦与余弦不再具有有界性

4. 双曲正弦与余弦都是周期函数

思考题

实变三角函数与复变三角函数在性质上有哪些异同?

思考题答案

两者在函数的奇偶性、周期性、可导性上是类似的, 而且导数的形式、加法定理、正余弦函数的平方和等公式也有相同的形式.

最大的区别是, 实变三角函数中, 正余弦函数都是有界函数, 但在复变三角函数中,

$|\sin z| \le 1$ 与 $|\cos z| \le 1$ 不再成立.

作业：P30 10, 16, 17

放映结束，按Esc退出.