第三节　泰勒级数

- 一、泰勒定理
- 二、将函数展开成泰勒级数
- 三、唯一性定理与最大模原理
- 四、小结与思考

一、泰勒定理

定理4.9　设$f(z)$在圆K: $|z-z_0|< R$内解析, 则$f(z)$在 K内可以展成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

泰勒展开式　　泰勒级数

其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\cdots\cdots$

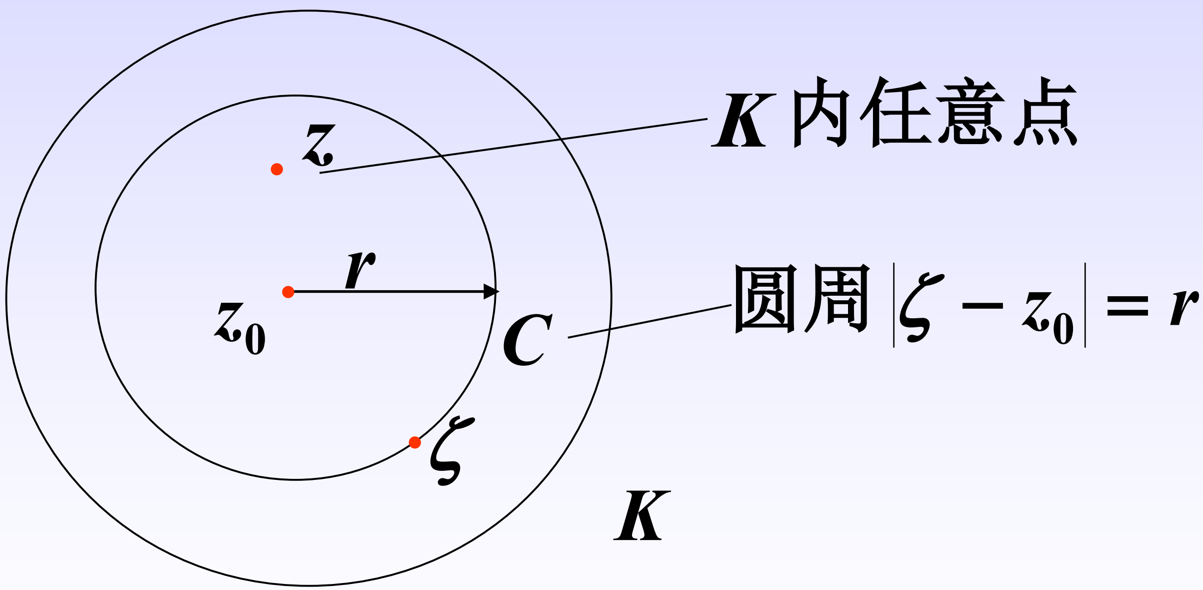
并且展式是唯一的.

泰勒介绍

证明:

设函数$f(z)$在圆K: $|z-z_0|<R$内解析，z为K内任意点，$|\zeta - z_0| = r$ 为 K 内以 z_0 为中心包含z的圆周，记为 C，

如图:



由柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$ 其中 C 取正方向.

因为积分变量 ζ 取在圆周 C 上，点 z 在 C 的内部，

所以 $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1.$ 则

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

于是 $$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta.$$

由高阶导数公式, 上式又可写成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)$$

其中 $R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta$

若 $\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$,

可知在K内 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

即 $f(z)$ 在 C 内可以用幂级数来表示，

令 $$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} = q$$

q 是与积分变量 ζ 无关的量，且 $0 \le q < 1$，

$f(z)$ 在 $K\ (C \subset K)$ 内解析，则在 C 上连续，

因此 $f(\zeta)$ 在 C 上也连续，$f(\zeta)$ 在 C 上有界，

即存在一个正常数M，在C上$\left|f(\zeta)\right|\le M$.

$$\left|R_N(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_C \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right|\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_C \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\left|f(\zeta)\right|}{\left|\zeta-z_0\right|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r = \frac{Mq^N}{1-q}.$$

$\lim\limits_{N\to\infty} q^N = 0 \longrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 C 内成立,

从而在C内 $f(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$ 泰勒级数

$f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式,

下证唯一性.

设 $f(z)$ 在 z_0 已被展开成幂级数：

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

那末 $f(z_0)=a_0,\ f'(z_0)=a_1,\quad \cdots\cdots$

即 $$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\,,\cdots$$

因此, 任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数, 因而是唯一的.

说明:

1. 当 $z_0 = 0$ 时, 级数称为麦克劳林级

2. 复变函数展开为泰勒级数，比实变函数展开成幂级数的条件弱。

定理4.10 函数 $f(z)$ 在 z_0 解析的充分必要条件是 $f(z)$ 在z_0 的邻域内可以展成幂级数.

定理4.11 幂级数的和函数在它的收敛圆周上至少有一个奇点.

结论：如果函数 $f(z)$ 在D内有奇点，则R等于 z_0 到最近一个奇点α之间的距离.

二、将函数展开成泰勒级数

常用方法: 直接法和间接法.

1.直接法:

由泰勒展开定理计算系数

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

将函数 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数.

例如，求 e^z 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

因为 $(e^z)^{(n)}=e^z$,

$$(e^z)^{(n)}\Big|_{z=0}=1,\ (n=0,1,2,\cdots)$$

故有 $$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

因为 e^z 在复平面内处处解析,

所以级数的收敛半径 $R=\infty$.

仿照上例，可得 $\sin z$ 与 $\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ,$$

$$(R=\infty)$$

附: 常见函数的泰勒展开式

1) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (|z| < \infty)$$

2) $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

3) $$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$
$$(|z| < 1)$$

4) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$(|z| < \infty)$$

5) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$

$(|z| < \infty)$

6) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

7) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

2. 间接展开法 :

借助于一些已知函数的展开式 , 结合解析函数的性质, 幂级数运算性质 (逐项求导, 积分等)和其它数学技巧 (代换等) , 求函数的泰勒展开式.

间接法的优点:

不需要求各阶导数与收敛半径 , 因而比直接展开更为简洁 , 使用范围也更为广泛 .

(1) 换元法

例1　求 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解　显然$z=1$是函数的唯一奇点，于是它可在$|z|<1$内展开成幂级数，

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e\cdot e^{\frac{z}{1-z}}=e\cdot e^{z+z^2+\cdots+z^n+\cdots}$$

$$=e\cdot[1+(z+z^2+\cdots)+\frac{1}{2!}(z+z^2+\cdots)^2+\cdots]$$

$$=e\cdot[1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots],|z|<1.$$

(2) 逐项积分、求导法

例2　将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 展成 $z-i$ 的幂级数.

解

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\frac{1}{1-i-(z-i)}\right)'=\left[\frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\right]'$$

$$=\frac{1}{1-i}\left[1+\frac{z-i}{1-i}+\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n+\cdots\right]'$$

$$=\frac{1}{(1-i)^2}\left[1+2\left(\frac{z-i}{1-i}\right)+\cdots+n\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^{n-1}+\cdots\right],$$

$$|z-i|<\sqrt{2}.$$

例3 求$\arctan z$在$z=0$的幂级数展开式.

解 因为 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$,

且 $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n, \quad |z|<1$

所以 $\arctan z=\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z^2)^n\mathrm{d}z$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z|<1.$$

(3) 微分方程法

例4 将$\dfrac{e^z}{1+z}$展为麦克劳林级数.

解 **微分方程法** 因为$\dfrac{e^z}{1+z}$的唯一奇点为$z=-1$,

所以收敛半径为1, 可在$|z|<1$内进行展开,

令$f(z)=\dfrac{e^z}{1+z}$, 对 $f(z)$ 求导得 $f'(z)=\dfrac{ze^z}{(1+z)^2}$,

即微分方程 $(1+z)f'(z)-zf(z)=0$

对微分方程逐次求导得:

$$(1+z)f''(z)+(1-z)f'(z)-f(z)=0$$

$$(1+z)f'''(z)+(2-z)f''(z)-2f'(z)=0$$

$$\cdots\quad\cdots$$

由 $f(0)=1$, 得 $f'(0)=0, f''(0)=1, f'''(0)=-2,\cdots$

所以$f(z)$的麦克劳林级数为

$$\frac{e^z}{1+z}=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

(4) 柯西乘积

收敛半径为1, 可在 $|z|<1$ 内进行展开,

而 $e^z = 1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

所以 $\dfrac{e^z}{1+z}=1+(1-1)z+(\dfrac{1}{2!}-1+1)z^2$

$$+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}+1-1)z^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3+\cdots,\quad |z|<1.$$

	1	$-z$	z^2	$-z^3$
1	1	$-z$	z^2	$-z^3$
z	z	$-z^2$	z^3	$-z^4$
$\frac{z^2}{2!}$	$\frac{z^2}{2!}$	$-\frac{z^3}{2!}$	$\frac{z^4}{2!}$	$-\frac{z^5}{2!}$
$\frac{z^3}{3!}$	$\frac{z^3}{3!}$	$-\frac{z^4}{3!}$	$\frac{z^5}{3!}$	$-\frac{z^6}{3!}$

(5) 利用幂级数的四则运算。

例5 求 $\tan z$ 在 $z=0$ 的泰勒展式。

解 因 $z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 是$\tan z$ 中距 $z=0$ 最近的奇点，

所求幂级数的收敛半径为$R=\pi/2$. 设

$$\tan z = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

由于$\sin z=\tan z\cos z$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

利用级数乘法， 再比较两端同次幂的系数得

$$0=a_0,\quad 1=a_1,\quad 0=a_2-\frac{1}{2}a_0,\quad -\frac{1}{3!}=a_3-\frac{1}{2}a_1,$$

$$0=a_4-\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{4!}a_0,\quad \frac{1}{5!}=a_5-\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{4!}a_1,\cdots$$

故

$$\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots,\ |z|<\frac{\pi}{2}.$$

三、解析函数的唯一性定理

1. 解析函数的零点及唯一性定理

定义 设$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析，$f(z)$不恒为零.

若$f(z_0)=0$, 则称 $z=z_0$是$f(z)$的零点. 若

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ (n=0,1,2,\cdots m-1);\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

则称 $z=z_0$ 是$f(z)$ 的 m 级零点.

零点等价定义:

不恒等于零的解析函数$f(z)$如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),$$

其中$\varphi(z)$在z_0邻域内解析且$\varphi(z_0)\neq 0$, m为某一正整数,

则称 z_0 是$f(z)$ 的 m 级零点.

定理 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析且不恒为零，z_0 为其零点，则存在z_0的一个邻域，$f(z)$在此邻域中除了$z=z_0$外，没有其它零点.

不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

引理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$是D内彼此不同的点列，且$\{z_n\}$在 D 内有聚点.
若$f(z_n)=0(n=1, 2, \ldots)$，则在 D 内，$f(z)\equiv 0$.

唯一性定理 设函数 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$是D内彼此不同的点列，且$\{z_n\}$在 D 内有聚点. 若$f(z_n) = g(z_n)(n=1, 2, \ldots)$，则在 D 内，$f(z) \equiv g(z)$.

推论： 设函数 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 D 内解析，若它们在某一子区域或某一子弧段相等， 则在D 内相等.

注： 在 D 内有聚点条件不可以去掉.

$$\sin\frac{1}{z-1}$$

有无穷多个零点，但不恒为零.

2. 最大模原理

定理: 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，并且不为常数，则 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最大值.

证 假设 $|f(z)|$在D内某一点z_0达到最大值, 即

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|, z \in D \qquad (1)$$

设 z_0 的邻域 $B(z_0, R) \subset D$，l为$B(z_0, R)$内以z_0为中心，$r\,(0 < r < R)$为半径的任意圆周, 则(1)式在 l 上成立.

若能证明在l上必有

$$|f(z)| \equiv |f(z_0)|, \quad z \in l, \qquad (2)$$

则由 l 的任意性，在$B(z_0, R)$内，必有

$$|f(z)| \equiv |f(z_0)|,$$

因此 $f(z)$ 在 $B(z_0, R)$ 内为常数，由唯一性定理知 $f(z)$ 在 D 内为常数，矛盾. 定理成立.

下证(2)式成立.

若(2)不成立，必存在 $z_1 = z_0 + re^{i\theta_1} \in l$, 使得

$$|f(z_0)| > |f(z_1)|.$$

由于$f(z)$在l上连续, 故当$\theta \in [\theta_1 - \delta, \theta_1 + \delta](\delta > 0)$

时，有

$$|f(z)|=|f(z_0+re^{i\theta})|<|f(z_0)|.$$

由平均值公式，

$$|f(z_0)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{\theta_1-\delta}^{\theta_1+\delta}|f(z_0+re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta+\int_0^{\theta_1-\delta}|f(z_0+re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\right.$$

$$\left.+\int_{\theta_1+\delta}^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\right]$$

$$< \frac{1}{2\pi}[|f(z_0)|\cdot 2\delta + |f(z_0)|(2\pi - 2\delta)]$$

$$= |f(z_0)|.$$

矛盾，所以(2)式成立.

推论1： 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $D+C$上连续，则 $|f(z)|$ 在 C上取到最大值.

推论2： 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 非常值，则 $\mathrm{Re}f(z)$ 在 D内取不到最大值.

推论3： 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 非常值，$f \neq 0$, 则 $|f(z)|$ 在 D内取不到最小值.

五、小结与思考

通过本课的学习, 应理解泰勒展开定理,熟记五个基本函数的泰勒展开式,掌握将函数展开成泰勒级数的方法, 能比较熟练的把一些解析函数展开成泰勒级数.

理解唯一性定理和最大模原理的含义，会简单应用。

作业：P75 3(1)(2)(3), 4(2) (4), 7