§4-5 一阶电路的冲激响应

冲激响应：一阶电路在单位冲激函数δ(t)的激励下（用h(t)表示）所产生的零状态响应。

δ(t) 可视为在 $t=0$时刻作用的幅度为无限大而持续时间为无限短的信号。

$$h(t)=0 \qquad t<0$$

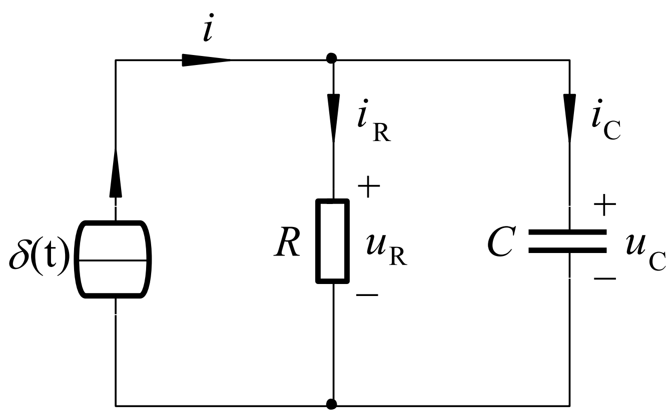
冲激信号作用于零状态电路所引起的响应可以分为两个阶段：

(1) $t=0_{-} \sim t=0_{+}$，电路受冲激信号激励，u_c 或 i_L 发生跃变，储能元件得到能量。电路建立了在 $t=0_{+}$时的初始状态。

(2) $t>0$ 时，δ(t)为零，电路的响应为电路在 $t=0$ 时建立的初始状态所引起的零输入响应。

1. RC并联电路的冲激响应

例： RC并联接至冲激电流源的电路，求u_c和 i_c的冲激响应。



解： 由KCL，有

$$i_c + i_R = \delta(t)$$

即 $$C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = \delta(t) \qquad t \geq 0_- \qquad (1)$$

$$u_c(0_-) = 0$$

如何求u_c？

由于冲激函数$\delta(t)$仅在t=0时作用于电路，而在t>0时其值为0，因而t>0，由$\delta(t)$引起的响应相当于零输入响应。问题的关键是确定t=0时冲激函数$\delta(t)$对电路所提供的初始状态，因此将方程(1)两边从0_-到 0_+积分得

$$C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R}=\delta(t) \qquad t\geq 0_-$$

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{du_C}{dt}dt+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u_C}{R}dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt$$

上式左方第二项的值取决于u_c在t=0时是否是有界函数

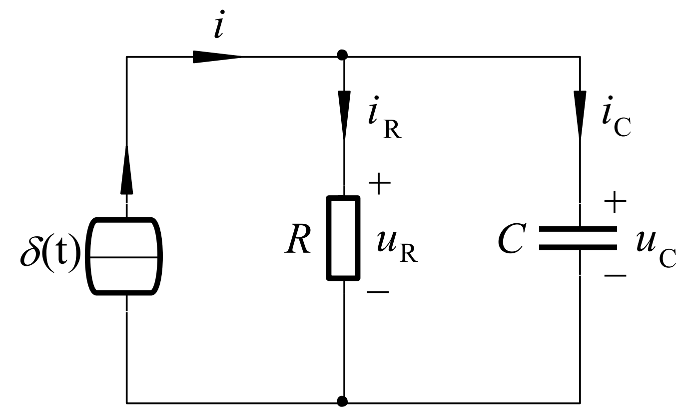
若 u_c为有界函数,则该项为0;若 u_c为无界函数,即含$\delta(t)$因子则该项不为0.设 u_c中含有 $\delta(t)$因子,将u_c代入方程(1),方程左边将出现$\delta'(t)$,无意义.

故 $$\int_{0_-}^{0_+} u_C dt=0$$

于是有 $$C[u_C(0_+)-u_C(0_-)]=1$$

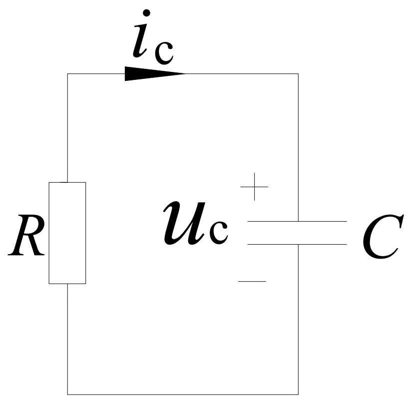
或 $$u_C(0_+)=\frac{1}{C}+u_C(0_-)=\frac{1}{C}$$

注意: u_c发生了跃变.



电容看做短路

当 $t > 0_+$ 时，冲激电流源相当于开路，电路等效为



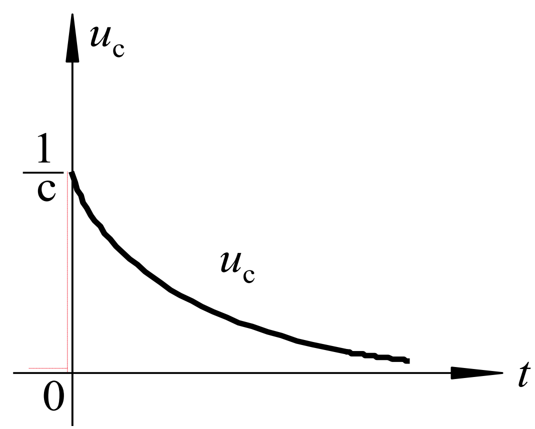
$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}(\tau = RC)$$

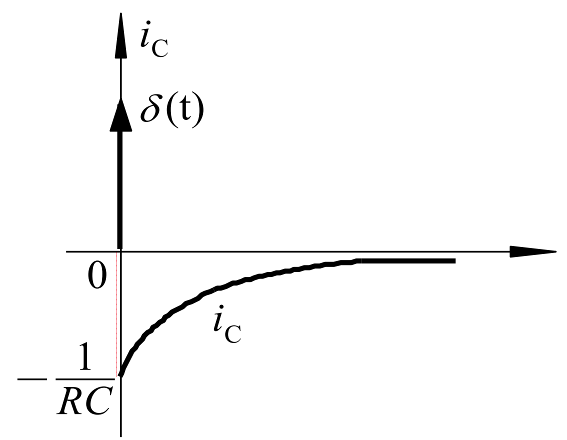
$$i_C = -\frac{u_C}{R} = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

由此可得电路的冲激响应为

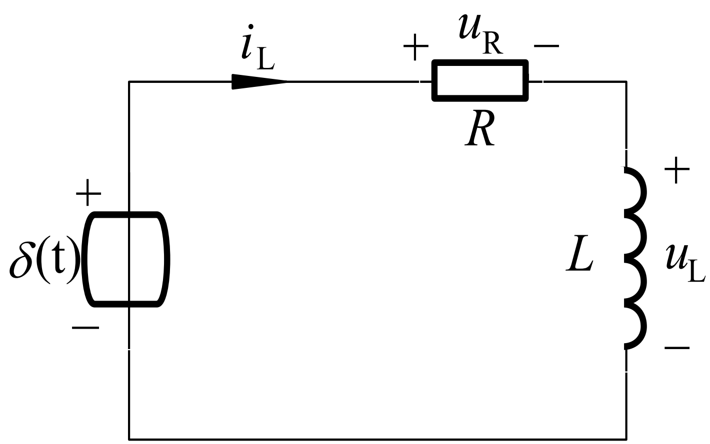
$$u_C = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$





2. RL电路的冲激响应.



*R-L*电路冲激响应示例

单位冲激电压源$\delta(t)$作用于R-L串联电路.求i_L，u_L的冲激响应.

解: 由KVL,有

$$u_L + u_R = \delta(t)$$

即 $L\dfrac{di_L}{dt} + Ri_L = \delta(\mathrm{t})$ $\qquad i_L(0_-) = 0$

将上式在 $t = 0_- \sim 0_+$区间内积分,得

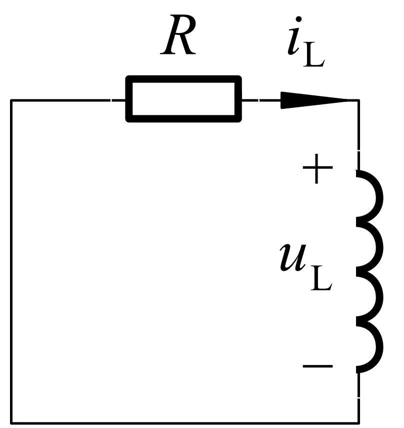
$$\int_{0_-}^{0_+} L\frac{di_L}{dt}\,\mathrm{dt} + \int_{0_-}^{0_+} R\, i_L dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)dt$$

$$L[i_L(0_+) - i_L(0_-)] = 1$$

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L}$$

电感看做开路

当 $t>0_+$ 时，由于δ(t)=0,电压源可视为短路.这时得响应为零输入响应.电路为



$$i_L=i_L(0_+)e^{-\frac{Rt}{L}}=\frac{1}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

电感电流发生了跃变,而

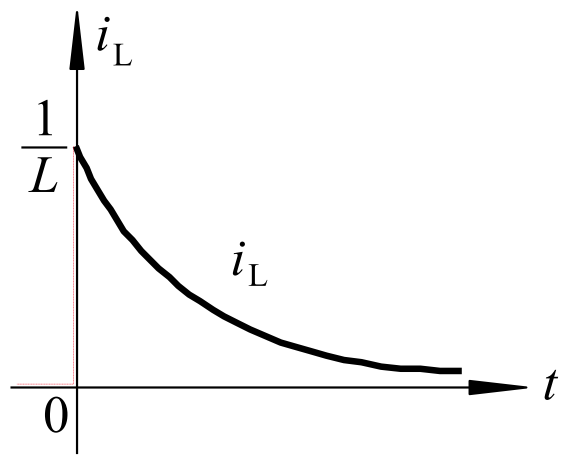
$$u_L=-\frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$$

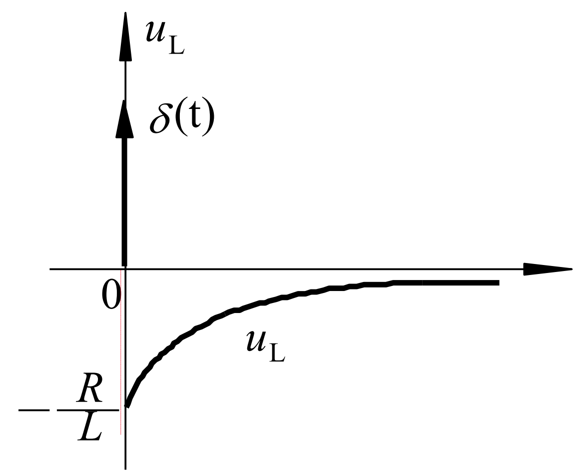
综上所述结果,可得R-L

串联电路的冲激响应

$$i_L=\frac{1}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$

$$u_L=\delta(t)-\frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$





3. 冲激响应和阶跃响应间的关系.

冲激响应用h(t)表示

阶跃响应用g(t)表示

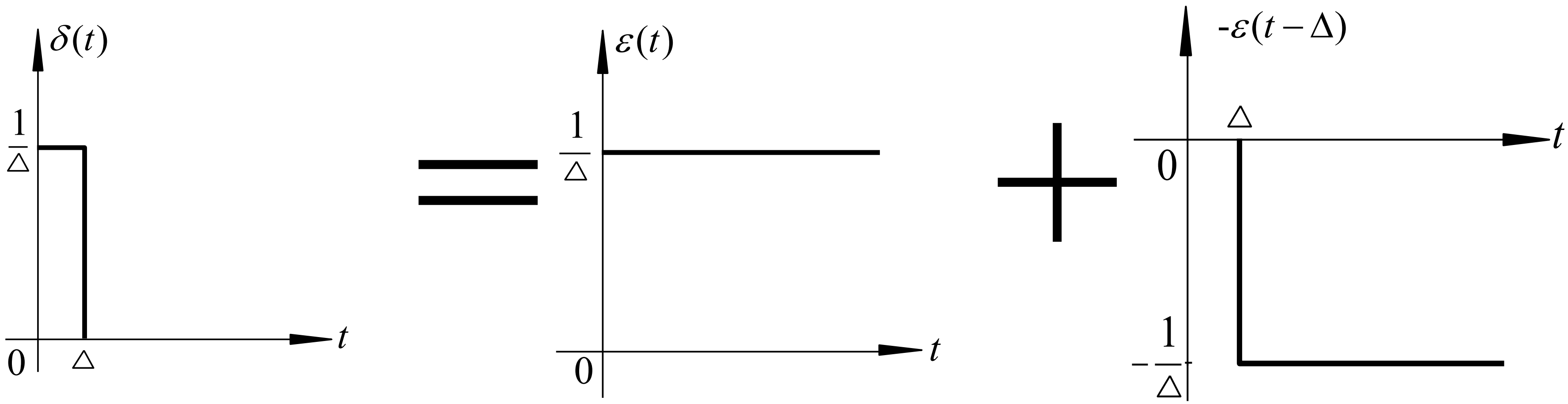
线性非时变电路的冲激响应h(t)和阶跃响应g(t)间有如下关系.

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\text{或} g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

证明如下:

可以看到：单位冲激函数δ(t)是单位阶跃函数线性组合的极限.



$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)]=\frac{d}{dt}\varepsilon(t)$$

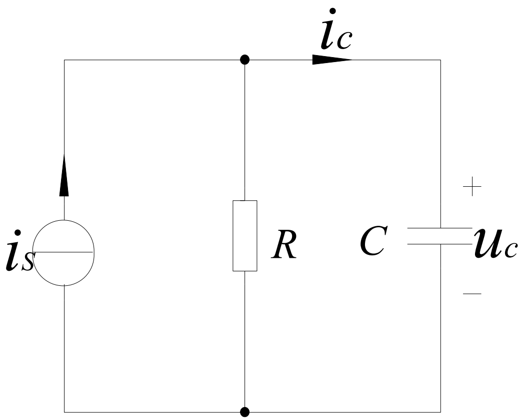
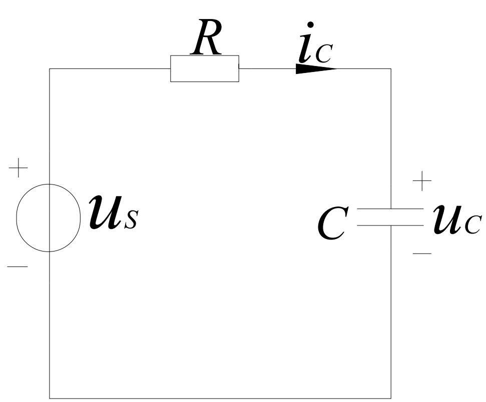
根据线性电路的叠加定理：

$$h(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[g(t)-g(t-\Delta)]=\frac{d}{dt}g(t)$$

由此证明了：冲激响应等于阶跃响应的导数.

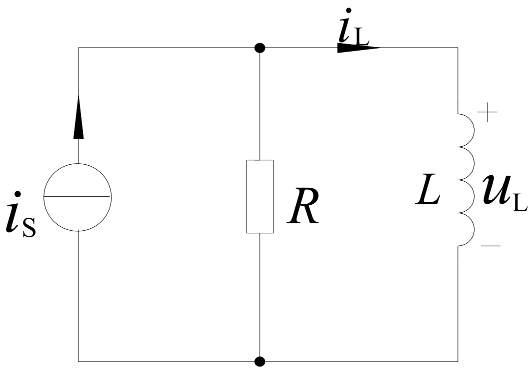
阶跃响应等于冲激响应由0-到t的积分.

一阶电路的阶跃响应和冲激响应

电路	阶跃响应	冲激响应
	$i_S=\varepsilon(t)$ $u_C=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$ $i_C=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$	$i_S=\delta(t)$ $u_C=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$ $i_C=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$
	$u_S=\varepsilon(t)$ $u_C=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$ $i_C=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$	$u_S=\delta(t)$ $u_C=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$ $i_C=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$

续上页

电路　　**阶跃响应**　　**冲激响应**



阶跃响应：

$$i_s = \varepsilon(t)$$

$$i_L = (1 - e^{-\frac{Rt}{L}})\varepsilon(t)$$

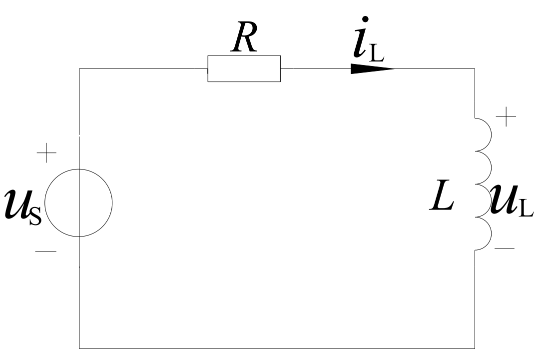
$$u_L = \mathrm{Re}^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$

冲激响应：

$$i_s = \delta(t)$$

$$i_L = \frac{R}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$

$$u_L = R\delta(t) - \frac{R^2}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}\varepsilon(t)$$



阶跃响应：

$$u_S = \varepsilon(t)$$

$$i_L = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$$

$$u_L = e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

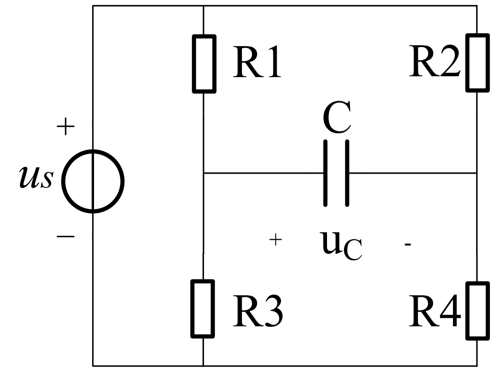
冲激响应：

$$u_S = \delta(t)$$

$$i_L = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

$$u_L = \delta(t) - \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$$

例：求图示电路的冲激响应$u_C(t)$。



解：将电容看做短路，则：

$$i_C(t)=\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right)\frac{\delta(t)}{R_1//R_2+R_3//R_4}$$

$$u_C(0+)=\frac{1}{C}\int_{0-}^{0+}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right)\frac{\delta(t)}{R_1//R_2+R_3//R_4}dt$$

$$\tau=\left(R_1//R_3+R_2//R_4\right)\mathrm{C}$$

$$u_C(t)=u_C(0+)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

练习：

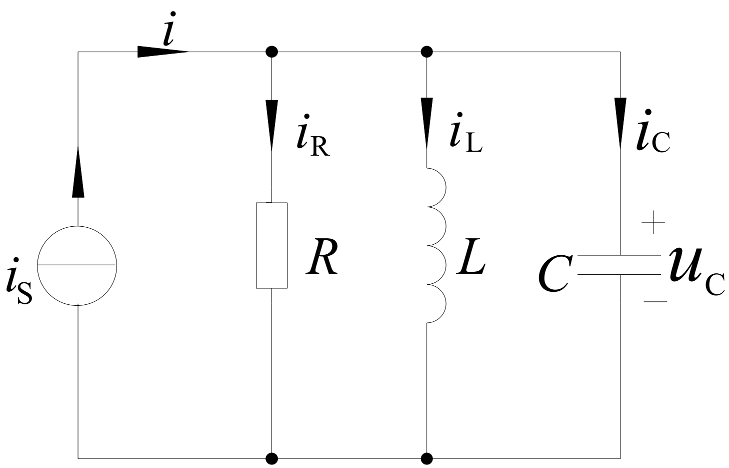
1、将电压源换成电流源，求对冲激电流的响应$u_C(t)$？

2、将电容换成电感，求对冲激电压的响应$i_L(t)$？

3、将电容换成电感，求对冲激电流的响应$i_L(t)$？

§4-6 二阶电路的冲激响应

二阶电路——以2阶微分方程描述的电路.



RCL并联电路

$$i_s = \delta(t)$$

$$u_c(0_-) = 0$$

$$i_L(0_-) = 0$$

此电路 $\quad i_c + i_R + i_L = i_S$

即 $\quad C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{R}u_C + i_L = \delta(t)$

将 $u_C = L\dfrac{di_L}{dt}$ 带入上式得

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{LC}\delta(t)$$

写成标准形式

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \omega_0^2 \delta(t) \qquad (1)$$

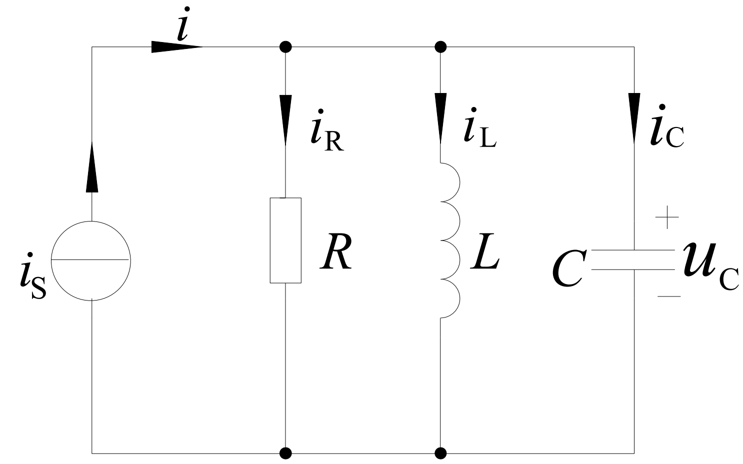
式中 $\quad \alpha = \dfrac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

将电路中发生的过程分为两个阶段

(1) $t = 0_- \sim 0_+$

(2) $t > 0_+$

(1) $t=0_- \sim t=0_+$ 期间,由于电流源的作用,使储能元件获得能量.由KCL,有 $i_c + i_R + i_L = \delta(t)$



RCL并联电路

以 u_c 表示式中各电流

$$\left.\begin{aligned} i_L &= \frac{1}{L}\int u_C dt \\ i_R &= \frac{u_C}{R} \\ i_C &= C\frac{du_C}{dt} \end{aligned}\right\}$$ 代入上式

得:

$$\frac{1}{L}\int u_C dt + \frac{u_C}{R} + C\frac{du_C}{dt} = \delta(t)$$

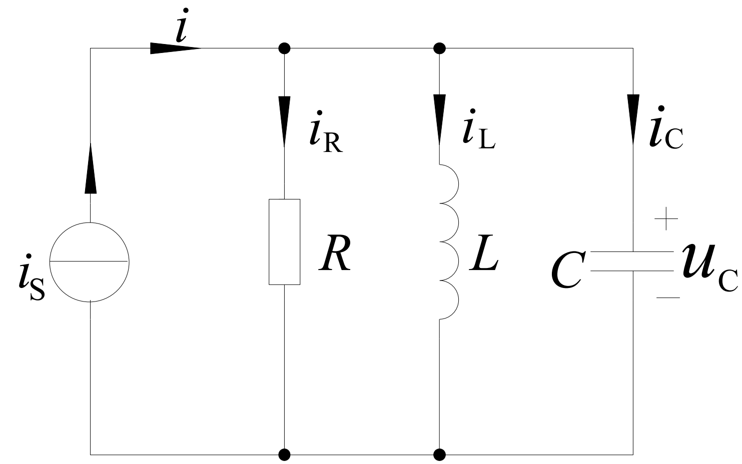
$$\int_{0-}^{0+} \mathrm{C}\frac{du_c}{dt}dt = \int_{0-}^{0+}\delta(t)dt$$

如果前两项含 $\delta(t)$ 左式中将出现 $\delta(t)$ 的一阶导数或二阶导数,无意义!!

于是有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C dt$$

$$= 0 + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{C}$$



C看做短路

L看做开路

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} u_C dt = 0$$

上两式表明:冲激电流源的作用使u_c在$t=0_+$时跃变为$u_c(0_+)=1/C$

而 $i_L(0_+)=0$ (无跃变)

由 $u_L = u_C = L\dfrac{di_L}{dt}$ 可知

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{u_C(0_+)}{L} = \frac{1}{LC}$$

(2) $t > 0_+$，电流源电流为0. 电路中的过程就是在初始条件

$$u_c(0+) = \frac{1}{C} \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{u_C(0_+)}{L} = \frac{1}{LC}$$

$i_L(0+)=0$ 下的零输入响应.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \omega_0^2 \delta(t) \qquad (1)$$

由(1)式可得电路的特征方程为

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0 \qquad (2)$$

其中 $\alpha = \dfrac{1}{2RC} \quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

其特征方程如式(2)所示，可以有三种情况.

讨论过阻尼和欠阻尼两种.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

若$\alpha>\omega_0$,即在过阻尼的情况下,有

$$i_L = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

由 $i_L(0_+) = A_1 + A_2 = 0$

和 $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{1}{LC}$

可解得: $A_1 = \frac{1}{LC(p_1 - p_2)} \qquad A_2 = -\frac{1}{LC(p_1 - p_2)}$

于是得电感电流,即欲求的冲激响应为

$$i_L = \frac{1}{LC(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

若$\omega_0>\alpha$,即在欠阻尼情况下,有

$$i_L = ke^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+\theta)$$

由 $$i_L(0_+) = k\sin\theta = 0$$

和 $$\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0_+} = k(\omega_d\cos\theta - \alpha\sin\theta) = \frac{1}{LC}$$

可解得 $$\theta = 0^o \qquad k = \frac{1}{LC\omega_d}$$

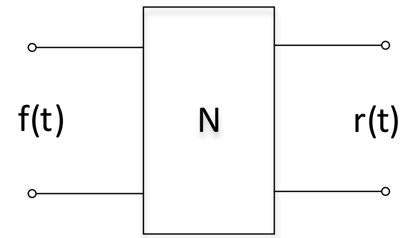
于是得电感电流i_L,即欲求的冲激响应为

$$i_L = \frac{1}{LC\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

§4-7 冲激响应与系统函数

定理：单输入单输出线性时不变系统N，输入f(t)、输出r(t)、冲激响应h(t)有如下关系：

$$r(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

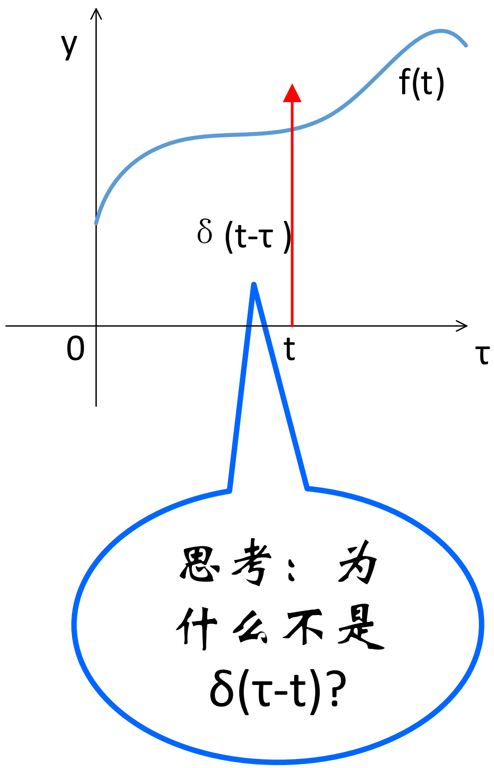


证明：

由冲激函数采样性质：$f(t)=\int_0^t f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

由线性电路叠加定理：$r(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

证毕

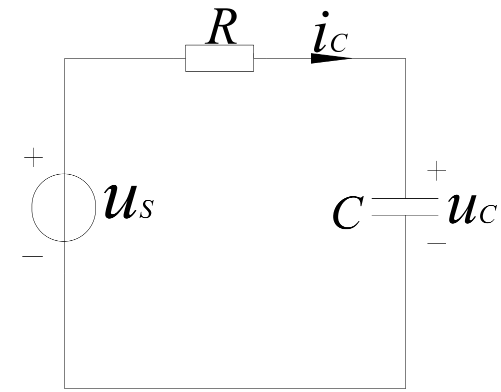


冲激响应h(t)称为系统N的时域系统函数

定义卷积运算：$f(t)*h(t)=\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

则有：$r(t)=f(t)*h(t)$

§4-7 冲激响应与系统函数



例：设电源电压 $u_S(t)=U_S e^{\lambda t}$，求全响应 $u_C(t)$

解：微分方程 $RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S e^{\lambda t}$

求特解，设： $u_{CS}=Ae^{\lambda t}$

带入微分方程得：$RCA\lambda e^{\lambda t}+Ae^{\lambda t}=U_S e^{\lambda t}$ $\qquad A=\dfrac{U_S}{RC\lambda+1}$

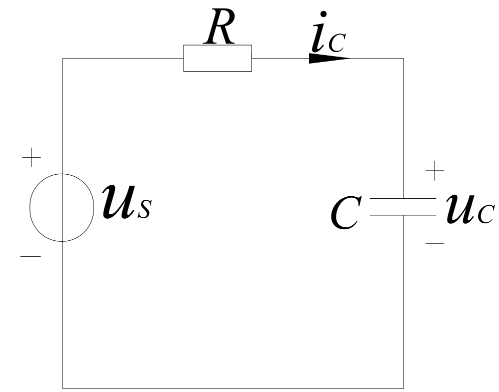
定全解系数：$u_C=Be^{-\frac{t}{RC}}+\dfrac{U_S}{RC\lambda+1}e^{\lambda t}\Big|_{t=0}=U_0$ $\qquad B=U_0-\dfrac{U_S}{RC\lambda+1}$

全响应：

$$u_C=\left(U_0-\frac{U_S}{RC\lambda+1}\right)e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{U_S}{RC\lambda+1}e^{\lambda t}$$

$$=\underbrace{U_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\frac{U_S}{RC\lambda+1}\left(e^{\lambda t}-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{零状态响应}}$$

§4-7 冲激响应与系统函数



全响应： $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \dfrac{U_S}{RC\lambda+1}\left(e^{\lambda t} - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

冲激响应： $h(t) = \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ 输入： $f(t) = U_S e^{\lambda t}$

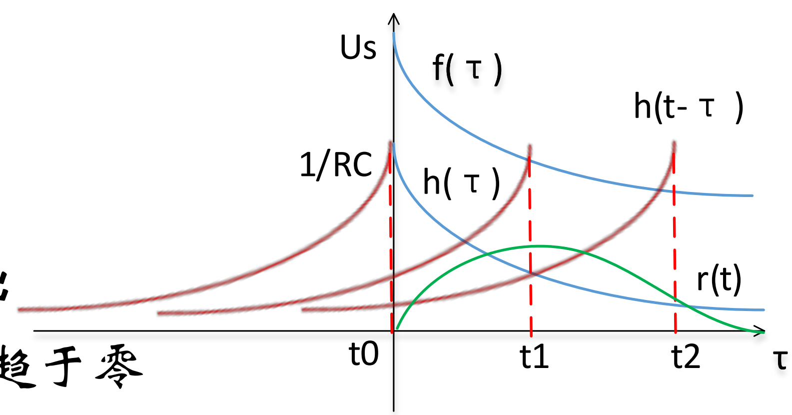
输出： $r(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_0^t U_S e^{\lambda\tau} \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau$

$$= \frac{U_S}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t e^{\frac{RC\lambda+1}{RC}\tau} d\tau = \frac{U_S}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \frac{RC}{RC\lambda+1} e^{\frac{RC\lambda+1}{RC}\tau} \Big|_0^t$$

零状态响应

$$= \frac{U_S}{RC\lambda+1}\left(e^{\lambda t} - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

卷积过程如右图所示(设λ<0)：



t<=0时， f(τ)h(t-τ)=0， r(t)=0， 无输入无输出

t->∞时， f(τ)h(t-τ)->0， r(t)->0， 输入输出都趋于零

t=t1时， f(τ)h(t-τ)>0， r(t)>0， 在某一时刻取极大值

作业：

4-3-1

4-5-1