复变函数与积分变换

任课教师：张继龙

课程特点：

复变函数

- 注意复变与一元微积分差别。
- 与二元微积分关系。

积分变换

- 积分变换将时域问题转化到频域。
- 应用广泛。

教材

高宗升，滕岩梅： 复变函数与积分变换（第二版）， 北航出版社，**2016**

参考书目

1 钟玉泉， 复变函数论， 高等教育出版社

2 余家荣， 复变函数，高等教育出版社

3 祝同江，积分变换，高等教育出版社

4 E.B.Saff, A.D.Snider等，复分析基础及工程应用，机械工业出版社

5 自测题

第一节　复数及其表示

- 一、复数的概念及代数运算
- 二、复数的几何表示
- 三、幂与根
- 四、小结与思考

一、复数的概念及代数运算

1.复数的概念

复数： $z = x + iy$

虚部

实部

虚数单位

或 $z = x + yi.$

实部和虚部分别

记作 $x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$

当 $x = 0,\ y \neq 0$ 时，$z = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时，$z = x + 0i$，我们把它看作实数 x.

对虚数单位的规定:

(1) $i^2=-1$;

(2) i 可以与实数在一起按同 样的法则进行四则运算.

一般地，如果 n 是正整数, 则

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等.

复数 z 等于 0 当且仅当它的实部和虚部同时等于0.

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数. 与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

练习

实数m取何值时，复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是(1)实数; (2)纯虚数.

答案: $(1)m=6$或$m=-1.$

$(2)m=4.$

2. 复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

1. 两复数的和(差):

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. 两复数的积:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

3. 两复数的商:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}.$$

共轭复数的性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2) $\bar{\bar{z}} = z$;

(3) $z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$(实数);

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

以上各式证明略.

例1 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ 与 $z\cdot\bar{z}$.

解 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$

$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2},$

$z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$

例2 计算 $\dfrac{i-2}{1+i+\dfrac{i}{i-1}}$.

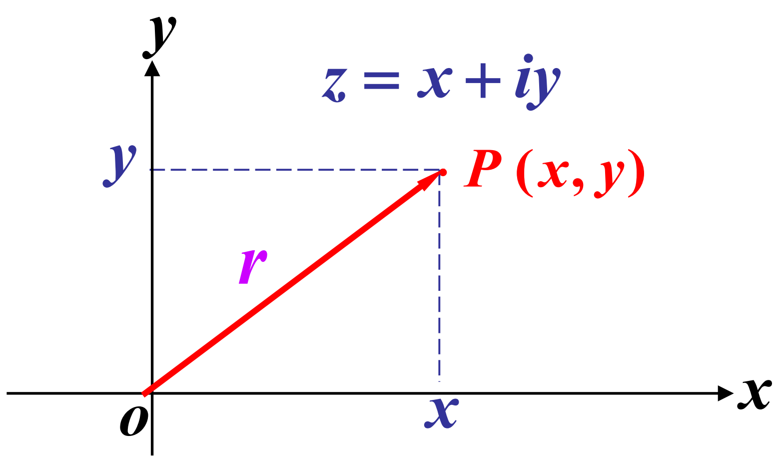
解 $\dfrac{i-2}{1+i+\dfrac{i}{i-1}}=\dfrac{(i-2)(i-1)}{(1+i)(i-1)+i}$

$$=\frac{i^2-i-2i+2}{i^2-1+i}=\frac{1-3i}{-2+i}=\frac{(1-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}$$

$$=\frac{-2-i+6i+3i^2}{(-2)^2+1^2}=-1+i.$$

二、复数的几何表示

1. 复平面的定义



2. 复数的模(或绝对值)

记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$

$|x| \le |z|,\qquad |y| \le |z|,$

$|z| \le |x| + |y|,\qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$

例3 求复数 $\dfrac{1+z}{1-z}(z\neq 1)$ 的实部、虚部和模.

解 因为

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)\overline{(1-z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}}=\frac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z}=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\qquad \mathrm{Im}\frac{1+z}{1-z}=\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2},$$

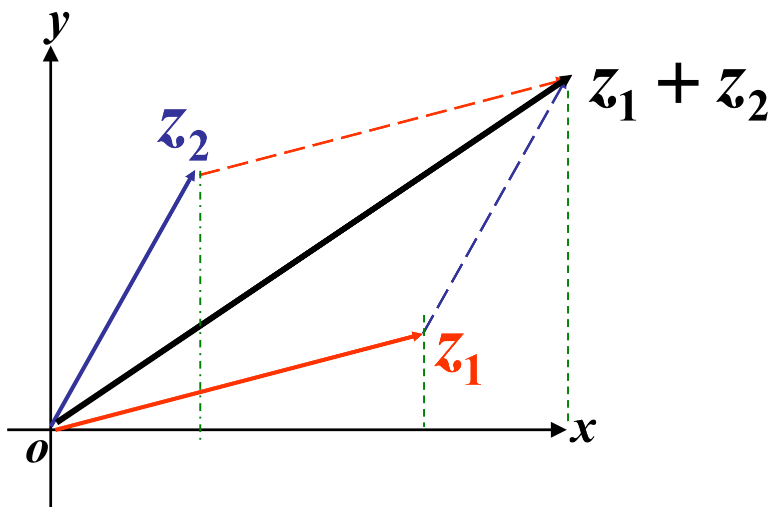
$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2=\frac{1+z}{1-z}\cdot\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}=\frac{1+|z|^2+2\,\mathrm{Re}\,z}{|1-z|^2}$$

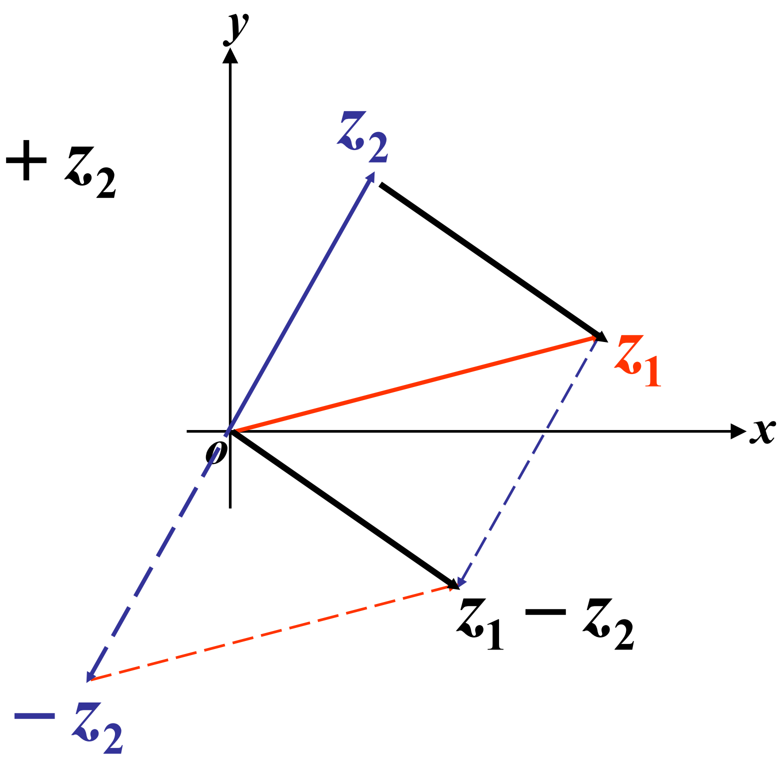
所以

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \frac{\sqrt{1+|z|^2+2\operatorname{Re} z}}{|1-z|}.$$

3. 利用平行四边形法则求复数的和差

两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.



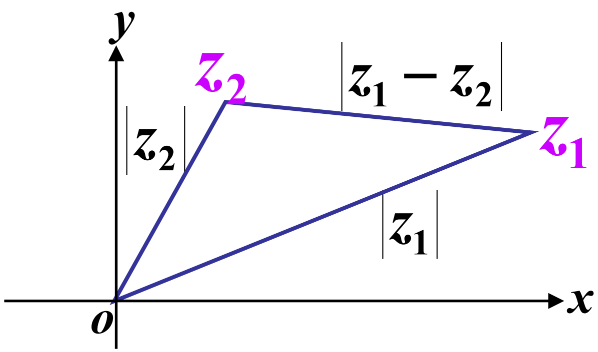


4. 复数和差的模的性质

因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离, 故

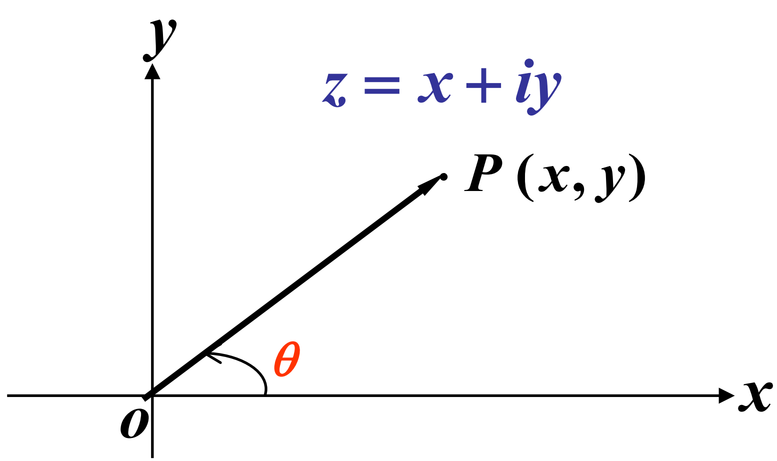
(1) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

(2) $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$.



5. 复数的辐角

在 $z \neq 0$ 的情况下，以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z = \theta$.



$$\operatorname{Arg} z = \theta_1 + 2k\pi$$

(k为任意整数).

说明 任何一个复数 $z \neq 0$有无穷多个辐角.

特殊地，当 $z = 0$时，$|z| = 0$，辐角不确定.

辐角主值的定义:

在 $z\,(\neq 0)$ 的辐角中,把满足 $-\pi < \theta_0 \le \pi$ 的 θ_0 称为 Arg$z$ 的主值,记作 $\theta_0 = \arg z$.

$z \neq 0$ 辐角的主值

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > (<) 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + (-)\pi, & x < 0, y > (<) 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan \dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

6. 复数的三角表示和指数表示

利用直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$

复数可以表示成 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

复数的三角表示式

再利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 欧拉介绍

复数可以表示成 $z = re^{i\theta}$

复数的指数表示式

例4 将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-1-\sqrt{3}i$; (2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$;

解 (1) $r=|z|=\sqrt{1+3}=2$, 因为 z 在第三象限,

所以 $\theta=\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)-\pi=-\frac{2}{3}\pi$,

故三角表示式为 $z=2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$,

指数表示式为 $z = 2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$.

(2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10},$$

故三角表示式为 $z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}$,

指数表示式为 $z = e^{\frac{3}{10}\pi i}$.

例5 把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角的主值.

解 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$ (三角式)

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.$$ (指数式) $\quad \arg z=\dfrac{\pi-\alpha}{2}.$

7. 乘积与商

命题1 **两复数相乘就是把模相乘，辐角相加.**

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 .$$

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，　$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

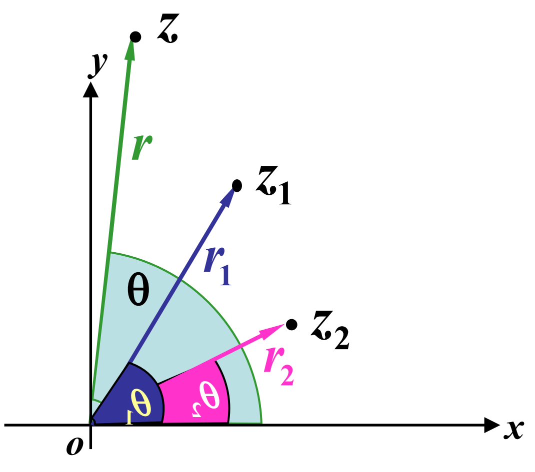
从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$,

先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向

旋转一个角 θ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.



说明 由于辐角的多值性, $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 两端都是无穷多个数构成的两个数集.

对于左端的任一值, 右端必有值与它相对应.

例如, 设 $z_1=-1$, $z_2=i$, 则 $z_1\cdot z_2=-i$,

$$\mathrm{Arg}z_1=\pi+2n\pi,\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\mathrm{Arg}z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi,\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故 $\dfrac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, 只须 $k=m+n+1$.

若 $k=-1$, 则 $m=0,n=-2$ 或 $m=-2,n=0$.

思考: $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$?

命题2 商的模等于模的商; 商的辐角等于辐角之差.

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \qquad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \mathrm{Arg}z_2 - \mathrm{Arg}z_1.$$

设复数z_1和z_2的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \text{ 则 } \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}.$$

练习: $$\left|\frac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{100}}\right| = 1$$

例6 已知 $z_1=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$, $z_2=\sin\dfrac{\pi}{3}-i\cos\dfrac{\pi}{3}$,

求 $z_1\cdot z_2$ 和 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

解 因为 $z_1=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

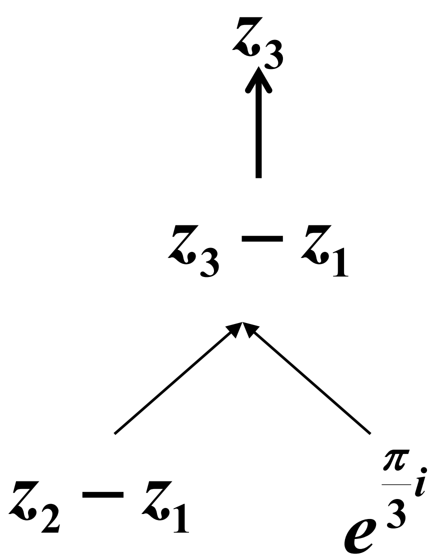
$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

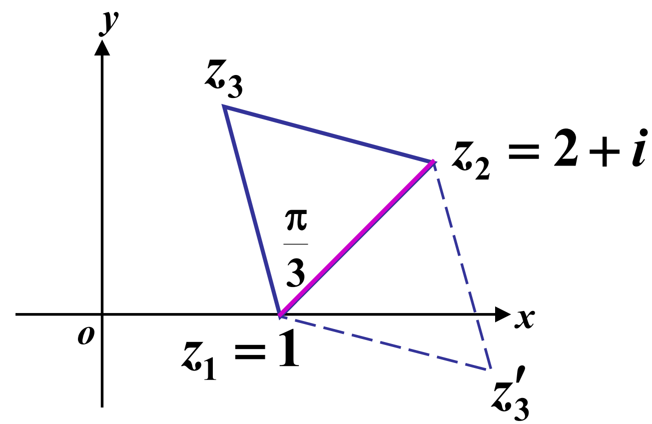
所以 $z_1\cdot z_2=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

例7 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$，求它的另一个顶点.

解

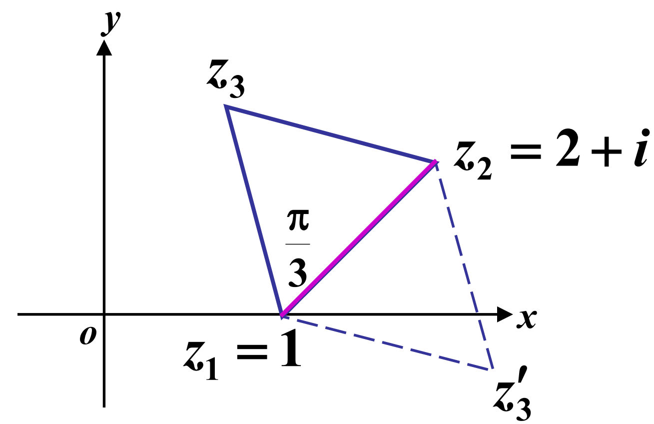




$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$



所以 $z_3 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i,\quad z_3' = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i.$

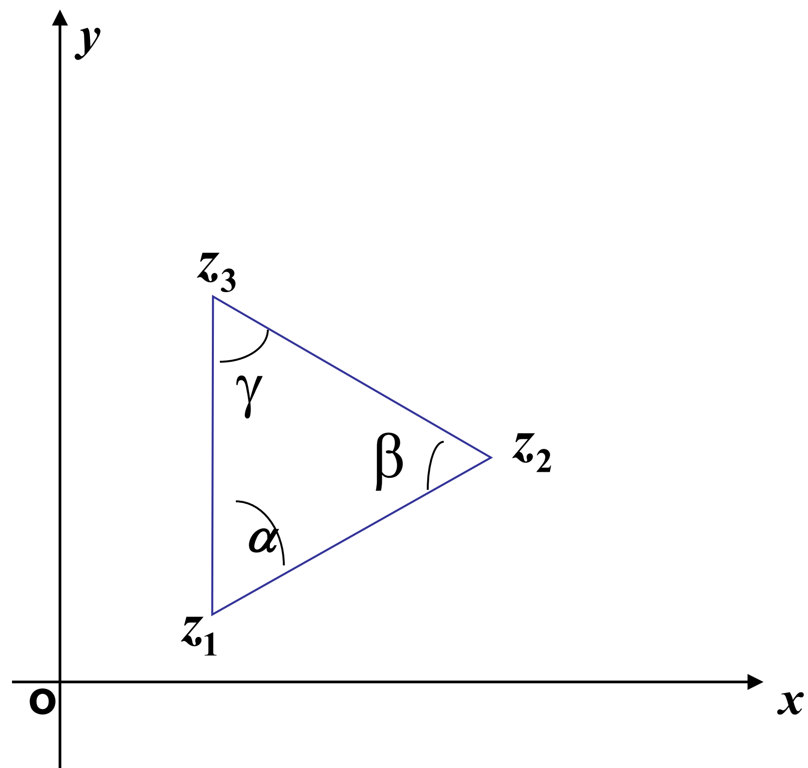
例8 证明：三角形的内角和是π.

证明： 设三角形三个顶点为 z_1， z_2， z_3, 对应的三个顶角分别为α， β， γ， 于是

$$\alpha = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\beta = \arg \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$$

$$\gamma = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$$



由于

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = -1$$

所以 $\alpha + \beta + \gamma = \pi + 2k\pi$ (k为某整数)

由假设 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \gamma < \pi$, 所以

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi,$$

故 $k = 0$, 即$\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

例9 设 z_1, z_2 为两个任意复数, 证明:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

证 $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2$$

因为 $\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$,

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2,$$

两边同时开方得 $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

思考：已知z_1, z_2非零，什么时候等式相等?

答案： $z_1 = cz_2$, c为正实数

三、幂与根

1. n次幂:

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,

记作 z^n, $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}}$.

对于任何正整数 n,有 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

如果我们定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$,那么当 n 为负整数时,

上式仍成立.

2. 棣莫佛公式

棣莫佛介绍

当 z 的模 $r=1$, 即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

棣莫佛公式

3. 方程 $w^n=z$ 的根 w, 其中 z 为已知复数.

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

当$k=0,1,2,\cdots,n-1$时， 得到n个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当k以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

从几何上看，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例10 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解 $$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(1+i)^n+(1-i)^n=$$

$$(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=(\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

例11 计算 $\sqrt[4]{-16}$ 的值.

解 $-16 = 16[\cos\pi + i\sin\pi]$,

$$\sqrt[4]{-16} = 2\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right] \quad (k = 0,1,2,3).$$

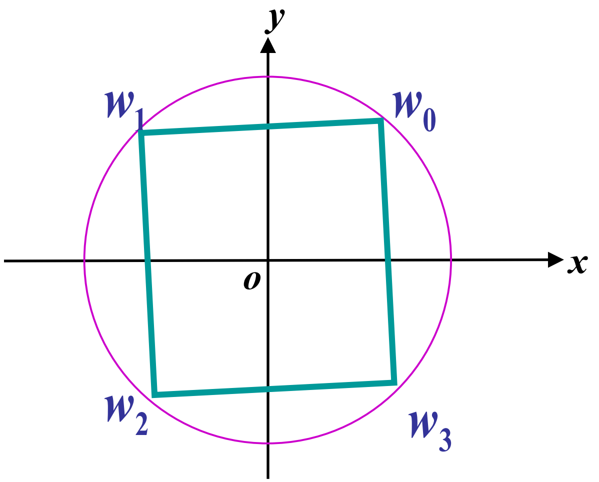
即 $w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

这四个根是内接于中心在原点半径为 2 的圆的正方形的四个顶点.



练习： 计算$8^{1/3}$的值.

$$8^{1/3}=2\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2e^{\frac{2k\pi}{3}i}$$

四、小结与思考

学习的主要内容有复数的模、辐角; 复数的各种表示法. 重点是几种表示法之间的相互转化.

应熟练掌握复数乘积与商的运算. 在各种形式中以三角形式、指数形式最为方便:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)}$$

幂与方根的计算. 重点是方根的运算.

思考题

复数为什么不能比较大小?

答案:

观察复数 i 和 0, 由复数的定义可知 $i \neq 0$,

(1) 若 $i > 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 即 $-1 > 0$, 矛盾;

(2) 若 $i < 0$, 则 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 同样有 $-1 > 0$, 矛盾.

作业：P12 1(2)(4), 3(3)(4),5,6,

放映结束，按Esc退出.

扩展：幅角的计算公式

$$
\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}+\dfrac{\pi}{2}[1-\operatorname{sgn} x], & x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, & x=0, y\neq 0,\\ \text{无定义} & x=0, y=0\end{cases}
$$

$$
(\text{其中} -\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2})
$$

欧拉资料

Leonhard Euler

Born: 15 April 1707 in Basel, Switzerland

Died: 18 Sept 1783 in St Petersburg, Russia