第三节 Fourier变换的性质

- 一、重要性质
- 二、卷积
- 三、小结与思考

一、重要性质

1.线性性质

设$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$, $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$, α, β是常数

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega).$$

表明函数线性组合的Fourier变换等于各函数Fourier变换的线性组合.

Fourier逆变换也具有类似的线性性质

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

2.位移性质

$$\mathcal{F}\,[f(t\pm t_0)]=e^{\pm i\omega t_0}\mathcal{F}\,[f(t)]$$

表明时间函数$f(t)$沿t轴向左或向右位移t_0的*Fourier*变换等于$f(t)$的*Fourier*变换乘以因子$e^{i\omega t_0}$或$e^{-i\omega t_0}$.

证 由*Fourier*变换的定义，可知

$$\mathcal{F}\,[f(t\pm t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t\pm t_0)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$(\text{令}t \pm t_0 = u) \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u \mp t_0)} \mathrm{d}u$$

$$= e^{\pm i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} \mathrm{d}u = e^{\pm i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

同样，Fourier逆变换也具有相似的性质

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = f(t) e^{\pm i\omega_0 t}.$$

表明频谱函数$F(\omega)$沿ω轴向右或向左位移ω_0的Fourier逆变换等于原来的函数$f(t)$乘以因子$e^{i\omega_0 t}$或$e^{-i\omega_0 t}$.

例1 设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，求$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]$.

解 利用位移性质，有

$$\mathscr{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2i}\mathscr{F}[f(t)(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t})]$$

$$=\frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)].$$

练习： 求函数 $u(t)\sin bt$ 的傅里叶变换。

答案:

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i(\omega-b)}+\pi\delta(\omega-b)-\frac{1}{i(\omega+b)}-\pi\delta(\omega+b)\right]$$

例2 求函数

$$f(t)=e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)$$

的傅里叶变换.

解 因为

$$f(t)=e^{i\omega_0 t}u(t-t_0)=e^{i\omega_0 t_0}e^{i\omega_0 (t-t_0)}u(t-t_0)$$

所以

$$F(\omega)=\mathcal{F}\,[e^{i\omega_0 t_0}e^{i\omega_0 (t-t_0)}u(t-t_0)]$$

$$=e^{i\omega_0 t_0}\mathcal{F}\,[e^{i\omega_0 (t-t_0)}u(t-t_0)]$$

$$= e^{i\omega_0 t_0} e^{-i\omega\, t_0} \mathcal{F}\,[e^{i\omega_0 t} u(t)]$$

$$= e^{-i(\omega-\omega_0)t_0} [\frac{1}{i(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)]$$

3. 微分性质

如果$f(t)$在$(-\infty.+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点,且当$|t|\to+\infty$时, $f(t)\to 0$,则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega\mathcal{F}[f(t)].$$

证 由分部积分法有

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = i\omega\mathcal{F}[f(t)].$$

即一个函数的导数的Fourier变换等于这个函数的Fourier变换乘以因子$i\omega$.

推论 如果$f^{(k)}(t)$在$(-\infty.+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点,且$\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1$,则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n\mathcal{F}[f(t)].$$

此外，还可得到象函数的导数公式

设$\mathcal{F}\,[f(t)] = F(\omega)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega) = \mathcal{F}\,[-itf(t)].$$

一般地,
有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega) = (-i)^n\mathcal{F}\,[t^n f(t)].$$

常用象函数的导数公式来计算$\mathcal{F}\,[t^n f(t)]$.

例3 已知函数$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}(\beta>0)$, 试求

$\mathcal{F}[tf(t)]$及$\mathcal{F}[t^2 f(t)]$.

解　由第二节例1知　$F(\omega)=\dfrac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}$.

利用象函数的导数公式

$$\mathcal{F}[tf(t)]=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F(\omega)=\frac{1}{(\beta+i\omega)^2}$$

$$\mathcal{F}[t^2 f(t)]=i^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}F(\omega)=\frac{2}{(\beta+i\omega)^3}.$$

练习：

(1) 设F $[f(t)] = F(\omega)$, 则F $[(t-2)f(t)] = ($ C $)$

$(A)\ F'(\omega) - 2F(\omega)$

$(B)\ -F'(\omega) - 2F(\omega)$

$(C)\ iF'(\omega) - 2F(\omega)$

$(D)\ -iF'(\omega) - 2F(\omega)$

4．积分性质

如果$t \to +\infty$时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \to 0$，则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f(t)].$$

证明　因为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t = f(t)$，则

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\mathcal{F}[f(t)].$$

由微分性质,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = i\omega\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right],$$

即

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f(t)].$$

即一个函数的积分的Fourier变换等于这个函数的Fourier变换除以因子$i\omega$.

练习利用*Fourier*变换的性质，求下列函数的*Fourier*变换.

$(1)\delta(t-t_0)$;　　　　$(2)e^{i\omega_0 t}$;

$(3)tu(t)$;

解 (1) 因为$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$,由位移性质有

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[\delta(t)]=e^{-i\omega t_0}.$$

(2) 因为$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$,由象函数的位移性质有

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(3) 因为$\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$,由象函数的微分性质有

$$\mathcal{F}[tu(t)]=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}[u(t)]$$

$$=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)\right]$$

$$=i\left[\frac{-1}{i\omega^2}+\pi\delta'(\omega)\right]$$

$$=-\frac{1}{\omega^2}+i\pi\delta'(\omega).$$

5.对称性质

若F $[f(t)] = F(\omega)$,则F $[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$.

证明　由$f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$有

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega,$$

即
$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

所以F $[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$.

例4 求函数$F(\omega)=\omega\sin\omega t_0$的$Fourier$逆变换.

解　由对称性质

$$\mathcal{F}\,[F(-t)]=\mathcal{F}\,[t\sin(t_0 t)]$$

$$=i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\{\pi i[\delta(\omega+t_0)-\delta(\omega-t_0)]\}$$

$$=\pi[\delta'(\omega-t_0)-\delta'(\omega+t_0)]$$

即$f(t)=\dfrac{1}{2}[\delta'(t-t_0)-\delta'(t+t_0)].$

注：也可用其他性质做.

6.相似性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega), a \neq 0$, 则

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a}).$$

证明　令 $u = at$, 则当 $a > 0$ 时,

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega\frac{u}{a}} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$$

当 $a < 0$ 时,

$$\mathscr{F}[f(at)] = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega\frac{u}{a}} \mathrm{d}u = -\frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a}),$$

综上，$\mathcal{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

这一性质表明,如果函数*f(t)*的图象变窄,则其Fourier变换的图象将变宽变矮;反之,如果*f(t)*的图象变宽,则其Fourier变换的图象将变高变窄.

注:本节和上一节介绍的古典意义下的Fourier变换的一些性质,对于广义Fourier变换来说,除了像函数的积分性质稍有不同之外,其他性质在形式上都相同.但应注意这时变换中的广义积分不是普通意义下的积分值.

推广：$\mathcal{F}[f(at+b)]=\dfrac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

7.乘积定理

若F $[f_1(t)] = F_1(\omega)$,F $[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} \mathrm{d}\omega$$

证明:　　由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega\right] \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)e^{-i\omega t}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega$$

同理， $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\mathrm{d}\omega$

8. 能量积分（Parseval定理）

如果 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则有： $$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

该定理表明信号在频域和时域的能量守恒。

其中，$S(\omega)=|F(\omega)|^2$称为能量密度函数（或能量密度谱）

二、卷积

1. 卷积概念:

若已知函数$f_1(t), f_2(t)$,则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

称为函数$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积,记为$f_1(t) * f_2(t)$,

即$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau = f_1(t) * f_2(t).$

显然$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$ 交换律

对卷积,如下的不等式

$$|f_1(t)*f_2(t)|\le|f_1(t)|*|f_2(t)|$$

成立,即函数卷积的绝对值小于等于函数绝对值的卷积.

卷积还满足如下运算律

结合律 $$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

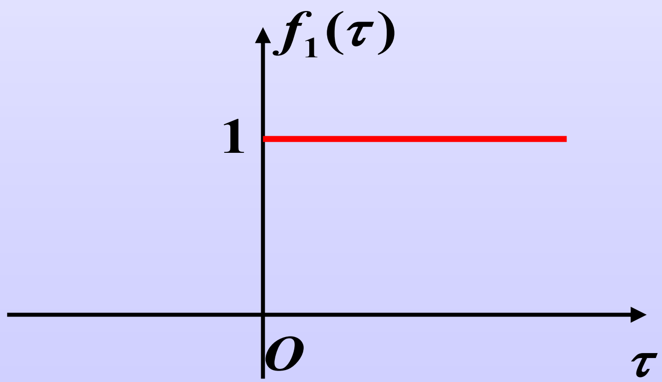
分配律 $$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

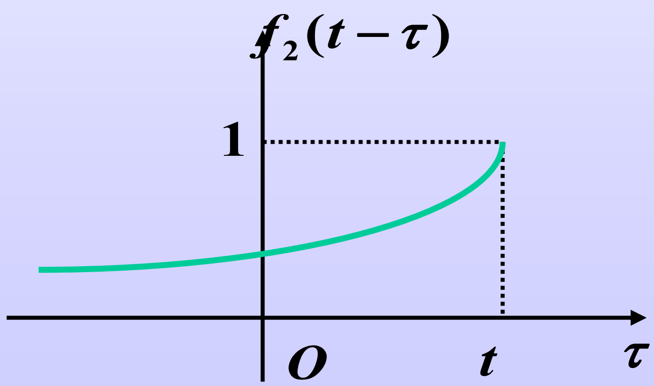
例1 若$f_1(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}$, $f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}, t\geq 0\end{cases}$,

求$f_1(t)$与$f_2(t)$的卷积.

解 根据卷积的定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$





从图形中可以看出，$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$的区间在$t\geq 0$时,为$[0,t]$,所以

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=e^{-t}(e^t-1)u(t)=(1-e^{-t})u(t).$$

同理，$f_2(t)*f_1(t)=(1-e^{-t})u(t).$

2. 卷积定理

假定$f_1(t), f_2(t)$都满足$Fourier$积分定理中的条件，且$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)], F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega).$$

或 $$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t).$$

证　由Fourier变换的定义

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-i\omega\tau} f_2(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-i\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= F_1(\omega)\cdot F_2(\omega).$$

两个函数卷积的Fourier变换等于这两个函数Fourier变换的乘积.

同理可得

$$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

两个函数乘积的Fourier变换等于这两个函数Fourier变换的卷积除以2π.

假定$f_k(t)$满足Fourier积分定理中的条件,

且$F_k(\omega)=\mathcal{F}[f_k(t)],(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\cdot\cdots\cdot F_n(\omega).$$

$$\mathcal{F}\,[f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t)]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*F_n(\omega).$$

卷积定理可以化卷积运算为乘积运算，提供了卷积运算的简便方法.

例5 若$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$, 证明

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{i\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

证 由前面介绍的积分性质知, 当$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$满足*Fourier*积分定理的条件时, 有

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

当$g(t)$为一般情况时, 可以将$g(t)$表示为$f(t)$与$u(t)$的卷积, 即

$$g(t) = f(t) * u(t).$$

这是因为

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

利用卷积定理

$$\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(t) * u(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[u(t)]$$

$$= F(\omega) \cdot [\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$= \frac{F(\omega)}{i\omega} + \pi F(0)\delta(\omega).$$

说明：当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$ 的条件不满足时，它的 *Fourier* 变换就包括一个脉冲函数，即

$$\mathrm{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(\omega)}{i\omega}+\pi F(0)\delta(\omega).$$

特别，当 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0$ 时，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=0$$

时，由于 $f(t)$ 是绝对可积的，所以

$$F(0)=\lim_{\omega\to 0}F(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\omega\to 0}[f(t)e^{-i\omega t}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此可见,当 $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$时,就有$F(0)=0$,从而与前面的古典意义下的积分性质相一致.

三、小结与思考

应熟练掌握Fourier变换的性质，会利用性质求复杂函数的Fourier变换和广义Fourier变换.

本节学习了卷积、卷积定理。熟练掌握卷积定理的各种形式，应用卷积定理求Fourier变换.

作业：P150　12

放映结束，按Esc退出.