第四节 Laplace逆变换

- 一、问题的提出
- 二、计算反演积分定理
- 三、典型例题
- 四、小结与思考

一、问题的提出

前面主要讨论了由已知函数$f(t)$求它的象函数$F(s)$,但在实际应用中常遇到与此相反的问题,即已知象函数$F(s)$求它的象原函数$f(t)$.

如何解决这一问题?

由$Laplace$变换的概念知,函数$f(t)$的$Laplace$变换,实际上就是$f(t)u(t)e^{-\beta t}$的$Fourier$变换.

于是,当$f(t)u(t)e^{-\beta t}$满足$Fourier$积分定理的条件时,按$Fourier$积分公式,在$f(t)$的连续点处有

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,\ t>0.$$

等式两边同时乘以$e^{\beta t}$,并考虑到它与积分变量ω无关,则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}\omega,\ t>0.$$

令$\beta+i\omega=s$,有

Laplace反演积分

$$f(t)=\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s,\ t>0.}$$

我们也称$f(t)$与$F(s)$构成了一个$Laplace$变换对.

计算复变函数的积分通常比较困难，但当$F(s)$满足一定条件时，可以用留数方法来计算.

二、定理

若$s_1, s_2, \cdots, s_n$是函数$F(s)$的所有奇点(适当选取β使这些奇点全在$\mathrm{Re}(s) < \beta$的范围内), 且当$s \to \infty$时, $F(s) \to 0$, 则有

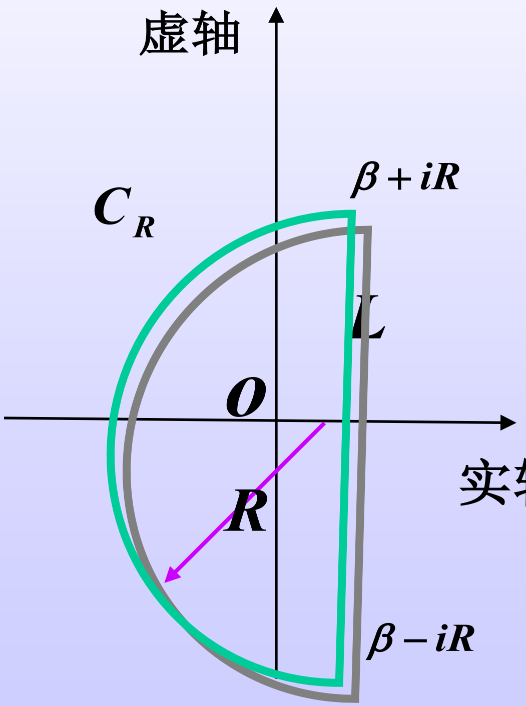
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n} \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}],$$

即

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}], \ t > 0.$$

证 作闭曲线$C = L + C_R$, C_R在$\mathrm{Re}(s) < \beta$的区域内是半径为R的圆弧,当R充分大后,$F(s)$的所有奇点包含在曲线C围成的区域内.

同时e^{st}在全平面上解析,所以$F(s)e^{st}$的奇点就是$F(s)$的奇点,由留数定理可得



$$\oint_C F(s)e^{st}\mathrm{d}s = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}].$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\beta-iR}^{\beta+iR}F(s)e^{st}\mathrm{d}s+\oint_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}].$$

Jordan引理

由复变函数论中的*Jordan*引理，当$t>0$时,有

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}],\ t>0.$$

推论： 设$F(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$,其中$A(s),B(s)$是不可约多项式,

$B(s)$的次数是n,而且$A(s)$的次数小于$B(s)$的次数,

设$B(s)$的零点为$s_1, s_2, \ldots, s_k$, 其阶数分别为$p_1, p_2, \ldots, p_k$,

$(\sum_{j=1}^{k}p_j=n)$, 那么在$f(t)$的连续点处，有

$$f(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(p_j-1)!}\lim_{s\to s_j}\frac{d^{p_j-1}}{ds^{p_j-1}}\left[(s-s_j)^{p_j}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]$$

三、典型例题

例1 利用留数方法计算$F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$的逆变换.

解 这里$B(s)=s^2+1$,它有两个单零点,$s_1=i$,

$s_2=-i$，则

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1+s^2}\right]=\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}\left[\frac{s}{1+s^2}e^{st},s=s_k\right]$$

$$=\frac{s}{2s}e^{st}\Big|_{s=i}+\frac{s}{2s}e^{st}\Big|_{s=-i}$$

$$=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\cos t,\ t>0.$$

例2 利用留数方法计算$F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的逆变换.

解 这里$B(s)=s(s-1)^2, s=0$为单零点，

$s=1$为二级零点，则

$$f(t)=\frac{1}{3s^2-4s+1}e^{st}\bigg|_{s=0}$$

$$+\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-1)^2\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st}]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\frac{1}{s}e^{st}]=1+e^t(t-1).$$

例3 利用留数方法计算$F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$的逆变换.

解 这里$B(s)=(s^2+1)(s^2+4)$, $s=\pm i,\pm 2i$为单零点,

$$\text{则}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(1+s^2)(s^2+4)}\right]$$

$$=\operatorname*{Res}_{s=i}\left[\frac{s^2e^{st}}{(1+s^2)(s^2+4)}\right]+\operatorname*{Res}_{s=-i}\left[\frac{s^2e^{st}}{(1+s^2)(s^2+4)}\right]$$

$$+\operatorname*{Res}_{s=2i}\left[\frac{s^2e^{st}}{(1+s^2)(s^2+4)}\right]+\operatorname*{Res}_{s=-2i}\left[\frac{s^2e^{st}}{(1+s^2)(s^2+4)}\right]$$

$$=\frac{i}{6}e^{it}-\frac{i}{6}e^{-it}-\frac{i}{3}e^{2it}+\frac{i}{3}e^{-2it}$$

$$=\frac{2}{3}\sin 2t-\frac{1}{3}\sin t.$$

例4 求下列函数的*Laplace*逆变换.

(1) $\dfrac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}$; (2) $\dfrac{1}{s-1}e^{-s}$;

(3) $\arctan\dfrac{1}{s}$.

解

(1)由于$\dfrac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{s^2+4}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^2+1})$,

以及L $[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,知

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}\right]=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right],$$

$$=\frac{2}{3}\sin 2t-\frac{1}{3}\sin t.$$

(2)由$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^t$,则

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}e^{-s}\right]=e^{t-1}u(t-1)$$

$$=\begin{cases} e^{t-1}, & t>1 \\ 0, & t<1 \end{cases}.$$

$$(3)\text{令} F(s)=\arctan\frac{1}{s},\text{则} F'(s)=\frac{-1}{1+s^2},\text{而且}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{1+s^2}]=-\sin t,$$

由微分性质

$$\mathcal{L}^{-1}[arctg\frac{1}{s}]=f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=\frac{\sin t}{t}.$$

例5 求$F(s)=\dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}$的$Laplace$逆变换.

解法一：因为$B(s)=s^2(s^2+a^2)$, $s=0$为二级零点，

$s=\pm ai$为单零点,则

$$f(t)=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}e^{st}]$$

$$+\lim_{s\to ai}\frac{(s-ai)a}{s^2(s^2+a^2)}e^{st}+\lim_{s\to -ai}\frac{(s+ai)a}{s^2(s^2+a^2)}e^{st}$$

$$=\frac{t}{a}-\frac{e^{iat}}{2ia^2}+\frac{e^{-iat}}{2ia^2}=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\sin at.$$

法二：由部分分式法，对$F(s)$进行分解得

$$F(s)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right),$$

所以

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right]$$

$$=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\sin at.$$

法三：利用卷积方法求解.

取$F_1(s)=\dfrac{1}{s^2}, F_2(s)=\dfrac{a}{s^2+a^2}$， 于是

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]*\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

$$=t*\sin at=\int_0^t \tau\sin a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{a}\tau\cos a(t-\tau)\Big|_0^t-\frac{1}{a}\int_0^t \cos a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\sin at.$$

法四：由于$F(s)=\dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}=\dfrac{1}{s}\dfrac{a}{s(s^2+a^2)}$,且

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{s(s^2+a^2)}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{a}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+a^2})]$$

$$=\frac{1}{a}(1-\cos at),$$

由积分性质，有

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}\frac{a}{s(s^2+a^2)}]$$

$$= \int_0^t \frac{1}{a}(1 - \cos at)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\sin at.$$

对有理分式函数求象原函数，应视具体问题来决定求法.

四、小结

本课所讲述的是反演积分及其计算方法.熟练掌握用留数求象原函数的方法.

作业： P170 6(2)(3)(4)(5)

Jordan引理

设复变数s的一个函数$F(s)$满足下列条件:

(1)它在左半平面内$(\mathrm{Re}(s)<\beta)$除有限个奇点外是解析的;

(2)对于$\mathrm{Re}(s)<\beta$内的s,当$|s|=R\to+\infty$时,$F(s)$一致地趋近于零,

则当$t>0$时有

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=0,$$

其中$C_R:|s|=R,\mathrm{Re}(s)<\beta$,它是以$\beta+0i$为圆心,$R$为半径的圆弧