第四节　洛朗级数

- 一、问题的引入
- 二、洛朗级数的概念
- 三、函数的洛朗展开式
- 四、小结与思考

一、问题的引入

问题: 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 是否能表示为 $z-z_0$ 的幂级数.

1. 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂项部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{正幂项部分}}$$

负幂项部分　　正幂项部分

主要部分　　解析部分

收敛

同时收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

$\Big\downarrow$ 收敛半径 R

$|\zeta| < R$时,收敛

$\Big\downarrow$ 收敛域

$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$\Big\downarrow$ 收敛半径 R_2

收敛域

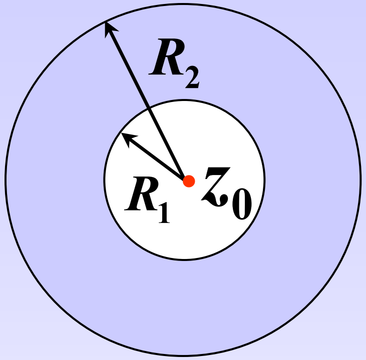
$$|z-z_0| < R_2$$

若(1) $R_1 > R_2$： 两收敛域无公共部分,

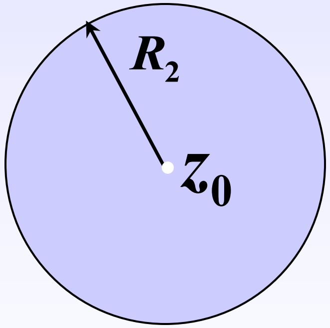
(2) $R_1 < R_2$： 两收敛域有公共部分 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

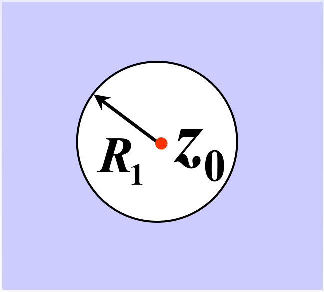
结论： 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 的收敛区域为

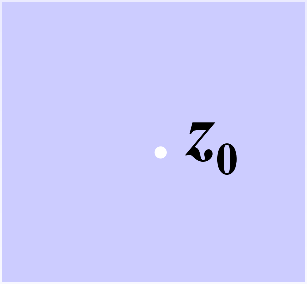
圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.



常见的特殊圆环域：







$0 < |z-z_0| < R_2$　　$R_1 < |z-z_0| < \infty$　　$0 < |z-z_0| < \infty$

二、洛朗级数的概念

定理 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析，那末 $f(z)$ 在 D 内可展开成洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$ 为洛朗系数.

$$(n = 0, \pm 1, \cdots)$$

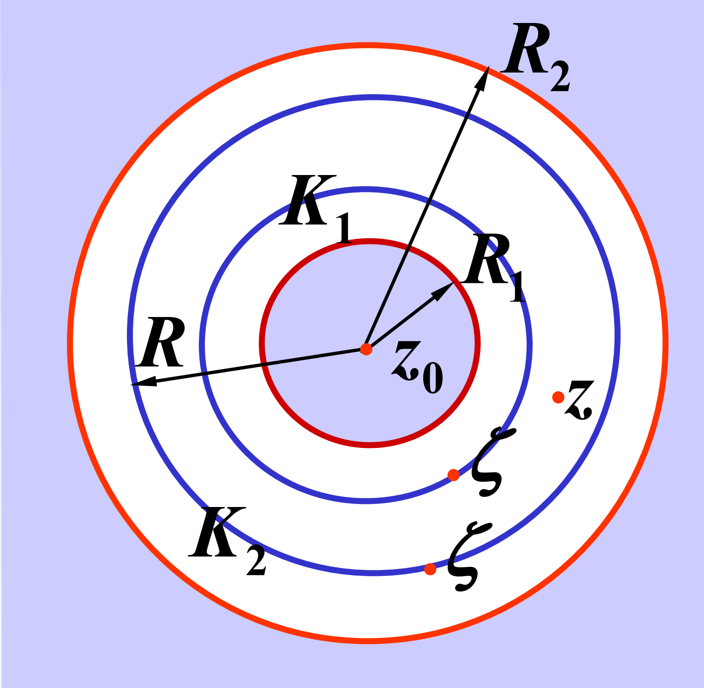
C为圆环域内绕z_0的任一正向简单闭曲线.

证 $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

对于第一个积分:

因为 $$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\quad\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right)$$



$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

所以 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

对于第二个积分: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

因为 $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\dfrac{-1}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\quad\left(\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1\right)$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}(z-z_0)^{-n},$$

则 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}+R_N(z)$$

其中 $$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}f(\zeta)}{(z-z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta$$

下面证明 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 K_1 外部成立.

令 $q = \left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{R_1}{|z - z_0|}$ 与积分变量 ζ 无关, $0 < q < 1$.

又因为 $|f(\zeta)| \le M$ (由 $f(z)$ 的连续性决定)

$$|R_N(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{R_1}q^n\cdot 2\pi R_1 = \frac{Mq^N}{1-q}.$$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0.$

于是 $-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

则 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

如果C为在圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线．则 c_n与c_{-n}可用一个式子表示为:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad \text{[证毕]}$$

说明:

1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

$f(z)$在圆环域内的**洛朗(Laurent)级数**.

函数 $f(z)$在圆环域内的**洛朗展开式**

2) 某一圆环域内的解析函数展开为含有正、负幂项的级数是唯一的， 这就是$f(z)$ 的洛朗级数.

定理给出了将圆环域内解析的函数展为洛朗级数的一般方法.

三、函数的洛朗展开式

常用方法 : 1. 直接法　2. 间接法

1. 直接展开法

利用定理公式计算系数 c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

然后写出　$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

缺点: 计算往往很麻烦.

2. 间接展开法

根据正、负幂项组成的级数的唯一性, 可用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开 .

优点 : 简捷 , 快速 .

例1 在 $0<|z|<\infty$ 内, 将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开成洛朗级数.

解 由定理知: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta$

$C:|z|=\rho(0<\rho<\infty)$, $(n=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$

当$n \le -3$时，$\dfrac{e^z}{z^2}$在圆环域内解析，

故由柯西定理知：　$c_n = 0$

当$n \ge -2$时，　由高阶导数公式知：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{(n+2)!}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}z^{n+2}}(e^z)\right]_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}$$

故 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$

$$0 < |z| < \infty$$

另解

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

例2　将函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内展成洛朗展式.

解　$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$

$$=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-4}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

$$0<|z|<+\infty$$

例3 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在适当圆环域内展开为z的洛朗级数.

解 z的圆环域包括

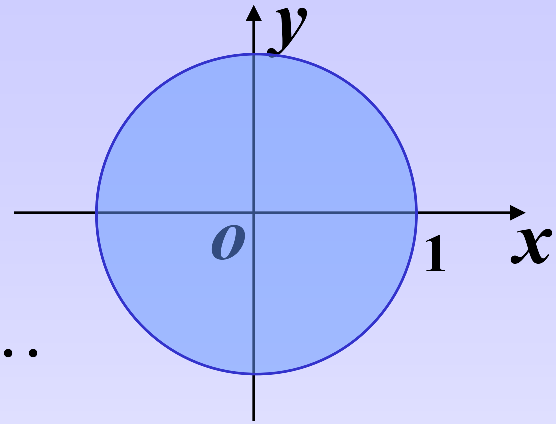
$1)\ |z|<1;\qquad 2)\ 1<|z|<2;\qquad 3)\ 2<|z|<+\infty.$

把 $f(z)$ 在这些区域内展开成洛朗级数.

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)}-\frac{1}{(2-z)},$$

1) 在 $|z|<1$ 内,

由于$|z|<1$，从而$\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$



则 $$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

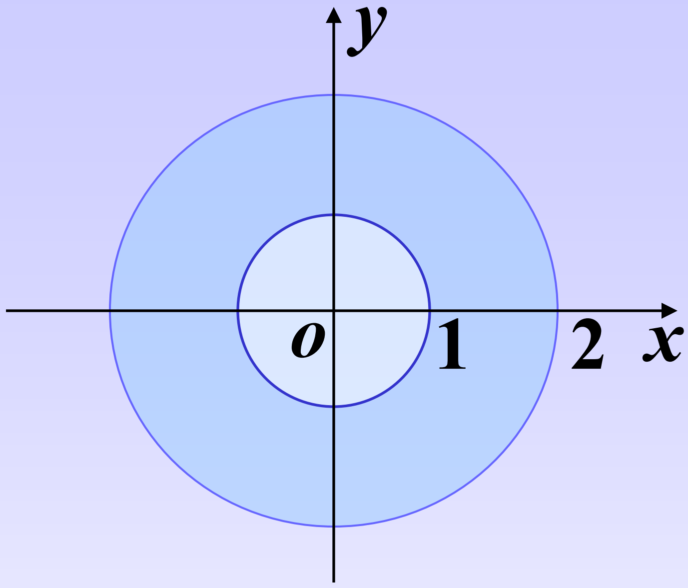
所以 $$f(z)=(1+z+z^2+\cdots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots$$

2) 在 $1<|z|<2$ 内,

由 $|z|>1 \longrightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$|z|<2 \longrightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$



$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

且仍有 $$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)$$

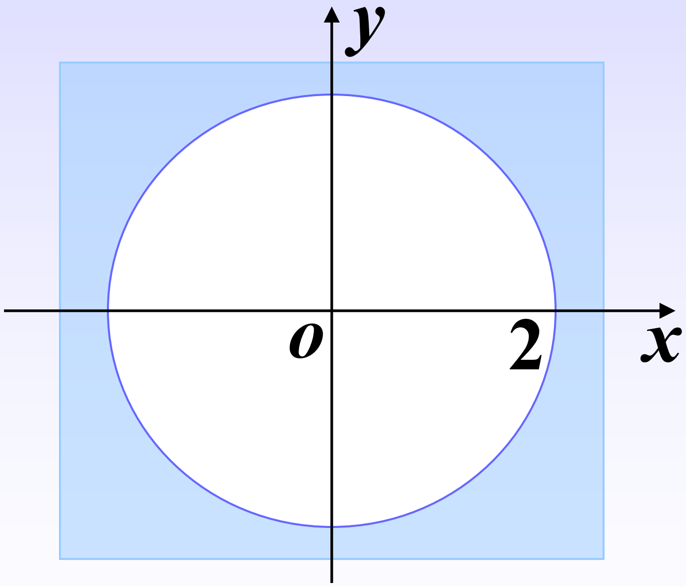
于是 $f(z) = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots\right)$

$$= \cdots - \frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots$$

3) 在 $2 < |z| < \infty$ 内,

由 $|z| > 2 \longrightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1$

此时 $\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$



$$= -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots\right) \qquad 此时 \left|\frac{1}{z}\right| < \left|\frac{2}{z}\right| < 1,$$

仍有 $$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

故 $$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots.$$

说明:

1. 函数$f(z)$在以z_0为中心的圆环域内的洛朗级数中尽管含有$z-z_0$的负幂项, 而且z_0又是这些项的奇点, 但是z_0可能是函数$f(z)$的奇点,也可能不是$f(z)$的奇点.

2. 给定了函数 $f(z)$ 与复平面内的一点 z_0 以后，函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式 (包括泰勒展开式作为它的特例).

问题：这与洛朗展开式的唯一性是否相矛盾?

回答：不矛盾 .

(唯一性 : 指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的)

例4 求 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)^2}$ 在圆环域：$0<|z-2|<1$

内的洛朗展开式.

解 $$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2-1}=-\frac{1}{1-(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$$

$$\frac{1}{(z-3)^2}=-\left(\frac{1}{z-3}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-1}$$

所以 $$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n(z-2)^{n-2}$$

例5 求 $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在以下圆环域：

(1) $1<|z|<2$； (2) $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内的洛朗展开式.

解 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{2}{z^2+1}$

1) 当 $1<|z|<2$ 时， $f(z)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{z}{2}-1\right)}-\dfrac{2}{z^2\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}-\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}-\frac{2}{z^{2}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{1}{z^{2}}\right)^{n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n+1}}.$$

2) 在 $0<|z-2|<\sqrt{5}$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^{2}+1}=\frac{1}{z-2}-i\left(\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right)$$

$$=\frac{1}{z-2}-i\left[\frac{1}{(z-2)+(i+2)}-\frac{1}{(z-2)+(2-i)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{(2-i)\left(1+\frac{z-2}{2-i}\right)}-\frac{1}{(2+i)\left(1+\frac{z-2}{2+i}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\left[\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2-i}\right)^n-\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2+i}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}}-\frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot[(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}]\cdot\frac{(z-2)^n}{5^{n+1}}.$$

四、小结与思考

在这节课中,我们学习了洛朗展开定理和函数展开成洛朗级数的方法.将函数展开成洛朗级数是本节的重点和难点.

思考题

洛朗级数与泰勒级数有何关系?

思考题答案

是一般与特殊的关系.

洛朗级数是一个双边幂级数, 其解析部分是一个普通幂级数;

洛朗级数的收敛区域是圆环域 $r < |z - z_0| < R$.

当 $z_0 = 0, r = 0, c_{-n} = 0$ 时,

洛朗级数就退化为泰勒级数了.

作业: P75 14(1)(2)(3), 15,

放映结束，按Esc退出.