

第一节 复变函数积分的概念

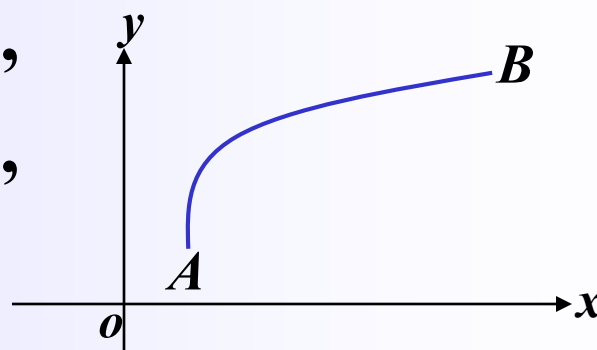
- 一、积分的定义
- 二、积分的计算
- 三、积分的性质
- 四、小结与思考

一、积分的定义

1.有向曲线:

设 C 为平面上给定的一条光滑(或按段光滑)曲线, 如果选定 C 的两个可能方向中的一个作为正方向(或正向), 那么我们就把 C 理解为带有方向的曲线, 称为**有向曲线**.

如果 A 到 B 作为曲线 C 的正向, 那么 B 到 A 就是曲线 C 的负向, 记为 C^- .



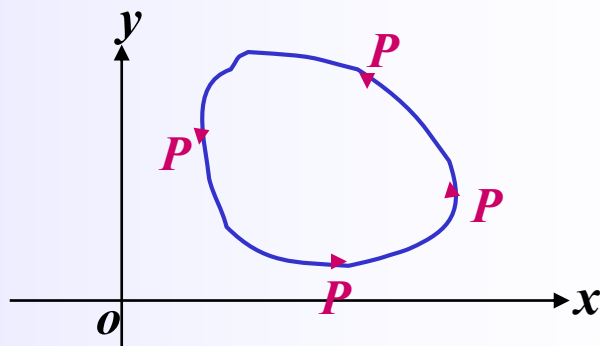
关于曲线方向的说明:

在今后的讨论中,常把两个端点中的一个作为起点,另一个作为终点,除特殊声明外,正方向总是指从起点到终点的方向.

简单闭曲线正向的定义:

简单闭曲线 C 的正向是指当曲线上的点 P 顺此方向前进时, 邻近 P 点的曲线的内部始终位于 P 点的左方.

与之相反的方向就是曲线的负方向.



机动



目录



上页



下页



返回



结束

2.积分的定义:

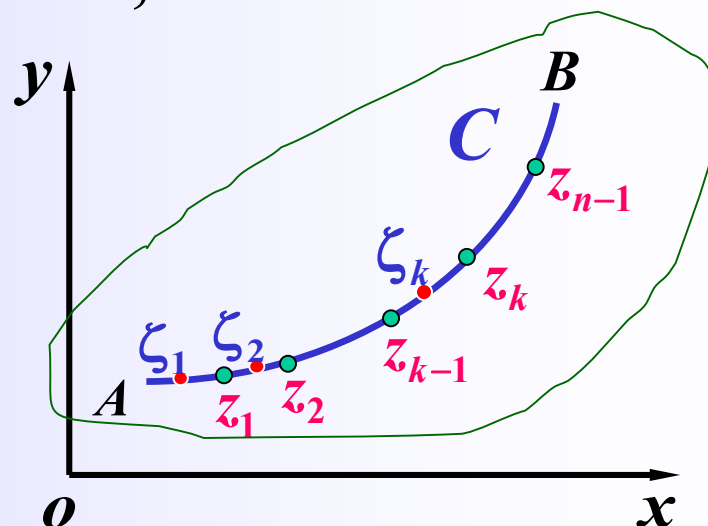
设函数 $w = f(z)$ 定义在区域 D 内, C 为区域 D 内起点为 A 终点为 B 的一条光滑的有向曲线, 把曲线 C 任意分成 n 个弧段, 设分点为

$$A = z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_n = B,$$

在每个弧段 $\overbrace{z_{k-1}z_k}$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

上任意取一点 ζ_k ,



机动



目录



上页



下页



返回



结束

作和式
$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k,$$

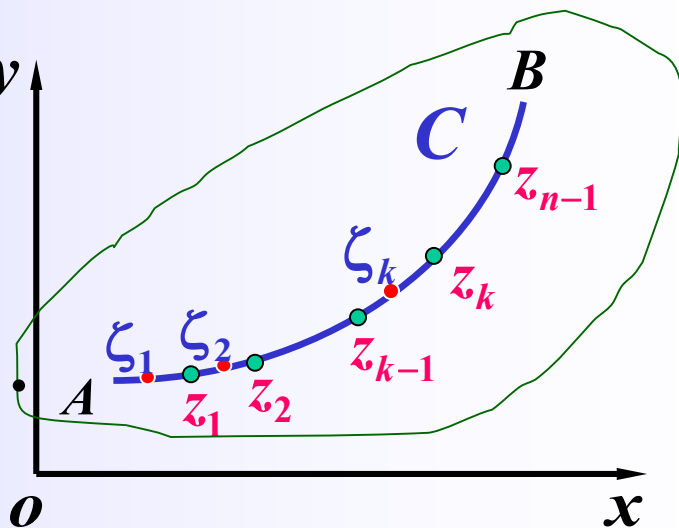
这里 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta s_k = \widehat{z_{k-1} z_k}$ 的长度,

记 $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta s_k\}$, 当 n 无限增加且 $\delta \rightarrow 0$ 时,

如果不论对 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, S_n 有唯一极限, 那么称这极限值为

函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分, 记为

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k.$$



机动



目录



上页



下页



返回



结束

二、积分的计算

定理:

设 C 是复平面上的逐段光滑曲线, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 C 上连续, 则 $\int_C f(z)dz$ 在 C 上可积, 且

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy \\ &\quad + i \int_C u(x, y)dy + v(x, y)dx\end{aligned}$$

证 如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 D 内处处连续, 那么 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内均为连续函数,

设 $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$

因为 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = x_k + iy_k - (x_{k-1} + iy_{k-1})$

$$= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$$

$$= \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

所以 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k$

$$= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + i v(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \\
 &\quad + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]
 \end{aligned}$$

由于 u, v 都是连续函数, 根据线积分的存在定理,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \\
 &\quad + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]
 \end{aligned}$$

$$\underline{\int_C f(z) dz} = \underline{\int_C u dx - v dy} + i \underline{\int_C v dx + u dy}$$

积分计算的参数方程法

设 $z(t) = x(t) + iy(t)$, 则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\ &\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\} \{x'(t) + iy'(t)\}dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt.\end{aligned}$$

公式 $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt$$

例1 计算 $\int_C \operatorname{Re} z dz$, 其中 C 为:

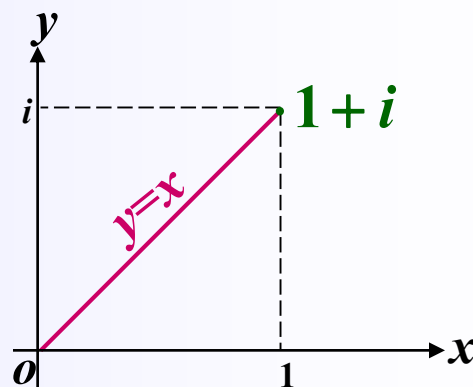
- (1) 从原点到点 $1+i$ 的直线段;
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 上从原点到点 $1+i$ 的弧段;
- (3) 从原点沿 x 轴到点 1 再到 $1+i$ 的折线.

解 (1) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z = t$, $dz = (1+i)dt$,

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1+i)dt = \frac{1}{2}(1+i);$$



机动



目录



上页



下页



返回



结束

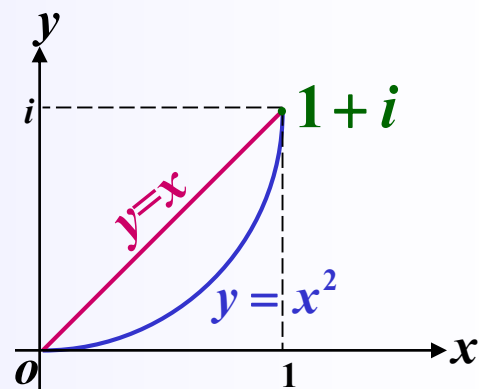
(2) 积分路径的参数方程为

$$z(t) = t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

于是 $\operatorname{Re} z = t$, $dz = (1 + 2ti)dt$,

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 t(1 + 2it)dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{2i}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i;$$



机动



目录



上页



下页



返回



结束

(3) 积分路径由两段直线段构成

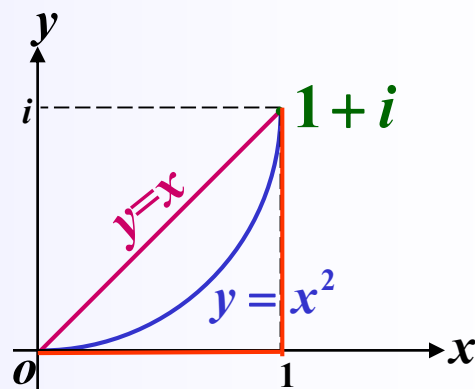
x 轴上直线段的参数方程为 $z(t) = t$ ($0 \leq t \leq 1$),

于是 $\operatorname{Re} z = t$, $dz = dt$,

1到 $1+i$ 直线段的参数方程为 $z(t) = 1 + it$ ($0 \leq t \leq 1$),

于是 $\operatorname{Re} z = 1$, $dz = i dt$,

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z dz &= \int_0^1 t dt + \int_0^1 1 \cdot i dt \\ &= \frac{1}{2} + i.\end{aligned}$$



机动



目录



上页



下页



返回



结束

例2 计算 $\int_C z^2 dz$, 其中 C 为:

(1) 从原点到点 $(2,1)$ 的直线段;

(2) 从原点到 $(2,0)$ 的直线段 C_1 和由 $(2,0)$ 到 $(2,1)$ 的线段 C_2 所组成的折线.

解 (1) 从原点到点 $(2,1)$ 的直线段方程为

$$z = (2 + i)t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

于是

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^1 (2 + i)^2 t^2 (2 + i) dt \\ &= \frac{1}{3} (2 + i)^3 = \frac{1}{3} (2 + 11i). \end{aligned}$$

从原点到(2,0)的直线段 C_1 的方程为

$$z = 2t, (0 \leq t \leq 1),$$

从(2,0)到(2,1)的直线段 C_2 的方程为

$$z = 2 + it, (0 \leq t \leq 1),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_C z^2 dz &= \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz \\ &= \int_0^1 (2t)^2 \cdot 2 dt + \int_0^1 (2 + it)^2 i dt \\ &= \frac{1}{3}(2 + 11i).\end{aligned}$$



机动



目录



上页



下页



返回



结束

课堂练习:

计算 $\int_C \bar{z} dz$, 其中 C 为:

(1) 从点 $(1,0)$ 到点 $(0,1)$ 的直线段.

(2) 从点 $(1,0)$ 到 $(0,0)$, 再从 $(0,0)$ 到 $(0,1)$ 的折线.

答案: (1) i , (2) 0

例3 计算 $\int_C |z| dz$, 其中 C 为: 圆周 $|z| = 2$.

解 积分路径的参数方程为

$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad dz = 2ie^{i\theta} d\theta$$

$$\int_C |z| dz = \int_0^{2\pi} 2 \cdot 2ie^{i\theta} d\theta \quad (\text{因为 } |z| = 2)$$

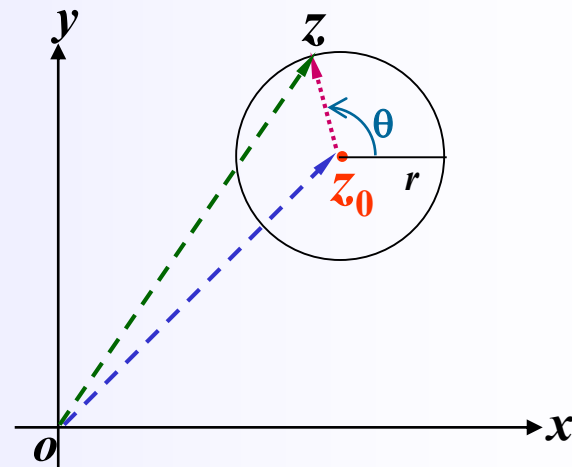
$$= 4i \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$$

$$= 0.$$

例4 求 $\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.

解 积分路径的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$



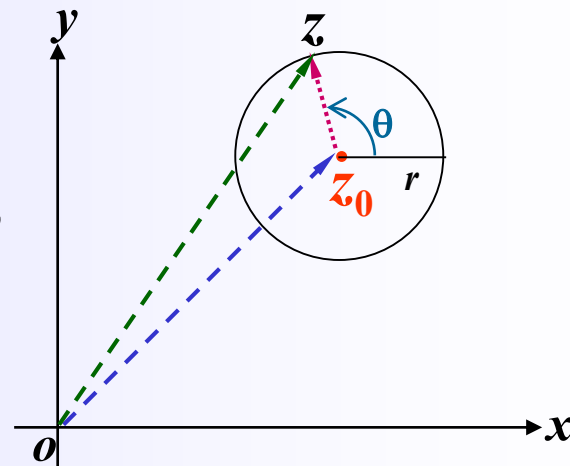
$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta \\ &= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta, \end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta = 0;$$



所以
$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

重要结论： 积分值与路径圆周的中心和半径无关.



机动



目录



上页



下页



返回



结束

三、积分的性质

$$(1) \int_C af(z)dz = a \int_C f(z)dz; \quad (a \text{ 为常数})$$

$$(2) \int_C [f(z) \pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz;$$

$$(3) \int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz;$$

(4) 设曲线 C 的长度为 L , 函数 $f(z)$ 在 C 上满足

$$|f(z)| \leq M, \text{ 那末 } \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML.$$

估值不等式



机动



目录



上页



下页



返回



结束

性质(4)的证明

因为 $|\Delta z_k|$ 是 z_k 与 z_{k-1} 两点之间的距离,

Δs_k 为这两点之间弧段的长度,

$$\text{所以 } \left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot \Delta s_k$$

$$\text{两端取极限得 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds.$$

$$\text{因为 } \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \cdot \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k = ML,$$

$$\text{所以 } \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

[证毕]



机动



目录



上页



下页



返回



结束

例5 设曲线 C 是单位圆周, 证明

$$\left| \int_C \frac{\sin z}{z^2} dz \right| \leq 2\pi e.$$

证 在 C 上, $|z|=1$, 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{\sin z}{z^2} dz \right| &= \left| \int_C \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz^2} dz \right| \\ &\leq \int_C \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz^2} \right| ds \leq \int_C \frac{e^y + e^{-y}}{2} ds \leq 2\pi e. \end{aligned}$$

例6 设曲线 C 是正向圆周 $|z|=2$, 求 $\int_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$ 的一个上界.

证 先求被积函数在 $|z|=2$ 上的一个上界.

设 $z = x + iy$, 当 $|z|=2$ 时, 有

$$|e^z| = e^x \leq e^2,$$

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = 3.$$

所以
$$\left| \int_C \frac{e^z}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{e^2}{3} \cdot 4\pi.$$

四、小结与思考

本课我们学习了积分的定义、计算和性质.
应注意复变函数的积分有跟微积分学中的线积分完全相似的性质. 本课中重点掌握复积分的一般方法.

作业: P48 1(2)(4), 2

思考题

数学分析中实变函数的积分中值定理，能否直接推广到复积分上来？

思考题答案:

数学分析中的积分中值定理, **不能**直接推广到复变函数中来

反例:
$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

而 $e^{i\xi}(2\pi - 0) \neq 0$, 矛盾.

放映结束, 按Esc退出.