线性代数

第1章 线性方程组的解法

线性方程组的初等变换

多元线性方程组

1. 例题：求$1^k+2^k+\cdots+n^k$
2. n元一次/线性方程组
3. 解，解集

线性方程组的同解变形

1. 三角形方程组：方便求解
2. 方程组U的线性组合：W
    1. 方程组的初等变换：3种
    2. $U\to W$是同解变形

矩阵消元法

矩阵的初等行变换

1. 矩阵、元素/分量，行矩阵/行向量，列矩阵/列向量，方阵，零矩阵，零向量
2. 用矩阵$\mathbf{M}$表示线性方程组
    1. $\mathbf{A}$：系数矩阵
    2. $\mathbf{M}$：增广矩阵
    3. 方程的初等变换$\to$矩阵的初等行变换
3. n阶方阵$\mathbf{A}$：主对角线、对角元，上三角形矩阵、下三角形矩阵、对角矩阵$diag(a_{11},\dots,a_{nn})$、单位矩阵$\mathbf{I}$

用矩阵的初等行变换解线性方程组

1. 通解、特解
2. 齐次线性方程组
    1. 常数项全为0，可直接用$\mathbf{A}$代替方程组
    2. 方程至少有零解/平凡解

线性方程组的系数范围，数域

1. 数域
    1. 定义：复数集合的子集F，至少包含0和1，其中任意两个数的和差积商仍属于F
    2. 有理数集合、实数集合、复数集合都是数域
    3. 任何数域至少包含全体有理数
    4. 数域F上全体$m \times n$矩阵的集合：$F^{m\times n}$
2. 数环
    1. 定义：复数集合的子集D对加减乘运算封闭，称D为数环

线性方程组解集合的初步讨论

线性方程组求解过程总结

1. 阶梯形矩阵$\mathbf{T}$，最简阶梯形矩阵
2. 化为阶梯形矩阵后：
    1. r：阶梯数；n：矩阵列数/未知数个数；m：方程数
    2. 一定有：$r \leq m$
    3. $m < n \Rightarrow$无穷多解
    4. $m = n = r$（满秩）$\Rightarrow$无论常数项如何取值，方程组有唯一解

第2章 向量空间

第3章 行列式

第4章 矩阵的代数运算

第5章 矩阵的相合与相似

欧氏空间

最小二乘法

1. 想要近似解方程组$\mathbf{AX} = \mathbf{c}$
2. 想象成几何问题：平面外一点到平面距离最小值
3. 化为求解方程组$\mathbf{A^TAX} = \mathbf{A^Tc}$，3的唯一解是1的近似解

内积的推广

1. $\mathbf{R}^n$上内积的定义

2. 欧氏空间：定义了内积的实向量空间
3. $(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}^T\mathbf{b}$
4. 内积的性质：双线性、对称性、正定性
5. 垂直/正交
6. 模，单位向量
7. 最小二乘法的理论依据
    1. 方程3的解使得方程1在误差平方的意义下最优
    2. 齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$与$\mathbf{A}^T\mathbf{AX}=\mathbf{0}$同解，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$与$\mathbf{A}$秩相等
    3. 方程3总是有解，且当$rank\mathbf{A}=n$时有唯一解

角度的计算公式

1. $cos(\theta)=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$
2. 柯西-施瓦茨不等式：$(\mathbf{a},\mathbf{b})^2\leq|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$
3. 余弦定理
4. 三角形不等式

正交化

标准正交基

1. 正交向量组、正交基，标准正交向量组(单位向量组成)、标准正交基
2. 度量方阵/格拉姆方阵$\mathbf{G}$：以向量组T中两两向量的内积(α_i,α_j)为第(i,j)元组成的方阵
    1. 将向量组以列排成$\mathbf{A}$，则$\mathbf{G}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
    2. 对称性
    3. 用$\mathbf{G}$计算内积
    4. $\mathbf{X^TGX}\geq 0$
3. 正定、半正定、负定、半负定
    1. 设$\mathbf{S}$是n阶**实对称**方阵，若对任意$\mathbf{0}\neq\mathbf{X}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$有$\mathbf{X^TSX}>\mathbf{0}$，则称$\mathbf{S}$是正定的
4. 正交方阵：$\mathbf{A^TA}=\mathbf{I}$

Gram-Schmidt正交化方法

一组基→正交基→标准正交基

对线性无关的$\mathbf{a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}}$，将$\mathbf{a_{k+1}}$减去$\mathbf{a_1,\cdots,a_k}$适当的线性组合，可以得到与$\mathbf{a_1,\cdots,a_k}$都正交的向量$\mathbf{b_{k+1}}$

算法：逐次递进

矩阵的相合

1. 定义：$\mathbf{A},\mathbf{B}$是n阶方阵，若存在可逆方阵$\mathbf{P}$使$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$，则称$\mathbf{B}$与$\mathbf{A}$相合
2. 应用（求向量组的标准正交基）：利用相合，将原向量组S的格拉姆方阵$\mathbf{G}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$相合到$\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\mathbf{G}\mathbf{P}=\mathbf{I}$，则$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}$是标准正交向量组
3. 相合的性质
    1. 自反性：$\mathbf{A}$与自身相合
    2. 对称性
    3. 传递性

二次型

二次型的配方

1. 二次型：n元二次函数$Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}x_ix_j$
2. 标准型：设存在可逆方阵$\mathbf{P}$使$Q(\mathbf{X})=Q_1(\mathbf{Y})=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$对$\mathbf{Y}=\mathbf{P}\mathbf{X}$成立，则称$Q_1(\mathbf{Y})$是$Q(\mathbf{X})$的标准型
3. $Q(\mathbf{X})$的正定、半正定，负定、半负定
4. 任意数域F上的二次型都能通过可逆线性变换变为标准型

用矩阵相合化简二次型

$Q(\mathbf{X})=\mathbf{X}\mathbf{S}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$，求可逆方阵$\mathbf{K}$将$\mathbf{S}$相合到对角矩阵$\mathbf{D}=\mathbf{K}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{K}$，则$Q(\mathbf{X})=Q_1(\mathbf{Y})=\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{Y}$为标准形，其中$\mathbf{X}=\mathbf{K}\mathbf{Y}$

实对称方阵相合标准形

实对称方阵相合标准形

1. 西尔韦斯特惯性定律：任何一个实对称方阵$\mathbf{S}$都能相合到唯一的标准形：对角方阵，p个1，q个-1，n-p-q个0
2. 正惯性系数p、负惯性系数q；$p+q=rank\mathbf{S}$，$p-q$称为符号差
3. 实二次型$Q(\mathbf{X})=\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}$可以通过可逆线性代换化为规范形：$Q_1(\mathbf{Y})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$

正定方阵的判定

1. 实对称方阵$\mathbf{S}>\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{S}$与$\mathbf{I}$相合
2. 实对称方阵$\mathbf{S}>\mathbf{0}\Rightarrow|\mathbf{S}|>0$
3. 实对称方阵$\mathbf{S}>\mathbf{0}\Rightarrow|\mathbf{S}_k|>0$，$|\mathbf{S}_k|$称为顺序主子式

4. 实对称方阵$\mathbf{S} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{S}$的全体顺序主子式$|\mathbf{S}_k| > 0$

特征向量与相似矩阵

特征向量

变换$\sigma : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{PX}$将某个方向上的非零向量拉伸/压缩到原来的实数倍

1. 特征值、特征向量：$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$
2. 求法
   1. 求特征多项式$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$，解方程$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$求出所有根，即为$\mathbf{A}$所有特征值
   2. 对每个特征值λ_i，解齐次线性方程组$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$求出解空间$V_{\lambda_i}$的一组基，这组基的所有非零线性组合就是$\mathbf{A}$属于$\lambda_i$的全部特征向量
3. 一些定义
   1. 特征方程：$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$
   2. 特征多项式：$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$
   3. 特征根：特征多项式的根
   4. 特征子空间：对每个特征值λ_i，齐次线性方程组$(\mathbf{A} - \lambda_I\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$的解空间$V_{\lambda_i}$
   5. 特征根的重数、特征值的重数
4. 三角形矩阵的全体特征值就是它的全体对角元，每个特征值λ_i的重数就是它在对角元中出现的次数
5. $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$，令$\lambda = 0$得：
   1. 行列式$|\mathbf{A}|$等于特征值的乘积
   2. 特征多项式常数项=$(-1)^n|\mathbf{A}|$

相似矩阵

1. 相似：设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$是n阶方阵，若存在n阶可逆方阵$\mathbf{P}$使$\mathbf{B} = \mathbf{P^{-1}AP}$，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$相似
2. 相似不变量：特征多项式、特征值、行列式、迹、秩
3. $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$，其中$\mathbf{P}$各列为$\mathbf{A}$的特征向量；$\mathbf{D}$为对角矩阵，对角元为$\mathbf{A}$的特征值
   1. 应用：$\mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$，$\mathbf{A^n} = \mathbf{PD^nP^{-1}}$

相似于对角矩阵的条件

1. n阶复方阵$\mathbf{A}$相似于对角矩阵$\Leftrightarrow\mathbf{A}$有$n$个线性无关的特征向量
2. n阶复方阵$\mathbf{A}$相似于对角矩阵$\Leftrightarrow\mathbf{A}$的每个特征值$\lambda_i$的重数等于特征子空间$V_{\lambda_i}$的维数

正交相似

二次曲线与二次曲面方程的化简

原坐标$\mathbf{X}$变换到新坐标$\mathbf{Y}$：$\mathbf{X}=\mathbf{UY}$，其中$\mathbf{U}$是由解空间中的标准正交基为各列排成的正交方阵，且$det\mathbf{U}=1$

实对称方阵的正交相似

（前提：**实对称**方阵！）

1. 正交相似：$\mathbf{B}=\mathbf{U^{-1}AU}$，其中$\mathbf{U}$为正交矩阵，则称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$正交相似
2. 算法
   1. 求所有特征根λ_i，一定都是实数
   2. 对每个λ_i求齐次线性方程组实数域上的解空间V_{λ_i}的一组基S_i
   3. 将S_i正交化、单位化为T_i，将T_i为列排为正交方阵$\mathbf{U}$
   4. $\mathbf{D}=\mathbf{U^{-1}AU}$为对角矩阵，对角元是$\mathbf{A}$全部特征根
3. 定理（复杂版化简二次型的理论依据）：任意n阶实对称方阵$\mathbf{S}$可通过正交方阵相似到对角矩阵$\mathbf{D}=\mathbf{U^{-1}SU}$，且对角元为$\mathbf{S}$的特征值
4. 实对称方阵**不同特征值的特征向量相互垂直**
5. 坐标变换下，线性变换的关系
   1. 线性变换前，旧坐标系下坐标$\mathbf{X}$与新坐标系下坐标$\mathbf{Y}$：$\mathbf{X}=\mathbf{UY}$
   2. 旧坐标系下描述线性变换：$\mathbf{X}\mapsto\mathbf{AX}$
   3. 新坐标系下描述线性变换：$\mathbf{Y}\mapsto(\mathbf{U^{-1}AU})\mathbf{Y}$

三维几何空间中的旋转与对称

此时不再是实对陈方阵，不能正交相似/相合至对角阵

正交变换

1. 正交变换：$\sigma:\mathbf{A}\mapsto\mathbf{AX}$保持向量内积不变/保持图形的形状和大小不变
2. $\sigma:\mathbf{A}\mapsto\mathbf{AX}$是正交变换$\Leftrightarrow\mathbf{A}$是正交方阵
3. 同阶正交方阵的乘积是正交方阵；正交方阵的逆是正交方阵
4. 酉方阵：满足$\mathbf{A^*A}=\mathbf{I}$的复方阵
   1. 酉方阵的特征值的模为1
   2. 正交方阵（完全为实数的酉方阵）的特征值的模为1

附录

相合与相似

相合的应用：

1. 求向量组$\mathbf{A}$的标准正交基（通过把格拉姆方阵 $\mathbf{G}=\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 相合到单位阵 $\mathbf{I}=\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P}$，标准正交基为$\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{P}$）
2. 化简二次型（通过相合到对角阵 $\mathbf{D}=\mathbf{K}^T\mathbf{S}\mathbf{K}$，新变量 $\mathbf{Y}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{X}$）

相似的应用（似乎总跟特征值/向量有关）：

1. 求矩阵(**不要求对称**)的n次幂（求特征向量，相似到对角阵）
2. 化简**二次型**（求特征向量并正交标准化得**正交方阵**$\mathbf{U}$，正交相似到对角阵$\mathbf{D}$）
    1. $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ 变为 $\mathbf{Y}^T\mathbf{D}\mathbf{Y}$
    2. 其中，$\mathbf{X}=\mathbf{U}\mathbf{Y}$，$\mathbf{D}=\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{U}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$（对角元为特征值）
3. 研究非二次型的变换，如旋转（此时正交相似/相合到非对角阵）