第六节　解析函数与调和函数的关系

- 一、解析函数与调和函数
- 二、由调和函数求解析函数
- 三、小结与思考

一、解析函数与调和函数

1. 两者的关系

设 $w = f(z) = u + iv$ 为 D 内的一个解析函数,

那末 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$

根据解析函数高阶导数定理,

u 与 v 具有任意阶的连续偏导数,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ 同理 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$

定义 如果二元实变函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，并且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

那末称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数

拉普拉斯

另外

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

是一种运算符号，称为拉普拉斯算子.

2. 共轭调和函数的定义

定义 设$u(x, y)$, $v(x, y)$都是区域 D内的调和函数，若 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 满足C-R方程， 则称$v(x, y)$是$u(x, y)$的**共轭调和函数**.

定理 函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析的充分必要条件是$v(x, y)$是$u(x, y)$的共轭调和函数.

二、由调和函数求解析函数

1. 偏积分法

利用C−R方程求得它的共轭调和函数 v, 从而构成一个解析函数$u+vi$. 这种方法称为偏积分法.

例1 证明 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数, 并求其共轭调和函数 $v(x,y)$ 和由它们构成的解析函数.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x,$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故 $u(x,y)$ 为调和函数.

因为 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$,

$$v(x,y)=\int(3x^2-3y^2)\mathrm{d}y=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x),$$

又因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\quad=6xy=6xy+\varphi'(x)$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

故 $\varphi(x)=C,\quad v(x,y)=3x^2y-y^3+c,$

得一个解析函数

$$f(z)=u+iv=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C)$$
$$=z^3+iC.$$

课后练习 证明 $u(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ 为调和函数,并求其共轭调和函数.

答案 $v(x,y)=3x^2y-6xy^2-y^3+2x^3+c.$

(C 为任意常数)

2. 不定积分法

已知调和函数 $u(x,y)$ 或 $v(x,y)$, 用不定积分求解析函数的方法称为不定积分法.

不定积分法的实施过程:

解析函数 $f(z)=u+iv$ 的导数 $f'(z)$ 仍为解析函数,

且 $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y \quad =v_y+iv_x$

把 u_x-iu_y 与 v_y+iv_x 用 z 来表示,

$$f'(z)=u_x-iu_y=U(z), \quad f'(z)=v_y+iv_x=V(z),$$

将上两式积分, 得

$$\boxed{f(z)=\int U(z)\mathrm{d}z+c,}\quad \boxed{f(z)=\int V(z)\mathrm{d}z+c,}$$

适用于已知实部 u 求 $f(z)$,

适用于已知虚部 v 求 $f(z)$,

例2 求 k 值, 使 $u = x^2 + ky^2$ 为调和函数. 再求 v, 使 $f(z) = u + iv$ 为解析函数, 并求 $f(i) = -1$ 的 $f(z)$.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ky,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2k,$$

根据调和函数的定义可得 $k = -1,$

因为 $f'(z) = U(z) = u_x - iu_y = 2x - 2kyi$

$$= 2x - 2kyi = 2x + 2yi = 2z,$$

根据不定积分法 $f(z) = \int 2z\mathrm{d}z = z^2 + c,$

由 $f(i) = -1,$ 得 $c = 0,$

所求解析函数为

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi = z^2.$$

练习：用不定积分法求解解析函数 $f(z)$

实部 $u(x,y)=y^3-3x^2y.$

答案 $f'(z)=U(z)=u_x-iu_y$

$$=3i(x^2+2xyi-y^2)=3iz^2,$$

$$f(z)=\int 3iz^2\mathrm{d}z=iz^3+c_1,$$

故 $f(z)=i(z^3+c).$ (c为任意实常数)

例3 已知$u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y)$，试确定解析函数$f(z)=u+iv$.

解 两边同时求导数

$$u_x+v_x=(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2x+4y)-2,$$

$$u_y+v_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)-2,$$

且 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

所以上面两式分别相加减可得

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, \qquad v_x = 6xy,$$

$$f'(z) = v_y + iv_x = 3x^2 - 3y^2 - 2 + 6xyi$$

$$= 3z^2 - 2,$$

$$f(z) = \int (3z^2 - 2)\mathrm{d}z = z^3 - 2z + c.$$

(c为任意实常数)

三、小结与思考

本节我们学习了调和函数的概念、解析函数与调和函数的关系以及共轭调和函数的概念.

应注意的是: 1. 任意两个调和函数u与v所构成的函数$u+iv$不一定是解析函数.

2. 满足柯西—黎曼方程$u_x = v_y$, $v_x = -u_y$,的v称为u的共轭调和函数, u与v注意的是地位不能颠倒.

作业：P50 17 (3) (4)