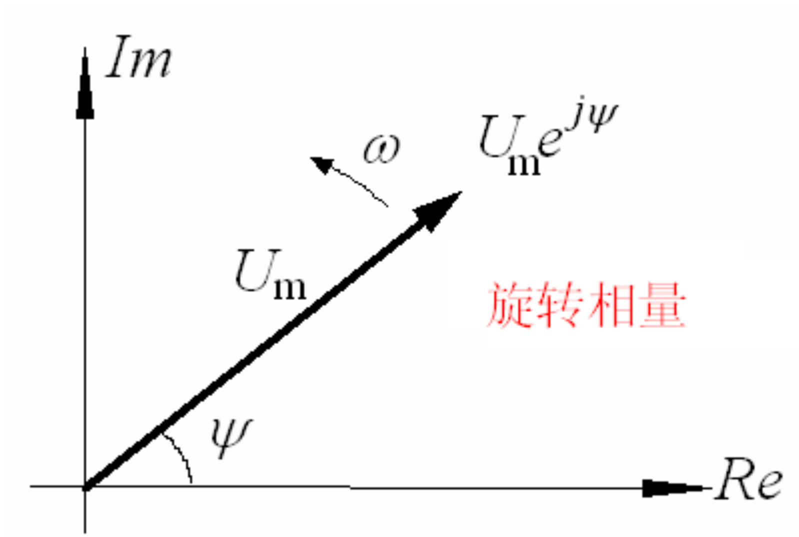
§5-3 正弦量的相量表示方法

1.正弦量的复数表示

相量法 — 求正弦函数的线性常系数微分方程的特解的一种简便方法。



对应于 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi)$

作一个复值函数$U_m e^{j(\omega t+\psi)}$

它表示复平面上的一个旋转向量

模为Um，t=0时的辐角为ψ,

相量以恒定角频率逆时针旋转

在t时刻，其辐角为 $\omega t+\psi$

由欧拉公式，有

$$U_m e^{j(\omega t+\psi)} = U_m \cos(\omega t+\psi) + jU_m \sin(\omega t+\psi)$$

$$U_m \cos(\omega t+\psi) = \mathrm{Re}[U_m e^{j(\omega t+\psi)}]$$

$$U_m \sin(\omega t+\psi) = \mathrm{Im}[U_m e^{j(\omega t+\psi)}]$$

设正弦电压用正弦表示

$$u(t) = U_m \sin(\omega t+\psi)$$ —— 正弦量的时间表达式

可以把上式写作 $u(t) = U_m \sin(\omega t+\psi)$

$$= \mathrm{Im}[U_m e^{j(\omega t+\psi)}]$$

$$= \mathrm{Im}[U_m e^{j\psi} e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\, U e^{j\psi} e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\, \dot{U} e^{j\omega t}]$$

式中 $\dot{U} = Ue^{j\psi}$，字母上加点，以表示相量与一般复数的区别

$\because Ue^{j\psi}$ 为复常数 $\therefore$ 复数 $\dot{U}$ 为正弦电压 u 的相量

$$\dot{U} = Ue^{j\psi}$$ —— 相量的指数表示法

$$\dot{U} = U\angle\psi$$ —— 相量的工程表示法

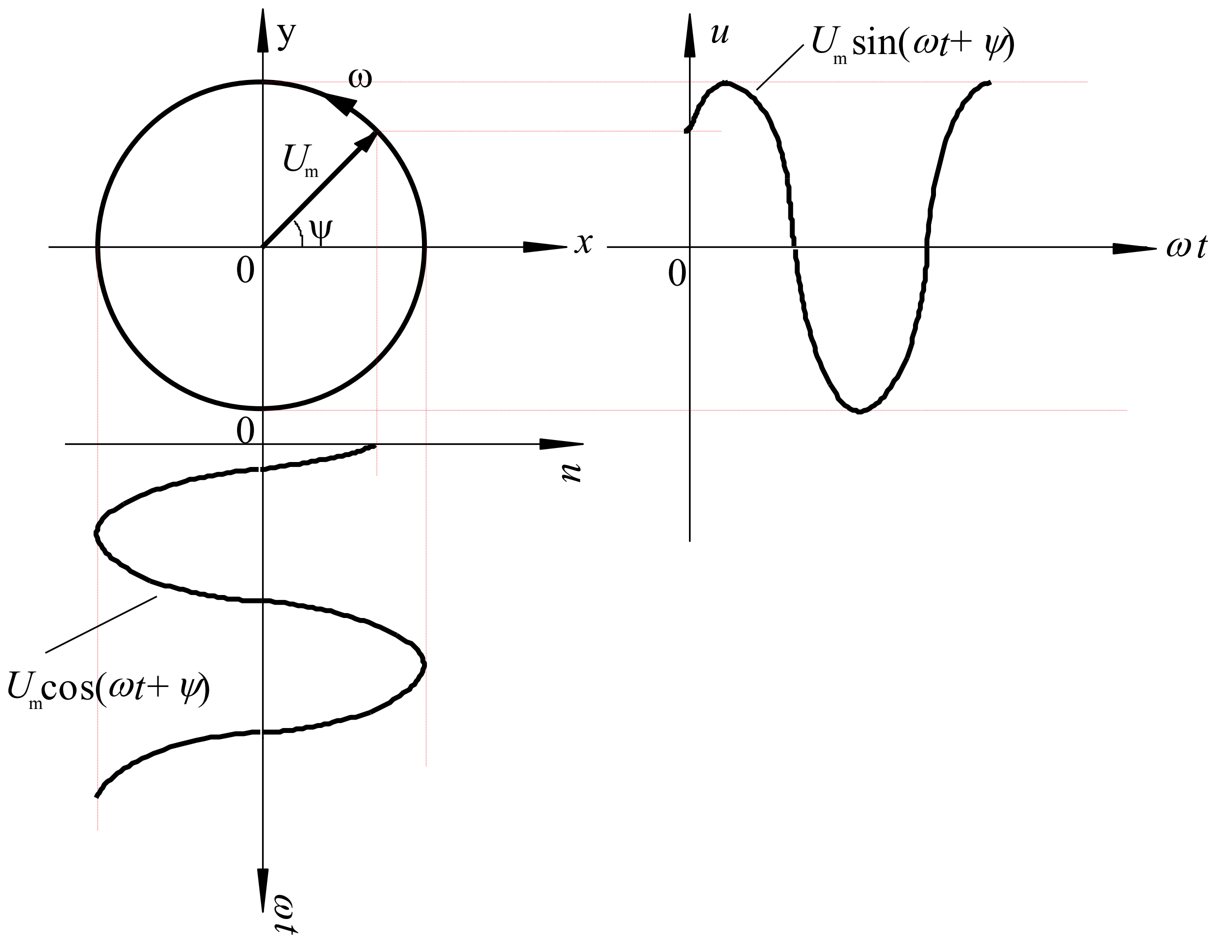
模为正弦电压的**有效值**，辐角为正弦电压的初相

※相量只能代表正弦量，并不等于正弦量

另外若用最大值表示相量

$$\dot{U}_m = \sqrt{2}\dot{U} = U_m e^{j\psi} = U_m\angle\psi$$

2.正弦量相量模型的几何解释



设x-y平面上有一相量，长度为 U_m，以角速度 ω 逆时针旋转

当t = 0时,该相量与x 轴的夹角为 ，在任意时刻t,该相量在纵轴和横轴上的投影分别为：

$$U_m \sin(\omega t+\psi)$$

$$U_m \cos(\omega t+\psi)$$

由此可见：旋转相量和正弦量之间有一一对应关系

例：已知 $i(t)=10\sqrt{2}\cos(314t-60^o)A$ 求相量$\dot{I}$

解：

$$i(t)=10\sqrt{2}\sin(314t-60^o+90^o)A$$

$$=10\sqrt{2}\sin(314t+30^o)A$$

$$=\mathrm{Im}[10\sqrt{2}e^{j30^o}e^{j314t}]$$

$$=\mathrm{Im}[10\sqrt{2}\angle 30^o e^{j314t}]$$

$$\therefore \quad \dot{I}=10\angle 30^o=10e^{j30^o}$$

例： 设 $\dot{U}=5\angle 60^{\circ} V$ 。求它所代表的正弦电压，已知电压的角频率 $\omega=1000 rad/s$

解：

$$u=\operatorname{Im}[5\sqrt{2}\angle 60^{\circ} e^{j1000t}]$$

$$=\operatorname{Im}[5\sqrt{2} e^{j60^{\circ}} e^{j1000t}]$$

$$=5\sqrt{2}\sin(1000t+60^{\circ}) V$$

例： 已知 $\begin{matrix} i_1 = 4\sqrt{2}\sin(314t+30°)A \\ i_2 = -3\sqrt{2}\cos(314t+30°)A \end{matrix}$ ，试画出它们的相量图，并求出它们之间的相位差

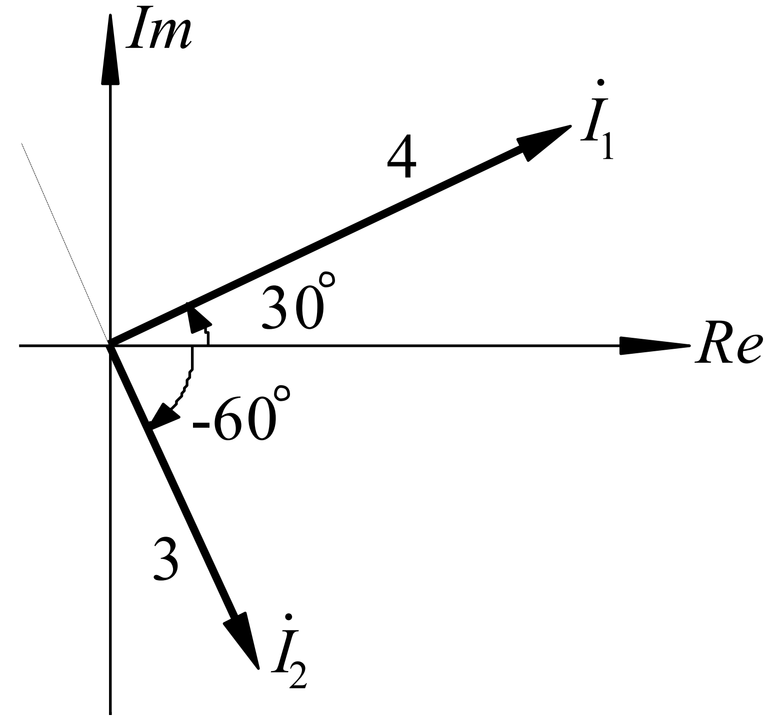
解：

$$i_2 = -3\sqrt{2}\cos(314t+30°)A$$
$$= -3\sqrt{2}\sin(314t+120°)A$$

$$\dot{I}_1 = 4\angle 30° A$$

$$\dot{I}_2 = -3\angle 120° = 3\angle -60° A$$

$$\phi = \psi_1 - \psi_2 = \angle 90°$$



如图所示，i_1 领先 i_2 $90°$

3.正弦时间函数的和

设有两个同频正弦量

$$u_1 = A_{1m}\sin(\omega t+\psi_1) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{A}_1 e^{j\omega t}]$$

$$u_2 = A_{2m}\sin(\omega t+\psi_2) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{A}_2 e^{j\omega t}]$$

它们的和是

$$u = u_1 + u_2$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{A}_1 e^{j\omega t}] + \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{A}_2 e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2)e^{j\omega t}]$$

$$\therefore\quad u = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{A} e^{j\omega t}]$$

对任何t，上两式中等号右端的复值函数的虚部相等，所以有 $\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2$ 只要将代表 u_1, u_2 的相量相加，就可以得到代表 u 的相量 $\dot{A}$，由 $\dot{A}$ 就可以得到 u 的辐角和相位。

设 $\dot{A}_1 = a_1 + jb_1$

$\dot{A}_2 = a_2 + jb_2$

则有 $$\begin{aligned}\dot{A} &= \left(a_1 + jb_1\right) + \left(a_2 + jb_2\right) \\ &= a + jb \\ &= \left|A\right| \angle \psi\end{aligned}$$

式中 $a = a_1 + a_2 \quad b = b_1 + b_2$

$$\left|A\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\psi = arctg(\frac{b}{a})$$

例：设有正弦时间函数 $u_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)$

$$u_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 40°)$$

求 $u = u_1 + u_2$ 和 $u' = u_1 - u_2$

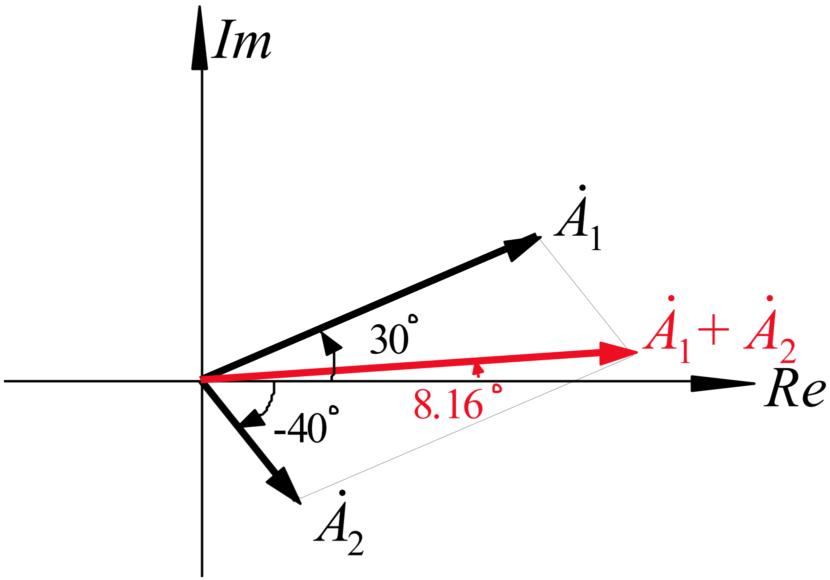
解：用相量相加法求 u 和 u'

u_1, u_2 的相量分别为

$$\dot{A}_1 = 10\angle 30° = 8.66 + j5$$

$$\dot{A}_2 = 5\angle -40° = 3.83 - j3.21$$

将 u 和 u' 的相量记为 $\dot{A}_1$ 和 $\dot{A}_2$，

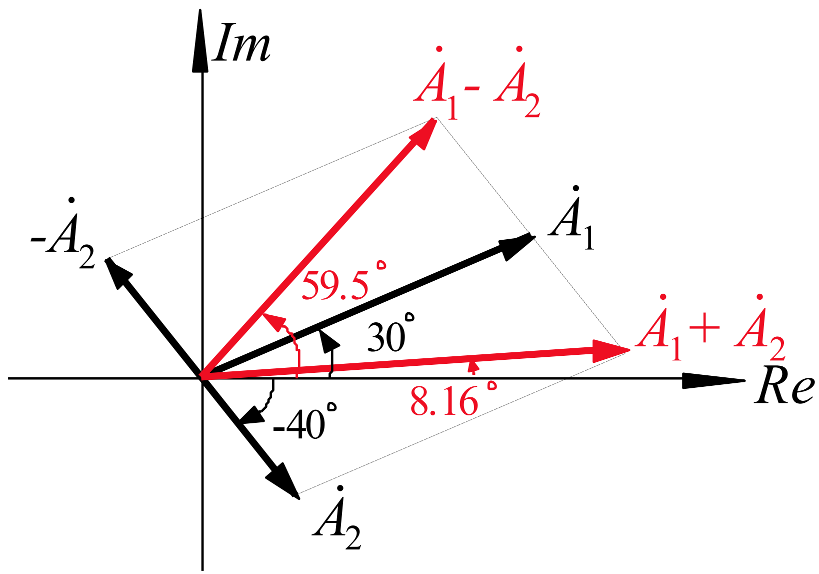


则 $\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2$

$$= (8.66 + 3.83) + j(5 - 3.21)$$

$$= 12.49 + j1.79 = 12.6\angle 8.16°$$

$$\dot{A}' = \dot{A}_1 - \dot{A}_2$$
$$= (8.66 - 3.83) + j(5 + 3.21)$$
$$= 4.83 + j8.21 = 9.53\angle 59.5°$$



由相量 $\dot{A}_1$，$\dot{A}_2$ 即可得出所代表的正弦时间函数为

$$u = 12.6\sqrt{2}\sin(\omega t + 8.16°)V$$

$$u' = 9.53\sqrt{2}\sin(\omega t + 59.5°)V$$

§ 5-4 电路元件方程的相量形式

1. 电阻元件

设R中的正弦电流为

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$$

式中 $\dot{I}=I\angle\psi_i$

$$u_R=Ri$$

$$=R\,\mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$$

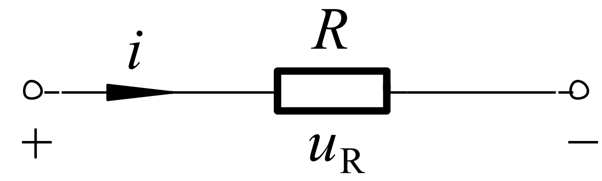
$$=\mathrm{Im}[\sqrt{2}R\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$$

由上式可得 $\dot{U}_R=R\dot{I}$

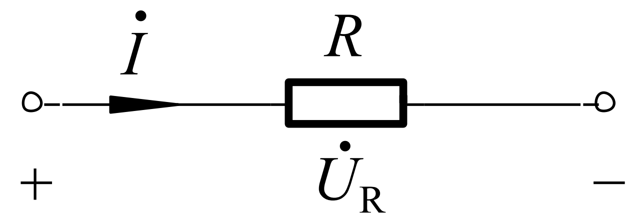
$$U_R\angle\psi_u=RI\angle\psi_i$$

$$U_R=RI$$

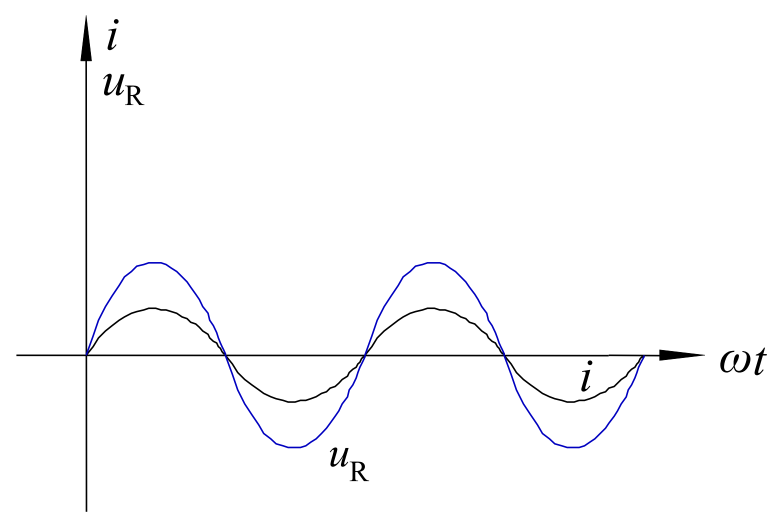
$$\psi_u=\psi_i$$



电阻

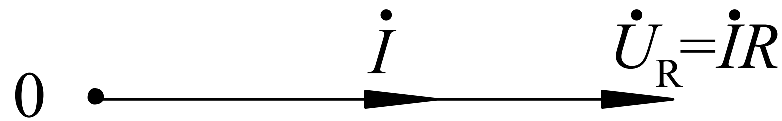


电阻元件的相量模型



电阻电流、电压波形图

结论：电阻元件上电压的有效值 U_R 等于电阻 R和其中的电流的有效值 I 的乘积，电压和电流的相位相同。



电阻元件电压、电流相量图

电阻R中流过正弦电流 i 时，它在任意时刻吸收的瞬时功率为

$$P_R = u_R i = U_{Rm} I_m \sin^2 \omega t = U_R I(1 - \cos 2\omega t)$$

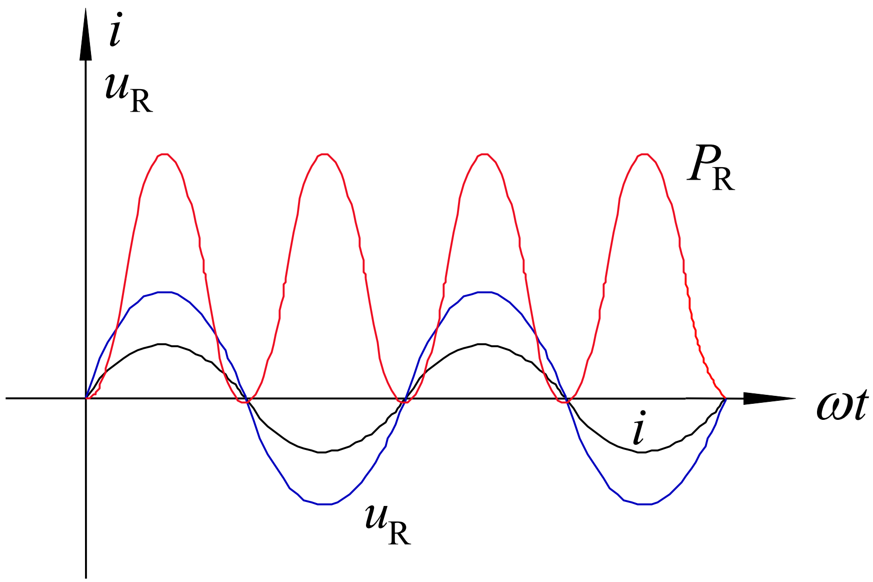
由上式可见：电阻R吸收的功率恒为非负值。

电阻R所吸收的瞬时功率在一个周期内的平均值为

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p_R dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_R I(1-\cos 2\omega t)dt$$

$$= U_R I$$

$$= RI^2$$



2. 电感元件

设流过电感元件L的电流为

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$$

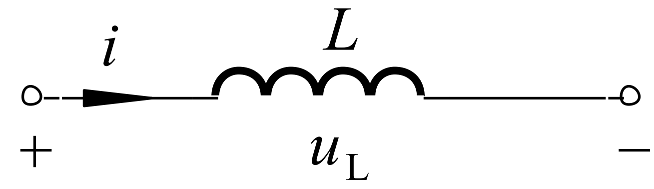
$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

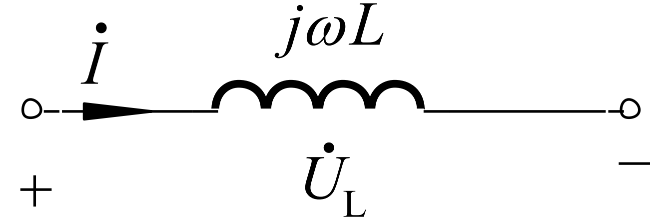
$$= L\frac{d}{dt}\sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$= \omega L \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i)$$

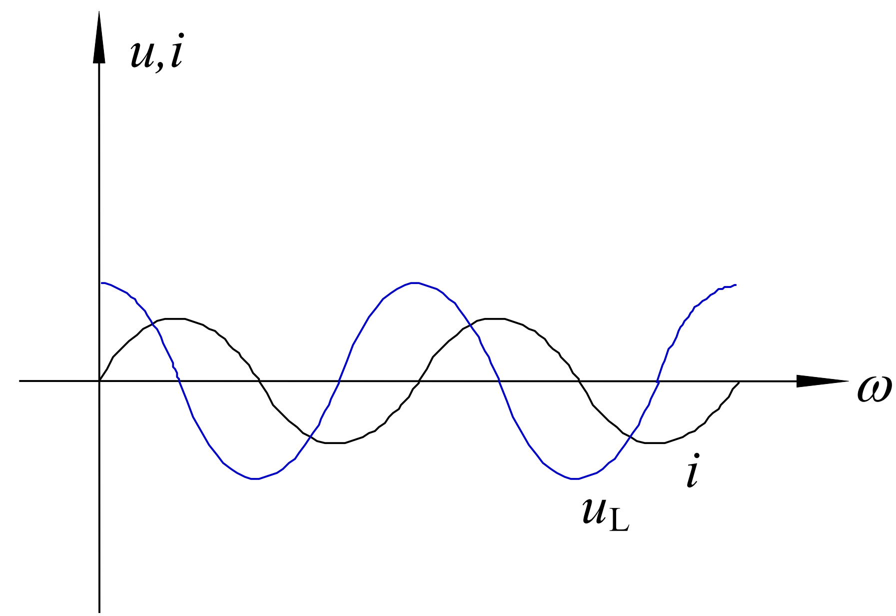
$$= \omega L \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2})$$



电感



电感元件的相量模型



电感电流、电压波形图

$$u_L = L\frac{di}{dt} \quad = L[\frac{d}{dt}\operatorname{Im}(\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t})]$$

$$= L[\operatorname{Im}\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t})]$$

$$= L\operatorname{Im}(\sqrt{2}\,j\omega\,\dot{I}\,e^{j\omega t})$$

$$= \operatorname{Im}[\sqrt{2}\,j\omega L\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]$$

$$\dot{U}_L = j\underline{\omega L}\,\dot{I} = j\,\underline{X_L}\,\dot{I}$$

电感的感抗 (单位:Ω)

$$U_L \angle \psi_u = \omega L I \angle \psi_i + 90^\circ$$

比较上面等式两边，得

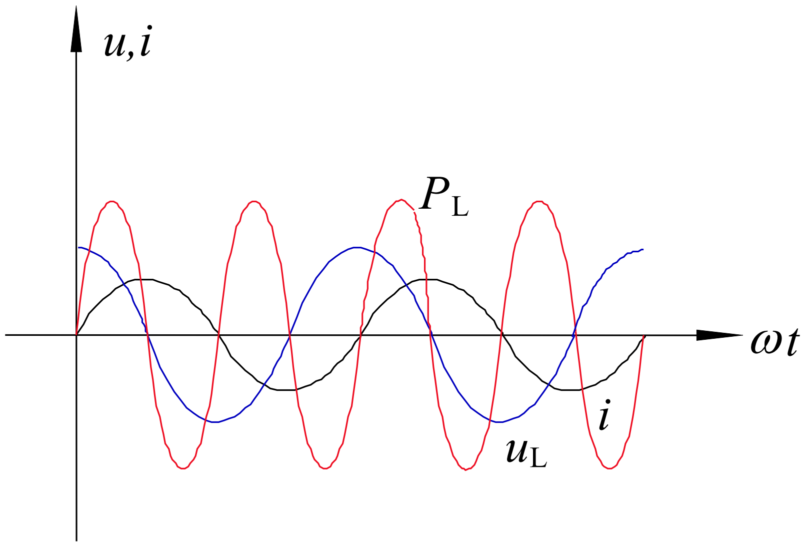
$$U_L = \omega L I \qquad \psi_u = \psi_i + 90^\circ$$

电感元件电压、电流相量图

结论： 电感元件上电压的有效值U_L等于感抗ωL和电流I的乘积，电压的相位超前电流90°

正弦电流流过电感 L 时，所吸收的瞬时功率是

$$
\begin{aligned}
p_L &= u_L i \\
&= U_{Lm} I_m \sin(\omega t + \psi_i)\cos(\omega t + \psi_i) \\
&= 2U_L I \sin(\omega t + \psi_i)\cos(\omega t + \psi_i) \\
&= U_L I \sin 2(\omega t + \psi_i)
\end{aligned}
$$



电感在有正弦电流流过时，所吸收的功率的平均值为

$$P_L = \frac{1}{T}\int_0^T p_L dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_L I \sin 2(\omega t + \psi_i) dt = 0$$

表明：电感是不耗能的元件。虽然电感吸收的瞬时功率不为0，但其平均功率为0，表明电感与它的外部电路间有能量交换现象。

例：设有一正弦交流电压 $u = 220\sqrt{2}\sin(1000t + 30°)V$

加到 0.4H 的电感上

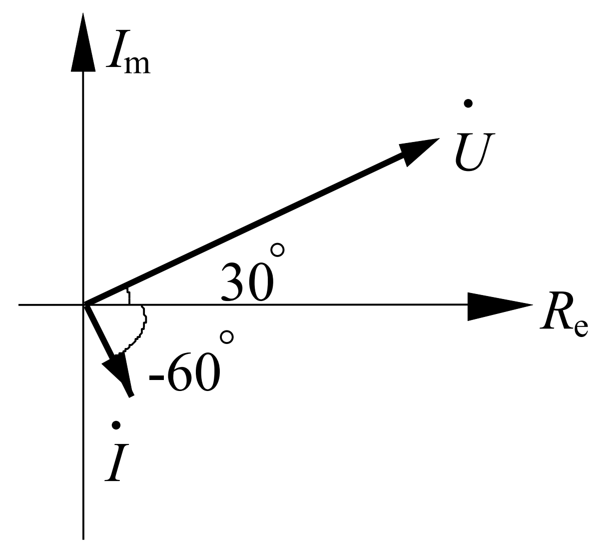
(1)求出流过电感的电流i(t);

(2)画出电感电压和电流的相量图

解：(1) $\dot{I} = \dfrac{\dot{U}}{j\omega L} = \dfrac{220\angle 30°}{j400} = 0.55\angle -60°\,A$

$$i = 0.55\sqrt{2}\sin(1000t - 60°)\,A$$

(2)电压和电流的相量图



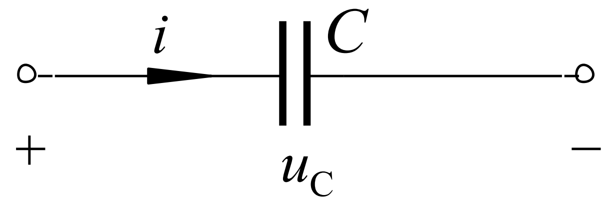
3.电容元件

设电容 C 两端加有正弦电压 u_c

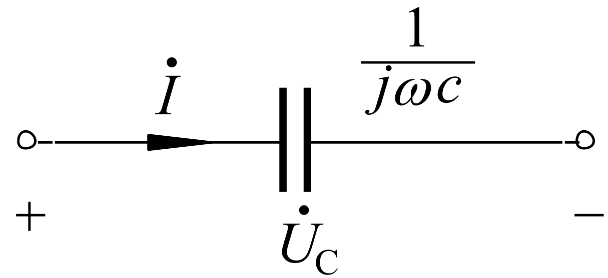
$$u_C = \sqrt{2}U_C \sin(\omega t + \psi_u)$$
$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_C e^{j\omega t}]$$

则电容中流过的电流 i 为

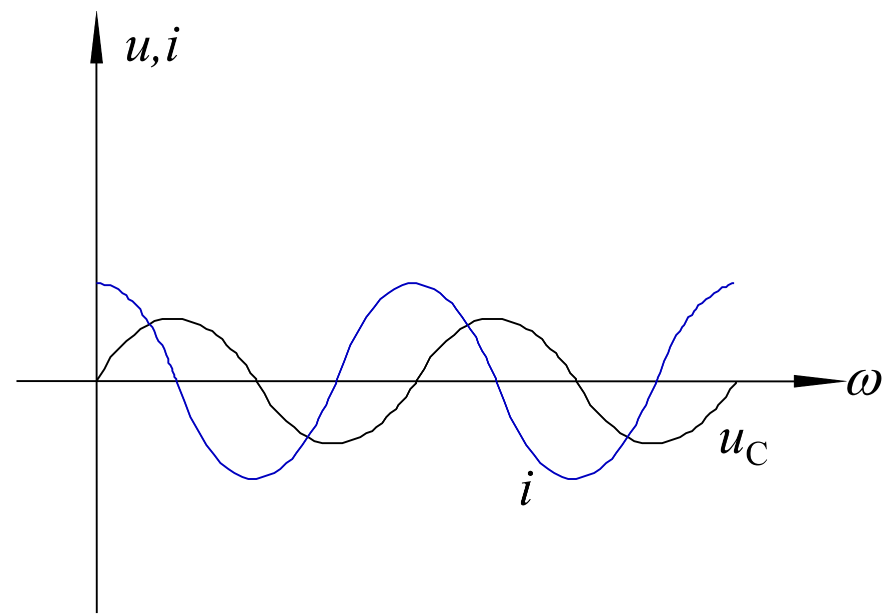
$$i = C\frac{du_C}{dt}$$
$$= C\frac{d}{dt}\sqrt{2}U_C \sin(\omega t + \psi_u)$$
$$= \omega C\sqrt{2}U_C \cos(\omega t + \psi_u)$$
$$= \omega C\sqrt{2}U_C \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2})$$



电容



电容元件的相量模型



电容电压、电流波形图

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$= C[\frac{d}{dt}\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_C e^{j\omega t})]$$

$$= C[\mathrm{Im}\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\dot{U}_C e^{j\omega t})]$$

$$= \mathrm{Im}[Cj\omega\sqrt{2}\dot{U}_C e^{j\omega t}]$$

$$\dot{I} = j\omega C\dot{U}_C$$

$$\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I}$$

容抗（单位：Ω）

电容元件电压、电流相量图

$$U_C\angle\psi_u = \frac{1}{\omega C}I\angle\psi_i - 90°$$

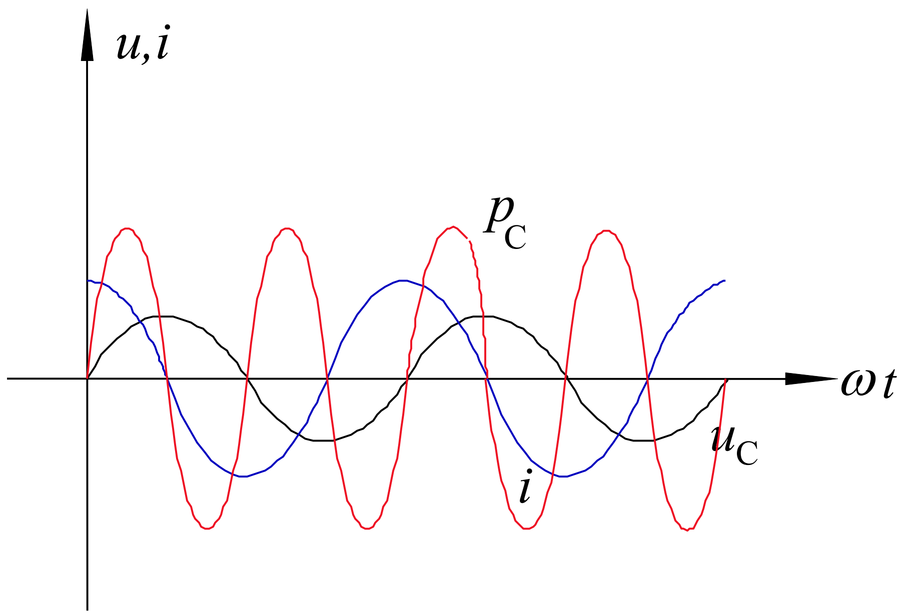
结论：电容元件上电压的有效值 U_c 等于容抗 $\frac{1}{\omega C}$ 和电流 I 的乘积，相位滞后电流90°。

电容在有正弦电流流过时所吸收的瞬时功率是

$$p_c = u_c i$$
$$= U_{Cm} I_m \sin(\omega t + \psi_u)\cos(\omega t + \psi_u)$$
$$= U_C I \sin 2(\omega t + \psi_u)$$

电容两端加有正弦电压时，所吸收的功率的平均值为

$$P_C = \frac{1}{T}\int_0^T p_C dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T U_C I \sin 2(\omega t + \psi_u) dt$$
$$= 0$$



上式表明：电容是不耗能的元件。电容的瞬时功率不为0，但其平均功率为0，这表明电容与外部电路进行着能量交换。

例： 设电流 $i = 0.05\sqrt{2}\sin(1000t + 120°)A$ 流过10μF电容器，求电容端电压 u(t) 并画出电压电流的相量图

解： 电容电压相量

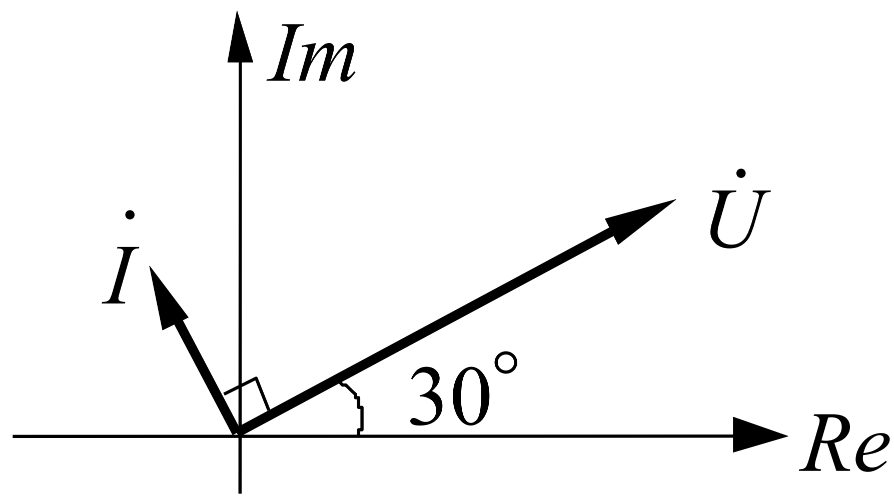
$$\dot{U} = \dot{I}\frac{1}{j\omega C}$$

$$= 0.05\angle 120° \times \frac{-j}{1000 \times 10 \times 10^{-6}}$$

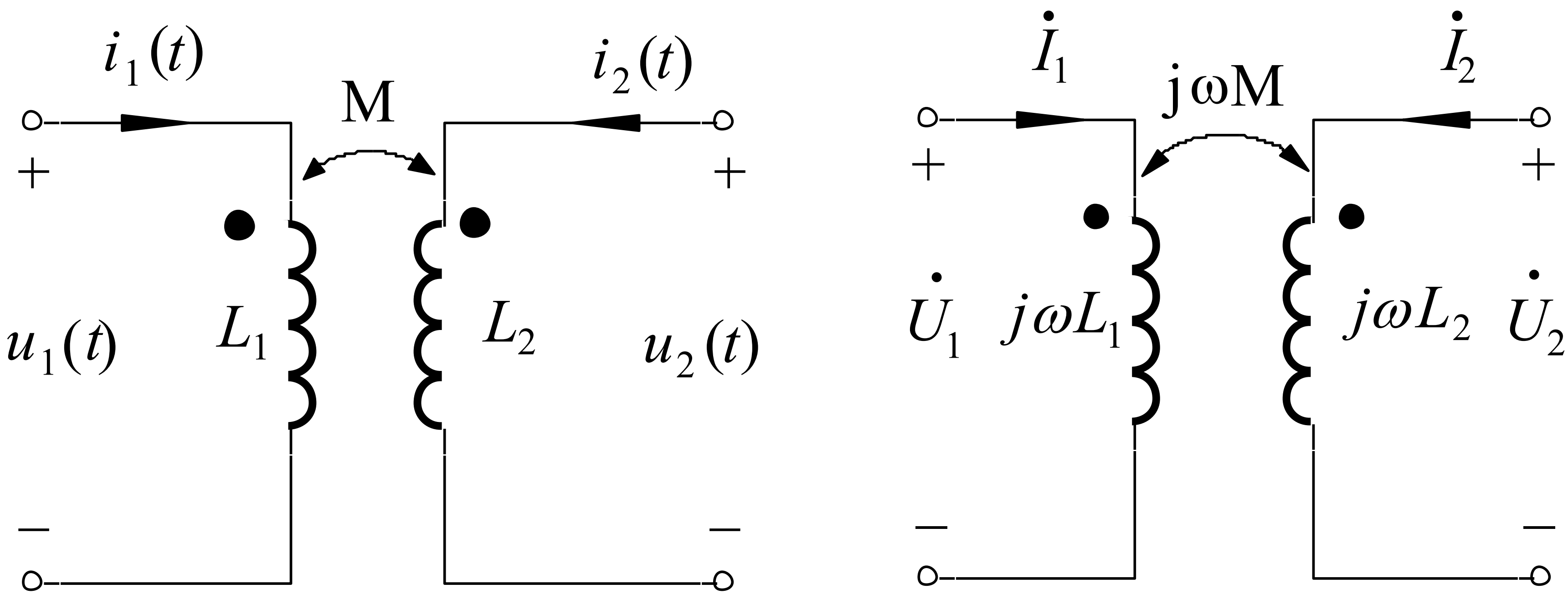
$$= 0.05\angle 120° \times 100\angle -90°$$

$$= 5\angle 30° V$$

$$u = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)V$$



4.耦合电感元件



(a) 电压、电流为正弦量　　(b) 电压、电流用相量表示

对于图(a),有

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \tag{1}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \tag{2}$$

在正弦稳态下，设各电压电流分别为

$$u_1(t) = U_{1m}\sin(\omega t + \psi_{u1}) = \mathrm{Im}[\dot{U}_{1m}e^{j\omega t}] \tag{3}$$

$$u_2(t) = U_{2m}\sin(\omega t + \psi_{u2}) = \mathrm{Im}[\dot{U}_{2m}e^{j\omega t}] \tag{4}$$

$$i_1(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_{i1}) = \mathrm{Im}[\dot{I}_{1m}e^{j\omega t}] \tag{5}$$

$$i_2(t) = I_{2m}\sin(\omega t + \psi_{i2}) = \mathrm{Im}[\dot{I}_{2m}e^{j\omega t}] \tag{6}$$

将(5),(6)代入(1),(2)得

$$u_1(t) = L_1\frac{d}{dt}[\mathrm{Im}(\dot{I}_{1m}e^{j\omega t})] + M\frac{d}{dt}[\mathrm{Im}(\dot{I}_{2m}e^{j\omega t})]$$

$$= j\omega L_1\,\mathrm{Im}[\dot{I}_{1m}e^{j\omega t}] + Mj\omega\,\mathrm{Im}[\dot{I}_{2m}e^{j\omega t}]$$

由上式和(3),(4)得

$$\dot{U}_{1m} = j\omega L_1\dot{I}_{1m} + j\omega M\dot{I}_{2m}$$

$$\dot{U}_{1m} = j\omega L_1 \dot{I}_{1m} + j\omega M \dot{I}_{2m}$$

同理 $$\dot{U}_{2m} = j\omega L_2 \dot{I}_{2m} + j\omega M \dot{I}_{1m}$$

和

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

以上4式即为耦合电感元件的电压电流的相量形式

5.受控源

线性受控源的受控变量与控制变量之间的关系均为线性函数关系

$$\begin{array}{ll} VCVS & u_2(t)=\mu u_1(t) \\ VCCS & i_2(t)=g u_1(t) \\ CCCS & i_2(t)=\beta i_1(t) \\ CCVS & u_2(t)=\gamma i_1(t) \end{array}$$

在正弦稳态下，各电压、电流均为同频率的正弦时间函数，将它们表示为相应的相量，可得如下关系：

$$\begin{array}{ll} VCVS & \dot{U}_2=\mu \dot{U}_1 \\ VCCS & \dot{I}_2=g \dot{U}_1 \\ CCCS & \dot{I}_2=\beta \dot{I}_1 \\ CCVS & \dot{U}_2=\gamma \dot{U}_1 \end{array}$$

§5-5 基尔霍夫定律的相量形式

KCL的时域表示为

$$\sum i(t)=0$$

电路处于正弦稳态时，上式可写成

$$\sum \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]=0$$

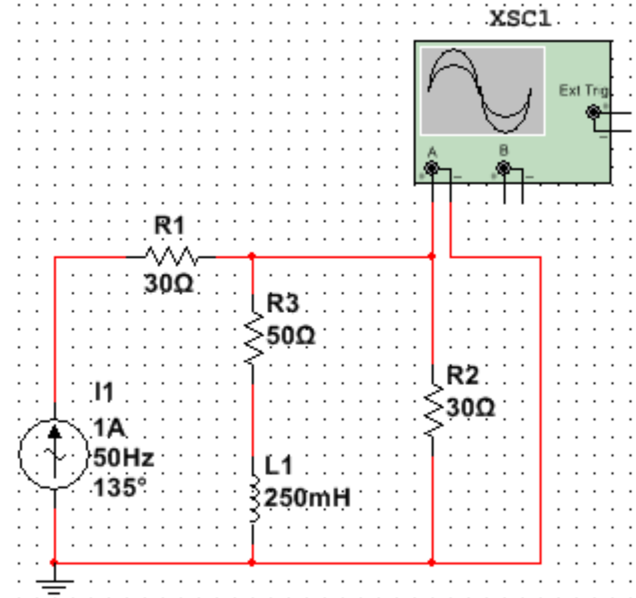
$$\sum \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}\,e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\sum \dot{I}\,e^{j\omega t}]=0$$

即 $\sum \dot{I}\,e^{j\omega t}=0$ 消去旋转因子，得

$$\sum \dot{I}=0$$

同理可得KVL的相量形式 $\sum \dot{U}=0$

例：（习题5-7）$i_s = \sin(314t + 135°)\varepsilon(\mathrm{t}) A$ 求零状态响应 $u(t)$



解：$\dot{I}s = \dfrac{-1+j}{2}$　　$jX_L = 80j$

节点法：$\left(\dfrac{1}{50+80j} + \dfrac{1}{30}\right)\dot{U} = \dfrac{-1+j}{2}$

得：$\dot{U} = -15 + \dfrac{75}{8} j$

$$\therefore u(t) = 25\sin(314t + 148^\circ) + \mathrm{A}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = 3.18 \times 10^{-3} s$$

定系数：$u(0+) = 25\sin(148^\circ) + \mathrm{A} = 30\sin(135^\circ)$

得：$A = 7.95$

$$\therefore u(t) = \left[25\sin(314t + 148^\circ) + 7.95\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\varepsilon(t)V$$

作业:

5-8 (1) , (2)

5-9 (2)

5-10

5-12

5-14 (1, 3)