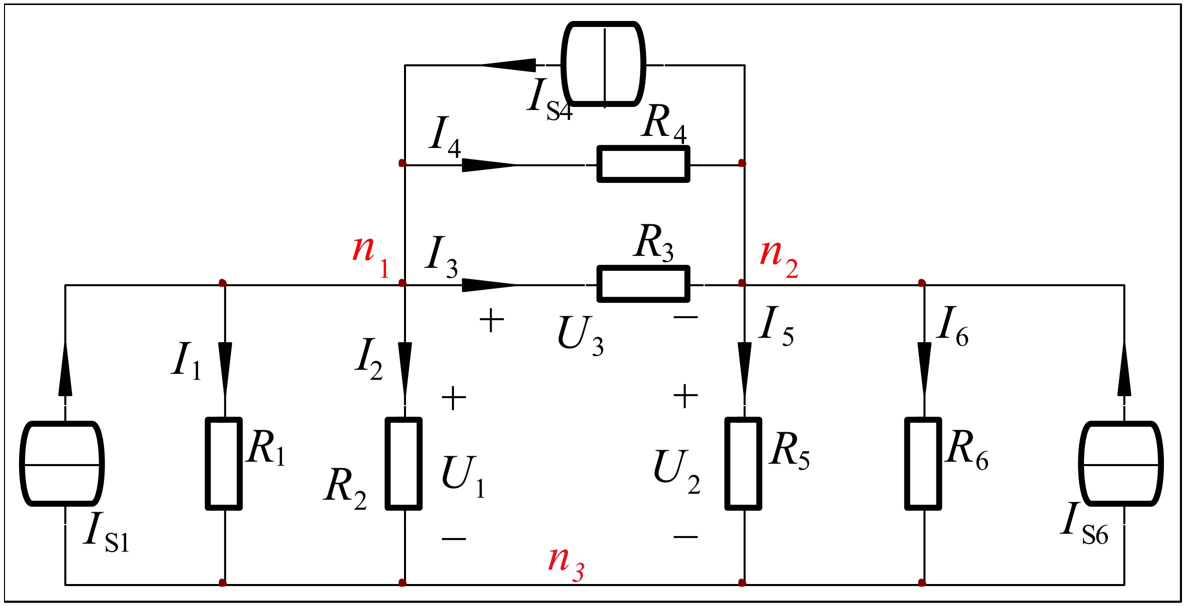
§2-5 节点电压法（节点分析法）



1. 节点电压法是根据“节点少，回路多”的电路提出的一种方法

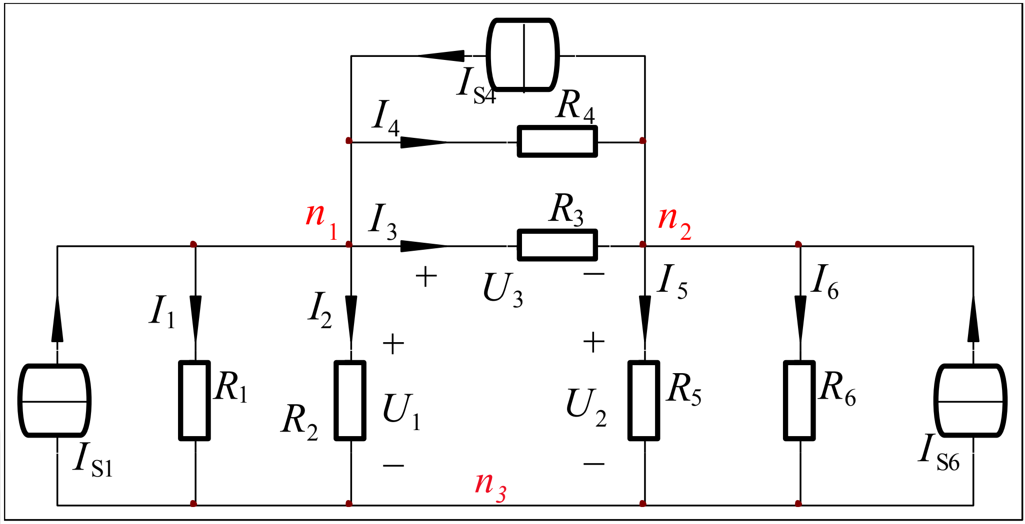
(1)选定参考节点（节点n_3）和各支路电流的参考方向，

并对独立节点（n_1和n_2）分别应用KCL列出方程

$$n_1: \quad I_1+I_2+I_3+I_4=I_{S1}+I_{S4} \quad (1)$$

$$n_2: \quad -I_3-I_4+I_5+I_6=-I_{S4}+I_{S6} \quad (2)$$

(2)根据KVL和Ω定律，建立各支路电流的方程



$$
\left.
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_{n1}}{R_1} = G_1 U_{n1} \\
I_2 &= \frac{U_1}{R_2} = \frac{U_{n1}}{R_2} = G_2 U_{n1} \\
I_3 &= \frac{U_3}{R_3} = \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} = G_3 (U_{n1} - U_{n2}) \\
I_4 &= \frac{U_3}{R_4} = \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_4} = G_4 (U_{n1} - U_{n2}) \\
I_5 &= \frac{U_2}{R_5} = \frac{U_{n2}}{R_5} = G_5 U_{n2} \\
I_6 &= \frac{U_2}{R_6} = \frac{U_{n2}}{R_6} = G_6 U_{n2}
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

将(3)式代入到(1)、(2)式中，得

$$G_1U_{n1}+G_2U_{n1}+G_3(U_{n1}-U_{n2})+G_4(U_{n1}-U_{n2})=I_{S1}+I_{S4}$$
$$-G_3(U_{n1}-U_{n2})-G_4(U_{n1}-U_{n2})+G_5U_{n2}+G_6U_{n2}=-I_{S4}+I_{S6}$$

将以上两式整理得

$$\left.\begin{aligned}&\underbrace{(G_1+G_2+G_3+G_4)}_{G_{11}}U_{n1}-\underbrace{(G_3+G_4)}_{G_{12}}U_{n2}=I_{S1}+I_{S4}\\&-\underbrace{(G_3+G_4)}_{G_{21}}U_{n1}+\underbrace{(G_3+G_4+G_5+G_6)}_{G_{22}}U_{n2}=-I_{S4}+I_{S6}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

自导： G_{11}：（联接到n_1的所有电导之和）

G_{22}：（联接到n_2的所有电导之和）

互导： $G_{12}=G_{21}$（n_1和n_2之间的两支路电导之和的负值）

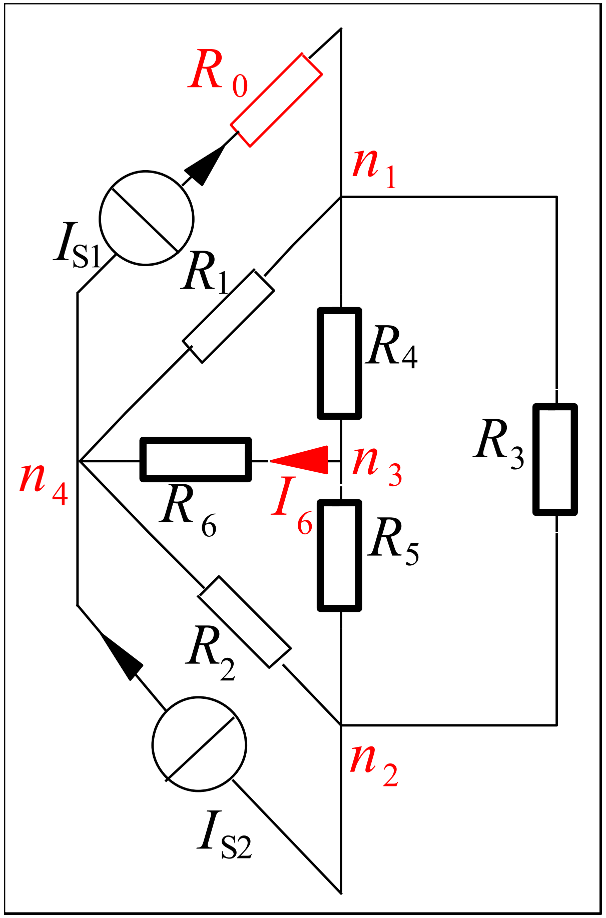
$I_{n1}=I_{S1}+I_{S4}$ 流入n_1的电流源电流的代数和

$I_{n2}=-I_{S4}+I_{S6}$ 流入n_2的电流源电流的代数和

例：

图示电路中，已知$R_1 = 2\Omega$，$R_2 = 4\Omega$，$R_3 = 2\Omega$，$R_4 = 5\Omega$，$R_5 = 8\Omega$，$R_6 = 20\Omega$，$I_{S1} = 25A$，$I_{S2} = 25A$

试用节点电压法求通过电阻R_6的电流



解：

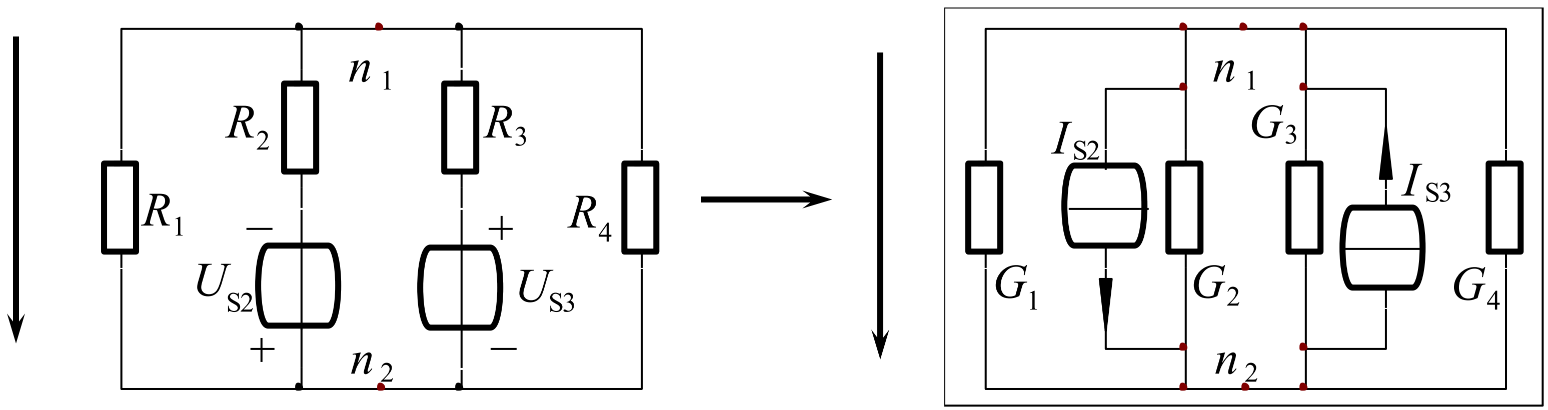
独立节点有3个，参考节点设为n_4

$$\begin{cases} (G_1+G_3+G_4)U_{n1}-G_3U_{n2}-G_4U_{n3}=I_{S1} \\ -G_3U_{n1}+(G_2+G_3+G_5)U_{n2}-G_5U_{n3}=-I_{S2} \\ -G_4U_{n1}-G_5U_{n2}+(G_4+G_5+G_6)U_{n3}=0 \end{cases}$$

解方程组得 $U_{n3}=-1.51\ \text{V}$ $\quad I_6=-75.5\ \text{mA}$

例：列节点电压方程

参考方向



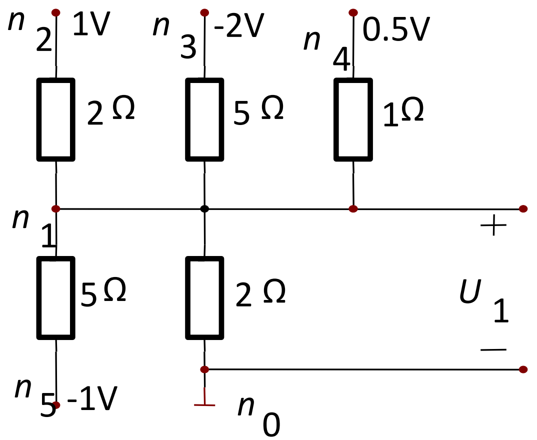
方法 (1) 将电压源与电阻串联等效变换为电流源与电阻并联，列节点电压方程

$$(G_1+G_2+G_3+G_4)U_{n1}=-I_{S2}+I_{S3}$$

(2) 直接列出节点电压方程

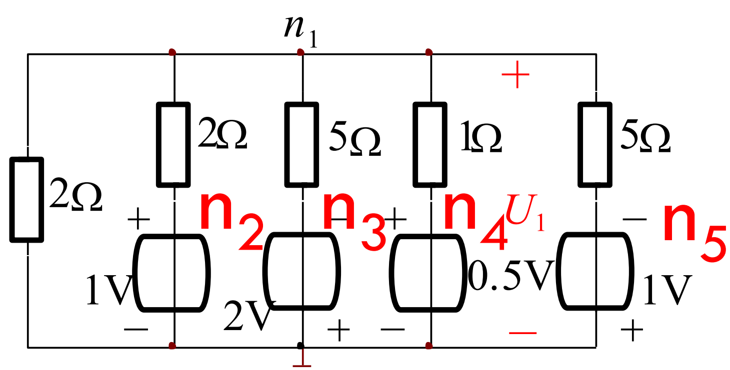
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_{n1}=-\frac{U_{S2}}{R_2}+\frac{U_{S3}}{R_3}$$

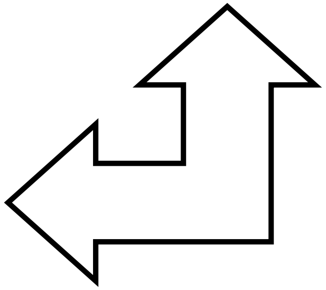
例：



求图中电路中的电压U_1

可以把n_2-n_5所对应的支路看作是电压源支路



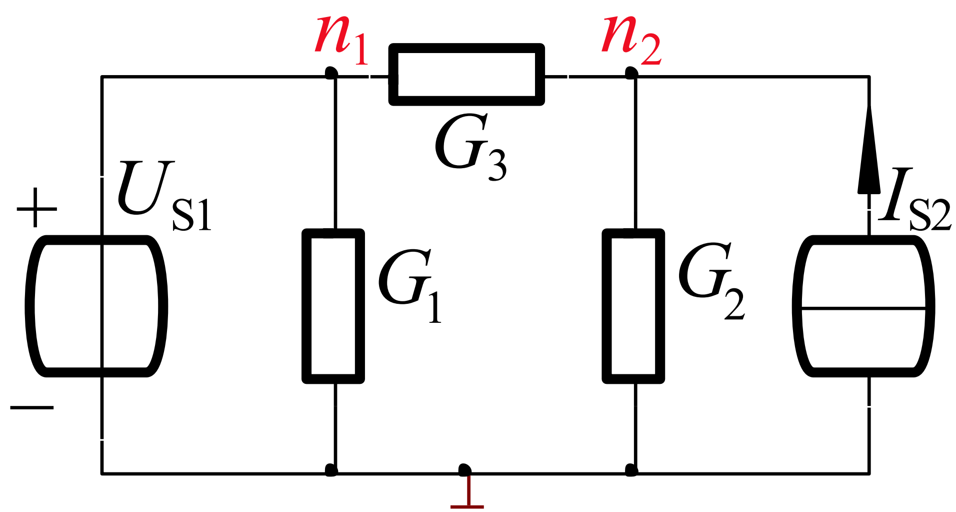


$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+1+\frac{1}{5})U_{n1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$$

$$2.4U_{n1}=0.4$$

$$U_1=U_{n1}=0.17V$$

2. 包含理想电压源支路的情况

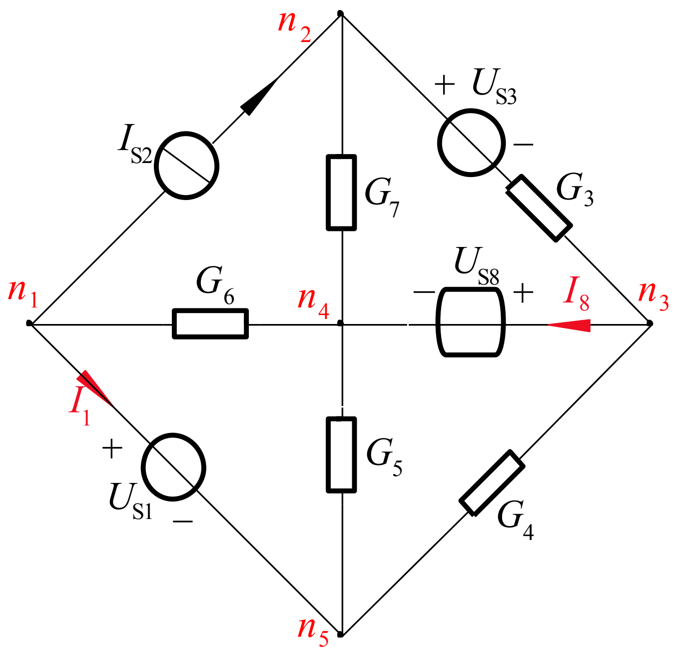


(1) 参考节点选理想电压源的一端

n_1：　$U_{n1} = U_{S1}$

n_2：　$-G_3 U_{n1} + (G_2 + G_3) U_{n2} = I_{S2}$

(2)　改进节点法（混合变量法）



含有理想电压源支路的电路

设U_{S1}和U_{S8}支路的电流

分别为I_1,I_8,

选n_5为参考节点

列节点电压方程:

$$n_1: \quad G_6U_{n1} - G_6U_{n4} + I_1 = -I_{S2}$$

$$n_2: \quad (G_3+G_7)U_{n2} - G_3U_{n3} - G_7U_{n4} = I_{S2} + G_3U_{S3}$$

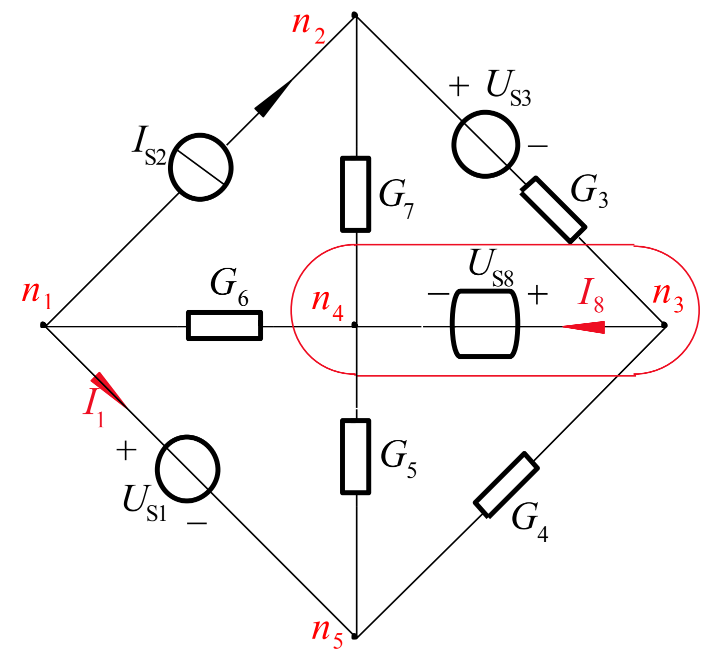
$$n_3: \quad -G_3U_{n2} + (G_3+G_4)U_{n3} + I_8 = -G_3U_{S3}$$

$$n_4: \quad -G_6U_{n1} - G_7U_{n2} + (G_5+G_6+G_7)U_{n4} - I_8 = 0$$

补充方程:　$U_{n1} = U_{S1}$　　$U_{n3} - U_{n4} = U_{S8}$

(3) 超节点法（广义节点法）

将n_3和n_4包围起来的闭合面为一个超节点



$$\text{超节点：}\underbrace{-G_6U_{n1}-(G_3+G_7)U_{n2}}_{\text{互导项}}+\underbrace{(G_3+G_4)U_{n3}+(G_5+G_6+G_7)U_{n4}}_{\text{自导项}}=-G_3U_{S3}$$

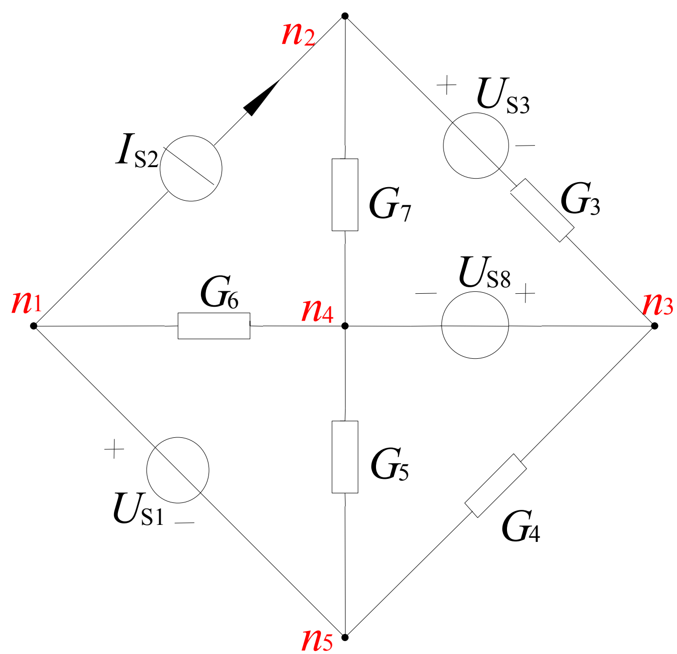
n_2:

$$(G_3+G_7)U_{n2}-G_3U_{n3}-G_7U_{n4}=I_{S2}+G_3U_{S3}$$

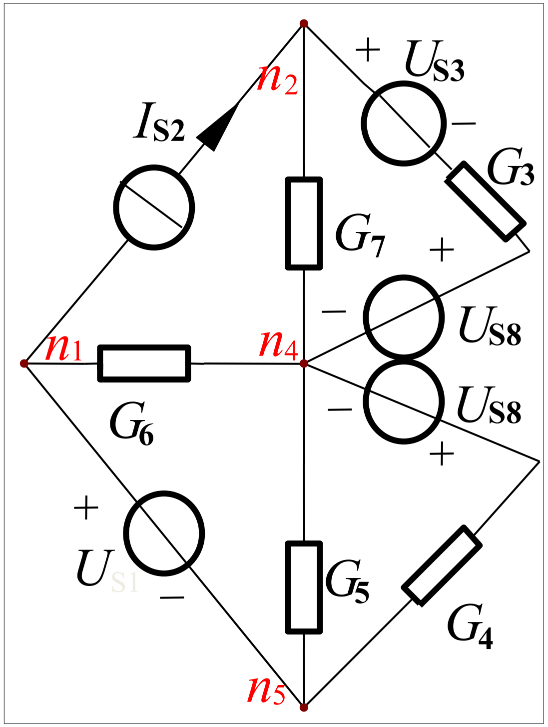
$$U_{n1}=U_{S1}$$

$$U_{n3}-U_{n4}=U_{S8}$$

（4） 电源转移法



$\longrightarrow$



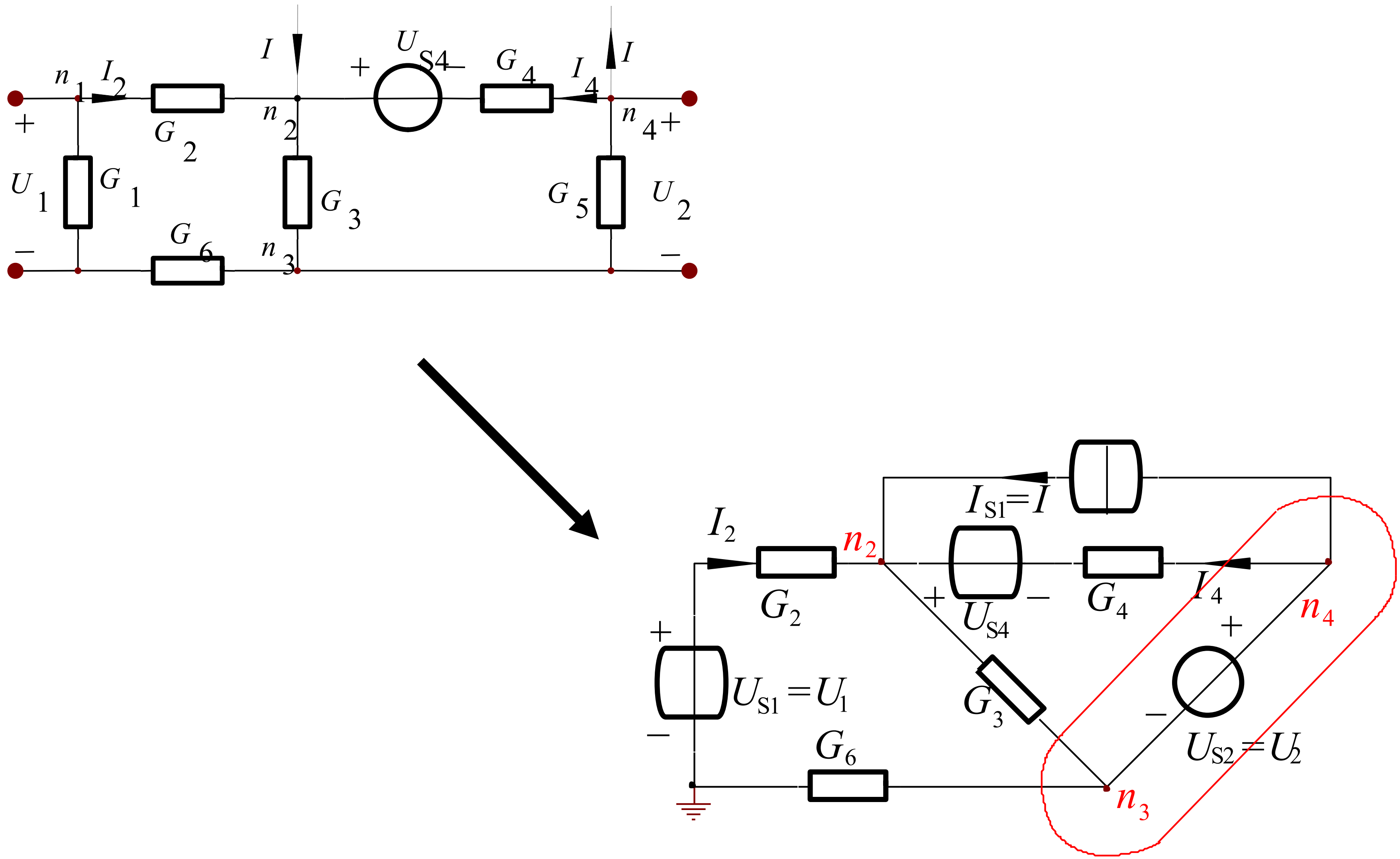
n_2：
$$(G_3+G_7)U_{n2}-(G_3+G_7)U_{n4}=I_{s2}+(U_{s3}+U_{s8})G_3$$

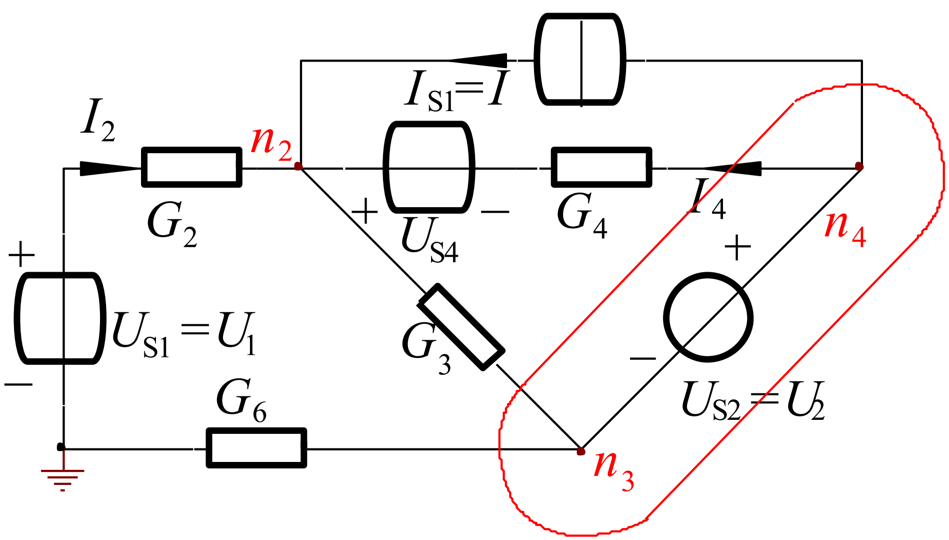
n_4：
$$-G_6U_n-(G_3+G_7)U_{n2}+(G_3+G_4+G_5+G_6+G_7)U_{n4}$$
$$=-(U_{S3}+U_{S8})G_3-U_{S8}G_4$$

n_1：
$$U_{n1}=U_{S1}$$

例： 设电路中U_1=2V，U_2=1V, I=1A,且

G1=G2=G3=G4=G5=G6=1S，求电流I_2和I_4





$$\text{n}_2\text{:}\quad (G_2+G_3+G_4)U_{n2}-G_3U_{n3}-G_4U_{n4}=I+U_1G_2+U_{S4}G_4$$

超节点： [redacted] [redacted] $=-I-G_4U_{S4}$

互导项　　　自导项

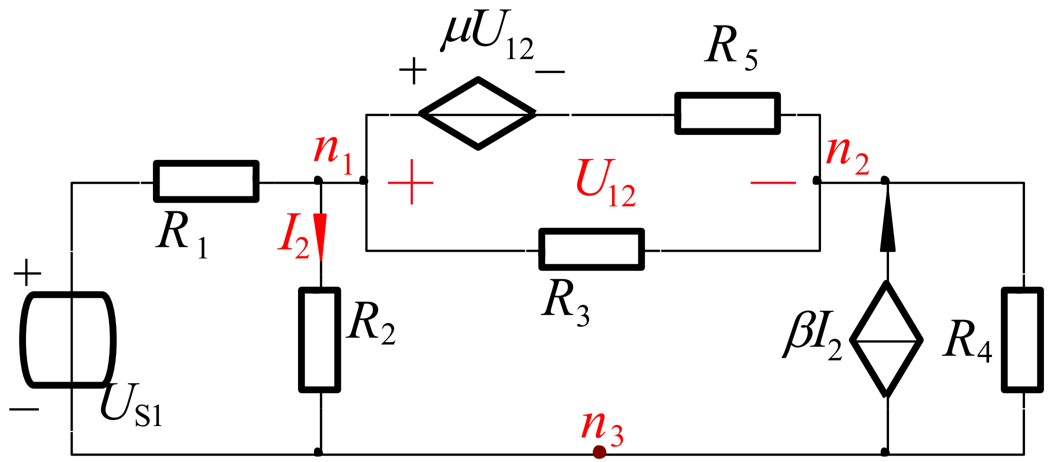
$$U_{n4}-U_{n3}=U_2=1V$$

联立方程求解，得： $U_{n2}=\dfrac{9}{5}V$， $U_{n3}=\dfrac{1}{5}V$， $U_{n4}=\dfrac{6}{5}V$

$$\therefore\quad I_2=(-U_{n2}+U_1)G_2=\frac{1}{5}A$$

$$I_4=(U_{n4}-U_{n2}+U_{S4})G_4=\frac{2}{5}A$$

3. 含受控源的节点电压法



$$n_1:\ (G_1+G_2+G_3+G_5)U_{n1}-(G_3+G_5)U_{n2}=G_1U_{S1}+G_5\mu U_{12}$$

$$n_2:\ -(G_3+G_5)U_{n1}+(G_3+G_4+G_5)U_{n2}=-G_5\mu U_{12}+\beta I_2$$

控制电压： $U_{12}=U_{n1}-U_{n2}$

控制电流： $I_2=U_{n1}G_2$

将控制电压和控制电流代如上边两式， 消去U_{12}和I_2，得：

$$(G_1+G_2+G_3+G_5-\mu G_5)U_{n1}-(G_3+G_5-\mu G_5)U_{n2}=G_1U_{S1}$$

$$-(G_3+G_5-\mu G_5+\beta G_2)U_{n1}+(G_3+G_4+G_5-\mu G_5)U_{n2}=0$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3+G_5-\mu G_5 & -G_3-G_5+\mu G_5 \\ \text{[redacted]} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_{S1}G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

节点电导矩阵　Y$_n$

电导矩阵不对称，　即 $Y_{ij} \neq Y_{ji}$　$i \neq j$

可将Yn分解为：　$Y_n = Y_{n1} + Y_{n2}$

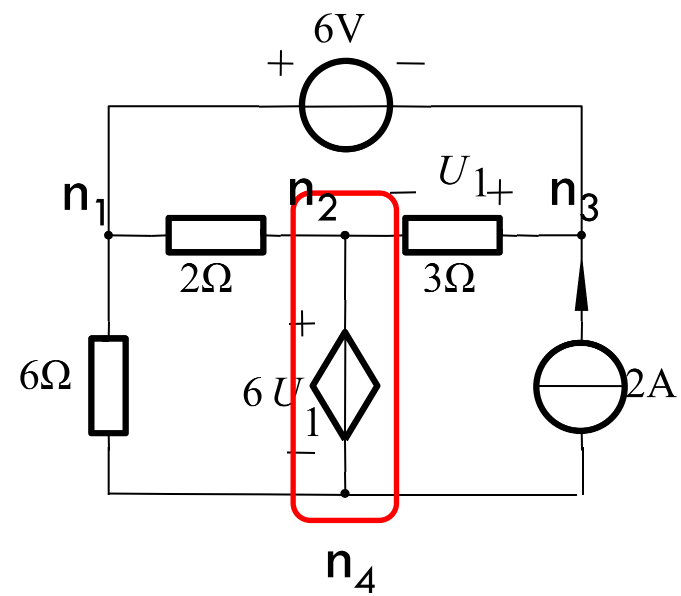
$$Y_{n1} = \begin{bmatrix} G_1+G_2+G_3+G_5 & -G_3-G_5 \\ -G_3-G_5 & G_3+G_4+G_5 \end{bmatrix} = Y_{n1}{}^T$$

无源元件(电阻)的贡献

$$Y_{n2} = \begin{bmatrix} -\mu G_5 & \mu G_5 \\ \mu G_5-\beta G_2 & -\mu G_5 \end{bmatrix}$$

受控源的贡献

例： 求电路中的电压u_1



解： 选n_3为参考节点

则n_1： $u_{n1}=6V$

$$\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}^{\text{超节点的自导项}}u_{n2}+\frac{1}{6}u_{n4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)u_{n1}=-2$$

超节点：

将$u_{n1}=6V$代入上式得:

$$\frac{5}{6}u_{n2}+\frac{1}{6}u_{n4}=2$$

由受控电压源特性：

$$u_{n2}-u_{n4}=6u_1=6(-u_{n2})$$

$$u_{n4}=-6u_1-u_1=-7u_1=7u_{n2}$$

带入超节点方程：

$$u_{n2}=1V \qquad u_1=-u_{n2}=-1V$$

习题：

2-9-1
2-9-2(B)
2-9-3
2-33
2-34(B)
2-38