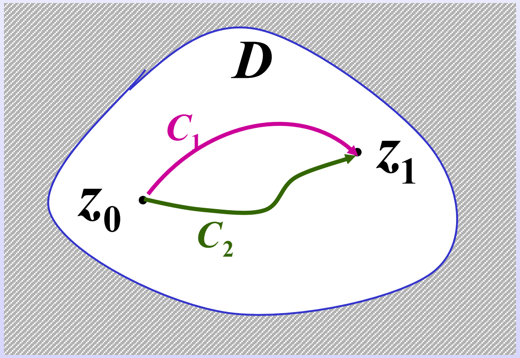
第三节 解析函数的不定积分

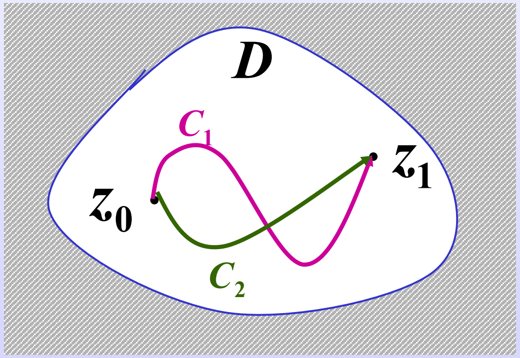
- 一、不定积分定义
- 二、定理
- 三、小结与思考

一、不定积分定义

由柯西定理知:

解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关, (如下页图)如果起点为 z_0, 终点为 z_1,





$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\mathrm{d}z$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

如果固定 z_0, 让 z_1 在 D 内变动, 并令 $z_1 = z$,

便可确定 D 内的一个单值函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

定理: 如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析,

那末函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 必为 D 内的一个解析函数, 并且 $F'(z) = f(z)$.

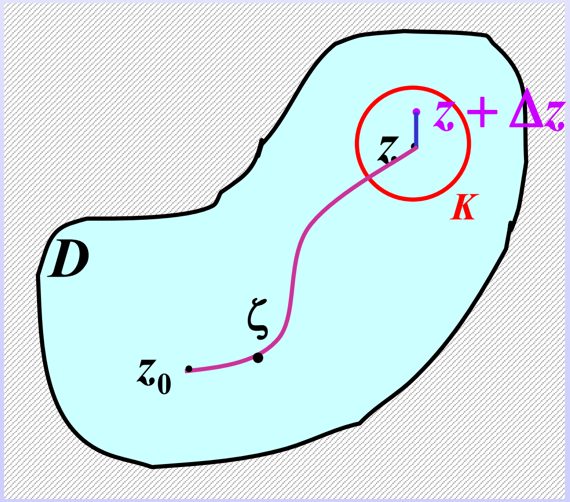
证　设 z 为 D 内任一点, 在D内再任取一点$z+\Delta z$, 连接 z 到 $z+\Delta z$ 的线段作为积分路线，则

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

所以 $$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta$$



因为 $f(z)$ 在 D 内解析，所以连续，故 $\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$，

使得 $|\zeta - z| < \delta$ 时，即 $|\Delta z| < \delta$ 时，有

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon,$$

从而

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] \mathrm{d}\zeta \right| \le \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

即 $F'(z) = f(z)$.

原函数和不定积分的定义:

设函数$f(z)$在区域D内连续，若D内的一个函数$\Phi(z)$满足

$$\Phi'(z) = f(z), \quad z \in D$$

则称$\Phi(z)$为$f(z)$的一个原函数,$f(z)$的所有原函数的集合称为函数$f(z)$的不定积分.

原函数之间的关系:

$f(z)$的任何两个原函数相差一个常数.

二、定理（类似于牛顿-莱布尼兹公式）

如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数, 那末

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

这里 z_0, z 为域 D 内的两点.

证 因为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 也是 $f(z)$ 的原函数,

所以 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) + c,$

当 $z = z_0$ 时, 得 $c = -\Phi(z_0),$

所以 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0).$

例1 求 $\int_a^b z^3 \mathrm{d}z$ 的值.

解 因为 z 是解析函数，它的原函数是 $\frac{1}{4}z^4$,

由牛顿-莱布尼兹公式知,

$$\int_a^b z^3 \mathrm{d}z = \frac{1}{4}z^4\Big|_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4).$$

例2 求 $\int_0^i z\cos z\,dz$ 的值.

$$\int_0^i z\cos z\,dz = \int_0^i z\,d(\sin z)$$

$$= [z\sin z]_0^i - \int_0^i \sin z\,dz$$

$$= [z\sin z + \cos z]_0^i = e^{-1} - 1.$$

此方法使用了微积分中“分部积分法”

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例3 试沿区域 $\mathrm{Im}(z)\geq 0, \mathrm{Re}(z)\geq 0$ 内的圆弧 $|z|=1$,

求 $\displaystyle\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z$ 的值.

解 函数 $\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在所设区域内解析,

它的一个原函数为 $\dfrac{\ln^2(z+1)}{2}$,

$$\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}\mathrm{d}z=\frac{\ln^2(z+1)}{2}\bigg|_1^i=\frac{1}{2}[\ln^2(1+i)-\ln^2 2]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

练习：

1. 设 c 是从 0到 $1+\frac{\pi}{2}i$ 的直线段，则积分

$\int_c ze^z dz =$ （ A ）

（A） $1-\frac{\pi e}{2}$

(B) $-1-\frac{\pi e}{2}$

(C) $1+\frac{\pi e}{2}i$

(D) $1-\frac{\pi e}{2}i$

四、小结与思考

原函数、不定积分的定义以及牛顿—莱布尼兹公式.

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

思考题

定理在积分计算中有什么用? 要注意什么问题?

作业：P49 5，

思考题答案

利用多连通区域的柯西积分定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法.

使用多连通区域的柯西积分闭路定理时, 要注意曲线的方向.

柯西资料

Augustin-Louis Cauchy

Born: 21 Aug 1789 in Paris, France

Died: 23 May 1857 in Sceaux (near Paris), France