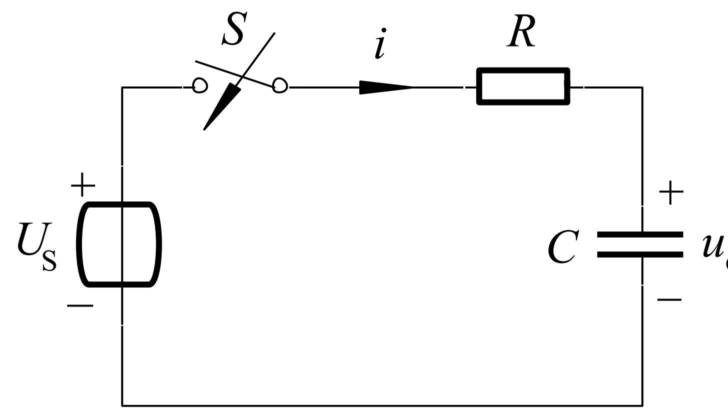
§3-6 动态电路的输入—输出方程

对于单输入—单输出动态电路，建立以待求变量作为输出变量的常系数线性微分方程并求解该方程.

如果描述动态电路的输入—输出方程是n阶微分方程，则称该电路为n阶电路。

1. RC串联电路接通到直流电压源



假定开关S合上之前电容两端已具有电压U_0 ($U_0<U_S$),即：

$$u_c(0-) = U_0$$

当$t=0$时，S闭合，$t>=0$时，由KVL方程：

$$Ri + u_C = U_S \qquad RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \qquad (1)$$

一阶常系数线性微分方程

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad (1)$$

非齐次线性微分方程的解

特解： $u_{cs}=U_S$ （开关闭合后的稳定电路）

齐次方程的通解： $u_{Ct}=Ae^{pt}$

p为特征方程 $RCp+1=0$的根：$p=-\frac{1}{RC}$

全解： $u_C=u_{Ct}+u_{Cs}=Ae^{pt}+\mathrm{U}_s$

定系数：

$$u_c(0_+)=\left(u_{ct}+u_{cs}\right)\Big|_{t=0}=\left(Ae^{-\frac{t}{RC}}+U_s\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$=A+U_S=u_C(0_-)=U_0$$

$$\therefore \quad u_C=\left(U_0-U_S\right)e^{-\frac{t}{RC}}+U_S \qquad t\geq 0$$

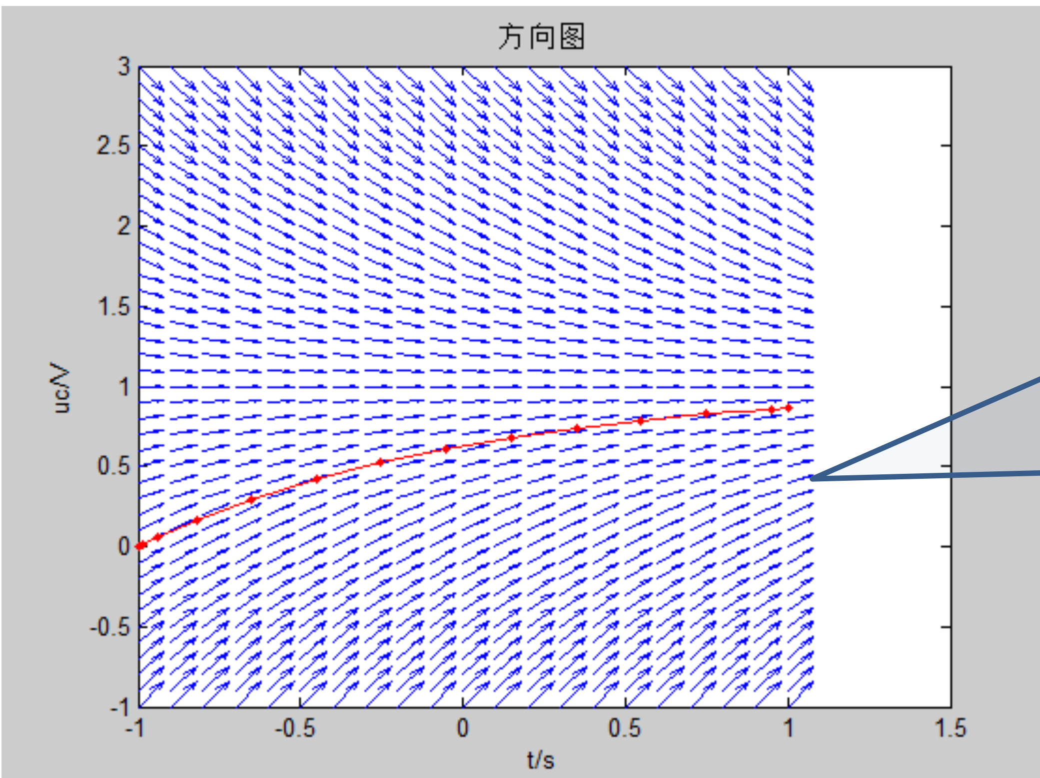
$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad (1) \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt}=(U_S-u_C)/RC \qquad (1')$$

状态转移方程

将状态转移方程置零，得到平衡点：$u_C = \mathrm{U}_s$

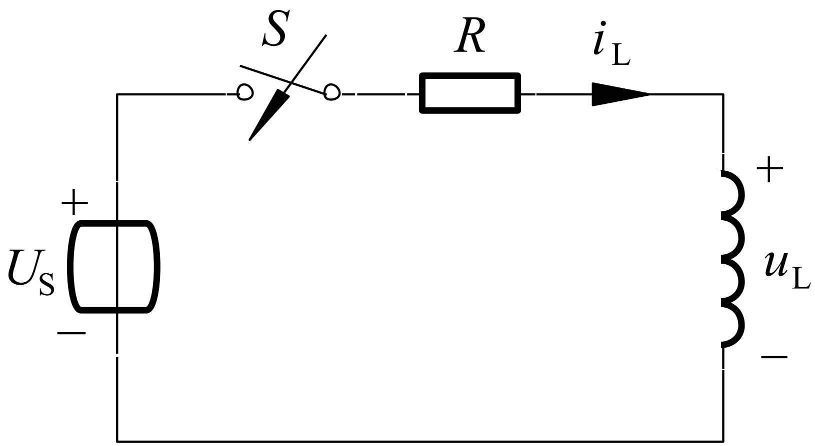
状态转移的速率由RC决定

状态变量u_C最终将转移到平衡点位置，在u_C-t平面做出方向图：



方向图与时间无关，即状态转移方程的等号右边没有时间t，这种性质称为autonomous

2. RL串联电路接通到直流电压源



开关合上前，$t < 0$，$i_L(0\text{-}) = 0$

合上开关，即 $t >= 0$ 时

$$u_L + Ri_L = U_S$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S \qquad (2)$$

非齐次线性微分方程的解

- 特解：$i_{Ls} = U_S/R$（开关闭合后的稳定电路）
- 齐次方程的通解：$i_{Lt} = Ae^{pt}$
- p 为特征方程 $Lp + R = 0$ 的根 $\quad p = -\frac{R}{L}$

全解： $i_L = i_{Lt} + i_{Ls} = Ae^{\frac{-R}{L}t} + \frac{\mathrm{U_S}}{\mathrm{R}}$

定系数： $i_L(0_+) = i_{Ls} + i_{Lt}\big|_{t=0} = \left(\frac{\mathrm{U_S}}{\mathrm{R}} + Ae^{\frac{-R}{L}t}\right)\Big|_{t=0} = \frac{U_S}{R} + A = i_L(0_-) = 0$

$$\therefore \quad i_L = i_{Lt} + i_{Ls} = \frac{U_S}{R}\left(1 - e^{\frac{-R}{L}t}\right) \qquad t \geq 0$$

状态转移方程如下：

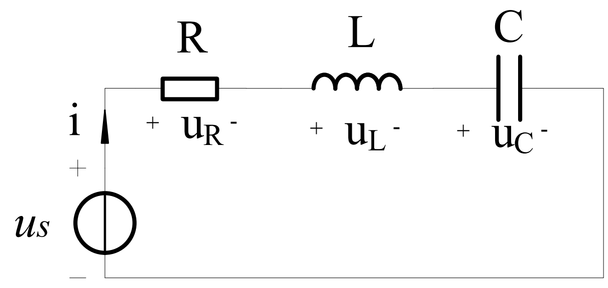
$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S \qquad (2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{di_L}{dt} = \left(\frac{U_S}{R} - i_L\right) / \frac{L}{R} \qquad (2')$$

将状态转移方程置零，得到平衡点： $i_L = \mathrm{U}_s / R$

状态转移的速率由L/R决定

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）

由KVL：　$u_R + u_L + u_C = u_s$　　(1)



u-i关系：　$u_R = Ri$　　(2)

$u_L = Li'$　　(3)

$i = Cu_C'$　　(4)

整理得：
$$\begin{cases} u_C' = i / C \\ i' = (u_s - u_C - Ri) / L \end{cases}$$

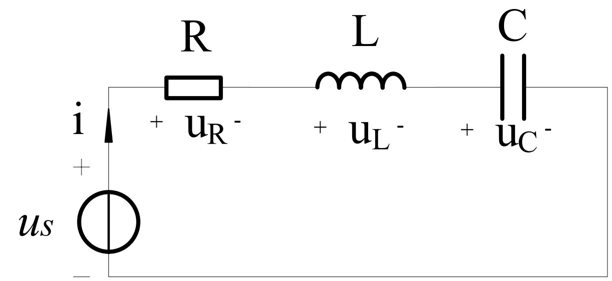
状态转移方程组

将状态转移方程组置零，得到平衡点：
$$\begin{cases} i = 0 \\ u_C = u_s \end{cases}$$

该方程组仍是autonomous的，状态转移在i-u_C平面进行

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）

$$\begin{cases} u_C' = i / C \\ i' = \left(u_s - u_C - Ri\right) / L \end{cases}$$



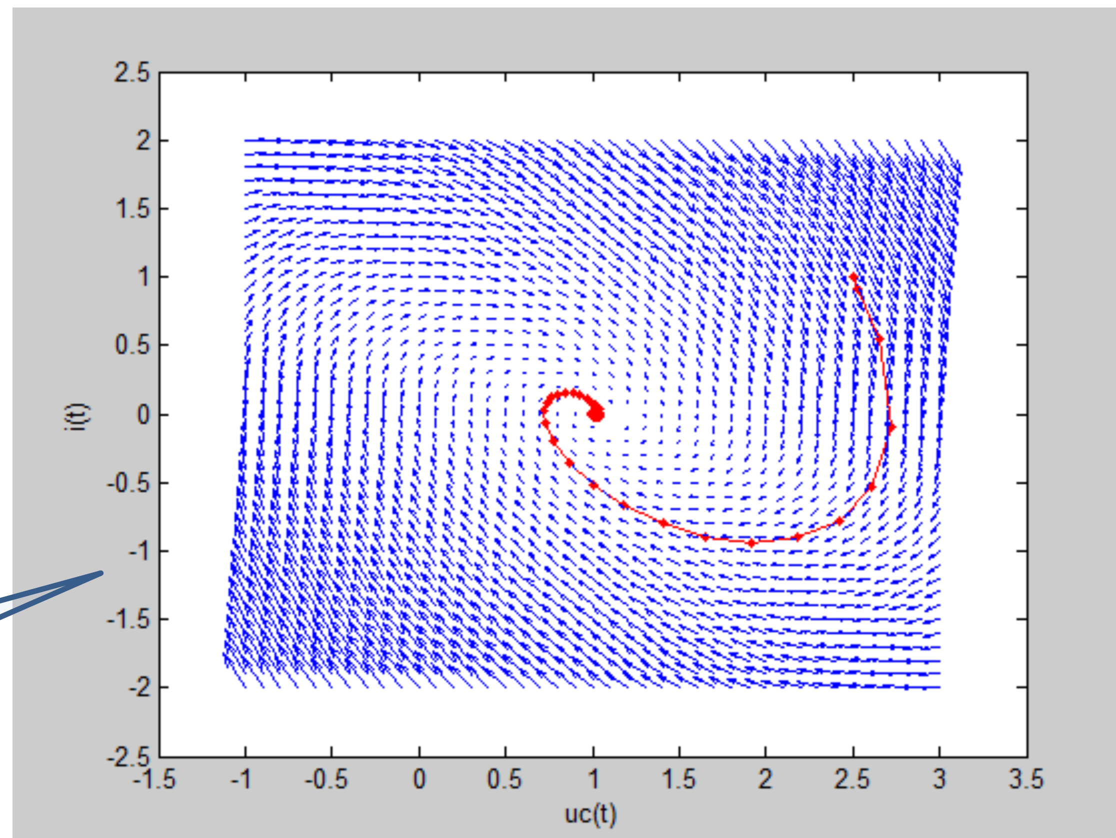
为方便计算，取：

$$u_s = R = C = L = 1$$

状态转移方程为：

$$\begin{cases} u_C' = i \\ i' = 1 - u_C - i \end{cases}$$

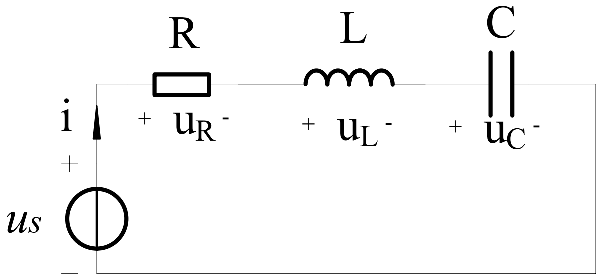
做出方向图：



R=0时会
出现什么
现象？

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）

$$\begin{cases} u_C' = i/C \\ i' = \left(u_s - u_C - Ri\right)/L \end{cases}$$



把上述状态转移方程i去掉，整理得：

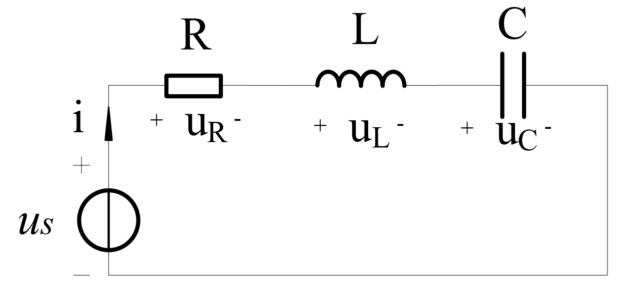
$$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_s$$

一元二阶常系数线性微分方程组

特解：当t->∞时， $u_C\big|_{t=\infty} = u_s$

求齐次方程通解，特征方程： $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）



特征方程： $p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$

令判别式为零： $\Delta=\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}=0$

得： $R_0=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

分情况讨论：

当 $|R|>R_0$ 时： $p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$

齐次方程通解：

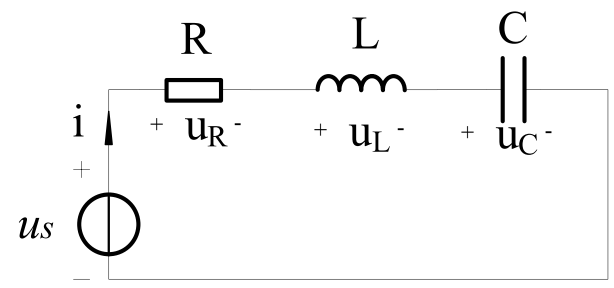
$$u_{Ct}(t)=Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}$$

全解： $u_C=u_{Ct}+u_{Cs}=Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}+u_s$

定系数： $u_C(0+)=\left(Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}+u_s\right)|_{t=0}=A+B+u_s$

$$u_C{}'(0+)=\left(Ap_1e^{p_1t}+Bp_2e^{p_2t}\right)|_{t=0}=Ap_1+Bp_2$$

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）



当 $|R| = R_0$ 时：$p = p_1 = p_2 = -\dfrac{R}{2L}$

齐次方程通解：$u_{Ct}(t) = (At + B)e^{pt}$

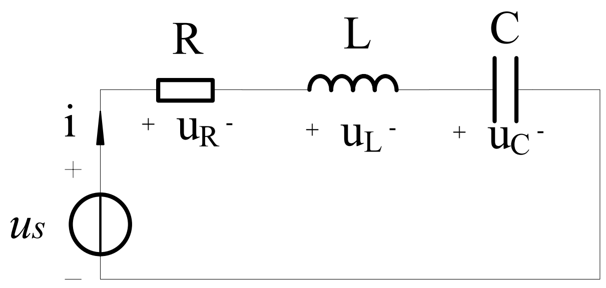
全解：$u_C = u_{Ct} + u_{Cs} = (At + B)e^{pt} + u_s$

定系数：$u_C(0+) = \left((At + B)e^{pt} + u_s\right)|_{t=0} = B + u_s$

$u_C{}'(0+) = \left(Ae^{pt} + (At + B)pe^{pt}\right)|_{t=0} = A + Bp$

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）

当 $|R| < R_0$ 时：$p_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm j\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$



齐次方程通解：

$$u_{Ct}(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} = Ae^{(a+j\sqrt{\omega_0{}^2 - a^2})t} + Be^{(a-j\sqrt{\omega_0{}^2 - a^2})t}$$

$$= e^{at}(Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t}) = Ue^{at}\sin(\omega t + \varphi)$$

其中：$a = -\dfrac{R}{2L}$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - a^2}$

全解：$u_C = u_{Ct} + u_{Cs} = Ue^{at}\sin(\omega t + \varphi) + u_s$

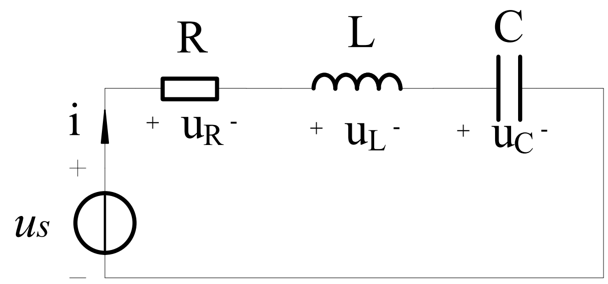
定系数：$u_C(0+) = \left(Ue^{at}\sin(\omega t + \varphi) + u_s\right)|_{t=0} = U\sin(\varphi) + u_s$

$$u_C{}'(0+) = \left(Uae^{at}\sin(\omega t + \varphi) + Ue^{at}\omega\cos(\omega t + \varphi)\right)|_{t=0}$$

$$= Ua\sin(\varphi) + U\omega\cos(\varphi)$$

3、RLC串联电路的输入输出方程（直流电源）

数值解：$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}u_s$



设：$y_1 = u_C \qquad y_2 = u_C'$

则：$y_2' = u_C'' = -\frac{R}{L}u_C' - \frac{1}{LC}u_C + \frac{1}{LC}u_s$

$$= -\frac{R}{L}y_2 - \frac{1}{LC}y_1 + \frac{1}{LC}u_s$$

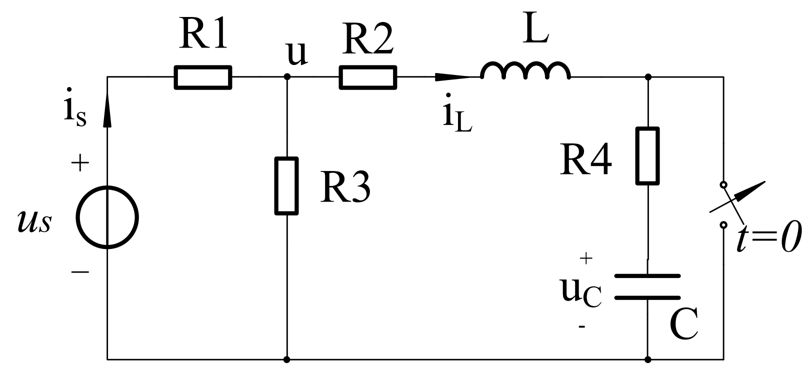
一阶线性微分方程的矢量扩展

设状态矢量：$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_C & u_C' \end{bmatrix}^T$

则：$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} u_C' \\ u_C'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}u_s$ 　　简写为：$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{e}$

4、高阶动态电路的状态转移方程

右图电路，以电感电流i_L和电容电压u_C为状态变量，由节点法：



$$i_L + \frac{u}{R_3} + \frac{u-u_s}{R_1} = 0 \qquad (1)$$

由KVL： $u = (R_2+R_4)i_L + Li_L{}' + u_C \qquad (2)$

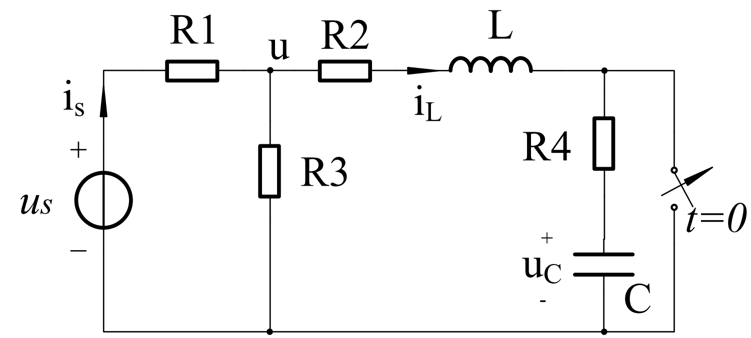
由KCL： $i_C = i_L = Cu_C{}' \qquad (3)$

把（2）代入（1）整理得：

$$i_L{}' = -\frac{1}{\mathrm{L}}\left(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2+R_4\right)i_L - \frac{1}{\mathrm{L}}u_C + \frac{R_3}{\mathrm{L}\left(R_1+R_3\right)}u_s$$

$$u_C{}' = \frac{1}{C}i_L$$

4、高阶动态电路的状态转移方程



写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} i_L' \\ u_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mathrm{L}}\left(\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3}+R_2+R_4\right) & -\frac{1}{\mathrm{L}} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_3}{\mathrm{L}\left(R_1+R_3\right)} \\ 0 \end{bmatrix} u_s$$

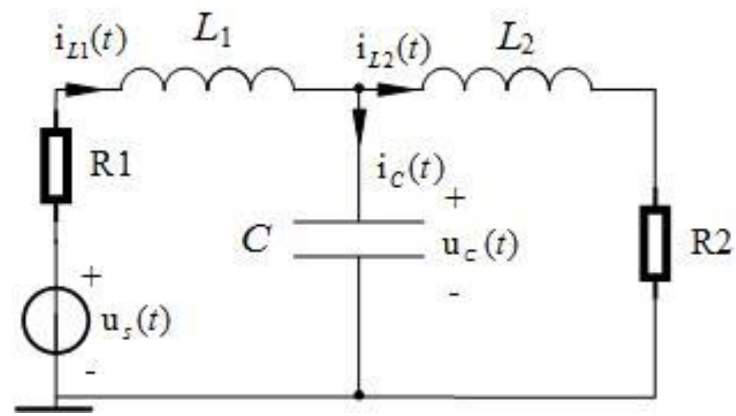
设状态矢量：$\mathbf{y}=[i_L \quad u_C]^T$

状态方程可简写为：$\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}+\mathbf{Be}$

给定初始条件：$i_L(0_+)=0.05A \qquad u_C(0_+)=0V$

可由matlab编程计算状态转移曲线

例：列写图示电路的状态转移方程。



由KCL：$i_{L1}=i_{L2}+Cu_C{'}$　　(1)

由KVL：$L_1 i_{L1}{'}+R_1 i_{L1}+u_C=u_S$　　(2)

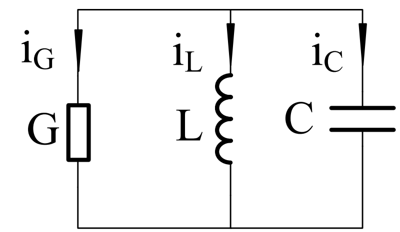
$L_2 i_{L2}{'}+R_2 i_{L2}=u_C$　　(3)

整理得：

$$\begin{bmatrix} u_C{'} \\ i_{L1}{'} \\ i_{L2}{'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}u_S$$

状态变量个数=输入输出方程阶数=动态电路阶数

5、非线性动态电路定性分析-LC并联振荡器



如图，由KCL和u-i关系式得微分方程：

$$i_L'' + \frac{G}{C} i_L' + \frac{1}{LC} i_L = 0$$

当 $|G| < 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ 时： $i_L(t) = Ie^{at} \sin(\omega t + \varphi)$

其中： $a = -\frac{G}{2C}$ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}$

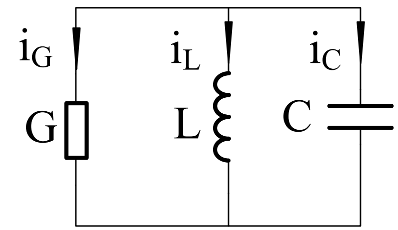
当G>0时，响应幅度按照指数衰减，最终会趋于零，初始能量消耗殆尽。

当G=0时，电路没有能量损耗，电场能和磁场能互相转化，产生等幅振荡。

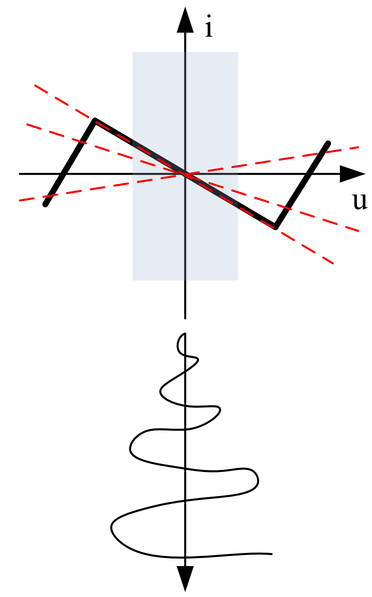
当G<0时，负电导为电路提供能量，响应幅度按照指数增长，产生增幅振荡。

$$i_L(t) = Ie^{at}\sin(\omega t + \varphi)$$

5、非线性动态电路定性分析-LC并联振荡器



- 当电压幅度很小时，G为线性负导，电压幅度按指数增长。
- 当电压幅度增加到负导的非线性区时，等效负导的绝对值变小，电压幅度的增长变慢。
- 当电压幅度增加到正导区时，周期内等效负导在零点波动，是稳定平衡点：
  - 若电压幅度增加，等效电导变正值，电压幅度衰减回平衡值。
  - 若电压幅度减小，等效电导变负值，电压幅度增加回平衡值。
  - 电路产生稳定振荡。



N型负导UI特性

- S型负阻与LC串联电路也能产生稳定振荡。

作业：

3-21

3-22

证明：状态变量个数=输入输出方程阶数