# 第一节　复级数

- 一、复数列的极限
- 二、复数项级数的概念
- 三、复变函数项级数
- 四、小结与思考

# 一、复数列的极限

1. 定义　设 $\{z_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, 其中

$z_n = a_n + ib_n$ , 又设 $z = a + ib$ 为一确定的复数,

如果任意给定 $\varepsilon > 0$, 相应地都能找到一个正数

$N(\varepsilon)$, 使 $|z_n - z| < \varepsilon$ 在 $n > N$ 时成立,

那末 $z$ 称为复数列 $\{z_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限,

记作 $$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

此时也称复数列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z$.

## 2.复数列收敛的条件

复数列$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$收敛于$z$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

**定理说明: 可将复数列的敛散性转化为判别两个实数列的敛散性.**

**例1** 下列数列是否收敛, 如果收敛, 求出其极限.

(1) $\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$;　　(2) $\alpha_n=n\cos in$.

**解** (1) 因为 $\alpha_n=(1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}=(1+\frac{1}{n})(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})$,

所以 $a_n=(1+\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{n}$,　　$b_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

所以数列$\alpha_n=(1+\frac{1}{n})^{e^{i\frac{\pi}{n}}}$收敛,

且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=1$.

**解** (2) 由于$\alpha_n=n\cos in=n\cosh n$,

当$n\to\infty$时, $\alpha_n\to\infty$,

所以数列发散.

## 课堂练习:

下列数列是否收敛? 如果收敛, 求出其极限.

$$(1)\ z_n = \frac{1+ni}{1-ni};$$

$$(2)\ z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1};$$

$$(3)\ z_n = \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi i}{2}}.$$

# 二、级数的概念

1. 定义 设$\{z_n\}=\{a_n+ib_n\}\ (n=1,2,\cdots)$为一复数列,

表达式 $$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$$

称为复数项无穷级数.

部分和 其最前面 $n$ 项的和

$s_n = z_1+z_2+\cdots+z_n$ 称为级数的部分和.

## 收敛与发散

如果部分和数列$\{s_n\}$收敛，那末级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，

并且极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$称为级数的和.

如果部分和数列$\{s_n\}$不收敛，

那末级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$发散.

**说明**：与实数项级数相同，判别复数项级数敛散性的基本方法是：利用极限$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

## 2.复数项级数收敛的条件

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ 收敛的充要条件

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

**证**　因为 $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$$= \sigma_n + i\tau_n,$$

根据$\{s_n\}$极限存在的充要条件:

$\{\sigma_n\}$和$\{\tau_n\}$的极限存在,

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛.

**说明** 复数项级数的审敛问题

$$\Downarrow$$

实数项级数的审敛问题

**课堂练习** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{i}{n})$ 是否收敛?

**解** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以原级数发散.

## 必要条件

因为实数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

所以复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

**重要结论:** $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \Rightarrow$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$发散.

**启示**: 判别级数的敛散性时, 可先考察 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{?}{=} 0$

$$
\text{如果}\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0, & \text{级数发散;} \\[2em] \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0, & \text{应进一步判断.}\end{cases}
$$

例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$ :

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{in} \neq 0,$ 级数发散;

不满足必要条件, 所以原级数发散.

## 柯西收敛准则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充分必要条件是：对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 使当$n > N$时, $p$=1, 2, …时, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} z_k\right| = |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon.$$

序列$\{z_n\}$收敛的充分必要条件是：对任给$\varepsilon > 0$, 存在正整数$N$, 使当$m, n > N$时，有

$$|z_m - z_n| < \varepsilon.$$

## 3. 绝对收敛与条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那末称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 为绝对收敛.

非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数.

**定理** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 那末 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛.

**证** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

而 $|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $|b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

根据实数项级数的比较准则, 知

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 都收敛,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也都收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 是收敛的.

**说明** 由 $\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le |a_n|+|b_n|,$

知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\le \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|,$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛时,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$也绝对收敛.

**综上:**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$绝对收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛.

**例2** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 是否收敛?

**解** 级数满足必要条件, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=0$,

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n}$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots)-i(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 虽 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,

原级数仍发散.

**例3** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 是否绝对收敛?

**解** 因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$,

所以由正项级数的比值判别法知:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$ 收敛,

故原级数收敛, 且为绝对收敛.

**例4** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i]$ 是否绝对收敛?

**解** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 也收敛,

故原级数收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为条件收敛,

所以原级数非绝对收敛.

## 三、复变函数项级数

**定义**　设 $\{f_n(z)\}\ (n=1,2,\cdots)$ 为一复变函数序列，

其中各项在区域 $D$ 内有定义. 表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

称为复变函数项级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

级数最前面$n$项的和

$$s_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$$

称为这级数的**部分和**.

**和函数**

如果对于$D$内的某一点$z_0$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty}s_n(z_0)=s(z_0)$

存在, 那末称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在$z_0$收敛, $s(z_0)$称为

它的和.

如果级数在$D$内处处收敛, 那末它的和一定是$z$的一个函数$s(z)$:

$$s(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

称为该级数在区域$D$上的**和函数**.

# 四、小结与思考

通过本课的学习, 应了解复数列的极限概念; 熟悉复数列收敛及复数项级数收敛与绝对收敛的充要条件;理解复数项级数收敛、发散、绝对收敛与条件收敛的概念与性质, 以及复变函数项级数的相关概念和性质.

## 思考题

如果复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$均发散,问:级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \pm \beta_n)$也发散吗?

# 思考题答案

否.

放映结束，按Esc退出.