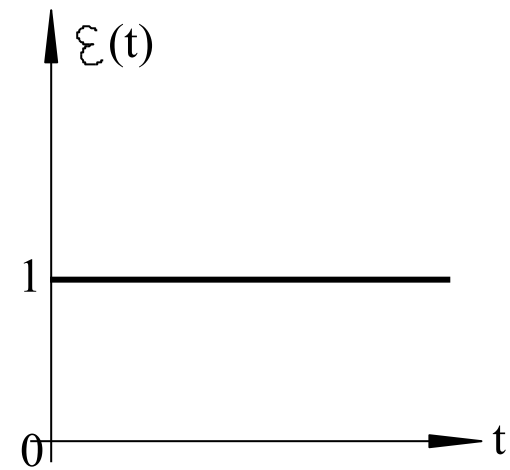
§3-4 单位阶跃函数与单位冲激函数

1. 单位阶跃函数

(1) 单位阶跃函数的定义为：

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

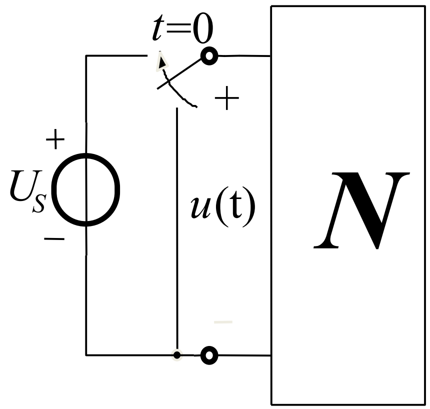


在 $t=0$ 时有跃变,其值无定义

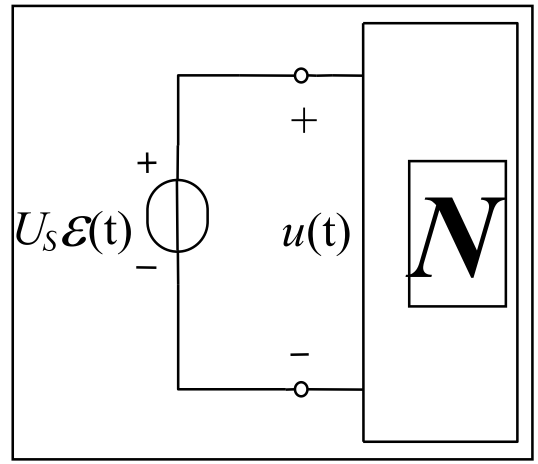
在t由负值趋近于0时，其瞬时值为 $t=0_-$

在t由正值趋近于0时，其瞬时值为 $t=0_+$

(2) 阶跃函数可以用来描述开关动作



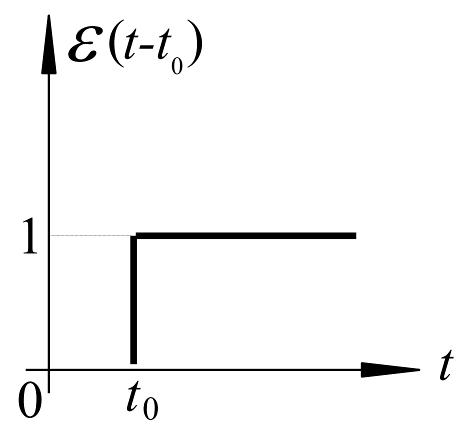
(a)



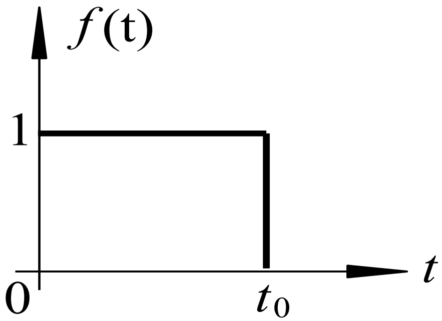
(b)

(3) 还可以定义延时的单位阶跃函数

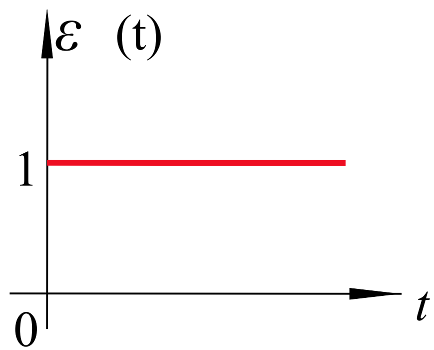
$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



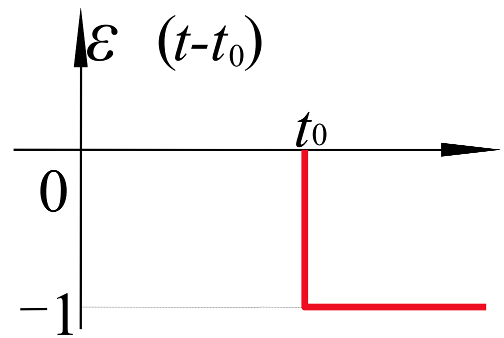
(4)阶梯状波形可表示为若干阶跃函数的叠加



=



+

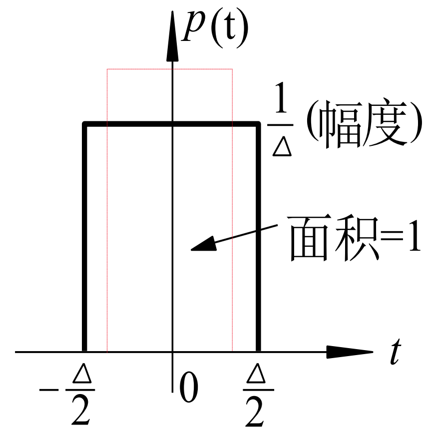


表示式：$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$

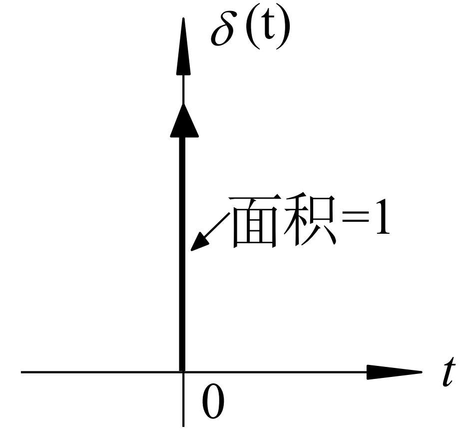
2. 单位冲激函数

(1) 单位冲激函数的定义:

$$\left.\begin{aligned} &\delta(t)=0 \qquad t\neq 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



(a) 脉冲函数 $p(t)$



(b)单位冲激函数

单位冲激函数可以看成是图(a)所示脉冲函数在$\Delta\to 0$时的极限。当Δ减小时，脉冲函数的幅度增加，而$p(t)$曲线下的面积总保持为1。当Δ趋近于0时，上两式即可得到满足。

单位冲激函数可设想为：在原点处宽度趋于零而幅度趋于无限大,但具有单位面积的脉冲。

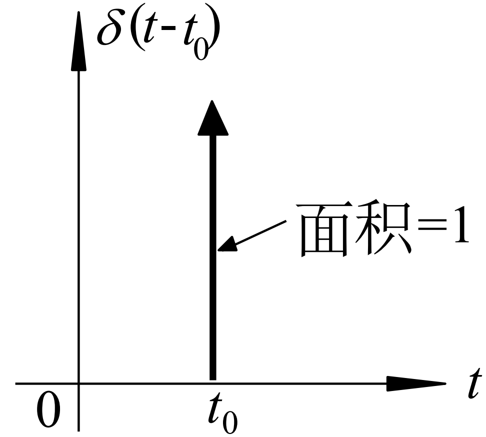
冲激函数所含的面积称为冲激函数的强度;

单位冲激函数的意思是强度为1的冲激函数。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=1 \qquad (2)$$

(2) 单位延时冲激函数的定义为

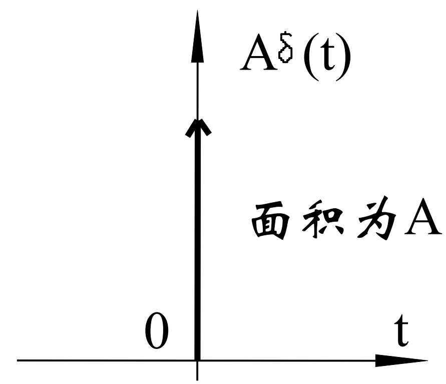
$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & t\neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1 \end{cases}$$



单位延时冲激函数$\delta(t-t_0)$可设想为:在$t=t_0$处宽度趋于零而幅度趋于无限大,但具有单位面积脉冲.

(3) 冲激函数——常数A与$\delta(t)$的乘积

$$\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t)dt=A\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=A$$

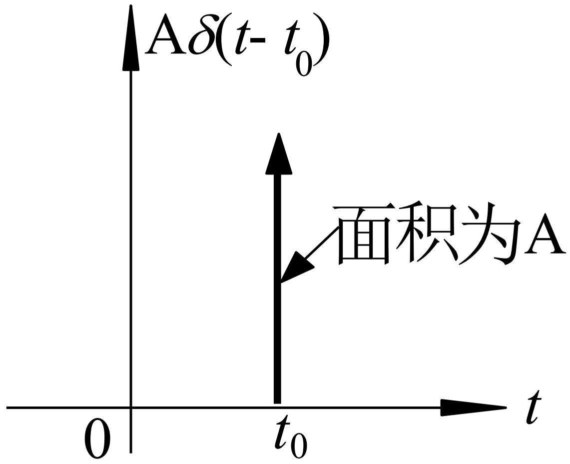


Aδ(t)的图形

(4) 延时冲激函数

冲激函数$A\delta(t-t_0)$可设想为

在$t=t_0$处,强度为A的冲激函数



(5) 采样性质（有界函数f(t)）

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma(t)dt = \int_{0-}^{0+} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt = f(0)$$

类似的

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma(t-t_0)dt == f(t_0)$$

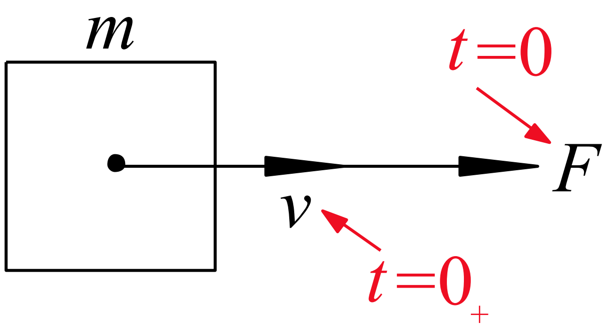
例： 一个原处于静止状态，质量为m的物体，在$t=0$时受到一冲击力F的作用，在$t=0_+$时获得速度为V

则该冲击力可以用冲激函数

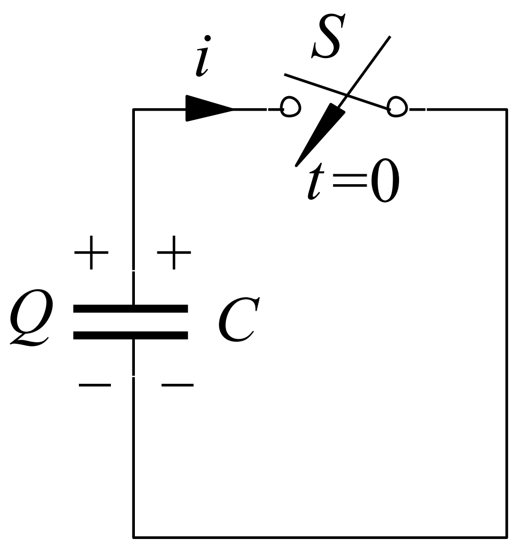
$$F = mv\delta(t)$$

表示，冲激强度mv就等于冲击力作用于该物体的冲量，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} F dt = \int_{-\infty}^{\infty} mv\delta(t)dt = mv$$



例如：一带电量为 Q 的电容，在 $t=0$ 时通过短路线放电时，放电电流可表示为 $i=Q\delta(\mathrm{t})$。



冲激强度等于电容的放电电荷

$$\int_{-\infty}^{\infty} i dt=\int_{-\infty}^{\infty} Q\delta(t)dt=Q$$

(6) 单位阶跃函数和单位冲激函数的关系

— 单位冲激函数是单位阶跃函数的导数

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

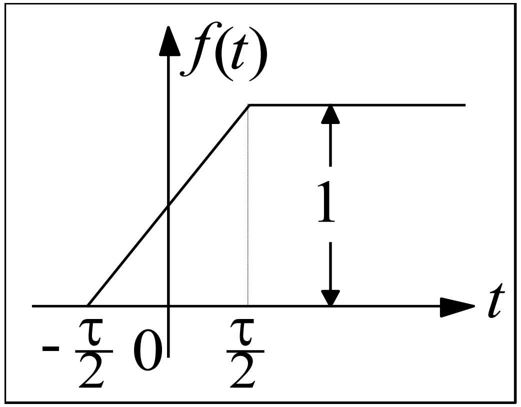
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt'$$

冲激函数的导数是什么？

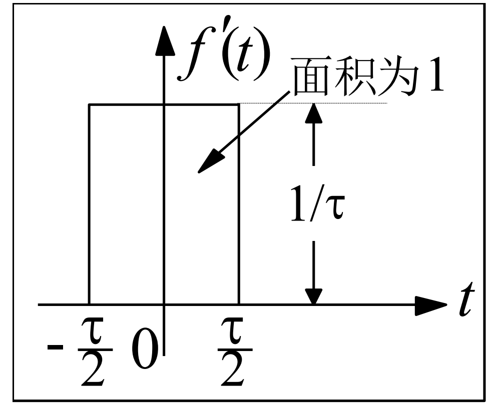
数学课：冲激函数的导数是冲激偶函数

电路分析：冲激函数的导数不存在

证明：



(a) 函数$f(t)$



(b) 函数$f(t)$对时间的导数

图(a)所示为函数$f(t)$

$f(t)$ 对时间的导数用函数式表示为 $$f'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau} & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & t<-\dfrac{\tau}{2}\text{或 } t>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

(b)图为一矩形脉冲，脉冲的高度是宽度τ的倒数，面积=1，

在(a)图中，当$\tau\to 0$时,将有 $f(t)=\varepsilon(t)$

$-\dfrac{\tau}{2}\to 0_-$ t 由负值 $\to 0$

$\dfrac{\tau}{2}\to 0_+$ t 由正值 $\to 0$

而脉冲 $f'(t)$ 面积仍保持为1.因此由冲激函数的定义式可知

$$\lim_{\tau \to 0} f'(t) = \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

即单位冲激函数等于阶跃函数对 t 的导数

反之，由单位冲激函数的定义可知；

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' = 1 \qquad (t > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt' = 0 \qquad (t < 0)$$

结合单位阶跃函数的定义式有

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')dt'$$

即单位阶跃函数等于单位冲激函数的积分

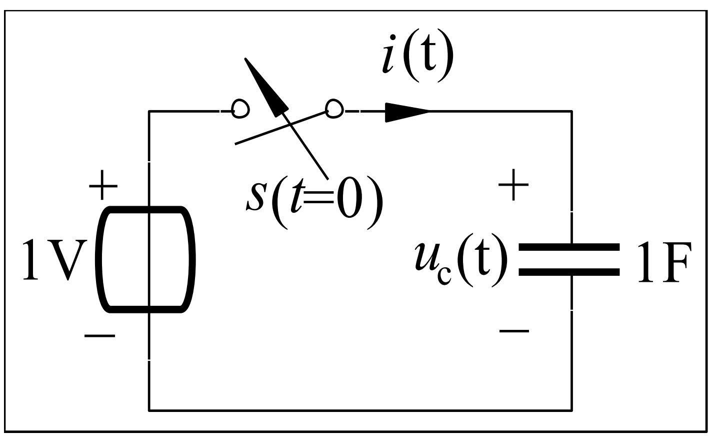
在非常短暂的时间内产生的一个巨大的脉冲电流或电压,是冲激函数的一种近似.

例：如图所示,将一个不带电的电容元件在$t=0$时通过开关联接到一个电压源上. 如果电容为1F,电源电压为1V,用单位阶跃函数$\varepsilon(t)$表示，可得$u_C(t)=\varepsilon(t)$

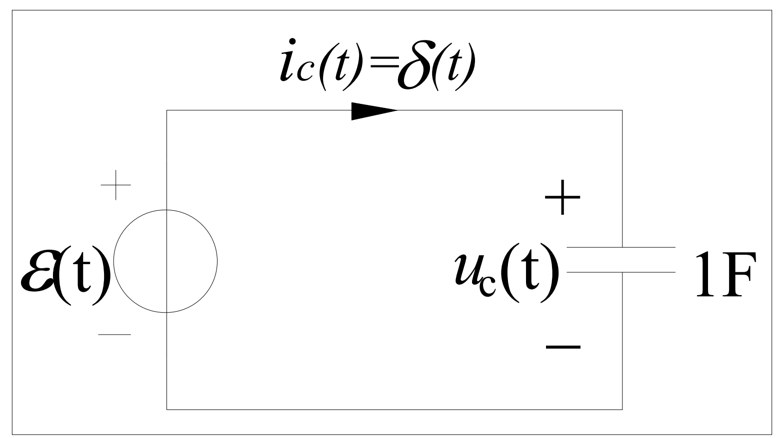
电容的充电电流

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=1\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\delta(t)$$

为一单位冲激电流



(a) 原始电路



(b)用单位阶跃函数表示的等效电路

若(a)图中电压源为U_S,电容为C,则换路后的充电电流为：

$$i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=CU_s\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=CU_s\delta(t)$$

电容电荷的跳变量为

$$\Delta q=\int_{0_-}^{0_+}i(t)dt=CU_s$$

结论: (1) 当电容的充电电流(或放电电流)为冲激电流时,

电容电压要发生强迫跳变 [$u_C(0_-)=0$, $u_C(0_+)=U_S$]

(2) 冲激电流通过电容的瞬间(0_-到0_+),电容极板上

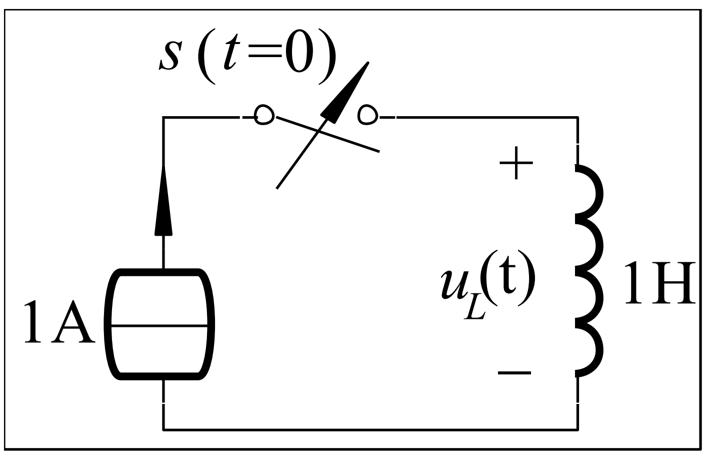
电荷的跳变量即等于冲击电流的强度CU_S.

例：将一个电感元件在t=0时联接到一个电流源上，若电感为1H，电流源电流为1A，用单位阶跃函数$\varepsilon(t)$表示，可得：

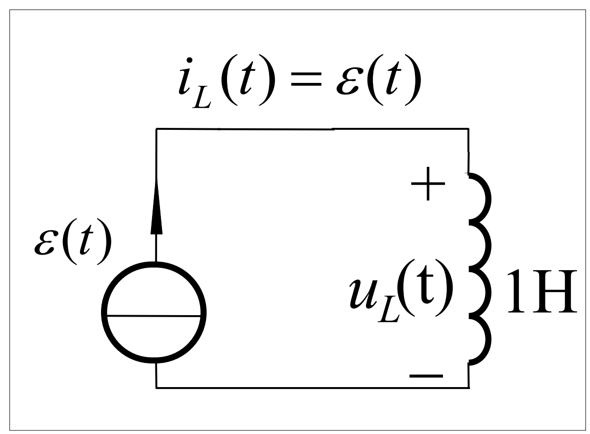
$$i_L(t)=\varepsilon(t)$$

换路后电感元件的端电压 $u_L = L\dfrac{d\, i_L(t)}{dt} = 1\dfrac{d\ \varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)$

为一单位冲激电压



(a) 原始电路



(b)用单位阶跃函数表示的等效电路

若图中电流源的电流为I_S,电感为L,则换路后电感的端电压为

$$u_L = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{d[I_S\varepsilon(t)]}{dt} = LI_S\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = LI_S\delta(t)$$

电感中磁通链的跳变量为

$$\Delta\psi = \int_{0_-}^{0_+} u_L(t)dt = LI_s$$

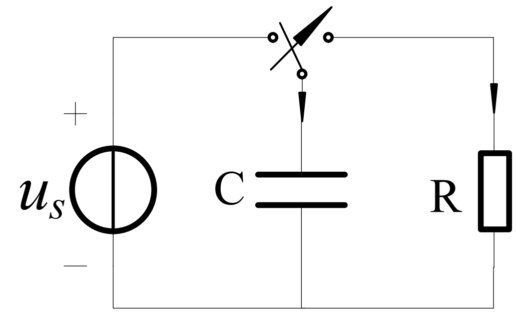
结论: (1) 当电感的端电压为冲激电压时,电感的电流要发生跳变 $[i_L(0-) = 0,\ i_L(0_+) = I_S]$.

(2) 冲激电压加于电感两端的瞬间(0-到0_+),电感中磁通链的跳变量即等于冲激电压的强度LIs

§3-5 初始状态与开关定理

状态变量——对于任意的动态电路，总可以找到一组**独立**变量，$\{x_1(t), x_2(t), \ldots\}$，只要给定它们在$t=t_0$的初始值以及$t>t_0$的激励，电路在$t>t_0$的行为便可完全确定。这样一组独立变量就称为状态变量。

如： 开关动作时的电容电压决定了整个放电过程（此时激励为零），电容电压为此电路的状态变量。



换路——由电路结构或参数变化引起的电路变化

"换路" 在$t=0$时刻进行.

"换路" $t=0$
- 换路前（瞬间）$t=0_-$　　**原始状态**
- 换路后（瞬间）$t=0_+$　　**初始状态**

换路经历的时间为0_-到0_+

开关定理

a) 电容：在开关发生瞬间，电路中任意电容的电压 u_c 或

电荷 q 不能突变，即

$$u_c(0-) = u_c(0_+) \quad \text{或} \quad q(0-) = q(0_+)$$

b) 电感：在开关发生瞬间，电路中任意电感的电流 i_L 或

磁通链 ψ 不能突变，即

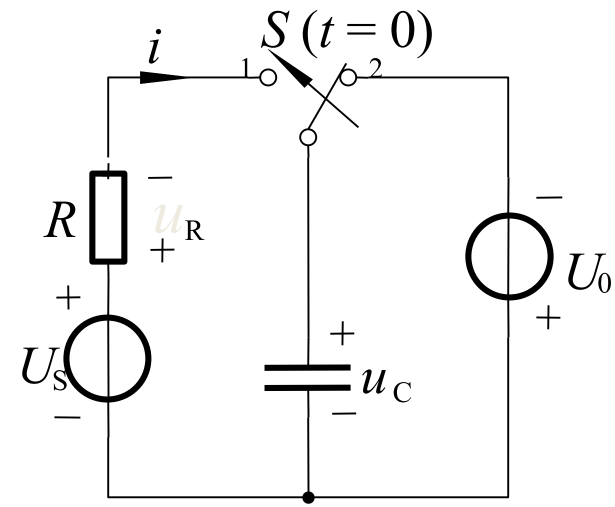
$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \quad \text{或} \quad \psi_L(0_-) = \psi_L(0_+)$$

电容电流有界的条件下，电容电压不能突变；

电感电压有界的条件下，电感电流不能突变；

以电容为例：

$t=0$ 时，开关S由2倒向1.



$U_S = Ri + u_C$

$$u_c = \frac{1}{C}\int i dt = u_c(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i dt$$

$t=0_+$时， $u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i dt$

如果在换路前后,即0- 到 0_+瞬间,电流为有限值,则电容上的电压不发生突变

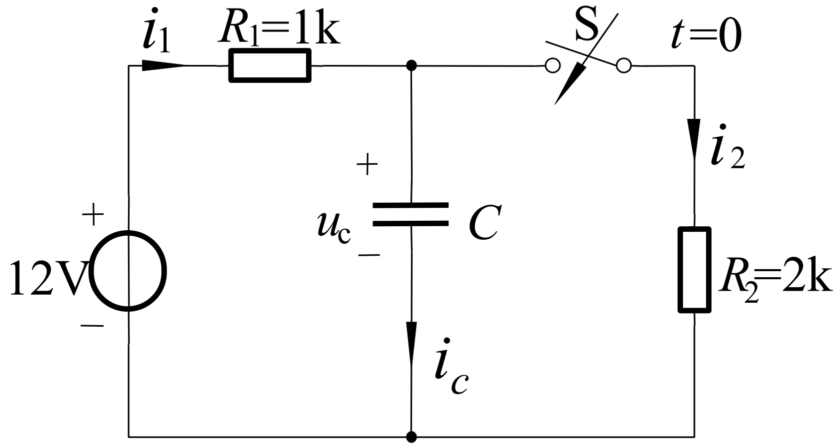
$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

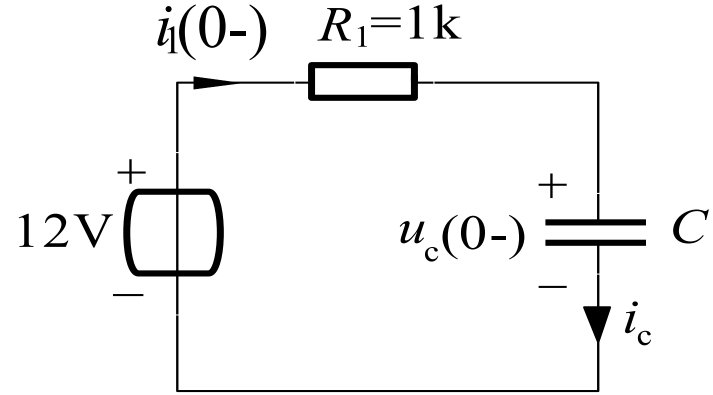
同理： $q(0_+) = q(0_-)$

能量 $W_C = \frac{1}{2}Cu_c^2$

功率 $p = \frac{dW_C}{dt}$

例1：换路前工作了很长时间，求开关闭合后的电路参数。





t =0-时的等效电路

解: $t = 0\text{-}$ 时，$u_C(0\text{-}) = 12\text{V}$

$t = 0$ 时，S闭合

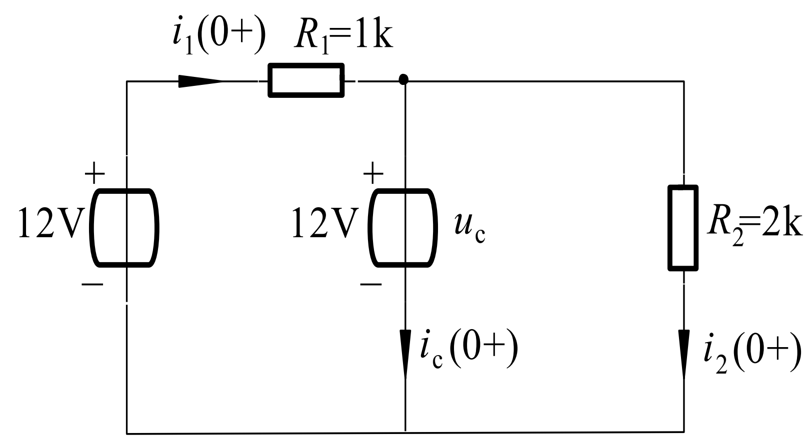
$u_C(0_+) = u_C(0\text{-}) = 12\text{V}$

$i_1(0_+) = 0\text{A}$

$i_2(0_+) = 12/R_2 = 6\text{mA}$

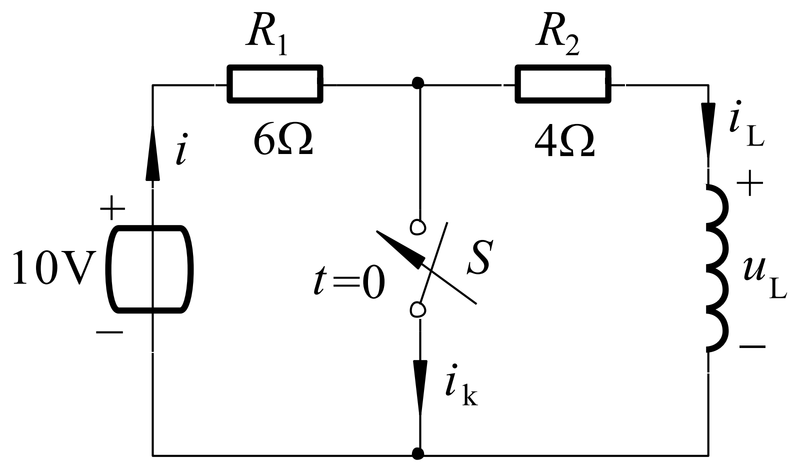
$i_C(0_+) = -12/R_2 = -6\text{mA}$

因为 $i_1 = 0$ 所以 $i_C = -i_2$

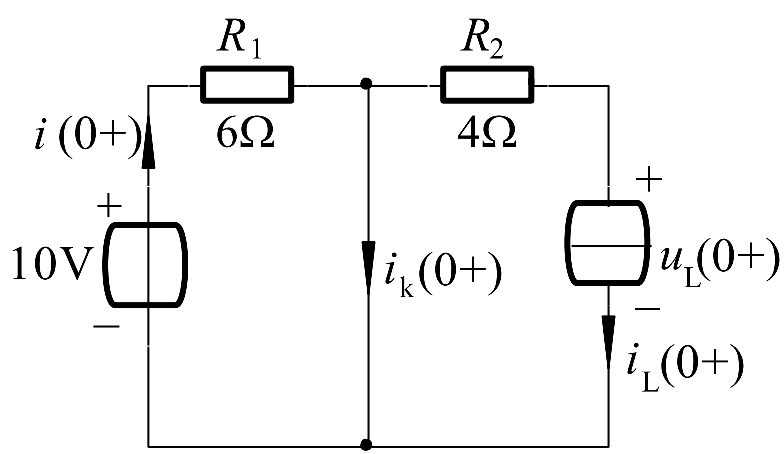


t =0_+瞬间的等效电路

例2：换路前工作了很长时间，求开关闭合后的电路参数。



原图



$t=0_+$时的等效电路

解：$t=0\text{-}$ 时，

$i_L(0\text{-}) = 10/(R_1+R_2) = 1\text{A}$

$t = 0$时，S闭合

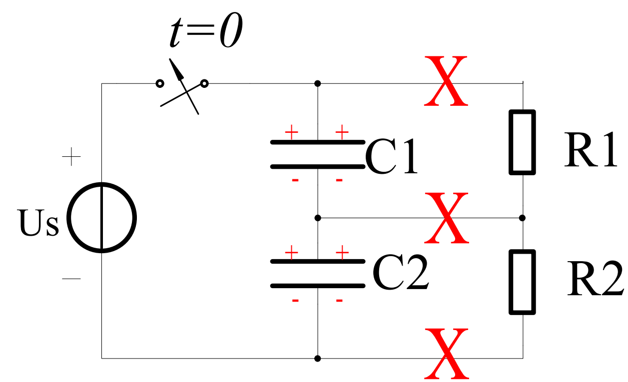
$i_L(0_+) = i_L(0\text{-}) = 1\text{A}$

$u_L(0_+) = -R_2 i_L(0_+) = -4\text{V}$

$i(0_+) = 10/R_1 = 1.67\text{A}$

$i_k(0_+) = i(0_+) - i_L(0_+) = 0.67\text{A}$

例3：换路前工作了很长时间，求开关闭合后的U_{C1}与U_{C2}，若换路后电路立即达到稳定状态，电路参数应满足什么关系？



解： $t=0$- 时，$u_{C1}(0_-)=u_{C2}(0_-)=0$

$t=0$时，S闭合，由KVL：

$$u_{C1}(0_+)+u_{C2}(0_+)=u_s$$

两电容电压不独立

由于开关变化瞬间电容电压发生跳变，电容近似短路，电流全部流入两个电容，两个电阻没有电流流过。

根据电荷守恒：$-C_1 * u_{C1}(0_+)+C_2 * u_{C2}(0_+)=0$

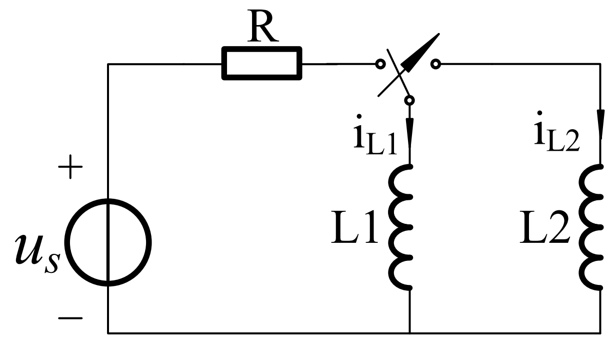
联立上两式：$u_{C1}(0_+)=\dfrac{C_2}{C_1+C_2} * u_s$　　$u_{C1}(0_+)=\dfrac{C_1}{C_1+C_2} * u_s$

若换路后立即稳定，则需：$\dfrac{R_1}{C_2}=\dfrac{R_2}{C_1}$

例4：换路前工作了很长时间，求开关动作后的i_{L1}与i_{L2}？

解：$t=0-$ 时：$$i_{L1}(0_-)=u_s/R$$

$$i_{L2}(0_-)=0$$



$t=0$时，S闭合，由KCL：

$$i_{L1}(0_+)=-i_{L2}(0_+)$$

两电感电流不独立

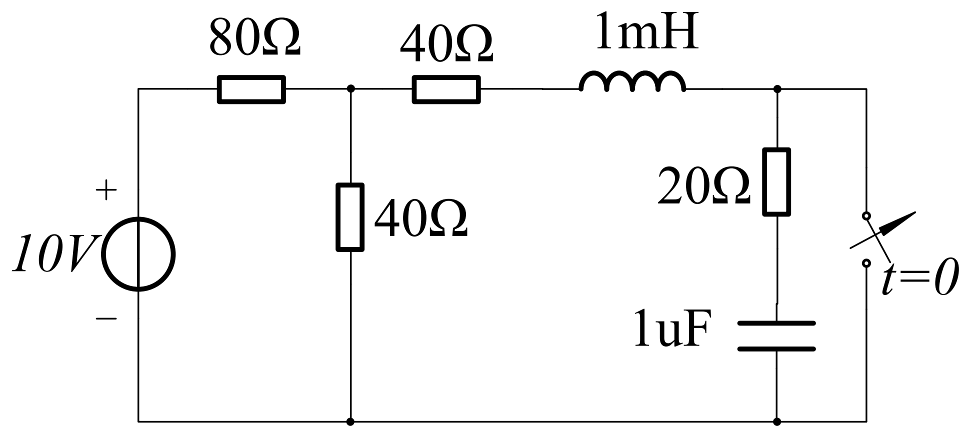
开关变化瞬间电感电流发生跳变，

根据磁通守恒：

$$L_1*i_{L1}(0_-)=\left(L_1+L_2\right)*i_{L1}(0_+)$$

解得：$$i_{L1}(0_+)=\frac{L_1}{L_1+L_2}*\frac{u_s}{R}$$

例5：换路前工作了很长时间，求开关打开后的电容电压和电感电流及各自的一阶导数？



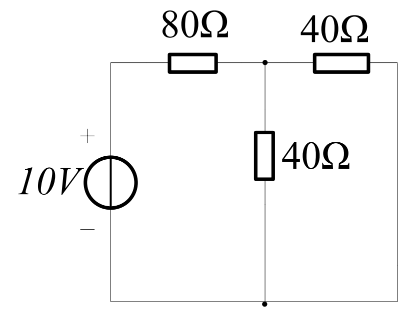
解： $t=0$- 时： $i_L(0_-)=0.05A$

$$u_C(0_-)=0V$$

$t=0$ 时，S 打开，由开关定理：

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0.05A$$

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0V$$



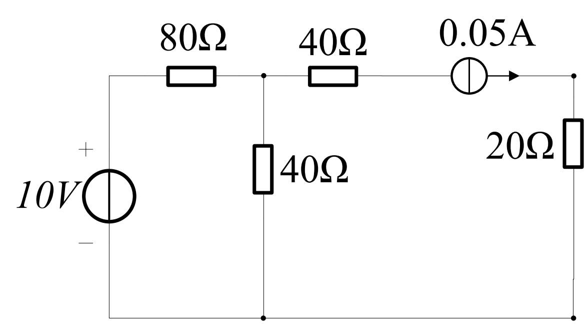
t=0-

根据电容u-i特性方程：

$$\frac{du_C(t)}{dt}\Big|_{t=0+}=\frac{1}{C}i_C(t)\Big|_{t=0+}=\frac{0.05}{10^{-6}}=5*10^4(V/S)$$

根据电感u-i特性方程：

$$\frac{di_L(t)}{dt}\Big|_{t=0+}=\frac{1}{L}u_L(t)\Big|_{t=0+}=\frac{-1}{10^{-3}}=-1*10^3(A/S)$$



t=0+

作业:

3-4-2

3-19

3-20 (2)、(4)

3-23