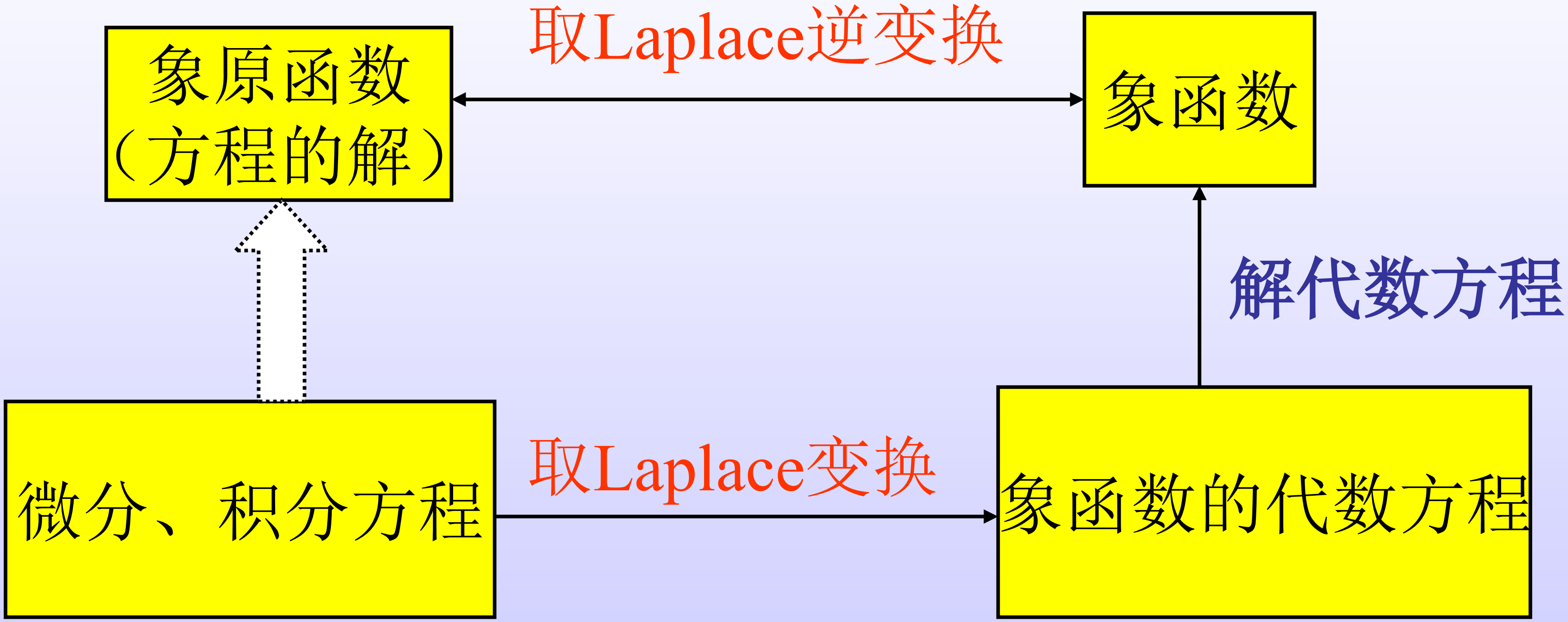
第五节 Laplace变换的应用

- 一、微分方程的Laplace变换解法
- 二、小节与思考

一、微分、积分方程的Laplace变换解法



例1 求方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-t}$ 满足初始条件

$$y\big|_{t=0} = 0, y'\big|_{t=0} = 1$$

的解.

解 设方程的解为 $y = y(t), t \geq 0$, 且设 $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$.

对方程的两边取 *Laplace* 变换, 并考虑到初始条件, 则

$$s^2 Y(s) - 1 + 2sY(s) - 3Y(s) = \frac{1}{s+1}.$$

这是含未知量 $Y(s)$ 的代数方程, 整理后解出 $Y(s)$, 得

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)},$$

这便是所求函数的$Laplace$变换,取它的逆变换便可以求得所求函数$y(t)$.

为求$Y(s)$的$Laplace$逆变换,将它化为部分分式形式

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}=\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{\frac{3}{8}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+3},$$

取逆变换,最后得

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{8}e^{t} - \frac{1}{8}e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{8}(3e^{t} - 2e^{-t} - e^{-3t}).$$

这便是所求微分方程满足初始条件的解.

例2 求方程$y''-2y'+y=0$满足边界条件

$$y(0)=0,\ y(l)=4$$

的解,其中l为已知常数.

解 设方程的解为$y=y(t), 0\le t\le l$,且设$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$(注意自变量t通常表示时间,如不会混淆，可记为$y=y(t)$).

对方程的两边取$Laplace$变换,并考虑到边界条件,则

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-2[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0$$

即

$$Y(s)=\frac{y'(0)}{(s-1)^2}.$$

取其逆变换，可得

$$y(t)=y'(0)te^t.$$

为了确定$y'(0)$,令$t=l$,代入上式,由第二个边界条件可得

$$4=y(l)=y'(0)le^l.$$

从而

$$y'(0)=\frac{4}{l}e^{-l},$$

于是

$$y(t)=\frac{4}{l}te^{t-l}.$$

常系数线性微分方程的边值问题可以先当作初值问题来求解而所得微分方程的解中含有未知的初值可由已知的边值而求得，从而最后确定微分方程满足边界条件的解.

对于某些变系数的微分方程,即方程中每一项为 $t^n y^{(m)}(t)$ 的形式也可以用 *Laplace* 变换的方法求解.由微分性质可知

$$\mathrm{L}\,[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathrm{L}\,[f(t)],$$

从而

$$\mathrm{L}\,[t^n f^{(m)}(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathrm{L}\,[f^{(m)}(t)].$$

例3 求方程$ty''+(1-2t)y'-2y=0$满足边界条件

$$y\big|_{t=0}=1,\ y'\big|_{t=0}=2$$

的解.

解 设$\mathcal{L}\,[y(t)]=Y(s)$.对方程的两边*Laplace*变换

$$\mathcal{L}\,[ty'']+\mathcal{L}\,[(1-2t)y']-\mathcal{L}\,[2y]=0,$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+sY(s)-y(0)$$

$$+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[sY(s)-y(0)]-2Y(s)=0.$$

由初始条件得

$$(2-s)Y'(s)-Y(s)=0.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y}=-\frac{\mathrm{d}s}{s-2}.$$

积分后得

$$\ln Y(s)=-\ln(s-2)+\ln C.$$

所以

$$Y(s)=\frac{C}{s-2}.$$

取逆变换可得$y(t)=Ce^{2t}$,将$t=0$代入,有

$$1=y(0)=C.$$

故方程满足初始条件的解为$y(t)=e^{2t}$.

例4 求积分方程$y(t)=h(t)+\int_0^t y(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau$的解,其中$f(t),h(t)$为定义在$[0,+\infty)$上的已知实值函数.

解设$\mathcal{L}[y(t)]=Y(s),\mathcal{L}[h(t)]=H(s),\mathcal{L}[f(t)]=F(s).$

对方程的两边取*Laplace*变换,由卷积定理得

$$\begin{aligned}Y(s)&=H(s)+\mathcal{L}[y(t)*f(t)]\\&=H(s)+Y(s)\cdot F(s).\end{aligned}$$

所以$Y(s)=\dfrac{H(s)}{1-F(s)}.$ 求Laplace逆变换.

例5 求方程组

$$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t \end{cases}$$

满足初始条件

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

的解.

解 设$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$,$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$.对方程组的两边取*Laplace*变换,并考虑到初始条件则

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} (s+1)Y(s)-sX(s)=\dfrac{-s+2}{s(s-1)^2}, \\ 2sY(s)-(s+1)X(s)=-\dfrac{1}{s^2(s-1)}. \end{cases}$$

解这个代数方程组，有

$$\begin{cases} Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}, \\ X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}. \end{cases}$$

对于$Y(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$,由第三节例2知

$$y(t)=1+te^t-e^t.$$

又$X(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2}$具有两个二级极点: $s=0, s=1.$

所以

$$x(t)=\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\frac{2s-1}{(s-1)^2}e^{st}]+\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\frac{2s-1}{s^2}e^{st}]$$

$$=\lim_{s\to 0}[te^{st}\frac{2s-1}{(s-1)^2}-\frac{2s}{(s-1)^3}e^{st}]$$

$$+\lim_{s\to 1}[te^{st}\frac{2s-1}{s^2}+\frac{2(1-s)}{s^3}e^{st}]$$

$$=-t+te^{t}.$$

或 $$X(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(s-1)^2}$$

故 $$\begin{cases} x(t)=-t+te^{t}, \\ y(t)=1-e^{t}+te^{t}. \end{cases}$$

四、小结

掌握利用Laplace变换求微分、积分方程，微分方程组的一般方法.

作业：P171　10