第二节 Laplace变换的性质

- 一、重要性质
- 二、小结与思考

一、线性性质

设α,β是常数,则

$$\mathcal{L}\,[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{L}\,[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}\,[f_2(t)].$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\,\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)].$$

这个性质表明函数线性组合的Laplace变换等于各函数Laplace变换的线性组合.

例1 求$\mathcal{L}[1]$,$\mathcal{L}[u(t)]$,$\mathcal{L}[\operatorname{sgn} t]$,$\mathcal{L}[\sin kt]$和$\mathcal{L}[\cos kt]$.

在上节例3中取$\alpha = 0$得

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\operatorname{sgn} t] = \frac{1}{s} (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

在例3中取$\alpha = \pm ik$,由$Laplace$变换的线性性质得

$$\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2},\ \mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}.$$

二、微分性质

设$\mathcal{L}\,[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathcal{L}\,[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

证　根据Laplace变换的定义,有

$$\mathcal{L}\,[f'(t)]=\int_0^{+\infty}f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

对右端积分利用分部积分法，可得

$$\int_0^{+\infty}f'(t)e^{-st}\mathrm{d}t=f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\mathcal{L}\,[f(t)]-f(0).\ (\mathrm{Re}\,s>c)$$

所以

$$\mathcal{L}\,[f'(t)]=sF(s)-f(0).$$

一个函数求导后取*Laplace*变换等于这个函数的*Laplace*变换乘以参变数s, 再减去函数的初值.

推论　设$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,则

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

一般地

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}f^{(k)}(0) \qquad \mathrm{Re}(s) > c$$

特别，当初值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{n}(0)$ 时，

$L[f'(t)]=sF(s)$ $\quad$ $L[f''(t)]=s^2F(s)$

$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$

此性质可以把微分方程转化为代数方程，对分析线性系统有重要作用.

例2 利用微分性质求函数 $f(t)=\cos kt$的Laplace变换.

解 由于$f(0)=1, f'(0)=0, f''(t)=-k^2\cos kt$,

则由微分性质有

$$\mathcal{L}[-k^2\cos kt]=\mathcal{L}[f''(t)]=s^2\mathcal{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0).$$

即 $$\mathcal{L}[-k^2\cos kt]=\mathcal{L}[f''(t)]=s^2\mathcal{L}[\cos kt]-s.$$

移项化简得

$$\mathcal{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}. \quad (\operatorname{Re} s>0)$$

例3 利用微分性质求函数 $f(t)=t^m$ 的Laplace变换, 其中m是正整数.

解　由于$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0,$

而$f^{(m)}(t)=m!$, 所以

$$\mathrm{L}\,[m!]=\mathrm{L}\,[f^{(m)}(t)]=s^m F(s)-s^{m-1}f(0)$$

$$-s^{m-2}f'(0)-\cdots f^{(m-1)}(0)=s^m F(s)$$

即　$\mathrm{L}\,[m!]=s^m\mathrm{L}\,[t^m]$

而　$\mathrm{L}\,[m!]=m!\mathrm{L}\,[1]=\dfrac{m!}{s}$

所以 $\mathrm{L}\,[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}\quad(\mathrm{Re}\,s>0)$

一般地 $\mathrm{L}\,[t^\alpha]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\quad(\mathrm{Re}\,s>0)$

此外,由Laplace变换的存在定理，还可以得到象函数的微分性质：

设$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,则

$$F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)], \quad \mathrm{Re}(s) > c.$$

一般地,有

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)], \quad \mathrm{Re}(s) > c.$$

例4 求函数$f(t)=t\sin kt$的$Laplace$变换.

解 因为$\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,根据象函数的微分性质有

$$\mathscr{L}[t\sin kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right]=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2},$$

$$(\mathrm{Re}(s)>0).$$

同理可得

$$\mathscr{L}[t\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right]=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2},$$

$$(\mathrm{Re}(s)>0).$$

例5 求函数$f(t)=t^2\cos^2 t$的$Laplace$变换.

解$\mathcal{L}[t^2\cos^2 t]=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}[t^2(1+\cos 2t)]$

$$=\frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2\cdot 1]+\frac{1}{2}\mathcal{L}[t^2\cdot\cos 2t]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 s}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}\ (\mathrm{Re}(s)>0).$$

3.积分性质

设$\mathrm{L}\,[f(t)] = F(s)$,则

$$\mathrm{L}\,\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

证 设$h(t) = \int_0^t f(t)\mathrm{d}t$,则有

$$h'(t) = f(t)\text{且}h(0) = 0.$$

由上述微分性质有

$$\mathrm{L}\,[h'(t)] = s\mathrm{L}\,[h(t)] - h(0) = s\mathrm{L}\,[h(t)].$$

即

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

这个性质表明一个函数积分后取Laplace变换等于这个函数的Laplace变换除以复参数*s*.

重复应用上式得

$$\mathcal{L}\left\{\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\mathrm{d}t\right\}=\frac{1}{s^n}F(s).$$

象函数的积分性质:

若$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_{s}^{\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

或

$$f(t)=t\mathcal{L}^{-1}\left[\int_{s}^{\infty}F(s)\mathrm{d}s\right].$$

一般地，有

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^{n}}\right]=\underbrace{\int_{s}^{\infty}\mathrm{d}s\int_{s}^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_{s}^{\infty}}_{n\text{次}}F(s)\mathrm{d}s.$$

例6 求函数$f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$的$Laplace$变换.

解 因为L $[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,根据$Laplace$变换的积分性质有

$$\text{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}-\arctan s.$$

即$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-\arctan s$,特别地，令$s=0$

也可得到重要积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

从上例中可以得到一种启示,即在Laplace及其一些性质中取s为某些特定值，可以求得一些函数的广义积分.由Laplace变换的定义、象函数的微分、积分性质有

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = F(s), \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = F(0)$$

$$\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\mathrm{d}t = -F'(s), \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -F'(0).$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s, \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} F(s)\mathrm{d}s.$$

例7 计算下列积分

$$(1)\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos 2t\mathrm{d}t; \quad (2)\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t}\mathrm{d}t.$$

解 (1) 因为$\mathcal{L}[\cos 2t] = \dfrac{s}{s^2+4}$，有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+4}\Big|_{s=3} = \frac{3}{13}.$$

(2) 由象函数的积分性质

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[1-\cos t]\mathrm{d}s$$

$$\int_s^{\infty}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}]\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+1}\Big|_s^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}.$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2},$$

令$s=1$得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln 2.$$

4.相似性质

设$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,则对任一常数$a>0$有

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

证　根据Laplace变换的定义,有

$$\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

5.位移性质

设$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)\quad(\mathrm{Re}(s-\alpha)>c).$$

证　根据Laplace变换的定义,有

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{\alpha t}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t$$

$$=F(s-\alpha)\quad(\mathrm{Re}(s-\alpha)>c).$$

这个性质表明一个象原函数乘以指数函数$e^{\alpha t}$的*Laplace*变换等于其象函数作位移α.

例8 求函数$e^{\alpha t}t^m, e^{-\alpha t}\sin kt$的*Laplace*变换.

解 因为$\mathcal{L}\,[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}$,利用位移性质，有

$$\mathcal{L}\,[e^{\alpha t}t^m]=\frac{m!}{(s-\alpha)^{m+1}}\quad \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\alpha).$$

因为$\mathcal{L}\,[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,利用位移性质，有

$$\mathcal{L}\,[e^{-\alpha t}\sin kt]=\frac{k}{(s+\alpha)^2+k^2}\ \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\alpha).$$

6.延迟性质

设$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$,若$t<0$时，$f(t)=0$,则对于任一非负实常数τ，有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

或

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]&=e^{-s\tau}F(s)\\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]&=f(t-\tau)u(t-\tau)\end{aligned}\right\}$$

证 根据Laplace变换的定义,有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

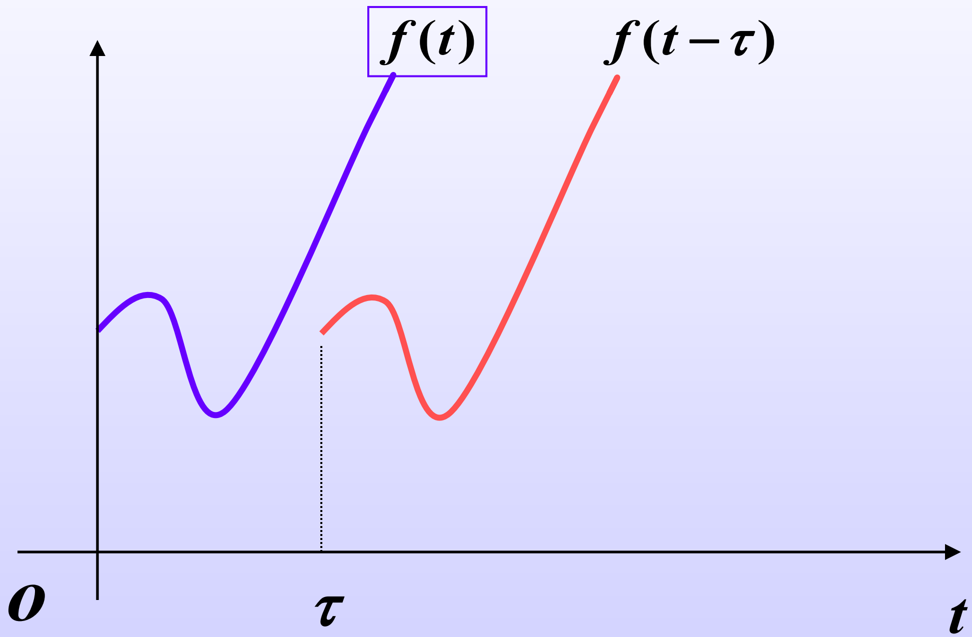
令$t-\tau=u$，则有

$$\mathrm{L}\,[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-s(u+\tau)}\mathrm{d}u$$

$$=e^{-s\tau}\int_{0}^{+\infty} f(u)e^{-su}\mathrm{d}u \quad =e^{-s\tau}F(s).$$

函数$f(t-\tau)$与$f(t)$相比，$f(t)$是从$t=0$开始有非零数值.而$f(t-\tau)$是从$t=\tau$开始才有非零数值,即延迟了一个时间τ.

从图象来看, $f(t-\tau)$的图象是由$f(t)$的图象沿t轴向右平移距离τ而得.



例8 求$u(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau \\ 1, & t>\tau\end{cases}$的*Laplace*变换.

解　因为$\mathcal{L}\,[u(t)]=\dfrac{1}{s}$,利用延迟性质，有

$$\mathcal{L}\,[u(t-\tau)]=\frac{1}{s}e^{-s\tau}.$$

例9 计算下列函数的*Laplace*变换.

(1) $u(t-\pi)\cos(t-\pi)$; (2) $\cos(t-\pi)$.

解 (1) 因为$\mathcal{L}[\cos t]=\dfrac{s}{s^2+1}$, 利用延迟性质，有

$$\mathcal{L}[u(t-\pi)\cos(t-\pi)]=\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

$$(2)\ \mathcal{L}[\cos(t-\pi)]=\mathcal{L}[-\cos t]=\frac{-s}{s^2+1}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

练习：

(1) 设$f(t)=e^{-t}u(t-1)$，则$\mathcal{L}[f(t)]=$(B)

$(A)\ \dfrac{e^{-(s-1)}}{s-1}$ $(B)\ \dfrac{e^{-(s+1)}}{s+1}$ $(C)\ \dfrac{e^{-s}}{s-1}$ $(D)\ \dfrac{e^{-s}}{s+1}$

例11 计算函数$u(kt+\alpha)\sin(kt+\alpha)$的$Laplace$变换，其中$k>0, \alpha<0$.

解 因为$u(kt+\alpha)=u[k(t+\frac{\alpha}{k})]=u(t+\frac{\alpha}{k})$

利用延迟性质，有

$$\mathcal{L}[u(kt+\alpha)\sin(kt+\alpha)]=\mathcal{L}[u(t+\frac{\alpha}{k})\sin k(t+\frac{\alpha}{k})]$$

$$=e^{\frac{\alpha}{k}s}\mathcal{L}[\sin kt]=e^{\frac{\alpha}{k}s}\frac{k}{s^2+k^2}.$$

四、小结与思考

这节课我们主要学习了用Laplace变换的性质,要熟练掌握用性质求Laplace变换及其逆变换的方法.

思考题

求函数Laplace变换有哪些方法?

思考题答案

1.用Laplace变换的定义(直接法).

2.用Laplace变换的性质(间接法).

间接法要求掌握*Laplace*变换的几个重要性质以及一些常见函数的*Laplace*变换.*Laplace*变换的性质各有特点,例如函数若能写成$t^n f(t)$或$e^{\alpha t} f(t)$的形式,那么求*Laplace*变换时就要考虑用微分性质或延迟性质.

作业：P170 3(2)(4)(5)(6)(7)，4, 5,

放映结束，按Esc退出.