第一节　Laplace变换的概念

- 一、问题的提出
- 二、Laplace变换的存在定理
- 三、小结与思考

一、问题的提出

1. 傅里叶变换的局限性

2.对函数$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}\ (\beta>0)$取$Fourier$变换,可得

$$G_\beta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+i\omega)t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

其中

$$s=\beta+i\omega,\quad f(t)=\varphi(t)u(t)$$

若再设$F(s)=G_\beta(\frac{s-\beta}{i})$,则得

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

定义　设函数$f(t)$当$t\geq 0$时有意义,而且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad (s\text{是一个复参数})$$

在s的某一域内收敛,则由此积分所确定的函数可写成

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

$\boxed{Laplace\text{变换式},\text{记为}F(s)=\mathcal{L}[f(t)].}$

$F(s)$称为$f(t)$的$Laplace$变换(或称为象函数).

若$F(s)$是$f(t)$的$Laplace$变换,则称$f(t)$为$F(s)$的$Laplace$逆变换,记为$f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$.

例1 求函数

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi;\\ 0, & t\le 0\text{或}t\ge\pi.\end{cases}$$

的*Laplace*变换.

解

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin t e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-\cos t-s\sin t}{1+s^2}e^{-st}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

例2 求单位阶跃函数$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t>0\end{cases}$, 符号函数$\operatorname{sgn} t$

以及$f(t)=1$的*Laplace*变换.

解 根据*Laplace*变换的定义,有

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

这个积分在$\mathrm{Re}(s)>0$时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},$$

所以$\mathcal{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$

同理

$$\mathcal{L}\,[\mathrm{sgn}(t)] = \int_0^{+\infty} (\mathrm{sgn}\, t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s} \ (\mathrm{Re}(s) > 0);$$

$$\mathcal{L}\,[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{s} \ (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

例3 求指数函数 $f(t)=e^{\alpha t}$ (α为复数)的*Laplace*变换.

解 由*Laplace*变换定义，有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t,$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\alpha)$ 时收敛,而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-\alpha},$$

所以 $\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{s-\alpha}\quad(\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\alpha)).$

例3 求正弦函数$f(t)=\sin \alpha t$(α为复数)的*Laplace*变换.

解　　由Laplace变换的定义,有

$$\mathcal{L}[\sin \alpha t]=\int_0^{+\infty} \sin \alpha t e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(s-i\alpha)t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-(s+i\alpha)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \quad (\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Im}(\alpha)|).$$

同理,$\mathcal{L}[\cos \alpha t]=\dfrac{s}{s^2+\alpha^2} \quad (\mathrm{Re}(s)>|\mathrm{Im}(\alpha)|).$

2.Laplace变换的存在定理

*Laplace*变换的存在定理　若$f(t)$满足下列条件:

1 在$t \geq 0$的任一有效区间上分段连续;

2 当$t \to +\infty$时, $f(t)$的增长速度不超过某一指数函数,亦即存在常数$M \geq 0$及$c \geq 0$,使得

$$|f(t)| \leq Me^{ct}, 0 \leq t < +\infty$$

成立(满足此条件的函数,称它的增大是不超过指数级的,c为它的增长指数).

则$f(t)$的$Laplace$变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

在$\mathrm{Re}(s)>c$上一定存在,右端的积分在$\mathrm{Re}(s)\geq c_1>c$上绝对收敛而且一致收敛,并且在$\mathrm{Re}(s)>c$的半平面内,$F(s)$为解析函数.

证明略.

定理说明：

1.定理的条件是充分的.

2.物理学和工程技术中常见的函数大都能满足这两个条件，Laplace变换的应用更加广泛.

3. $f(t)$在0处包含了脉冲函数时,定义应为

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,$$

为方便起见,仍写为原来的形式

例4 求单位脉冲函数$\delta(t)$的*Laplace*变换.

解 根据上面的讨论,由*Laplace*变换的定义,

并利用定义$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$,有

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= e^{-st}\Big|_{t=0} = 1.$$

同理, $\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n.$

例5 求函数$f(t)=\cos t\delta(t)-\sin tu(t)$的*Laplace*变换.

解 由*Laplace*变换的定义,有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}[\cos t\delta(t)-\sin tu(t)]e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}.$$

一般地,以T为周期的函数$f(t)$,即$f(t+T)=f(t)$
$(t>0)$

$$\mathrm{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令$t=\tau+kT$,则

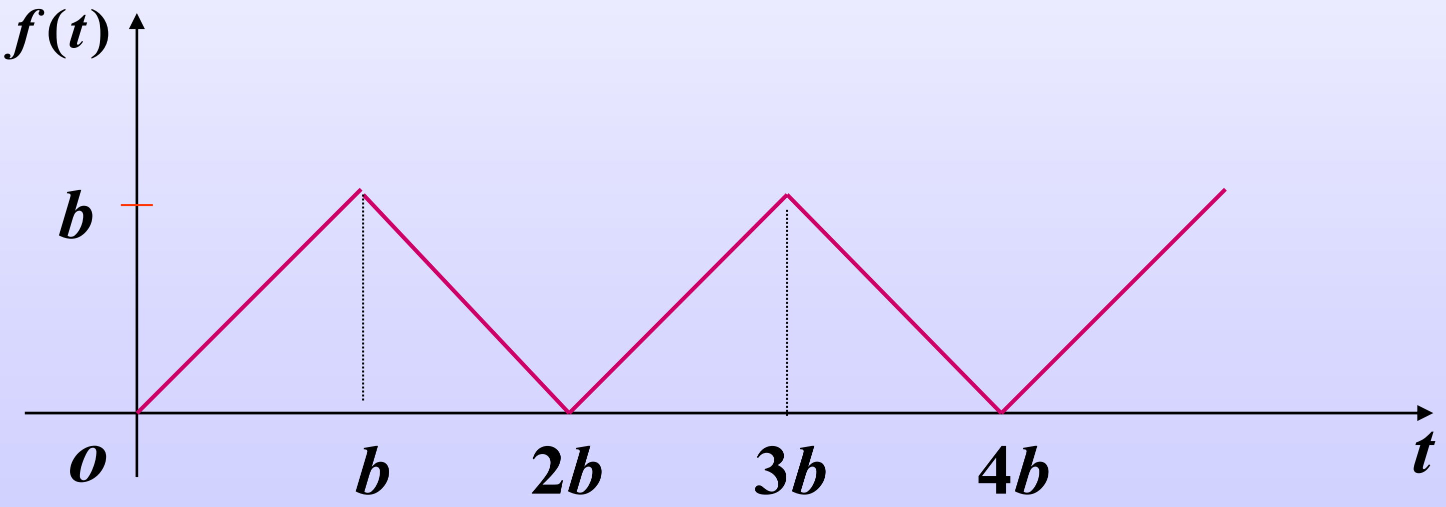
$$\mathrm{L}[f(t)]=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kTs}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

例6 求周期性三角波 $f(t)=\begin{cases} t, & 0 \le t < b; \\ 2b-t, & b \le t < 2b, \end{cases}$

且 $f(t+2b)=f(t)$ 的 *Laplace* 变换.

解



由Laplace变换的定义

$$\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{2b}^{4b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_{4b}^{6b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$+\cdots+\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t.$$

令$t=\tau+2kb$,则

$$\int_{2kb}^{2(k+1)b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{2b} f(\tau+2kb)e^{-s(\tau+2kb)}\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-2kbs}\int_0^{2b} f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

而

$$\int_0^{2b} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{b} te^{-st}\mathrm{d}t + \int_b^{2b}(2b-t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{s^2}(1-e^{-bs})^2.$$

所以

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs} \int_0^{2b} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2b} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs} \right)$$

由于$\mathrm{Re}(s) > 0$时,

$$|e^{-2bs}| = e^{-\beta 2b} < 1,$$

所以$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kbs} = \frac{1}{1 - e^{-2bs}},$

从而

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2bs}}\int_0^{2b} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2bs}}(1-e^{-bs})^2\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{(1-e^{-bs})^2}{(1-e^{-bs})(1+e^{-bs})}$$

$$= \frac{1}{s^2}\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}.$$

周期函数的Laplace变换公式

一般地,以T为周期的函数$f(t)$,即$f(t+T)=f(t)$ $(t>0)$,当$f(t)$在一个周期上是分段连续时,则有

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

成立.

四、小结与思考

本课我们学习了Laplace变换的定义、存在定理以及一些常见函数的Laplace变换. 应注意Laplace变换和Fourier变换区别. 本课中重点掌握计算Laplace变换的一般方法.

思考题

Laplace变换和Fourier变换之间关系？

思考题答案

$Laplace$变换是对$t \geq 0$时有定义的$f(t)$来讨论的，而$Fourier$变换则要求函数在$(-\infty,+\infty)$上有定义.

对$f(t)(t \geq 0)$的$Laplace$变换，实际上就是$f(t)u(t)e^{-\beta t}$的$Fourier$变换.

作业：P170 1