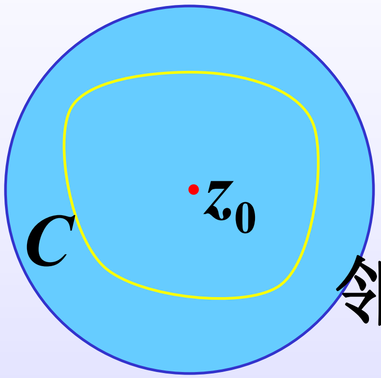
第一节　留 数

- 一、留数的引入
- 二、利用留数求积分
- 三、在无穷远点的留数
- 四、小结与思考

一、留数的引入

设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点;



z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$

邻域内包含z_0 的任一条正向简单闭曲线C

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗级数:

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

$$=\cdots+\underbrace{c_{-n}\oint_C (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z}_{0\ (\text{高阶导数公式})}+\cdots+c_{-1}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z}_{2\pi i}+\cdots$$

$$+\underbrace{\oint_C c_0\mathrm{d}z+\oint_C c_1(z-z_0)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_C c_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z+\cdots}_{0\ (\text{柯西定理})}$$

$=2\pi i c_{-1}$　　洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

即 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \boxed{\mathrm{Res}[f(z), z_0]}$

$f(z)$在z_0的留数

定义 如果 z_0为函数$f(z)$的一个孤立奇点，则沿着z_0的某个去心邻域$0 < |z - z_0| < R$内包含 z_0的任意一条简单闭曲线 C 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 的值除以 $2\pi i$ 后所得的数称为 $f(z)$在z_0的留数.

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$ (即$f(z)$在z_0为中心的圆环域内的洛朗级数中负幂项$c_{-1}(z - z_0)^{-1}$的系数.)

二、利用留数求积分

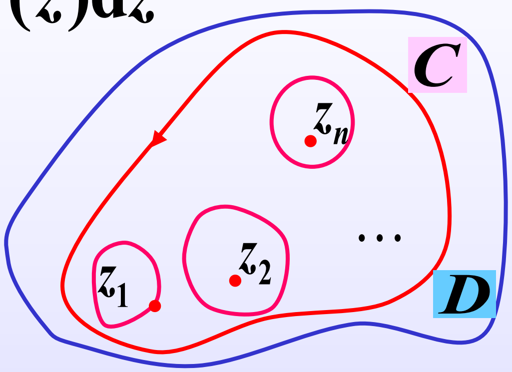
1.留数定理 函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析, C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线, 那末

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

说明: 留数定理将沿封闭曲线C积分转化为求被积函数在C内各孤立奇点处的留数.

证 如图

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$



两边同时除以$2\pi i$且

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f(z), z_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$ 即可得.

[证毕]

2.留数的计算方法

(1) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$

(2) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

定理 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 n 级极点， 那末

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)].$$

推论1 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 那末

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

推论2 设 $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在 z_0 都解析,

如果 $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, 那末 z_0 为

$f(z)$ 的一级极点, 且有 $\text{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

例1 求函数

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

在 $z=\pm1$ 处的留数.

解 由于$z=1$是分母的一级零点，且分子在 $z=1$ 时不为零，因此$z=1$是 $f(z)$ 的一级极点．则

$$\operatorname{Res}(f(z),1)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}=\frac{1}{4}.$$

由于$z=-1$是分母的二级零点，且分子在 $z=-1$ 时不为零， 因此$z=-1$是$f(z)$ 的二级极点．则

$$\operatorname{Res}(f(z),-1)=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}]$$

$$=\lim_{z\to-1}\frac{-1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

例2 求 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 的留数.

分析 $P(0)=P'(0)=P''(0)=0, \quad P'''(0)\neq 0.$

$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点

所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的三级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right].$$

计算较麻烦.

解 如果利用洛朗展开式求c_{-1}较方便:

$$\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{z^{-3}}{3!}-\frac{z^{-1}}{5!}+\cdots,$$

$$\therefore\ \operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{5!}.$$

说明: 1. 在实际计算中应灵活运用计算规则.

如 z_0 为 m 级极点，当 m 较大而导数又难以计算时，可直接展开洛朗级数求 c_{-1} 来计算留数.

2. 在应用极点处留数计算公式时，一般不要将 n 取得比实际的级数高. 但有时把 n 取得比实际的级数高反而使计算方便. 如上例取 $n=6$:

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(6-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}.$$

练习 求 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^5}$ 在 $z=0$ 的留数.

答案： $z=0$是 $f(z)$ 的四级极点.

所以 $\mathrm{Res}[f(z),0]=c_{-1}=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$.

或

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(5-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{5-1}}{\mathrm{d}z^{5-1}}[z^5\frac{e^z-1}{z^5}]$$

例3 求函数 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的留数.

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，且

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$=(1+z+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n}}+\cdots)$$

$$0<|z|<\infty$$

相乘后c_{-1}为

$$c_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!n!}+\cdots$$

于是 $\operatorname{Res}(f(z),0)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!n!}+\cdots$

例4　计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\mathrm{d}z.$

解　函数 $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ 在$|z|<2$内只有一个二级极点$z=0$,

由于 $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{e^z}{z^2} - \frac{e^z}{z^2+9}\right)$, 所以

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}\mathrm{d}z = \frac{1}{9}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2}\mathrm{d}z - \frac{1}{9}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+9}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{9} 2\pi \mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2},0\right)-0$$

$$= \frac{2}{9}\pi \mathrm{i}$$

三、在无穷远点的留数

1.定义 设函数 $f(z)$在圆环域 $R<|z|<+\infty$内解析，

C为圆环域内绕原点的任何一条负向简单闭曲线，

那末积分$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-1}} f(z)\mathrm{d}z$的值与$C$无关，则称此定值

为 $f(z)$ 在∞点的留数，

记作 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-}} f(z)\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$

注意积分路线取顺时针方向

$=-c_{-1}$

说明 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}$

例5 求 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$ 在 $z=\infty$ 处的留数.

解 由于

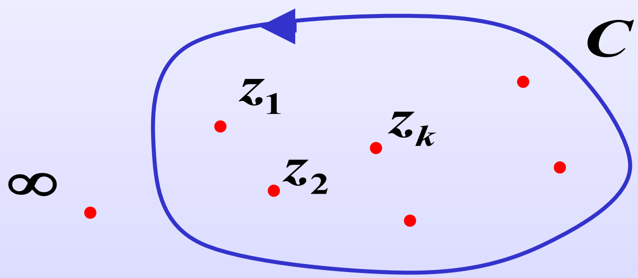
$$f(z)=\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots$$

则 $\operatorname{Res}(f(z),\infty)=-\dfrac{1}{2}.$

2.定理

如果函数 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那末 $f(z)$ 在所有各奇点 (包括 ∞点) 的留数的总和必等于零.

证



(C 绕原点的并将 z_k 包含在内部的正向简单闭曲线)

由留数定义有:

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^{-1}}f(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

[证毕]

说明: 由定理得

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = -\mathrm{Res}[f(z), \infty],$$

$$\therefore \quad \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] \quad \text{(留数定理)}$$

$$= -2\pi i \mathrm{Res}[f(z), \infty].$$

计算积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z \longrightarrow$ 计算无穷远点的留数.

优点: 使计算积分进一步得到简化.

(避免了计算诸有限点处的留数)

例6 计算积分

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} \mathrm{d}z$$

解 被积函数 $f(z)$ 在整个复平面上有7个孤立奇点：

$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}i} \ (k=0,1,2,3) \quad z_4 = i,\ z_5 = -i,\ z_6 = \infty.$$

前6个奇点均在积分区域内，由留数定理

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3} \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{n=0}^{5} \mathrm{Re}\, s(f(z), z_k)$$

可转化为$f(z)$在∞点的留数，由于

$$f(z)=\frac{1}{z(1+\frac{1}{z^2})^2(1+\frac{2}{z^4})^3}$$

$$=\frac{1}{z}(1-\frac{2}{z^2}+\cdots)^2(1-\frac{6}{z^4}+\cdots)^3$$

由$\mathrm{Res}\,(f(z),\infty)=-1$, 所以

$$\int_{|z|=4}\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{n=0}^{5}\mathrm{Re}\,s(f(z),z_k)$$

$$=2\pi i(-\mathrm{Re}\,s(f(z),\infty))$$

$$=2\pi i.$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

四、小结与思考

本节我们学习了留数的概念、计算以及留数定理. 应重点掌握计算留数的一般方法,尤其是极点处留数的求法, 并会应用留数定理计算闭路复积分.

思考题

计算 $\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z,\ C:|z|=2$正向.

思考题答案 $2\pi i \sin^2 1.$

作业：P97 1, 2

放映结束，按Esc退出.