数学中常常运用某种变换的手段把复杂问题转化为比较简单的问题. 所谓积分变换,就是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换,一般是含有参变量α的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t.$$

其中$K(t,\alpha)$是一个确定的二元函数,称为积分变换的核.

选取不同的积分域和变换核，就得到不同的积分变换.

我们只学习最常用的两种积分变换: *Fourier*变换和 *Laplace*变换.

定义 设函数$f(t)$ 在实轴的任何有限区间上都可积.若极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)dt$ 存在,则称在主值意义下 $f(t)$在区间 $(-\infty,+\infty)$上的广义积分收敛,

记为

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(t)dt$$

例 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta+i\omega)|t|}dt \quad (\beta>0, \omega$为实常数）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta+i\omega)|t|}dt = 2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-(\beta+i\omega)t}dt$$

$$= -2\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)t}\Big|_0^R$$

$$= \frac{2}{\beta+i\omega}$$

第一节　Fourier变换

- 一、Fourier级数
- 二、Fourier变换
- 三、小结与思考

一、Fourier级数

通过数学分析的学习知道，

一个以T为周期的函数$f_T(t)$，如果在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$

上满足*Dirichlet*条件:(即函数在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上满足

1.连续或只有有限个间断点;2.只有有限个极值点)，

那么在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上就可以展成*Fourier*级数.

在$f_T(t)$的连续点处,级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\qquad a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots),$$

将Fourier级数的三角形式转换为复指数形式.

利用欧拉公式（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$),

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},$$

此时Fourier级数可以表示为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega t}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega t}]$$

令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{d}t,$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t-i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)[\cos n\omega t - i\sin n\omega t]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{in\omega t}\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

c_0, c_n和c_{-n}可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则Fourier级数可以写为

Fourier级数的复指数形式

$$f_T(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[c_ne^{in\omega t}+c_{-n}e^{-in\omega t}]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{in\omega t}.$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

令 $A_0 = a_0$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 则

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \theta_n)$$

A_n称为振幅.

在复指数形式中，第 n 次谐波为

$$c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}$$

其中

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

则

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

所以以T为周期的非正弦周期函数$f_T(t)$的第n次谐波的振幅为

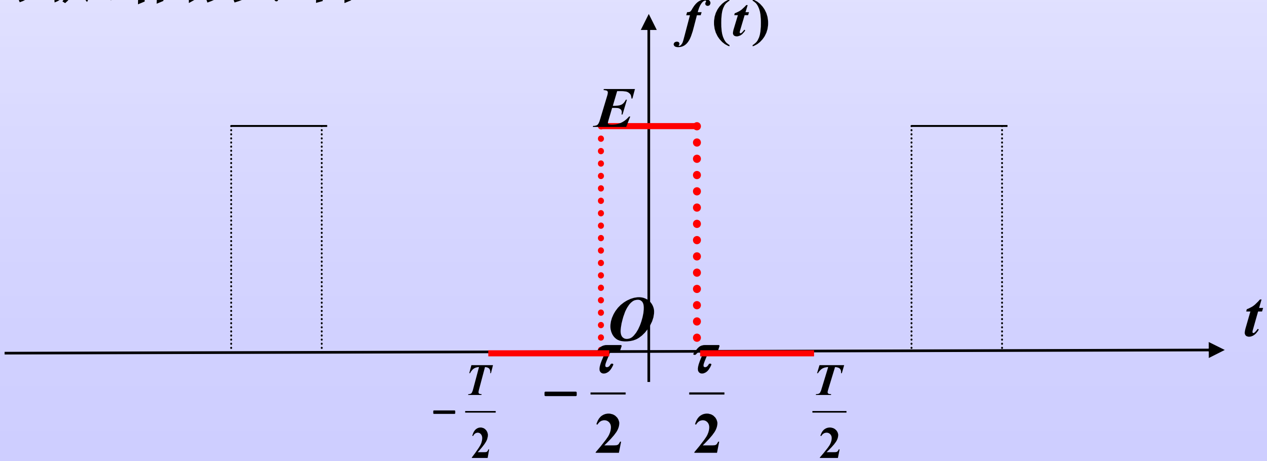
$$A_n = 2|c_n| \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

称为周期函数$f_T(t)$的振幅频谱(离散频谱).

例1 求以T为周期的函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\dfrac{T}{2}\le t<-\dfrac{\tau}{2}\\ E, & -\dfrac{\tau}{2}\le t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & \dfrac{\tau}{2}\le t\le\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

的振幅频谱.



解

当$n=0$时，$c_0=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\mathrm{d}t=\dfrac{E\tau}{T}$,

由$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$知，当$n\neq 0$时，

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-in\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{E}{iTn\omega}e^{-in\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}.$$

所以$f_T(t)$的*Fourier*级数的复指数形式为

$$f_T(t)=\frac{E\tau}{T}+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{+\infty}\frac{E}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{in\omega t}.$$

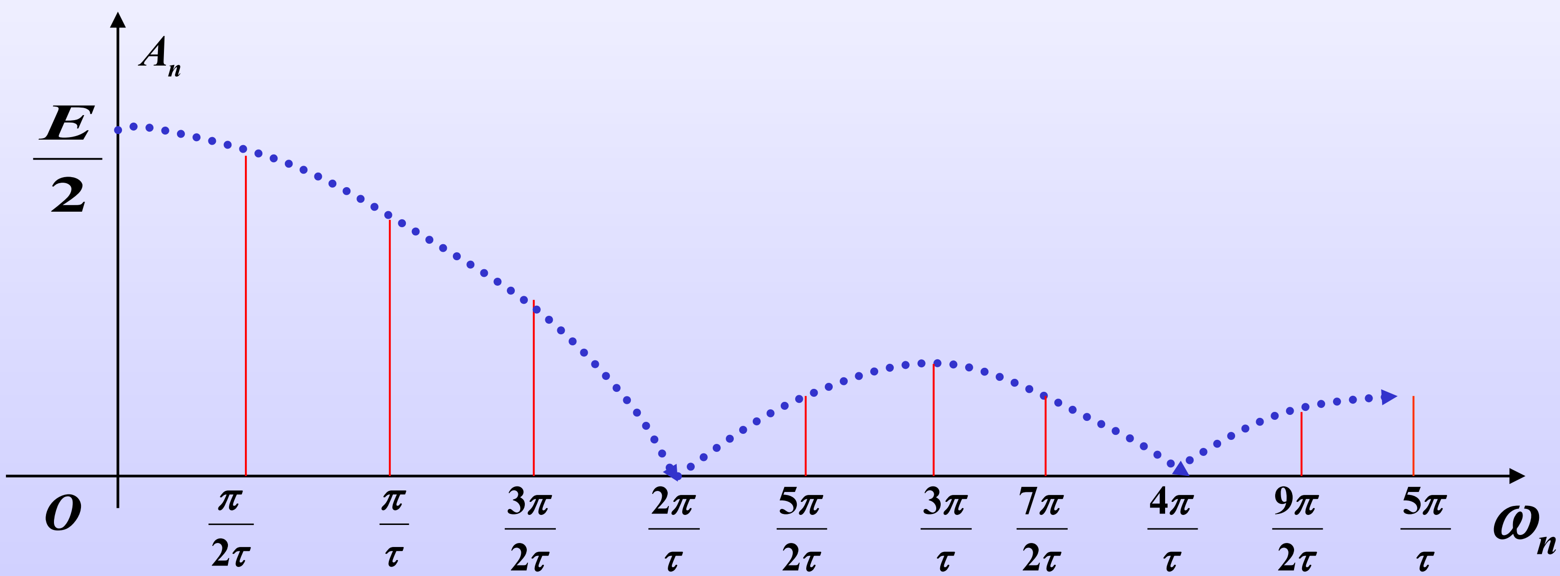
它的频谱为

$$A_0=2|c_0|=\frac{2E\tau}{T},$$

$$A_n=2|c_n|=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi\tau}{T}\right|(n=1,2,\cdots).$$

如$T=4\tau$时,有

$$A_0=\frac{E}{2},A_n=\frac{2E}{n\pi}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|,\omega_n=n\omega=\frac{n\pi}{2\tau}\ (n=1,2,\cdots).$$



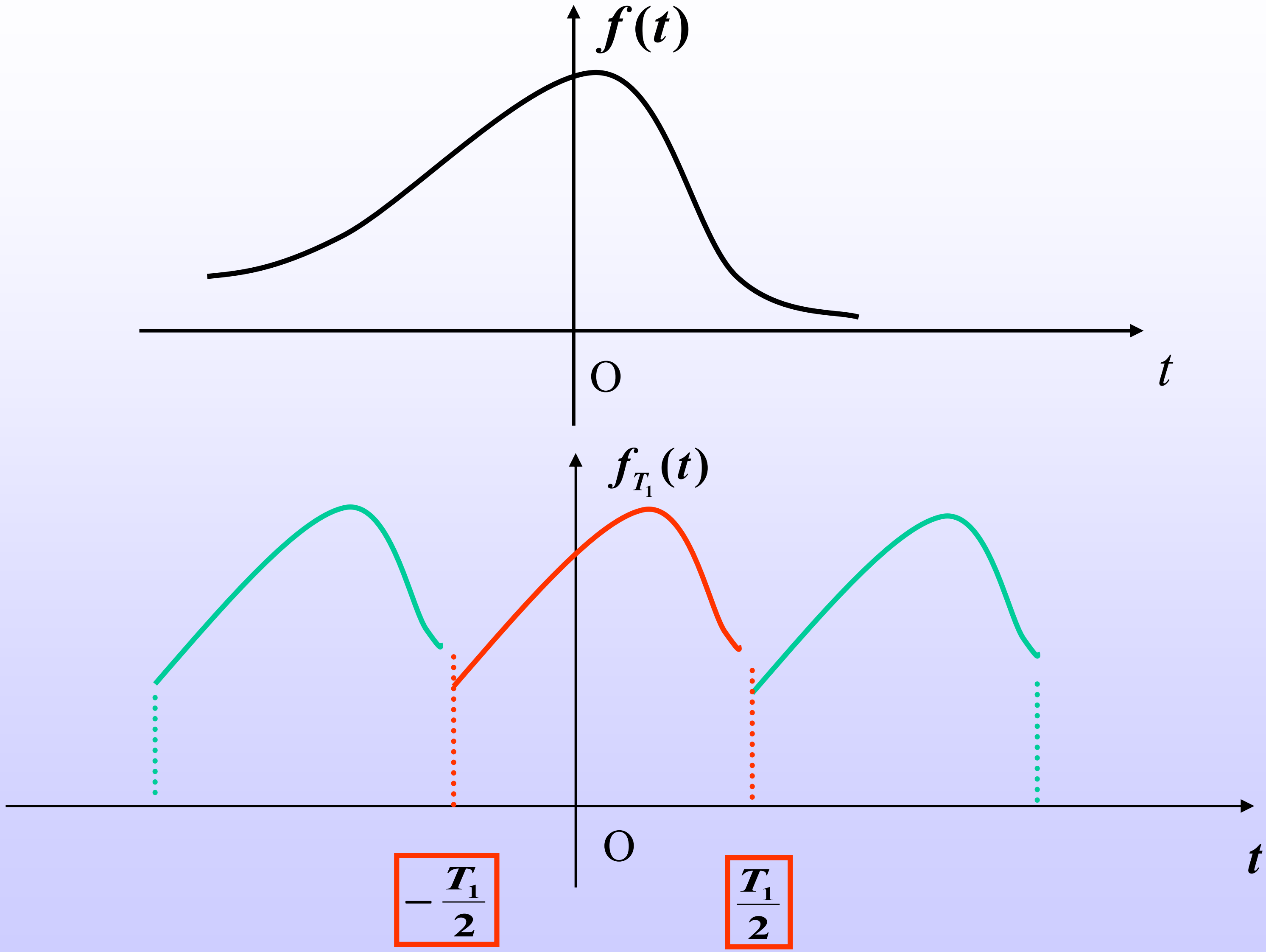
二、傅氏变换

下面讨论非周期函数的展开问题.

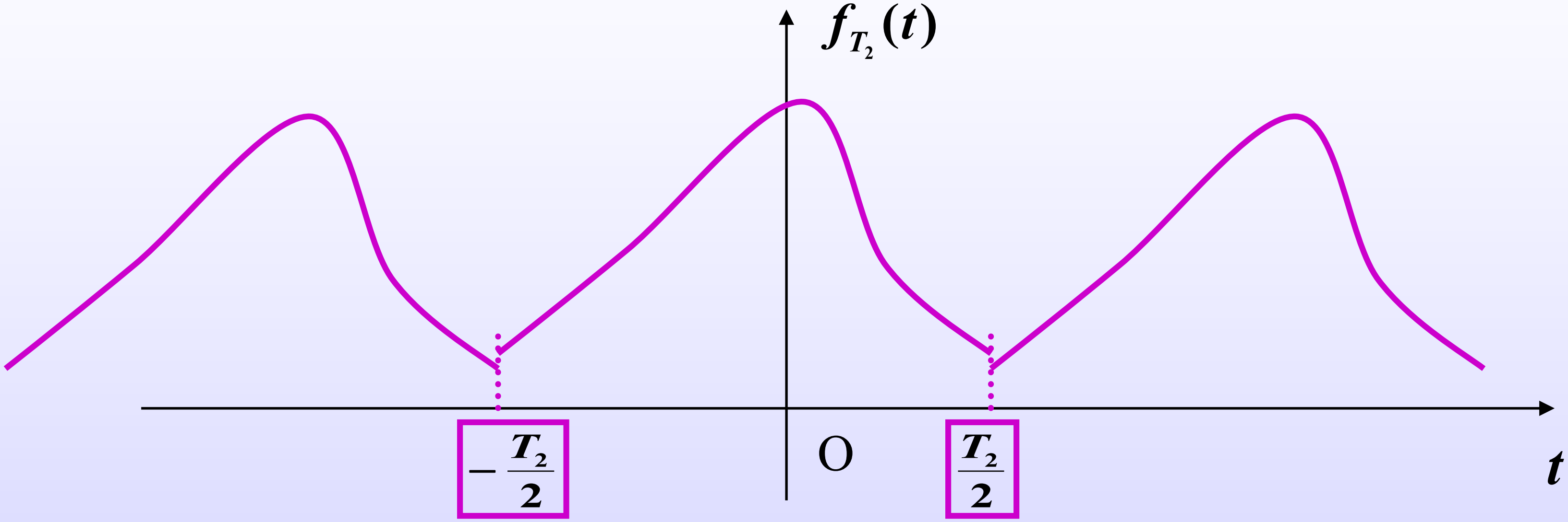
任何一个非周期函数$f(t)$都可以看成由某个周期函数$f_T(t)$当$T\to+\infty$时转化而来.

为了说明这一点，作周期为T的函数$f_T(t)$，

在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$之内等于$f(t)$，而在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$之外按周期$T$延拓到整个数轴上.



机动 目录 上页 下页 返回 结束


$f_{T_2}(t)$
$-\frac{T_2}{2}$
O
$\frac{T_2}{2}$
t

显然，T越大，$f_T(t)$与$f(t)$相等的范围也越大，

这表明当$T\to+\infty$时，周期函数$f_T(t)$便可转化为$f(t)$，

即有

$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=f(t).$$

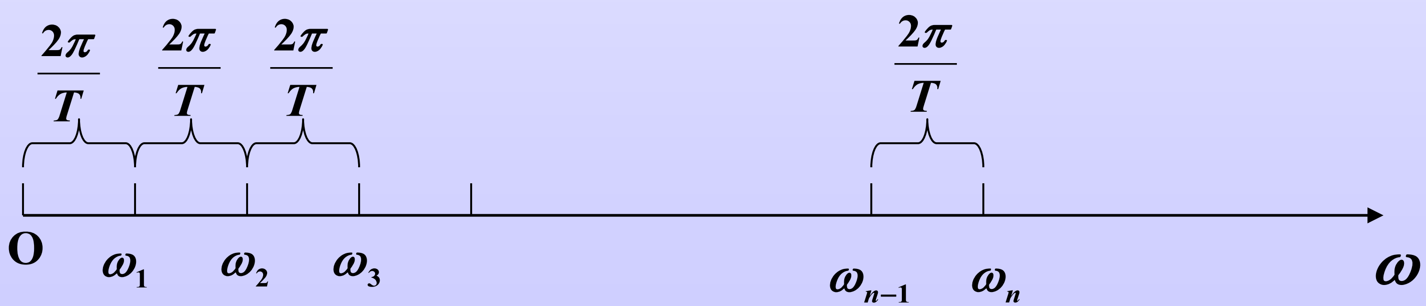
这样，在$f_T(t)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega_n t}$中，

令$T\to+\infty$时，所得结果就可以看成是$f(t)$的展开式，

即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega_n t}$$

当n取一切整数时，所对应的点ω_n便均匀地分布到整个数轴上.



将相邻两点间距离记为$\Delta\omega_n$,即

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T},\text{或}T=\frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

则

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}f_T(t)$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega_n t}$$

$$= \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-i\omega_n \tau} \mathrm{d}\tau \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n .$$

这个极限，在下面定理条件下，即为傅里叶积分公式.

Fourier积分定理

若$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足下列条件：

1.在任一有限区间上满足*Dirichlet*条件;

2.$f(t)$在无限区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积(即积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$收敛),

Fourier积分公式

那么在连续点处

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

成立.

在间断点处，左端的$f(t)$应以

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$来代替.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$f(t)$的Fourier变换式，记为$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$F(\omega)$的Fourier逆变换式，记为$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

在频谱分析中，称$F(\omega)$为$f(t)$的频谱函数(连续频谱).

频谱函数的模 $|F(\omega)|$称为 $f(t)$ 的振幅频谱.

例2 求函数 $f(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的傅立叶变换.

解 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-1}^{0}+\Big[\frac{ite^{-i\omega t}}{\omega}\Big|_{-1}^{0}+\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\Big|_{-1}^{0}\Big]$$

$$+\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{0}^{1}-\Big[\frac{ite^{-i\omega t}}{\omega}\Big|_{0}^{1}+\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}\Big|_{0}^{1}\Big]$$

$$=\frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega).$$

例3 求函数$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\delta\\ 0, & 其他\end{cases}$的$Fourier$积分表达式,

其中$\delta>0$.

解 由积分公式，在连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\delta}^{\delta}(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{\delta}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\delta\omega}{\omega}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\delta\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm\delta)$$

进而可以得到一些广义积分的结果.

事实上，根据上述的结果，我们可以写为

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\delta\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega \quad (t\neq\pm\delta)$$

$$=\begin{cases} f(t), & t\neq\pm\delta \\ \frac{1}{2}, & t=\pm\delta \end{cases} = \begin{cases} 1, & |t|<\delta \\ \frac{1}{2}, & |t|=\delta \\ 0, & |t|>\delta \end{cases}$$

即$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\delta\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t|<\delta \\ \frac{\pi}{4}, & |t|=\delta \\ 0, & |t|>\delta \end{cases}.$$

特别地，当$t=0$时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}.$$

（Dirichlet积分）

例4 求函数$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geq 0\end{cases}$的Fourier变换及其积分表达式,其中$\beta>0$.

指数 衰减函数

解

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\beta+i\omega}$$

下面求指数衰减函数的积分表达式.

利用Fourier逆变换公式以及奇偶函数的积分性质，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

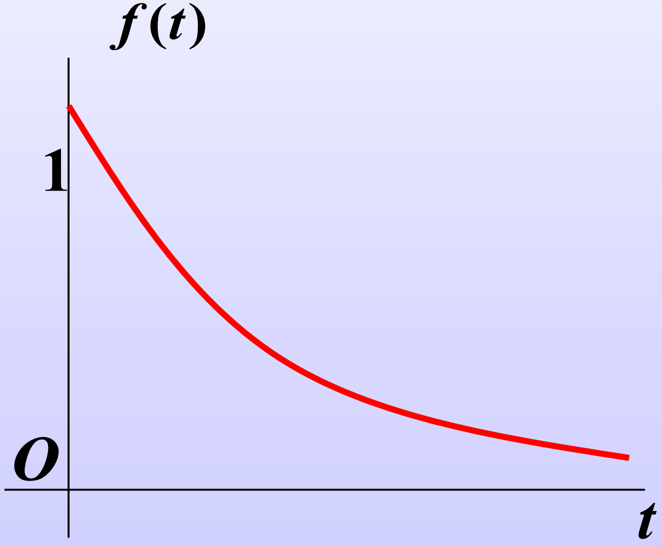
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

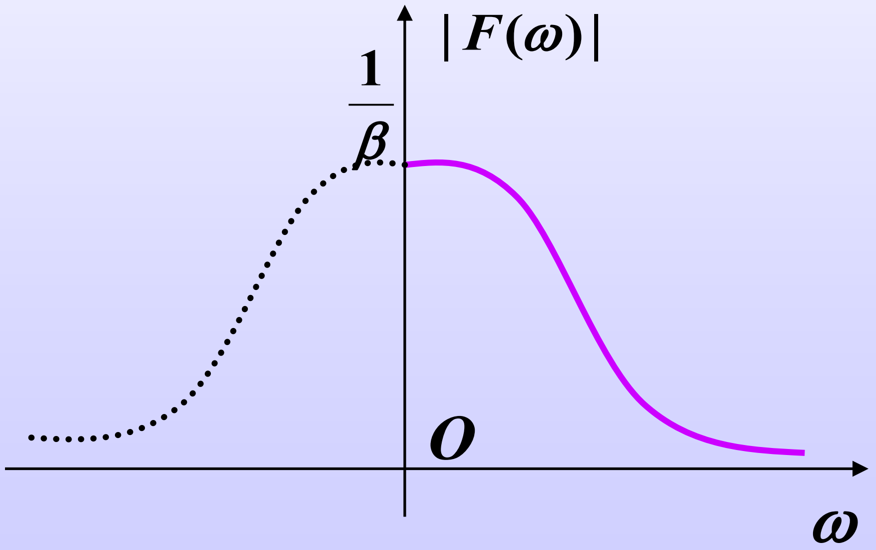
由此顺便得到一个含参量广义积分的结果;

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{\pi}{2}, & t=0.\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0\end{cases}$$

频谱图:

$$F(\omega)=\frac{1}{\beta+i\omega},\qquad |F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}},$$





例5 求函数

$$F(\omega)=\frac{\omega^2+10}{(5+i\omega)(9+\omega^2)}$$

的傅氏逆变换.

解

$$F(\omega)=\frac{15}{16(5+i\omega)}+\frac{1}{12(3+i\omega)}+\frac{1}{48(3-i\omega)}$$

而

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+i\omega}\right]=\begin{cases} e^{-5t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+i\omega}\right]=\begin{cases} e^{-3t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3-i\omega}\right]=\begin{cases} e^{3t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

所以

$$f(t)=\begin{cases} \frac{15}{16}e^{-5t}+\frac{1}{12}e^{-3t}, & t \geq 0 \\ \frac{1}{48}e^{3t}, & t < 0 \end{cases}$$

三、小结与思考

本课学习了Fourier积分存在定理和Fourier积分公式. 重点求函数Fourier变换与‘积分表达式，并在此基础上推证一些广义积分的结果.

思考题

求函数Fourier积分表达式时要注意什么？

思考题答案

注意在间断点处，$f(t)$应以$\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$代替.

P144 3 , 4, 5(1),

放映结束，按Esc退出.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

Fourier,Jean Baptiste Joseph,
1768-1830
法国数学家、物理学家。