一、问题描述

一个袋子中三种硬币的混合比例为：$s1, s2$与$1-s1-s2(0 \le si \le 1)$，三种硬币掷出正面的概率分别为：p, q, r。

(1)自己指定系数$s1, s2, p, q, r$，生成N个投掷硬币的结果（由01构成的序列，其中1为正面，0为反面）。

(2)利用EM算法来对参数进行估计并与预先假定的参数进行比较。

二、实验原理

该问题中，参数为$\theta = (s1, s2, p, q, r)$, 依次为选择第一个硬币的概率，选择第二个硬币的概率，第一个硬币，第二个硬币，第三个硬币抛掷时出现正面的概率。序列$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，$x_i$为单次投硬币的结果，1为正面，0为反面。则有:

$$p(x_i|\theta) = s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} + s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i} + (1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}$$

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} [s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} + s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i} + (1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}]$$

设x_i来自硬币A, B, C的概率分别为u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}，即：

$$u_{1i} = \frac{p(x_i, A|\theta)}{p(x_i|\theta)}$$

$$= \frac{1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i}}{s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} + s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i} + (1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}}$$

$$u_{2i} = \frac{p(x_i, B|\theta)}{p(x_i|\theta)}$$

$$= \frac{s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i}}{s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} + s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i} + (1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}}$$

$$u_{3i} = \frac{p(x_i, C|\theta)}{p(x_i|\theta)}$$

$$= \frac{(1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}}{s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} + s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i} + (1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}}$$

则有：

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^{N} \{[s1 \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i}]^{u_{1i}} + [s2 \cdot q^{x_i} \cdot (1-q)^{1-x_i}]^{u_{2i}}$$

$$+ [(1-s1-s2) \cdot r^{x_i} \cdot (1-r)^{1-x_i}]^{u_{3i}}\}$$

$$\log p(x,u|\theta)=\sum_{i=1}^{N}\{u_{1i}[\log s1+x_i\log p+(1-x_i)\log(1-p)]$$
$$+u_{2i}[\log s2+x_i\log q+(1-x_i)\log(1-q)]$$
$$+u_{3i}[\log(1-s1-s2)+x_i\log r+(1-x_i)\log(1-r)]\}$$

对上述函数关于不同参数求偏导，令其为 0，得到极大化参数如下：

$$s1=\frac{\sum_{i=1}^{N}u_{1i}}{N}$$
$$s2=\frac{\sum_{i=1}^{N}u_{2i}}{N}$$
$$p=\frac{\sum_{i=1}^{N}u_{1i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}u_{1i}}$$
$$q=\frac{\sum_{i=1}^{N}u_{2i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}u_{2i}}$$
$$r=\frac{\sum_{i=1}^{N}u_{3i}x_i}{\sum_{i=1}^{N}u_{3i}}$$

以上为 EM 算法的迭代求解过程，求导及收敛性证明此略。

三、实验过程与结果

指定参数$\theta=(s1,s2,p,q,r)$，依概率选择并投掷一枚硬币，得到一个长度为N的序列。然后指定迭代初值$\theta_0=(s_0^1,s_0^2,p_0,q_0,r_0)$，设定迭代步数$M$，进行迭代。实验结果如下：

实验 1	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.3000	0.4000	0.3000	0.3000	0.4000	0.5000	0.4000
迭代初值	0.1000	0.2000	0.7000	0.3000	0.4000	0.5000	0.4600
迭代终值	0.1038	0.2029	0.6933	0.2518	0.3436	0.4398	0.4008
生成的数据中正面个数占比							0.4008

实验 2	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.3000	0.4000	0.3000	0.3000	0.4000	0.5000	0.4000
迭代初值	0.4000	0.3000	0.3000	0.5000	0.4000	0.3000	0.4100
迭代终值	0.3982	0.3001	0.3016	0.4875	0.3881	0.2896	0.3980
生成的数据中正面个数占比							0.3980

实验 3	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.2000	0.3000	0.5000	0.3000	0.4000	0.8000	0.5800
迭代初值	0.1000	0.2000	0.7000	0.3000	0.4000	0.5000	0.4600
迭代终值	0.0925	0.1944	0.7131	0.4066	0.5159	0.6152	0.5766
生成的数据中正面个数占比							0.5766

实验 4	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.2000	0.3000	0.5000	0.3000	0.4000	0.8000	0.5800
迭代初值	0.4000	0.3000	0.3000	0.5000	0.4000	0.3000	0.4100
迭代终值	0.4244	0.2980	0.2776	0.6597	0.5637	0.4537	0.5739
生成的数据中正面个数占比							0.5739

实验 5	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.4000	0.2000	0.4000	0.1000	0.3000	0.5000	0.3000
迭代初值	0.1000	0.2000	0.7000	0.3000	0.4000	0.5000	0.4600
迭代终值	0.1106	0.2080	0.6814	0.1741	0.2470	0.3297	0.2953
生成的数据中正面个数占比							0.2953

实验 6	s1	s2	s3	p	q	r	正面概率
真实值	0.4000	0.2000	0.4000	0.1000	0.3000	0.5000	0.3000
迭代初值	0.4000	0.3000	0.3000	0.5000	0.4000	0.3000	0.4100
迭代终值	0.3839	0.3013	0.3148	0.3835	0.2931	0.2105	0.3018
生成的数据中正面个数占比							0.3018

四、结果分析

由于算法的输入只有一个由01构成的序列，而实际上信息量只有序列中0或1的占比。因此，迭代终值确定的综合正面概率$s_1p + s_2q + s_3r$，能够收敛到生成的序列中正面个数占比的数值。

但在对于$s1, s2, p, q, r$这 5 个参数的估计方面，不论真实值与初值如何选择，EM 算法效果都不是很好。因为对于这个问题，能使正面概率与真实值确定的正面概率相同的参数有很多组，而根据初值的选择，EM 算法会收敛到其中一组参数上。亦即，EM 算法确定的只是局部最优解。

五、附录（MATLAB 程序）

```
clear;clc;
%% 设置参数
[S1,S2]=deal(0.4,0.2);
[P,Q,R]=deal(0.1,0.3,0.5);
S3=1-S1-S2;%S3=0.2;
S=[S1,S2,S3,P,Q,R,S1*P+S2*Q+S3*R];
% 由初始参数确定的混合比例，正面概率，以及综合正面概率
%% 生成数据
N=10000;  % 数据个数
X=zeros(N,1);
PI=[P,Q,R];
for i=1:N
```

```
    n=randsrc(1,1,[1,2,3;S1,S2,S3]);  % 选择一枚硬币
    X(i)=randsrc(1,1,[1,0;PI(n),1-PI(n)]);  % 投掷这枚硬币
end
%% 设置初值
[s1,s2]=deal(0.4,0.3);
[p,q,r]=deal(0.5,0.4,0.3);
s3=1-s1-s2;
s0=[s1,s2,s3,p,q,r,s1*p+s2*q+s3*r];
% 由迭代初值确定的混合比例，正面概率，以及综合正面概率
%% EM
u1=zeros(N,1);
u2=zeros(N,1);
u3=zeros(N,1);
% p(x=1)=s1*p+s2*q+s3*r
% p(x=0)=s1*(1-p)+s2*(1-q)+s3*(1-r)
% p(x)=s1*p^x*(1-p)^(1-x)+s2*q^x*(1-q)^(1-x)+s3*r^x*(1-r)^(1-x)
M=10;  % 迭代步数
s=zeros(M,length(s0));
for j=1:M
    % E-Step
    for i=1:N
        x=X(i);
        u1(i)=(s1*p^x*(1-p)^(1-x))/(s1*p^x*(1-p)^(1-x)+s2*q^x*(1-q)^(1-
x)+s3*r^x*(1-r)^(1-x));
        u2(i)=(s2*q^x*(1-q)^(1-x))/(s1*p^x*(1-p)^(1-x)+s2*q^x*(1-q)^(1-
x)+s3*r^x*(1-r)^(1-x));
        u3(i)=(s3*r^x*(1-r)^(1-x))/(s1*p^x*(1-p)^(1-x)+s2*q^x*(1-q)^(1-
x)+s3*r^x*(1-r)^(1-x));
    end
    % M-Step
    s1=sum(u1)/N;
    s2=sum(u2)/N;
    s3=sum(u3)/N;
    p=sum(u1.*X)/sum(u1);
    q=sum(u2.*X)/sum(u2);
    r=sum(u3.*X)/sum(u3);
    s(j,:)=[s1,s2,s3,p,q,r,s1*p+s2*q+s3*r];
    % 迭代过程中得到的混合比例，正面概率，以及综合正面概率
end
%% Result
disp("由初始参数确定的混合比例，正面概率，以及综合正面概率"),disp(S)
disp("由迭代初值确定的混合比例，正面概率，以及综合正面概率"),disp(s0)
% disp("迭代过程中得到的混合比例，正面概率，以及综合正面概率"),disp(s)
disp("由迭代终值确定的混合比例，正面概率，以及综合正面概率"),disp(s(end,:))
```

```
disp("生成的数据中正面占比，根据迭代终值确定的正面概率")
disp([sum(X)/N,s1*p+s2*q+s3*r])
```