

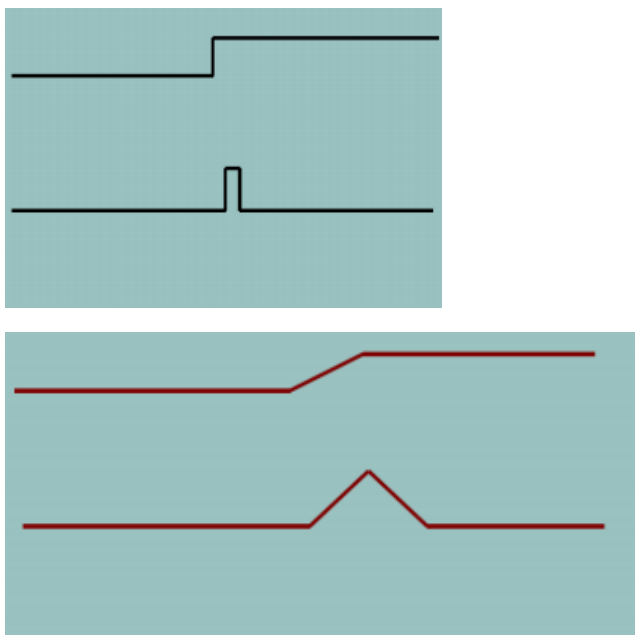
Image Sharpening

Homework Report

- Technical description

(a) Laplacian Operator

可以利用微分去突顯影像中像素強度突然有所變化的邊界，理論上邊界處之灰階會呈現階梯狀變化(step)，或直線變化(line)，實際上影像受到雜訊的影響，邊界形狀會變成斜坡狀(ramp)或屋頂狀(roof)。



而 Laplacian 是 2-D 圖像中二次微分的運算子，通常會用在做過高斯濾波 (Gaussian smoothing filter)後的影像上。將去除雜訊而造成邊界輪廓變得不清楚的影像，進行 **Laplacian 凸顯邊緣**。

Laplacian 運算子可以定義如下：

The Laplacian $L(x,y)$ of an image with pixel intensity values $I(x,y)$ is given by:

$$L(x,y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

可以使用 convolution 計算出 Laplacian Operator

$$O(i, j) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n I(i+k-1, j+l-1) K(k, l)$$

where i runs from 1 to $M - m + 1$ and j runs from 1 to $N - n + 1$.

x 軸方向

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

y 軸方向

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

替換相加後得到 A 結果

$$\Delta^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

以及 B 結果

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x, y) = & f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) \\ & + f(x, y-1) + f(x-1, y-1) + f(x+1, y-1) \\ & + f(x-1, y+1) + f(x+1, y+1) - 8f(x, y) \end{aligned}$$

A 結果可以表示成的 mask

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

B 結果可以表示成的 mask

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

實作 Laplacian 的基本方法

The basic way of using the Laplacian for image enhancement is:

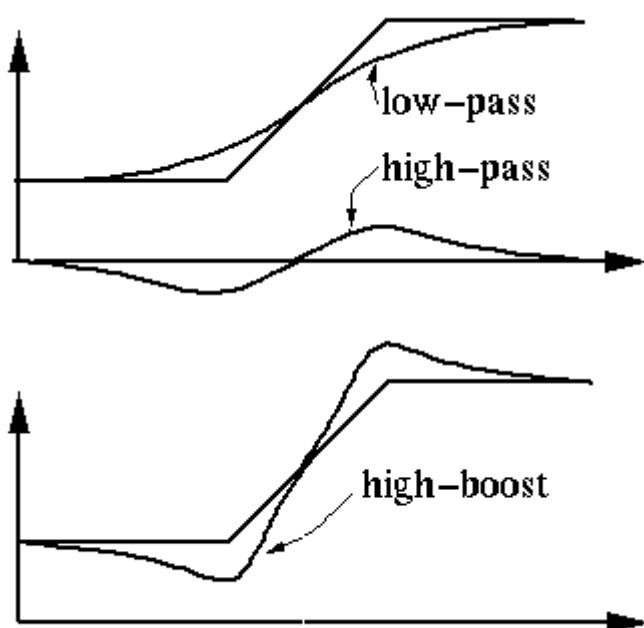
$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is negative} \\ f(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is positive.} \end{cases} \quad (3.7-5)$$

$f(x, y)$ 為 input image， $g(x, y)$ 為 sharpened image。

這次實作中，我用的 Laplacian mask 為 B 結果的 mask，故是把原圖"減"去做完 Laplacian mask 後的圖，而得到 sharpened image。

(a) High-Boost filtering

high-boost filter 可以用來增強 high frequency 的部分，並繼續保持著 low frequency 的部分不被消除影響。



A high-boost filtered image, f_{hb} , is defined as:

$$f_{hb}(x, y) = Af(x, y) - \bar{f}(x, y),$$

其中 A 為增幅係數，然後因為

$$f_s(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y) \quad (3.7-7)$$

where $f_s(x, y)$ denotes the sharpened image and $\bar{f}(x, y)$ is a blurred version of $f(x, y)$.

則可以推導出：

$$f_{hb}(x, y) = (A-1)f(x, y) + f_s(x, y)$$

若 sharpened image $f_s(x, y)$ 使用 Laplacian 去做影像銳化

The basic way of using the Laplacian for image enhancement is:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is negative} \\ f(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is positive.} \end{cases} \quad (3.7-5)$$

$$f_s(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y) \parallel f(x, y) + \nabla^2 f(x, y)$$

帶入 f_{hb} 後則可以推導出：

$$f_{hb} = \begin{cases} Af(x, y) - \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is negative} \\ Af(x, y) + \nabla^2 f(x, y) & \text{if the center coefficient of the Laplacian mask is positive.} \end{cases} \quad (3.7-11)$$

利用 Laplacian 已經計算出來的 $\nabla^2 f(x, y)$ ，將原圖 $f(x, y)$ 乘上係數 A，

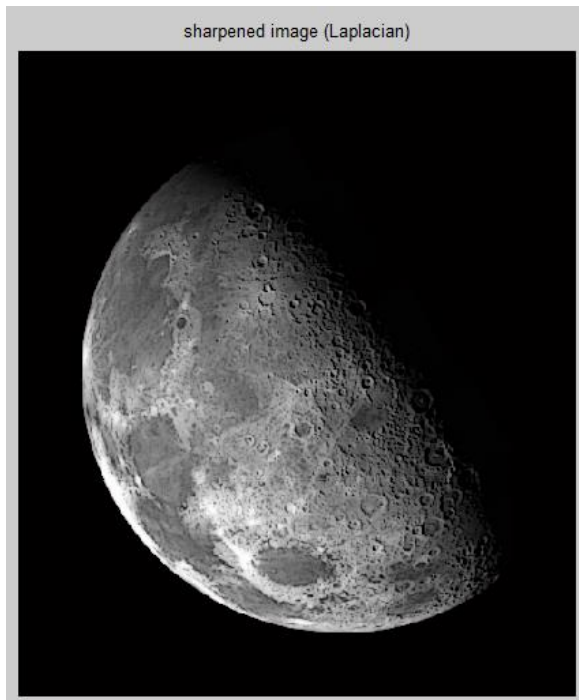
我是設 $A=1.7$ 的結果減去 $\nabla^2 f(x, y)$ ，由於 mask 一樣是用中間係

數為負的 mask，故是減去做完 Laplacian mask 後的圖，得到

sharpened image。

● Experimental results

原圖

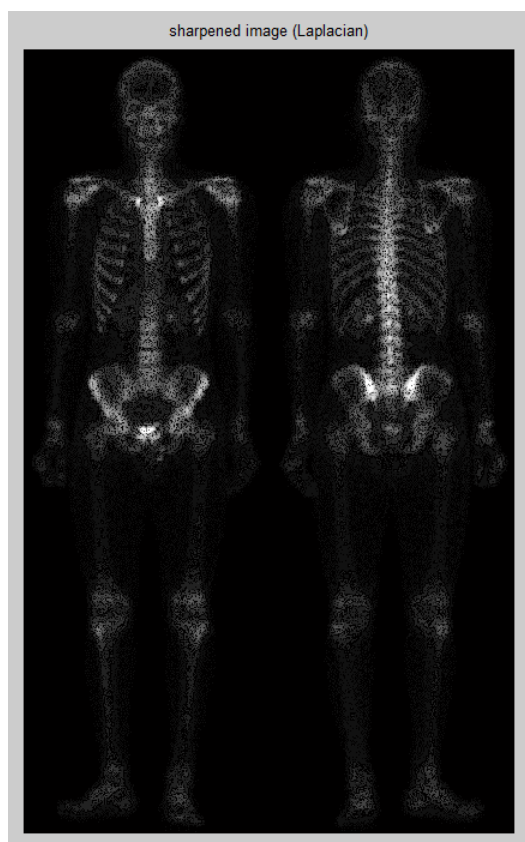
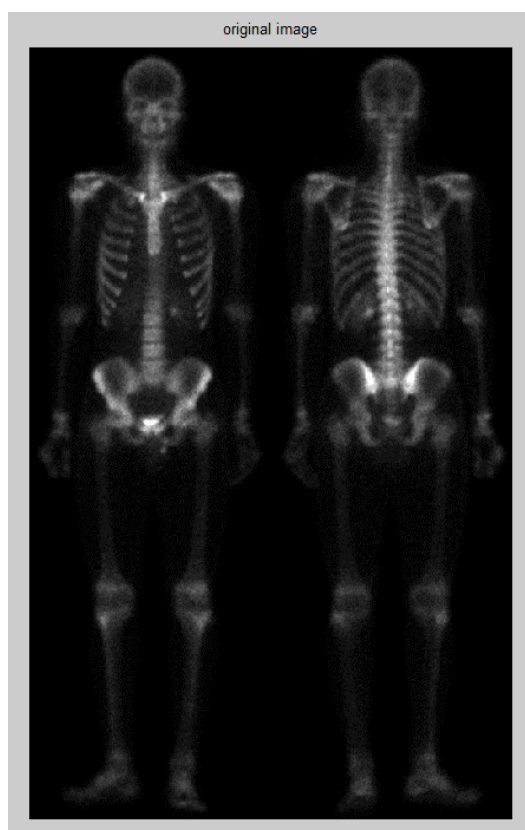


Laplacian 後的結果



High-Boost 後的結果

原圖



Laplacian 後的結果



High-Boost 後的

● Discussions

月亮的圖片做完 Laplacian 後可以發現原本不清楚的表面輪廓變得很清楚，而做完係數 $A=1.7$ (原圖放大 1.7 倍後減去 low frequency 的部分) 的 High-Boost 後的圖，可以發現除了銳化突顯邊界外，暗的地方也變明亮。

骷髏頭那張圖片做完 Laplacian 後，可以明顯的看到圖中的雜訊粒子增強了，是因為微分會放大雜訊，一階微分和二階微分的偵測結果都會有 numerical noise and electronic noise 的影響，而二階微分又微分了兩次，比一階微分更容易受到雜訊的干擾，故銳化圖片之前，通常會先做高斯濾波，去除雜訊(平滑化)，再做 Laplacian，避免發生圖中微小的雜訊被過度突顯的問題。

● References and Appendix

<http://ppt.cc/dFiz>

<http://ppt.cc/jNuV>

<http://ppt.cc/i1fm>