

## Politechnika Warszawska

### Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

### Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej

### Laboratorium Wspomagania Decyzji (WDEC)

## Laboratorium nr 3/4 - AMPL Sprawozdanie - zestaw 2.2

Ćwiczenie polegało na przygotowaniu modelu analizy wielokryterialnej sytuacji decyzyjnej, gdzie należało opracować podział budżetu na płace.

## 1. Rzeczowy model sytuacji decyzyjnej

### Zmienne decyzyjne:

- $X_i$  – płace pracowników na poszczególnych stanowiskach,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- $Omi^+$  – dopuszczalne odchylenie w górę względem parametru  $M_i$  (odchylenie od płacy na  $i$ -tym stanowisku w innych firmach),
- $Omi^-$  – dopuszczalne odchylenie w dół względem parametru  $M_i$  (odchylenie od płacy na  $i$ -tym stanowisku w innych firmach),
- $Opi^+$  – dopuszczalne odchylenie w górę względem parametru  $P_i$  (odchylenie od struktury referencyjnej płacy na  $i$ -tym stanowisku),
- $Opi^-$  – dopuszczalne odchylenie w dół względem parametru  $P_i$  (odchylenie od struktury referencyjnej płacy na  $i$ -tym stanowisku),
- $Z1, Z2$  – zmienne pomocnicze,
- $Y_i$  – zmienne pomocnicze związane z kryteriami,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A$  – zmienna pomocnicza do skalaryzacji metodą punktu odniesienia.

### Parametry:

- $N_i$  – liczba osób pracujących na  $i$ -tym stanowisku,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- $P_i$  – wysokość płac na  $i$ -tym stanowisku wynikająca ze struktury referencyjnej,
- $M_i$  – wysokość płacy na  $i$ -tym stanowisku w innych firmach,
- $S_i$  – minimalna różnica płac między stanowiskami o numerach  $i$  oraz  $i+1$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,
- $F_i$  – poziom płacy minimalnej – umownie przyjmujemy za tę wartość płacę na piątym stanowisku.

Dane wykorzystywane w zadaniu:

Stanowisko	$N_i$	$P_i$ [tys.]	$M_i$ [tys.]	$S_i$ [tys.]	$F_i$ [tys.]
1	1	12	20	3	-
2	5	8	12	2	-
3	10	6	10	2	-
4	20	4	5	2	-
5	200	2	2	-	1

### Ograniczenia:

- $F5 \leq X_i$ ; Wszyscy pracownicy muszą zarabiać przynajmniej płać minimalną na najgorzej opłaćanym stanowisku,
- $X_i - X_{i+1} \geq S_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ; Zakładamy, że każde wyższe stanowisko zarabia tyle samo lub więcej niż stanowisko niższe o jeden stopień powiększone o pewną kwotę,
- $X_i = M_i + O_{mi}^+ - O_{mi}^-$ ; Pensje na stanowiskach mają oscylować wokół pensji na tych samych posadach w innych firmach,
- $X_i = P_i + O_{pi}^+ - O_{pi}^-$ ; Dążymy do tego, aby pensje były jak najbardziej zbliżone do preferencyjnego rozkładu pensji,
- $O_{mi}^+ \geq 0$ ,
- $O_{mi}^- \geq 0$ ,
- $O_{pi}^+ \geq 0$ ,
- $O_{pi}^- \geq 0$ .

Cztery powyższe ograniczenia dotyczą oznaczenia warunku nieujemności odchyleń od danych wartości.

## 2. Funkcja celu (kryteria):

- Minimalizacja środków przeznaczonych na płać (Y1):

$$\sum_{i=1}^5 (N_i * X_i) \rightarrow \min$$

- Minimalizacja maksymalnego odchylenia od struktury płać wewnątrz firmy (warunek zostanie poddany skalaryzacji przy pomocy zmiennej Z1):

$$(O_{pi}^+, O_{pi}^-) \rightarrow \min$$

- Minimalizacja sumy odchyleń od płać wewnątrz firmy (Y3):

$$\sum_{i=1}^5 (O_{pi}^+ + O_{pi}^-) \rightarrow \min$$

- Minimalizacja maksymalnego odchylenia od płać na zewnątrz firmy (warunek zostanie poddany skalaryzacji przy pomocy zmiennej Z2):

$$(O_{mi}^+, O_{mi}^-) \rightarrow \min$$

- Minimalizacja sumy odchyleń od płać na zewnątrz firmy (Y5):

$$\sum_{i=1}^5 (O_{mi}^+ + O_{mi}^-) \rightarrow \min$$

Skalaryzacja kryteriów 2. i 4.:

Kryterium 2.

- $Y2 = Z1 \rightarrow \min$

Ograniczenia:

- $Z1 \geq Opi+$ ,
- $Z1 \geq Opi-$ .

Dla wszystkich  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Kryterium 4.

- $Y4 = Z2 \rightarrow \min$

Ograniczenia:

- $Z1 \geq Omi+$ ,
- $Z1 \geq Omi-$ .

Dla wszystkich  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Ograniczenie potrzebne do skalaryzacji metodą punktu odniesienia:

$A \leq Qi - Yi$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , gdzie  $Qi$  to aspiracja.

### 3. Model w AMPL:

Plik .mod:

# parametry

param N{1..5} >= 0; # liczba pracowników na danym stanowisku

param P{1..5} >= 0; # płać referencyjna na i-tym stanowisku

param M{1..5} >= 0; # płać na zewnątrz firmy na podobnym stanowisku do i-tego

param S{1..5-1} >= 0; # minimalna różnica płac między stanowiskami i oraz i+1

param Q{1..5}; # aspiracje dla poszczególnych kryteriów

# zmienne

var X{1..5} >= 0; # płać na poszczególnych stanowiskach

var G{1..4, 1..5} >= 0; # macierz z wartościami  $Opi+$ ,  $Opi-$ ,  $Omi+$  oraz  $Omi-$

var Z{1..2}; # zmienne do skalaryzacji kryteriów

var A; # zmienna pomocnicza przy skalaryzacji metodą punktu odniesienia

var Y{1..5}; # zmienne pomocnicze do kryteriów

# ograniczenia

subject to placa\_minimalna:  $X[5] \geq 1$ ;

subject to placa\_referencyjna  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $X[i] = P[i] + G[1,i] - G[2,i]$ ;

subject to placa\_zewnetrzna  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $X[i] = M[i] + G[3,i] - G[4,i]$ ;

subject to roznica\_plac  $\{i \text{ in } 1..4\}$ :  $X[i] - S[i] \geq X[i+1]$ ;

subject to Z1\_1  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $Z[1] \geq G[1,i]$ ;

subject to Z1\_2  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $Z[1] \geq G[2,i]$ ;

subject to Z2\_1  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $Z[2] \geq G[3,i]$ ;

subject to Z2\_2  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $Z[2] \geq G[4,i]$ ;

subject to Y1:  $Y[1] = \sum\{i \text{ in } 1..5\} X[i] * N[i]$ ;

subject to Y2:  $Y[2] = Z[1]$ ;

subject to Y3:  $Y[3] = \sum\{i \text{ in } 1..5\} (G[1,i] + G[2,i])$ ;

subject to Y4:  $Y[4] = Z[2]$ ;

subject to Y5:  $Y[5] = \sum\{i \text{ in } 1..5\} (G[3,i] + G[4,i])$ ;

subject to skalaryzacja  $\{i \text{ in } 1..5\}$ :  $(Q[i] - Y[i]) \geq A$ ;

# funkcja celu

maximize f\_celu:  $Z + (0.0001/5) * (\sum\{i \text{ in } 1..5\} (Q[i] - Y[i]))$ ;

Data:

param n:=

1 1

2 5

3 10

4 20

5 200;

param p:=

1 12

2 8

3 6

4 4

5 2;

param m:=

1 20

2 12

3 10

4 5

5 2;

param s:=

1 3

2 2

3 2

4 2;

param q:=

1 400

2 200

3 100

4 0

5 0;

## 4. Wyniki i analiza

Tabela obliczonych wypłat X wygląda następująco.

X:

Stanowisko [nr]	Płaca [ tys. zł]
1	20
2	12
3	6
4	4
5	2

Macierz odchyleń G:

G					
Opi+	8	4	0	8	7.25e-10
Opi-	0	0	-7.25e-10	8	0
Omi+	0	0	107.5	0	7.25e-10
Omi-	0	0	111.5	1	0

Zmienne skalaryzacji Z:

Z	
1	8
2	111.5

Parametr A = -220

Zmienne pomocnicze kryteriów Y:

Y	
1	620
2	8
3	28
4	111.5
5	220

Utopijnymi wartościami płać są wartości z tabeli poniżej:

Stanowisko [nr]	Płaca [ tys. zł]
1	20
2	12
3	10
4	5
5	2

Jest to zasadniczo tabela płac referencyjnych w innych firmach, czyli algorytm obliczania wartości dąży do tego, aby wypłacić jak najwyższe pensje jednocześnie zachowując resztę parametrów, ale nie więcej niż w innych firmach. Teoretycznie przy pozbywaniu się kolejnych ograniczeń możemy dążyć do jak największych wypłat, ale akurat w tym przypadku interesuje nas nieprzekraczanie płacy w innych firmach. Aby obliczyć punkty utopijne, pozbywamy się ograniczeń płacy referencyjnej, minimalnej i różnic.

Tabela z nadirowymi wartościami wypłat:

Stanowisko [nr]	Płaca [ tys. zł]
1	10
2	7
3	5
4	3
5	1

W przypadku wypłat nadirowych ignorujemy dążenie do wypłat referencyjnych oraz do wypłat z innych firm. Wychodzi na to, że jedynymi ograniczeniami są płaca minimalna i różnica wypłat. Oczywiście możemy też je ignorować, ale zadanie wtedy nie ma sensu analitycznego.

## 5. Wnioski:

Wykonana analiza jest przykładem analizy wielokryterialnej, gdzie nasze wypłaty są ograniczony z dołu i góry przez pewne wartości. Widać, że minimalne wartości wypłat są związane z minimalizacją, różnicą płac i płacą minimalną. Dalsze ingerowanie w dolne ograniczenia daje wyniki typu [1, 1, 1, 1, 1), które nie mają żadnej analitycznej wartości. Z drugiej strony mamy wartości utopijne, które chcielibyśmy osiągnąć. Pomijamy przy tym wartości referencyjne wewnątrz firmy, a skupiamy się tylko na wartościach z zewnętrznych firm i różnicy płac.

W przypadku modelu AMPL osiągnięcie wartości utopii oraz nadiru zostało poprzez wykluczenie niektórych ograniczeń kluczowych dla tych wartości.