Óvissureikningar

1 Trúverðugleiki mæligagna

Allar mælingar hafa endanlega nákvæmni og því er nauðsynlegt að hverri mælingu fylgi upplýsingar um nákvæmni hennar. Mæligildi er því almennt skráð sem:

(máltala ± óvissa) [mælieining] (t.d. $L = 21.3 \pm 0.5$ cm)

Óvissa er ekki galli heldur eðlilegur hluti af mælingu. Óvissu þarf mælandi að meta út frá gögnum um mælitæki ef þau eru til staðar en hefur stundum ekki annað en skynsemina til þess. Að staðaldri er óvissa ekki skráð nema með einum markverðum staf en stöku sinnum með tveimur markverðum stöfum ef svo ber við. Gildi óvissunnar segir fyrir um hversu marga markverða stafi mæligildið þarf að hafa ($t = 1.35178 \pm 0.02761$ s $\rightarrow$ $t = 1.35 \pm 0.03$ s).

2 Uppruni óvissu

Uppruni og gerð óvissu getur verið áf ýmsum toga allt frá eðlilegum eða eðlisfræðilegum óvissuþáttum sem jafnvel ekki er hægt að koma í veg fyrir til ónákvæmni mælibúnaðar og óstöðugleika í umhverfi. Dæmi um algengar ástæður óvissu eru:

1. Stærðin sem er mæld er illa skilgreind eða sveiflast með tíma.
2. Mælitækið er ónákvæmt, rangt kvarðað eða truflar fyrirbærið sem mæla skal
3. Tilraunaaðstæður eru óstöðugar (t.d. á óstöðugu borði) eða mælingamaður hefur áhrif á mælinguna.

Dæmi um óvissur í flokki 1 eru t.d. líkamsþyngd lifandi dýrs, lengd spýtu með trosnaða enda eða bökunartími köku. Í flokki 2 eru t.d. rafrænir mælar sem byggja á skynjurum sem gefa spennu- eða straummerki. Í slíkum tækjum er merkið kvarðað í viðeigandi einingum og sýnt á skjá. Óvissa fylgir bæði kvörðuninni og viðbragði nemans fyrir breytingum í merkinu. Eiginleikar hluta sem mæla á breytast oft með aðstæðum. T.a.m breytist lengd eða stífni hluta almennt oft með hitastigi eða rakastigi. Aðstæður í flokki þrjú má laga til að minnka óvissu. Minnka má áhrif uppsetningnar, aðstæðna og mælingamanns með betri tilraunauppstillingu og vinnubrögðum.

Óvissur má flokka í tvo flokka eftir uppruna þeirra og eiginleikum:

- *Tilviljanakenndar sveiflur á mæligildum.*
- *Kerfisbundnar en óþekktar skekkjur*

Meðhöndlun á tilviljanakenndum sveiflum krefst líkindafræðilegra aðferða. Kerfisbundnar skekkjur eru almennt ráðandi við flestar tilraunir sem krefjast ekki talninga á atburðum.

3 Afleidd óvissa

Óvissa í mældri stærð t.d. mælistærðin x sem hefur óvissuna Δx flyst að sjálfsögðu yfir í afleiddar stærðir eins og t.a.m. fallið $f(x)$ sem hefur þá óvissuna $\Delta f(x)$ eða Δf. Ákvarða má óvissuna Δf með ólíkum aðferðum:

1. **Jaðargildi.** Meta má óvissuna í afleiddu stærðinni beint með því að ákvarða gildi $f(x)$ með því að setja inn í afleiddu stærðina jaðargildi x, þ.e. $x+\Delta x$ og $x-\Delta x$ þar sem x samsvarar þá meðalgildi mældu breytunnar. Með því fást þá jaðargildin fyrir afleiddu stærðina og út frá þeim má ákvarða meðalgildið $f=\frac{f(x+\Delta x)+f(x-\Delta x)}{2}$ og óvissuna $\Delta f=\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2}\right|$

   Þessi aðferð er oft einföld en verður erfið ef jafnan fyrir afleiddu stærðina er flókin eða margar mælibreytur með óvissur eru til staðar í afleiddu stærðinni.
2. **Hlutfallsóvissa.** Í einföldum tilfellum, t.d. þegar fallið $f(x)$ er fyrstu gráðu fall af x, verður hlutfallsleg óvissa afleiddu stærðarinnar sú sama og mælistærðarinnar. Í þessu tilfelli má reikna óvissuna beint með

   $$\Delta f = f(x)\cdot\frac{\Delta x}{x} \tag{1}$$

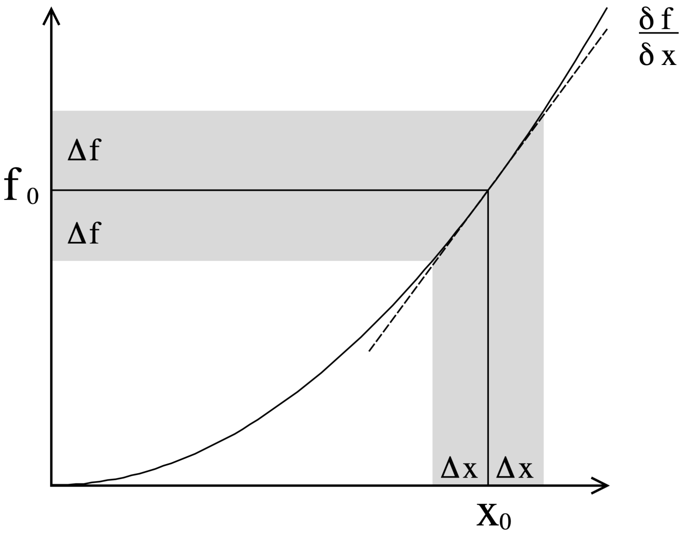
   Þessi aðferð gildir þó ekki almennt og sérstaklega ekki ef t.d. $f(x)=\ln(x)$ eða $f(x)=\sin(x)$.
3. **Afleiðuóvissa.** Ef við gerum ráð fyrir að óvissan sé hlutfallslega lítil miðað við gildið má nálga óvissuna Δx með örsmæðinni dx, þ.e. $\Delta x \approx dx$. Það sama gildir þá um afleiddu stærðina $\Delta f \approx df$. Afleiðuna af afleiddu stærðinni má þá skrifa sem $f'(x)=\frac{df}{dx}\approx\frac{\Delta f}{\Delta x}$ og út frá þessu má sýna að

   $$\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\right|\Delta x \tag{2}$$

   Óvissan í afleiddu stærðinni f tengist þá í rauninni hallatölu fallsins og hana má því fá fram með diffrun (sjá mynd 1). Athugið að hér tökum við algildið inn þar sem óvissan getur aldrei tekið neikvætt gildi.

4 Samsettar óvissur

Í mörgum tilfellum er afleidda stærðin f háð mörgum breytistærðum sem eru mældar og hafa því óvissu. Þegar reikna á óvissuna á afleiddu stærðinni f þarf þá að taka tillit til óvissu allra breytistærðanna. Heildaróvissan fyrir fallið



Mynd 1: Skýringarmynd sem sýnir hvernig óvissa Δx varpast yfir í afleidda óvissu Δf með afleiðuóvissu, þ.e.a.s. fylgir halla grafsins.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ verður þá

$$\Delta f((x_1,x_2,...,x_n)) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\Delta x_n \tag{3}$$

Þar sem gert er ráð fyrir að óvissan sé ákvörðuð með afleiðuóvissu. Athugið að hér er búið að skipta út hefðbundinni diffrun $\frac{df}{dx}$ með hlutafleiðum $\frac{\partial f}{\partial x}$ þar sem afleiðan er tekin fyrir hverja breytu fyrir sig og gert ráð fyrir að aðrar breytur séu fastar. Í þessu tilfelli er óvissan sem stafar af hverri breytu lögð saman sem gildir þegar mælibreyturnar eru háðar hver annarri. Þegar óvissurnar eru margar er þó ólíklegt að allar óvissurnar séu háðar og leggist saman á þennan hátt en með því má fá jaðargildi á óvissuna. Þegar um óháðar óvissur er að ræða er heildaróvissan gefin með:

$$\Delta f((x_1,x_2,...,x_n)) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2} \tag{4}$$

Í flestum tilfellum eru þó breyturnar ekki margar og oft einfaldara á styðjast við fyrri jöfnuna til að ákvarða óvissuna sem er þá varfærnara mat.

5 Dæmi um óvissur

Sveiflutími pendúls. Einföld jafna fyrir sveiflutími pendúls er gefin með

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5}$$

Með mælingum á sveiflutíma pendúls af lengd L má því ákvarða þyngdarhröðunina g með

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}. \tag{6}$$

Í þessu tilfelli er afleidda stærðin (þyngdarhröðunin g) háð tveimur breytum, L og T sem hafa báðar óvissu sem varpast yfir í afleiddu óvissuna Δg. Með afleiðuóvissu verður þessi óvissa

$$\Delta g(L,T) = \left|\frac{\partial g}{\partial L}\right|\Delta L + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T = \left|\frac{4\pi^2}{T^2}\right|\Delta L + \left|\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right|\Delta T. \tag{7}$$

Af jöfnunni má líka sjá að hlutfallsóvissur hefðu dugað vel en þá bætist við stuðull 2 í óvissuframlaginu vegna ΔT þar sem tíminn er í öðru veldi í upphaflega fallinu (sýna má að jafna 7 gefur $\Delta g(L,T) = g\frac{\Delta L}{L} + 2g\frac{\Delta T}{T}$).

Óvissa í hornaföllum. Fyrir fallið $f(\theta) = \sin^2(\frac{\theta}{2})$ þar sem óvissa er í mældu horni θ er óvissan í afleiddu stærðinni fengin með afleiðuóvissu sem

$$\Delta(\sin^2(\frac{\theta}{2})) = \left|\frac{d(\sin^2(\frac{\theta}{2}))}{d\theta}\right|\Delta\theta_{\text{rad}} = \frac{1}{2}\sin\theta\ \Delta\theta_{\text{rad}} \tag{8}$$

Hér þarf að athuga að stærðina $\Delta\theta_{\text{rad}}$ þarf að setja inn í einingunni radíanar en ekki í hefðbundnum gráðum.

Óvissa í falli með náttúrulegum logra. Fyrir fallið $f(x) = \ln(x)$ þar sem breytan x hefur óvissuna Δx verður óvissan

$$\Delta(\ln(x)) = \left|\frac{d(ln(x))}{dx}\right|\Delta x = \frac{\Delta x}{x}. \tag{9}$$