Línuleg algebra A

Umræðutímaefnisskilaverkefni 4

Andri Snær Axelsson, Aron Rósinberg Antonsson
Stefanía María Arnardóttir og Torfi Þorgrímsson

Skilverkefni fyrir 12.11.21: Þessi verkefni eru hugsuð sem hópverkefni, þannig að þið glímið við þau 4–5 saman og velur Canvas-sjálfur í hópana. Þessi verkefni snúast öll um ákveður, kennimargliðu og eigingildi. Þau eru krefjandi en ég vona að ykkur þyki gaman að glíma við þau.

1. Látum A vera $n \times n$ fylkið

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{bmatrix}.$$

Sýnið að $\det A = b^{n-1}(na+b)$.

Lausn Byrjumm á því að draga línu 1 frá hinum línunum og fáum:

$$A = \begin{bmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \\ \vdots \\ L_n - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ -b & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & \cdots & b \end{bmatrix} = B$$

Við skoðum nú næst 3×3 fylki B_3 og fáum $\det(B_3)$

$$\det \begin{bmatrix} a+b & a & a \\ -b & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix} = (a+b)(b*b-0) - a((-b)*b-0) + a(0-b*(-b))$$

$$= b^2(a+b) + ab^2 + ab^2 = b^2(a+b) + b^2(2a) = b^2(3a+b) = b^{n-1}(na+b), n = 3$$

þ.a. við fáum $\det(A) = (a+b) * \underbrace{b * b * \cdots * b}_{n-1 \text{ sinnum}} + \underbrace{a * b^{n-1} + ab^{n-1} + \cdots + ab^{n-1}}_{n-1 \text{ sinnum}}$

$= (a+b)b^{n-1} + ((n-1)a)b^{n-1} = b^{n-1}((n-1+1)a+b) = b^{n-1}(na+b)$

hér höfum við sýnt að $\det(A) = b^{n-1}(na+b)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$

2. Leysið jöfnuna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 0$$

<u>Lausn</u>: Við ath. að við getum tekið línu 1 frá öllum öðrum línum í flylki A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1-x \end{bmatrix} = B$$

Af þessu sést að það er forustuðull í öllum línum A og því
$\det(A) = \det(B) = (-x) * (1-x) * (2-x) * \cdots * (n-1-x) = 0$
og ath. t.d. fyrir 3×3 og 4×4 fylki A fáum við
$\det(A_3) = (-x)(1-x)(2-x) = 0$, þþaa $x \in (0, 1, 2)$
$\det(A_4) = (-x)(1-x)(2-x)(3-x) = 0$, þþaa $x \in (0, 1, 2, 3)$
af þessu sjáum við að $\det(A) = 0$ þegar A er $n \times n$ fylki þþaa $x \in (0, 1, 2, \ldots, n-1)$

3. Setning Perron (1880–1975) er mjög nytsamleg niðurstaða um eigingildi ferningsfylkja sem eru þannig að allar tölurnar eru jákvæðar. Setningin, og sérstaklega útvíkkun Frobeniusar (1849–1917), fellur utan við námsefni námskeiðs eins og okkar. En það passar vel við okkar efni að sanna setninguna fyrir 2×2 fylki.

Setning Perrons fyrir 2×2 fylki. *Látum A vera 2×2 fylki þannig að allar tölurnar í því eru jákvæðar.*

(i) *Þá hefur A tvö rauntalna eigingildi λ og μ.*

(ii) *Ef gert er ráð fyrir að $|\lambda| \geq |\mu|$ þá er $\lambda > |\mu|$. Sér í lagi er $\lambda > 0$.*

(iii) *Til er eiginvigur fyrir eigingildið λ þannig að bæði hnit vigursins eru jákvæð.*

Skiptum sönnuninni upp í nokkur skref. Ritum $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Forsendan segir að $a, b, c, d > 0$.

(a) Sýnið að $\lambda + \mu = a + d$ og $\lambda\mu = ad - bc$.

<u>Lausn</u>:

$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

$\lambda = \dfrac{a+d+\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}$

$\mu = \dfrac{a+d-\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}$

$s = \sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}$

$\lambda + \mu = \dfrac{a+d+a+d+\cancel{s}-\cancel{s}}{2} = \dfrac{2a+2d}{2} = a+d$

$$\lambda\mu = \frac{a+d+s}{2} * \frac{a+d-s}{2} = \frac{a^2+ad+as+da+d^2+ds}{4} + \frac{-sa-sd}{4}\ \frac{-ss}{4} =$$

$$\cancel{\frac{as-sa}{4}} + \cancel{\frac{ds-sd}{4}} + \frac{\cancel{a^2}+2ad+\cancel{d^2}-\cancel{a^2}+2ad-\cancel{d^2}+4bc}{4} = \frac{4ad+4bc}{4} = ad+bc$$

(b) Sýnið að bæði λ og μ eru rauntölur. [Leiðbeining: Gerið ráð fyrir að $\lambda = x+iy$ með $y \neq 0$. Þá er $\mu = x - iy$ (Afhverju?). Notið svo jöfnurnar í **(a)**-lið til að leiða fram mótsögn. Athugið sérstaklega að $2x = a + d$. Ein leið væri að fá að $-bc$ er jafnt $(a-d)^2 + y^2$.]

Lausn:
Athugum að $a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = (a-d)^2 + bc > 0$ svo $\sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc}$ er rauntala og þá eru $\lambda = \dfrac{a+d+\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}$ og $\mu = \dfrac{a+d-\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}$ rauntölur.

(c) Gerið grein fyrir að $\lambda \neq \mu$ og að ef $\lambda > \mu$ þá er $\lambda > |\mu| > 0$. Hér á eftir er gert ráð fyrir $\lambda > \mu$. [Leiðbeining: Til að sýna að $\lambda \neq \mu$ er hægt að horfa á útreikningana í **(b)**-lið og setja $y = 0$. Notið ykkur jöfnurnar í **(a)**-lið.]

Lausn:
Við höfum að $s = \sqrt{a^2 - 2ad + d^2 + 4bc} > 0$ svo $\lambda \neq \mu$. Ef $\lambda > \mu$ þá er $\lambda = \dfrac{a+d+s}{2}$ og $\mu = \dfrac{a+d-s}{2}$. Þá fæst með þríhyrningsójöfnunni að $\lambda = |\dfrac{a+d+s}{2}| = \dfrac{|a+d|+|s|}{2} = \dfrac{|a+d|+|-s|}{2} \geq |\dfrac{a+d-s}{2}| = |\mu| > 0$. Einnig gildir greinilega að $\lambda \neq |\mu|$ svo $\lambda > |\mu| > 0$

(d) Notið ykkur jöfnurnar í **(a)**-lið til að sýna að $\lambda > a$ eða $\lambda > d$.
Lausn:
Gerum ráð fyrir að $\lambda < a$ og $\lambda < d$. Þá fæst að $\lambda + \mu < \lambda + \lambda < a + d$ en það er mótsögn því að $\lambda + \mu = a + d$ Þetta sýnir að $\lambda > a$ eða $\lambda > d$.

(e) Sýnið að ef $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ er eiginvigur tilheyrandi λ þá er $v_1 \neq 0$ og $v_2 \neq 0$.
Lausn:
Þar sem $\mathbf{v}$ er eiginvigur er ekki bæði $v_1 = 0$ og $v_2 = 0$. G.r.f. að $v_1 = 0$. Þá fæst að $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ svo $av_1 + bv_2 = \lambda v_1$ og þá $v_2 = 0$ en það er mótsögn. Eins fæst mótsögn ef $v_1 = 0$. Þetta sýnir að $v_1 \neq 0$ og $v_2 \neq 0$.

(f) Gerið grein fyrir að hægt er að velja eiginvigurinn $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ fyrir λ þannig að $v_1 = 1$ og þá er $v_2 > 0$.
Lausn:
Þar sem $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$ er $\frac{\lambda - a}{b} = \frac{-c}{d-\lambda}$ og skv. d) lið er önnur hliðin jákvæð en þá eru þær báðar jákvæðar. Setjum $v_2 = \frac{\lambda - a}{b} = \frac{-c}{d-\lambda}$ og fáum að jafnan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ er uppfyllt.

4. Cayley-Hamilton setningin er grundvallar niðurstaða um kennimargliðuna. Cayley-Hamilton setningin mun nýtast ykkur í Stærðfræðigreiningu III þegar þið reiknið e^{tA} fyrir $n \times n$ fylki A. Í þessu námskeiði höfum við ekki tiltæk verkfæri til að sanna setninguna almennt en við getum sannað sértilfelli.

Cayley-Hamilton setningin. Látum A vera $n \times n$ fylki. Ef $p(\lambda)$ er kennimargliða A þá er $p(A) = \mathbf{O}$. (Athugið að ef $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \cdots + c_1\lambda + c_0$ þá er $p(A) = (-1)^n A^n + \cdots + c_1 A + c_0 I$.)

(a) Er eftirfarandi sönnun á Cayley-Hamilton setningunni í lagi?

Sönnun. Nú er $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Þá $p(A) = \det(A - AI) = \det(\mathbf{O}) = 0$. Sönnun lokið.

<u>Lausn</u>:
$p(A)$ er alltaf $n \times n$ fylki en ákveður eru alltaf rauntölur svo við getum ekki sagt að almennt gildi að $p(A) = \det(A - AI)$. Sönnunin er því ekki í lagi.

(b) Sannið Cayley-Hamilton setninguna fyrir 2×2 fylki $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. (Cayley (1821-1895) birti bara sönnun á þessu sértilfelli en mun líka hafa sannað setninguna fyrir 3×3 fylki. Almenna setningin var fyrst sönnuð af Frobenius.)

<u>Lausn</u>:
Athugum að kennimargliða A er $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$. Fáum að

$$\begin{aligned} p(A) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad - bc)I \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & ad - bc \\ ad - bc & ad - bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Látum A vera $n \times n$ fylki. Í liðum **(c)**–**(e)** sönnum við Cayley-Hamilton setninguna í því tilfelli að fylkið A sé hornalínugeranlegt.

(c) Látum $p(\lambda)$ vera margliðu. Gerið grein fyrir því að ef $\mathbf{v}$ er eiginvigur A og λ tilheyrandi eigingildi þá er $p(A)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$.

(d) Sýnið að ef $\mathbf{v}$ er eiginvigur A og $p(\lambda)$ er kennimargliða A þá er $p(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(e) Sýnið að ef fylkið A er hornalínugeranlegt, þ.e.a.s. til er grunnur eiginvigra, þá er $p(A) = \mathbf{O}$.