Háskólinn í Reykjavík

T-406-TOLU

Töluleg Greining

Skilaverkefni 1

Ásdís Erla Erlingsdóttir
asdise21@ru.is

Halldór Jökull Ólafsson
halldoro22@ru.is

Helgi Snær Elíasson
helgie22@ru.is

Hlynur Ingi Árnason
hlynura22@ru.is

Torfi Þorgrímsson
torfi22@ru.is

Supervised by
Ingunn Gunnarsdóttir
ingunngunnars@ru.is

Olivier Moschetta
oliviern@ru.is

Lýsing

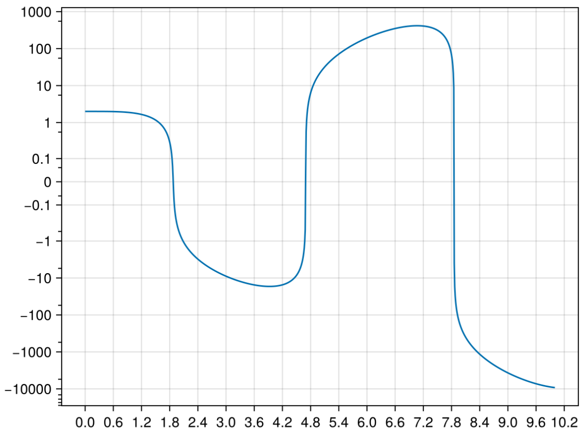
$$\cos(kL)\cosh(kL) = -1 \tag{1}$$

$$f(x) = \cos(kL)\cosh(kL) + 1 \tag{2}$$

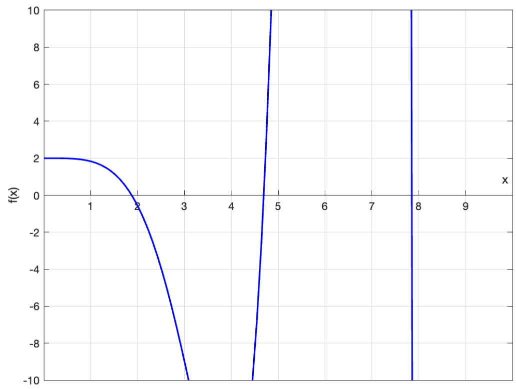
Verkefni

Við gefum okkur að lengd stangarinnar er $L = 30\ \text{mm}$, massaþéttleiki stangarinnar er $\lambda = 0.8\frac{g}{\text{mm}^3}$ og stífnistuðull er $EI = 1.09 \times 10^{10}\ \text{Pa} \cdot \text{mm}^2$.

1. Plottið graf fallsins $f(x) = \cos(x)\cosh(x) + 1$ á bilinu $[0, 10]$ svo að þrjár rætur sjáist vel. Við viljum finna rót f skv. jöfnu (1).



Mynd 2: Hér má sjá fall (2) á arcsinh skala.



Mynd 3: Hér má sjá einnig sjá fall (2) plottað í forritinu MATLAB.

2. Notið helmingunaraðferð til að finna minnstu jákvæðu rót fallsins f með 4 réttum aukastöfum. Reiknið í kjölfarið tíðni ω_1 sem samsvarar þessu gildi.

Hér notum við `bisect` fallið í MATLAB:

Hér er `a=1` og `b=3`. Það er fengið út frá mynd 2 og `tol=1e-5` eða `tol`$=10^{-5}$ til að festa 4 aukastafi (Þetta er útskýrt betur í dæmi 3):

```
a=1;b=3;tol=1e-5;
bisect(a,b,tol)
ans =

    1.8751
```

Út frá `bisect` fæst að kL er:

$$kL = 1.8750 \Rightarrow k = 0.062503\text{mm}^{-1}$$

og frá því fæst að

$$k^4 = \frac{\omega^2\lambda}{EI} \Rightarrow \omega_1 = k^2\sqrt{\frac{EI}{\lambda}} = 0.456012\left[\frac{\text{rad}}{\text{ms}}\right]$$

3. Hve margar ítranir af helmingunaraðferð nægja til að fá 4 rétta aukastafi í lið 2?

Sýnið fræðilega útreikninga og sannreynið með teljara inní lykkjunni.

Hámarksskekkja helmingunaraðferðarinnar má tákna með formúlunni:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{b-a}{2} \quad \text{eða} \quad \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Þ.s. b og a tákna efri og neðri mörk valna bilsins $[a, b]$ sem helmingurnaraðferðin er notuð á og n táknar fjölda ítrana sem þarf fyrir þá skekkju. Þá er hægt að setja saman ójöfnu með þolmörkum sem við veljum. Þ.e. við viljum að skekkjan okkar sé minni en valin þolmörk:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \text{valin þolmörk}$$

Í MATLAB völdum við þolmörk 10^{-5} sem skv. þumalputtareglu gefur okkur 4 rétta aukastafi.[1]

Ef við setjum þolmörk okkar inn í ójöfnuna og leysum fyrir n fáum við:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-5}$$

$$N = n > \frac{5 + \log(b-a)}{\log(2)} - 1 \tag{3}$$

Einnig er hægt að skilgreina í stað þolmarka, breytuna 10^{-i} þ.s. i er: fjöldi rétta aukastafa $+1$:

$$N = n > \frac{i + \log(b-a)}{\log(2)} - 1$$

Ef við veljum bilið $[1, 3]$ út frá mynd 2 og setjum inn í jöfnu (3) fáum við:

$$N > 16.6 \Rightarrow N = 17$$

[1]Einnig er hægt að velja $0.5 \cdot 10^{-4}$. Það gefur okkur 4 rétta aukastafi og í myndbandinu https://shorturl.at/skrgh notar Olivier það til þess að fá 5 rétta aukastafi. Valið okkar er einungis aðeins nákvæmara svar þ.a.l. fleiri ítranir.

Kóðinn fyrir talninguna er eftirfarandi **bisect.m** fall fengið af síðu áfangans á Canvas, nema með 2 nýjum línum. Þegar kallað er á bisect telur það ítranir í `counter` breytunni:

```
function xc = bisect(a,b,tol)
  counter=0;
  if sign(f(a))*sign(f(b)) >= 0
    error('f(a)f(b)<0 not satisfied!') %ceases execution
  end
  fa=f(a);
  while (b-a)/2>tol
    counter= counter+1; %Adding to the counter
    c=(a+b)/2;
    fc=f(c);
    if fc == 0              %c is a solution, done
      break
    end
    if sign(fc)*sign(fa)<0  %a and c make the new interval
      b=c;
    else                    %c and b make the new interval
      a=c;fa=fc;
  end
end
xc=(a+b)/2;                %new midpoint is best estimate
fprintf("counter  %1.0f", counter) %Prenta counterinn

>> bisect(1,2,1e-5)
counter  16
ans =

    1.8751
```

Eins og sést fáum við sama fjölda ítrana (17 ítranir).

4. Fall (2) hefur í raun óendanlega margar lausnir. Notið aðferð Newtons til að finna næst minnstu jákvæðu rót f með 4 réttum aukastöfum. Rökstyðjið val á upphafsgildinu. Reiknið í kjölfarið næst minnstu sveiflutíðni ω_2.

Við plottuðum grafið í mynd 2 og getum séð að næst minnsta rótin er á milli 4 og 5 þannig að x_0 var þá valið sem einhver tala á milli 4 og 5 það er 4.8, og höldum okkur við sömu skekkju.

Newton aðferðin í MATLAB: Við reiknum $\frac{df}{dx} = \sinh(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cosh(x)$ og

skilgreinum dF.m sem

```
function y=Df(x)
    y=sinh(x).*cos(x)-sin(x).*cosh(x);
end
```

Keyrum kóða

```
x0=4.8;tol=10^(-5);
newton(x0,tol)
ans =

    4.6941
```

Newton aðferðin gefur gildi á kL

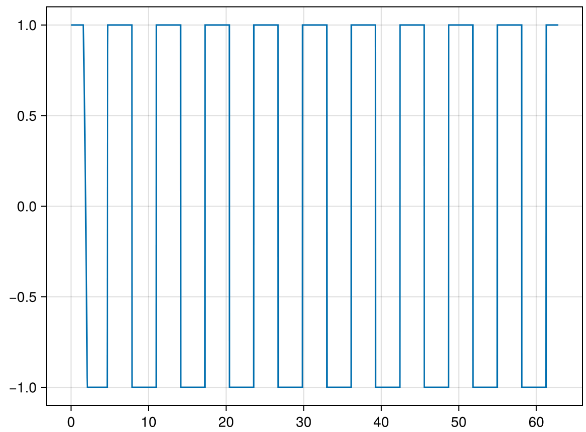
$$kL = 4.6941 \Rightarrow k = 0.1565\text{mm}^{-1}$$

og frá því fæst að

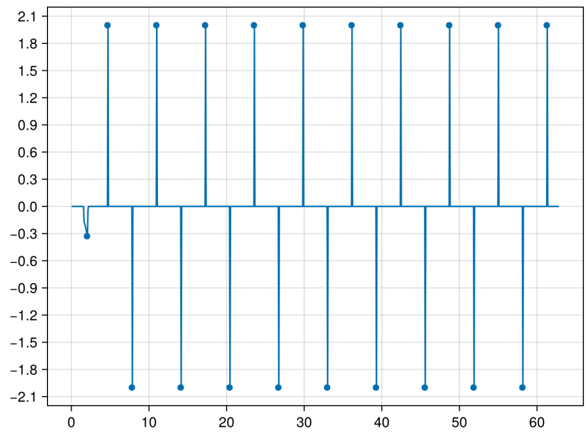
$$k^4 = \frac{\omega^2 \lambda}{EI} \Rightarrow \omega_2 = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\lambda}} = 2.8578 \left[\frac{\text{rad}}{\text{ms}}\right]$$

5. Notið aðferð að eigin vali til að reikna tuttugu minnstu sveiflutíðnir stangarinnar. Hér þarf bæði að ganga úr skugga um að engin lausn hafi gleymst eða verið tvítali.

Fyrst $\cosh(x)$ er stranglega vaxandi fyrir öll $x > 0$, þá er eina leiðin fyrir jöfnu (2) að hafa fleyri rætur $\cos(x)$ partin að þvínga það í núll. cos hefur lotuna 2π og sker x ásinn með bilinu π og lota f stefnir á π tiltölulega fljótt, eins og sést. Þar af leiðandi skoðum clamped jöfnu (2) á bilinu $[0, 20\pi]$.



Mynd 4: Fall (2) clamp-að á milli −1 og 1



Mynd 5: Afleiða fallsins (2) clamp-að á milli −1 og 1

Á myndum 4 og 5 sjáum við allar 20 fyrstu ræturnar. Við notum þetta til að ákvarða x_0 fyrir `newton`.

Sem milli skref skoðum við afleiðu fallsins á mynd 5, þar sem er búið að finna hápunkta og lágpunkta.

Það er gengið úr skugga að nákvæmlega fyrstu 20 rætur eru fundnar með því að sjá að við erum bara að leita á bili sem getur haft 20 rætur og ekki fleiri. Einnig sést í töfluni að ekkert rótana eru eins og þær eru nákvæmlega 20 að auki er lotan mjög nálægt π eftir 3 rætur og það skref tryggir einnig að við missum ekki af rót.

Skilgreinum fallið til að reikna ω

```
function y=freq(k,EI,lambda)
    y=sqrt(abs(k.^4*EI/lambda));
end
```

Hér er lykkja sem reiknar 20 rætur, og setur þær síðan inní `freq(k,EI,lambda)` fallið og reiknar horntíðni sem samsvarar þeim rótum sem eru fundnar. Fáum `xn=2` frá mynd 2. `tol=1e-15` er valið til að reikna stærstu ræturnar rétt.

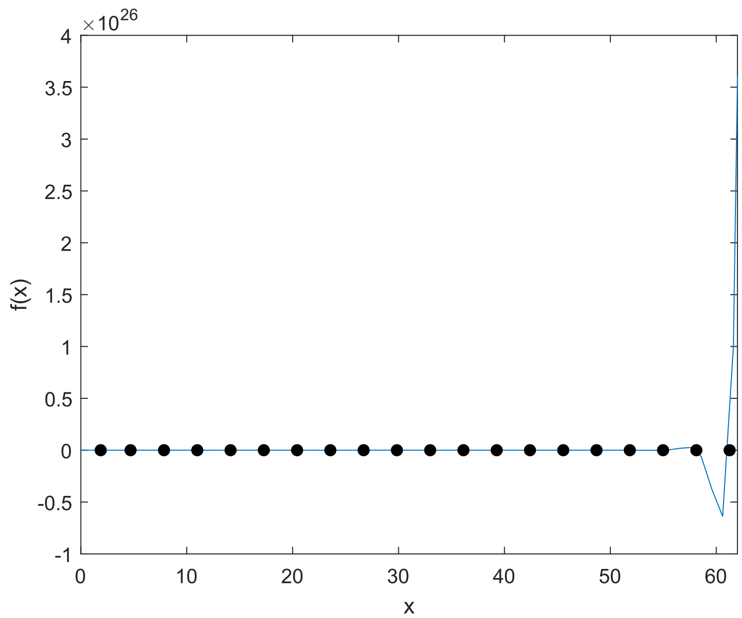
```
length=30; %mm
tol=1e-15;
xn=2;
newton_roots=[];
for i=1:20
    root=newton(xn,tol);
    xn=xn+pi;
    newton_roots=[newton_roots root];
end

insert=f(newton_roots); %skoða hvort f(root)=0 og ganga þannig úr skuggum um að þetta
sé alveg örugglega rót
frequencies=freq(newton_roots/length,EI,lambda);
```

Hér að neðan má sjá töflur með niðurstöðum. ræturnar eru réttar að 14 aukastöfum en við sýnum 4.

Tafla 1: Töflur af rótum á falli (2) kL og samsvarandi tíðnum ω

Rót #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rót kL	1.8751	4.6941	7.8548	10.9955	14.1372	17.2788	20.4204	23.5619	26.7035	29.8451
$\omega\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$	456	2858	8002	15680	25921	38721	54082	72003	92483	115524

Rót #	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rót kL	32.9867	36.1283	39.2699	42.4115	45.5531	48.6947	51.8363	54.9779	58.1195	61.2611
$\omega\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$	141125	169286	200007	233288	269130	307531	348492	392014	438096	486737



Mynd 6: $f(x)$ (Fall (2)) plottað: Eftir því sem x stækkar, stækkar útslag sveiflunnar. Útslag x eykst svo mikið að fyrri sveiflur eru ósýnilegar. Sýnir nauðsýn á fleiri aukastöfum til að finna stærri rætur $f(x)$ (Svartir punktar eru rætur)

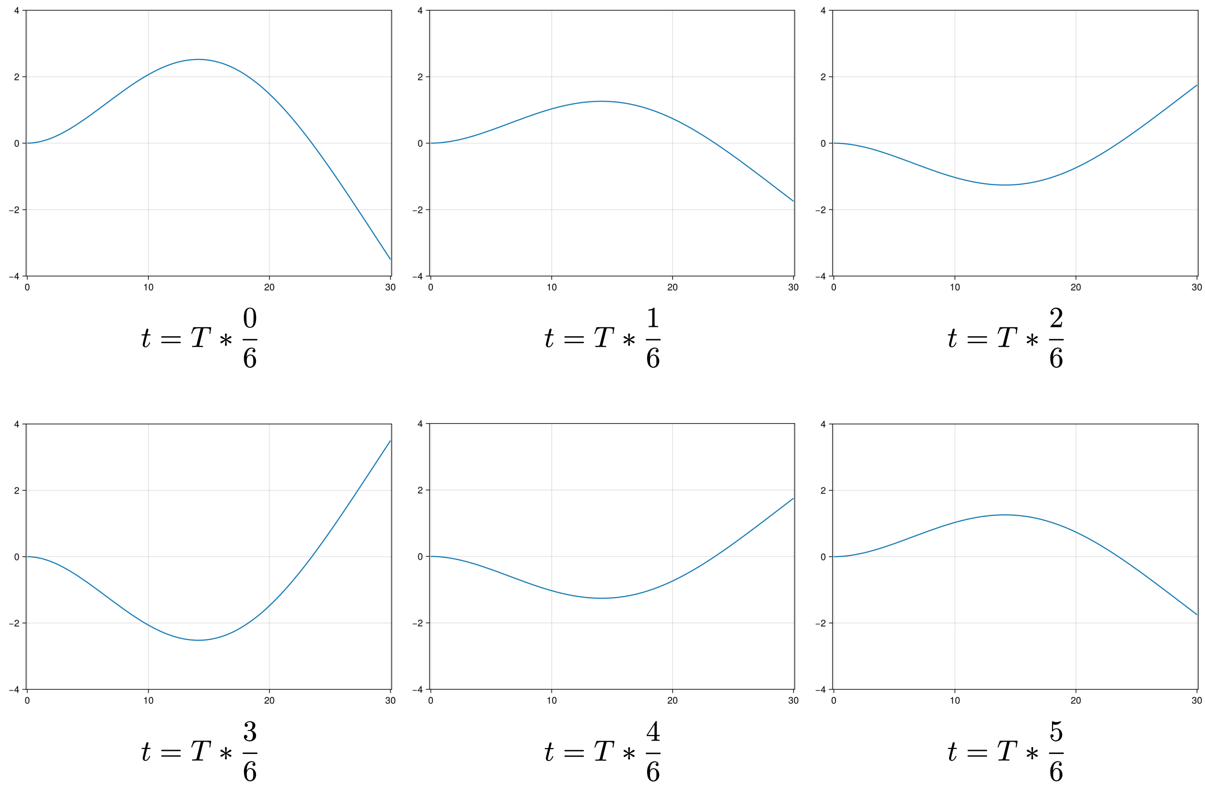
6. Við notum gildi á ω og k sem hafa verið reiknuð í dæmi 4. Búið til hreyfimynd af stönginni. Hér má endilega hafa skjölin **hreyfi.m** og **hreyfi.py** á Canvas sem fyrirmynd.

Út frá lýsingu verkefnissins smíðuðum við föllin A og B í MATLAB®:

$$y(x,t) = A(x)B(t)$$
$$A(x) = \cosh(kx) - \cos(kx) + \frac{\cos(kL) + \cosh(kL)}{\sin(kL) + \sinh(kL)}(\sin(kx) - \sinh(kx))$$
$$B(t) = \frac{\delta}{A(L)}\cos(\omega t)$$

```
function y = A(x,k,L)
    y = cosh(k*x) - cos(k*x) + ((cos(k*L) + cosh(k*L))/(sin(k*L) +
sinh(k*L)))*(sin(k*x) - sinh(k*x));
end

function y = B(t,k,delta,L,omega)
    y = delta/A(L,k,L)*cos(omega*t)
end
```

Þessi föll eru síðan notuð með **hreyfi.m** skránni frá Canvas og úr kemur myndband sem fylgir með þessum skilum.



Mynd 7: Hér sést hliðrun stangarinnar í mismunandi tíma punktum, þ.s. $T = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx 2.1986$ ms er lota $B_2(t)$.