Háskólinn í Reykjavík

T-406-TOLU

Töluleg Greining

Skilaverkefni 4

Höfundar

Ásdís Erla Erlingsdóttir
asdise21@ru.is

Halldór Jökull Ólafsson
halldoro22@ru.is

Helgi Snær Elíasson
helgie22@ru.is

Hlynur Ingi Árnason
hlynura22@ru.is

Torfi Þorgrímsson
torfi22@ru.is

Umsjónarmenn

Ingunn Gunnarsdóttir
ingunngunnars@ru.is

Olivier Moschetta
olivierm@ru.is

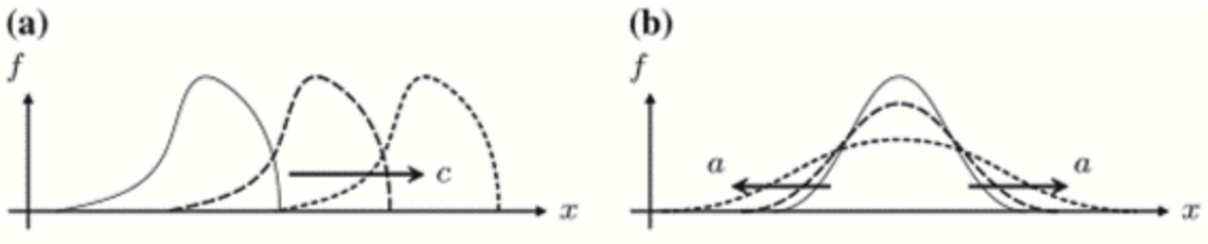
2024-12-13

Efnisyfirlit

Myndaskrá

Inngangur

Markmið verkefnisins er að læra hvernig mengunarefni dreifist á yfirborði ár eða stöðuvatns eftir leka. Tveir þættir eru hér að verki. Í fyrsta lagi er meðburður (e. advection) sem er valdið af straumi í ánni, og öðru lagi útbreiðsla (e. diffusion), sjá mynd hér að neðan:



Hægt er að sýna að styrkur mengunarefnis $C(x, t)$ sem er mælt í $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ uppfyllir hlutafleiðujöfnu sem nefnist advection-diffusion equation á ensku:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\frac{\partial C}{\partial x} \tag{1}$$

Hér er v hraði straumsins og D er sveimsstuðull. Jafnan er leyst fyrir $t \geq 0$ og $0 \leq x \leq L$ (við skoðum aðeins takmarkað svæði í ánni en við stjórnum hversu stórt það er). Svo að hlutafleiðujafnan sé leysanleg þarf einnig að setja fram upphafsgildi

$$C(x, 0) = c_0(x) \quad (0 \leq x \leq L) \tag{2}$$

sem lýsir ástandi árinnar í upphafi. Fallið $c_0(x)$ verður breytilegt eftir liðum í verkefninu. Einnig eru gefin jaðargildi í $x = 0$ og $x = L$. Vinstra megin á jaðrinum þ.e. $x = 0$ er Dirichlet jaðarskilyrði

$$C(0, t) = f(t) \quad (t \geq 0) \tag{3}$$

þannig að styrkur mengunarefnisins er alltaf þekkt þar. Aftur verður fallið $f(t)$ breytilegt í verkefninu. Hægra megin í $x = L$ verða hins vegar mismunandi jaðarskilyrði.

Eftirfarandi stuðlar eru fastir út verkefnið:

$$v = 0.1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} \quad D = 0.01\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{min}}$$

Strjálun og fyrsta keyrslan

Hlutafleiðujafnan er ekki ólík varmaleiðnijöfnu og við notum svipað strjálunarmynstur. Við strjálum x-ásinn

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = L$$

Skrefastærð er þar $h = \frac{L}{m}$. Ef við leysum jöfnuna til tímans $t = T$ er tímabilið $[0, T]$ strjálað sömuleiðis:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$$

með tímaskrefastærð $k = \frac{T}{n}$. Við viljum reikna nálgun að lausn í $x = x_i$ og $t = t_j$ sem er táknuð með $w_{i,j}$.

Dæmi 1

Notið mismunarformúlur úr tölulegri diffrun til að fá strjála hlutafleiðujöfnu (1) í innri punkti (x_i, t_j) þar sem $1 \leq i \leq m-1$ og $1 \leq j \leq n$:

$$w_{i,j} - w_{i,j-1} = \frac{kD}{h^2}\left(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\right) - \frac{kv}{2h}\left(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}\right) \tag{4}$$

Sýnið alla útreikninga.

Svar

Jafna (4) notar aðeins 1. stigs aðferð fyrir tíma afleiðuna, við skulum nota 2. stigs aðferð.

Skrifum formúlur fyrir mismunaraðferðir:

$$\text{Central } f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad f_i'' \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \tag{5.1}$$

$$\text{Forward } f_i' \approx \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} \qquad f_i'' \approx \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h^2} \tag{5.2}$$

$$\text{Backward } f_i' \approx \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} \qquad f_i'' \approx \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{h^2} \tag{5.3}$$

$$\approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

Við endurskrifum jöfnu (1) á „strjálan" hátt til að gera það augljóst hvaða vísitölu er verið að „diffra" eftir.

$$C_{i,j'} = DC_{i'',j} - vC_{i',j} \qquad \left(\text{Hér er } C_{i'',j} \text{ umritun á } \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right) \tag{6}$$

Umritum svo jöfnu (6) með jöfnu (5)

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} = D\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} - v\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}$$

$$\alpha = \frac{kD}{h^2}, \quad \beta = \frac{vk}{2h} \tag{7.1}$$

$$w_{i,j-1} = w_{i-1,j}(-\beta - \alpha) + w_{i,j}(1 + 2\alpha) + w_{i+1,j}(\beta - \alpha) \tag{7.2}$$

Við notum jöfnu (7) til að ítra okkur áfram í tíma. Hinsvegar gætum við einnig notfært okkur betri nálgun, jöfnu 5.3, í seinni skrefum (þ.e. eftir að við vitum bæði $w_{i,0}$ og $w_{i,1}$) fyrir $\frac{\partial C}{\partial t}$ þannig að jafna (6) verður:

$$\frac{3w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{2k} = D\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h^2} - v\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}$$

Við umritun og þá verður jafnan okkar eins og jafna (8) þar sem α og β eru eins og jafna 7.1

$$4w_{i,j-1} - w_{i,j-2} = w_{i-1,j}(-2\beta - 2\alpha) + w_{i,j}(4\alpha + 3) + w_{i+1,j}(2\beta - 2\alpha) \tag{8}$$

Dæmi 2

Í þessari keyrslu gefum við okkur upphafsgildi

$$C(x,0) = e^{-\frac{(x-1)^2}{D}} \quad (0 \leq x \leq L)$$

sem lýsir ástandi mengunar í upphafi. Bæði í $x = 0$ og $x = L$ setjum við einföld Dirichlet skilyrði

$$C(0,t) = C(L,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

Ritið strjálaðar jöfnur $\left(\text{s.s. fyrir } w_{i,j}\right)$ sem samsvara þessum þremur skilyrðum. Sýnið útreikninga.

Svar

Upphafsskilyrði og jaðarskilyrði

Verkefnið felur í sér að strjála upphafs- og jaðarskilyrði fyrir aðstreymis- og útbreiðslujöfnuna. Hér eru skilyrðin í strjáluðu formi.

Upphafsskilyrði

Upphafsskilyrðið er gefið sem:

$$C(x,0) = e^{-\frac{(x-1)^2}{D}} \quad 0 \leq x \leq L$$

Við strjálum x-ásinn með punktum $x_i = i \cdot h$, þar sem $h = \frac{L}{m}$, og fáum:

$$w_{i,0} = e^{-\frac{(i \cdot h - 1)^2}{D}} \quad \text{fyrir } i = 0, 1, ..., m$$

Þetta lýsir styrk mengunar við $t = 0$ fyrir alla staðarpunkta.

Jaðarskilyrði

Vinstri jaðar $(x = 0)$

Vinstri jaðarskilyrðið er gefið sem:

$$C(0,t) = 0 \quad \text{fyrir} \quad t \geq 0$$

Í strjáluðu formi:

$$w_{0,j} = 0 \quad \text{fyrir öll} \quad j \geq 0$$

Hægri jaðar $(x = L)$

Hægri jaðarskilyrðið er gefið sem:

$$C(L,t) = 0 \quad \text{fyrir} \quad t \geq 0$$

Í strjáluðu formi:

$$w_{m,j} = 0 \quad \text{fyrir öll} \quad j \geq 0$$

Samantekt um strjálu jöfnur

1. Upphafsskilyrði:

$$w_{i,0} = e^{-\frac{(i \cdot h - 1)^2}{D}} \qquad \text{fyrir } i = 0, 1, ..., m$$

2. Vinstri jaðarskilyrði:

$$w_{0,j} = 0 \qquad \text{fyrir } j = 0, 1, ..., n$$

3. Hægri jaðarskilyrði:

$$w_{m,j} = 0 \qquad\qquad \text{fyrir } j = 0, 1, ..., n$$

Þessi framsetning sýnir strjáluðu útgáfuna af upphafs- og jaðarskilyrðum.

Dæmi 3

Umritið jöfnurnar úr **1** og **2** sem línulegt jöfnuhneppi

$$A \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{m,j} \end{pmatrix} = \mathbf{b}_j$$

þar sem A er fast fylki og vigurinn $\mathbf{b}_j$ er háður gildunum í tíma $t = t_{j-1}$. Hér þurfa A og $\mathbf{b}_j$ að koma skýrt fram ásamt útleiðslu.

Svar

Notum jöfnu (7) úr dæmi **1** þar sem notast var við 2. stigs aðferð sem gefur fylki A (9.2) fyrir utan fyrstu og síðustu röðina. Fylkið A eru stuðlarnir í línulega jöfnuhneppinu sem er leyst í hverri ítrun.

Fyrsta og sýðasta lína A og $\mathbf{b}_j$ samsvara Dirichlet jaðarskylirðum, s.s. $w_{0,j} = 0$ og $w_{m,j} = 0$. Restin af línunum í A og $\mathbf{b}_j$ samsvara jöfnu (7). Einnig er sýnt í jöfnu 9.1 upphafsskylirðin frá dæmi **2**

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ w_{1,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{i,0} = e^{-\frac{(i \cdot h - 1)^2}{D}} \tag{9.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

Hinsvegar ef við endurtökum útreikninga en notum jöfnu (8) sem er umritun á jöfnu (7) í staðinn þá fáum við mögulega betri nálgun.

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 4w_{1,j-1} - w_{1,j-2} \\ \vdots \\ 4w_{m-1,j-1} - w_{m-1,j-2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta-2\alpha & 3+4\alpha & 2\beta-2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta-2\alpha & 3+4\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\beta-2\alpha & 3+4\alpha & 2\beta-2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2\beta-2\alpha & 3+4\alpha & 2\beta-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

Dæmi 4

Skrifið forrit með inntaksbreytum T, m and n sem leysir hlutafleiðujöfnuna á tímabilinu $[0, T]$ miðað við jaðar- og upphafsskilyrði hér að ofan. Útkoman á að vera fylki sem inniheldur öll gildi á $w_{i,j}$ þar sem $0 \leq i \leq m$ og $0 \leq j \leq n$. Sem prufukeyrslu notum við gildin

$$L = 5 \quad T = 30 \quad m = n = 100$$

Sýnið myndrænt dreifingu mengunarefnis í tímabili $[0, T]$ á tvo vegu, annars vegar hreyfimynd og hins vegar graf af $C(x, t)$ sem fall af x fyrir nokkur jafndreifð gildi á t.

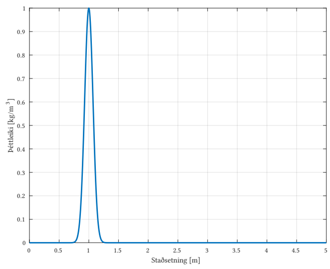
Tjékk. Ef liðirnir 1-4 eru rétt gerðir á að athuga að styrkur mengunarefnis í $t = 30$ sé mest 0.0852 nær $x = 4$. Hegðunin nær $x = L$ á að vera smá óeðlileg en við lögum þetta í seinni hluta.

Svar

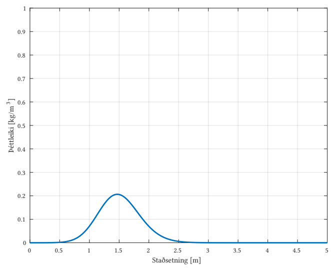
Hér notum við **`iterdiffv1.m`** skjalið til að reikna öll mengunarstig í tímum t_1 til t_n, þessi kóði er leiddur út frá jöfnu (9).

```matlab
function [us,ts,xs] = iterdiffv1(T,N,M)
    D = 0.01; v = 0.1; L = 5; h = L/M; k = T/N;
    ts = 0:k:T; xs = 0:h:L;
    alpha = k*D/h^2; beta  = v*k/2/h;

    A = zeros(M+1,M+1);
    A(1,1) = 1; A(end,end) = 1;
    for i = 2:M
        A(i,i-1) = -beta-alpha;
        A(i,i) = 1+2*alpha;
        A(i,i+1) = beta-alpha;
    end

    us = zeros(M+1,N+1);
    us(2:M,1) = exp(-(h*(1:M-1) -1) .^2/D);
    for i = 2:N+1
        us(:,i) = A\us(:,i-1);
        us(1,i) = 0; us(end,i) = 0;
    end
end
```

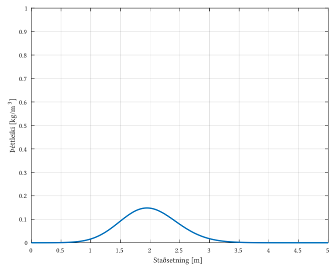
Þessi kóði framleiðir svo mynd 1



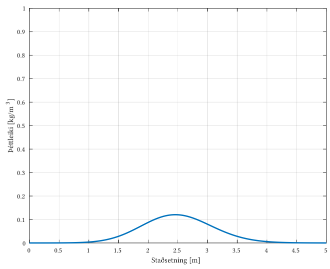
(a) $t = 0\frac{T}{6}$



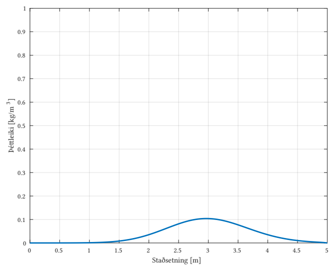
(b) $t = 1\frac{T}{6}$



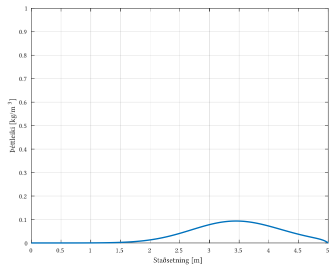
(c) $t = 2\frac{T}{6}$



(d) $t = 3\frac{T}{6}$



(e) $t = 4\frac{T}{6}$



(f) $t = 5\frac{T}{6}$

Mynd 1: Jafna (1) leyst með aðferð í jöfnu (9) í mismunandi tímapunktum

Notast var svo við **hreyfi.m** frá canvas til þess að setja fram hreyfimynd sem finnst í skjali **pollutant_animation1.MP4**. Gert var líka tjékk fyrir styrknum á mengunarefninu í $t = 30s$ sem reyndist vera 0.085169 sem er sirka 0.0852 við $x = 3.95$ sem er rétt.

Myndirnar voru framleiddar með **Verkefni4_Final.m** í dæmi 4 myndband hlutanum.

Einnig var notað jöfnu (10) til að leysa jöfnu (1), til þess að skoða hve mikið betri hún er; þannig var skrifað kóðan í **iterdiffv2.m** sem er eftirfarandi:

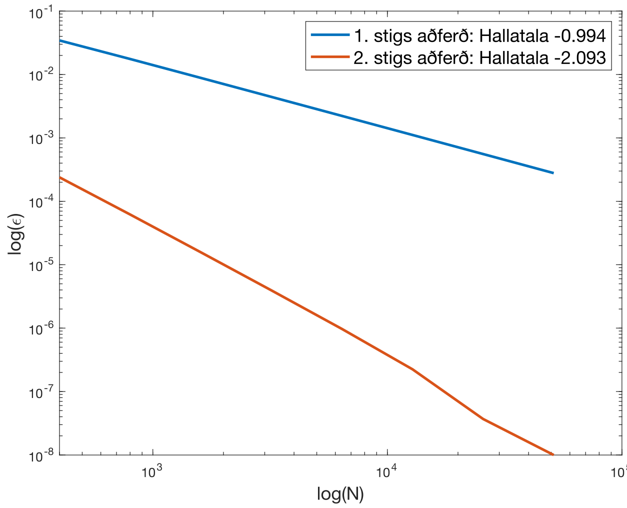
```matlab
function [us,ts,xs] = iterdiffv2(T,N,M)
    D = 0.01; v = 0.1; L = 5; h = L/M; k = T/N;
    alpha = k*D/h^2; beta  = v*k/2/h;
    ts = 0:k:T; xs = 0:h:L;
    A = sparse(M+1,M+1);
    A(1,1) = 1; A(end,end) = 1;
    for i = 2:M
        A(i,i-1) = -beta-alpha;
        A(i,i) = 1+2*alpha;
        A(i,i+1) = beta-alpha;
    end
    A2 = sparse(M+1,M+1);
    A2(1,1) = 1; A2(end,end) = 1;
    for i = 2:M
        A2(i,i-1) = -2*beta-2*alpha;
        A2(i,i) = 3+4*alpha;
        A2(i,i+1) = 2*beta-2*alpha;
    end
    us = zeros(M+1,N+1);
    us(2:M,1) = exp(-(h*(1:M-1) -1) .^2/D);
```

```
    us(:,2) = A\us(:,1);
    bv = us(:,2);
    bv(1) = 0; bv(end) = 0;
    bv(2:M)  = 4*us(2:M,2) - us(2:M,1);
    for j = 3:N+1
        us(:,j) = A2\bv;
        us(1,j) = 0; us(end,j) = 0;
        bv(1:M+1)  = 4*us(1:M+1,j) - us(1:M+1,j-1);
    end
end
```

Til þess að bera saman jöfnur (9) og (10) þá berum við saman skekkjuna á þeim. Til þess tökum við hæsta útslag lausnar með mikið af tímasrkefum (um $N = 20000$, einnig notum við jöfnu (10) til þess) þannig að skekkjan er skilgreind:

$$\varepsilon_i = \frac{|(\max C_i(x,T)) - (\max C_{2*10^4}(x,T))|}{\max C_i(x,T)} \tag{11}$$

Þar sem i er númer fjöldi ítrana.



Mynd 2: Skekkja sem fall af tíma-ítrunum fyrir tvær aðferðirnar (9) og (10)

Mynd 2 sýnir að aðferðinn í jöfnu (10) er 2. stigs aðferð með mikið betri skekkju en jafna (9).

Kóðinn fyrir mynd 2 finnst í **`Verkefni4_Final.m`** dæmi 4 hlutanum.

Sparse uppsetning og skekkjumat

Dæmi 5

Við notum sömu upphafs- og jaðarskilyrði og í liðum 1 til 4. Erfitt er að hækka gildi á m og n (og þar af leiðandi fá hærri nákvæmni) mikið nema fylkið A í lið 3 sé skilgreint sem sparse fylki. Skrifið nýtt forrit sem skilgreinir A á þann hátt og keyrið það með inntaksbreytum

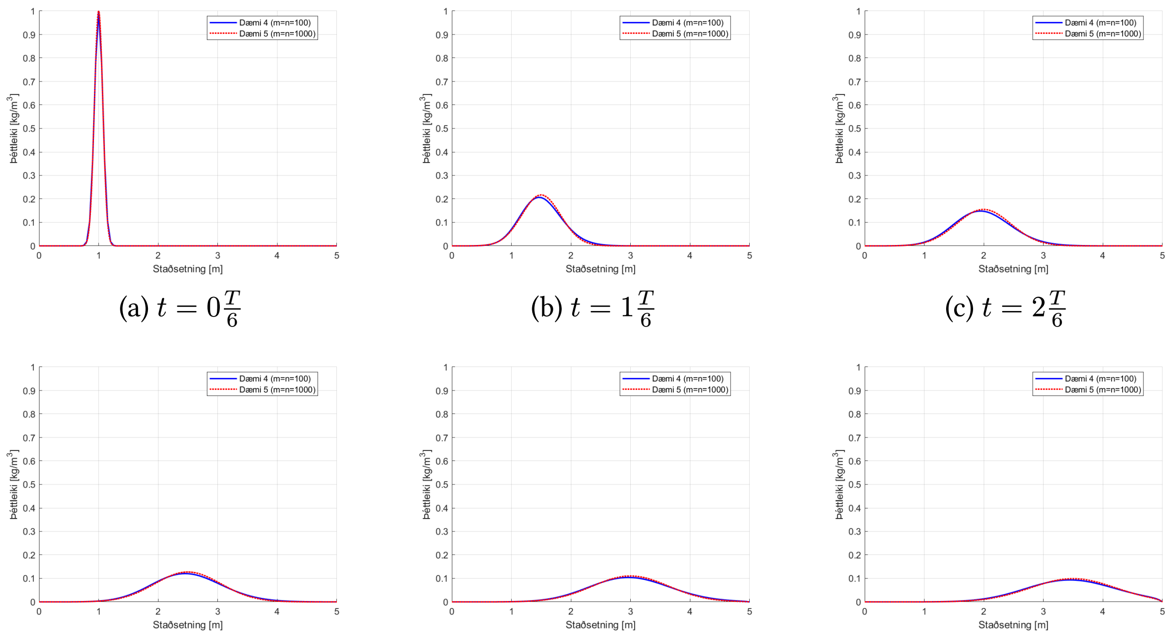
$$T = 30 \quad m = n = 1000 \tag{12}$$

Berið saman við svörin í lið 4.

Svar:
Hér notum við sama kóða og í dæmi 4 en breytum fylki A yfir í gisið (e. sparse) fylki til þess að forritið sé meira skilvirkt fyrir fleiri bil. þ.e.a.s. stærri m og n. Gisnu fylkin eru byggð með sparse fallinu í MATLAB®, sem minnkar minniskröfur og eykur hraða útreikninga fyrir stærri kerfi miðað við þéttu fylkin sem eru notuð í dæmi 4.

```matlab
function [us,ts,xs] = iterdiffv1(T,N,M)
    D = 0.01; v = 0.1; L = 5; h = L/M; k = T/N;
    ts = 0:k:T; xs = 0:h:L;
    alpha = k*D/h^2; beta  = v*k/2/h;

    A = sparse( ...
    [2:M, 2:M, 2:M],[1:M-1, 2:M, 3:M+1], ...
    [repelem(-beta-alpha,M-1), ...
     repelem(1+2*alpha,  M-1), ...
     repelem(beta-alpha, M-1), ...
    ],M+1,M+1 ...
    );
    A(1,1) = 1; A(end,end) = 3; A(end,end-1) = -4; A(end,end-2) = 1;


    us = zeros(M+1,N+1);
    us(2:M,1) = exp(-(h*(1:M-1) -1) .^2/D);
    for i = 2:N+1
        us(:,i) = A\us(:,i-1);
        us(1,i) = 0; us(end,i) = 0;
    end
end
```

Þessi kóði er síðan notaður til að plotta mynd 3.



(a) $t = 0\frac{T}{6}$ (b) $t = 1\frac{T}{6}$ (c) $t = 2\frac{T}{6}$

(d) $t = 3\frac{T}{6}$ (e) $t = 4\frac{T}{6}$ (f) $t = 5\frac{T}{6}$

Mynd 3: Jafna (1) leyst með aðferð í jöfnu (9) í mismunandi tímapunktum nema nú erum við með fylki A sem sparse fylki og $m = n = \begin{cases} 100 \\ 1000 \end{cases}$

Sjáum frá mynd 3 að þegar við notum sparse fylki að það gerir okkur kleift að notast við stærri n og m og með þeim erum við að nota smærri skrefastærðir sem mun þá gefa nákvæmara svar.

Gert var svo tjékk hér eins og í dæmi 4 hvað styrkurinn á mengunarefninu við $t = 30$ min var. Það kemur út sem 0.090274 við $x = 3.995$, nú ef það er borið saman við dæmi 4 þá var styrkurinn á mengunarefninu 0.085169 við $x = 3.95$ eins og er rætt í dæmi 4 og gerum við þá ráð fyrir því að 0.090274 sé nákvæmari lausn fyrir loka gildinu.

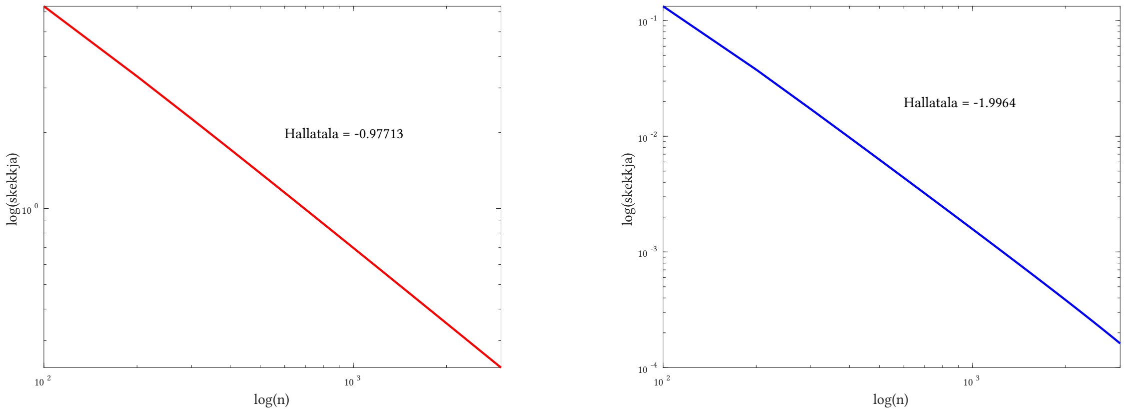
Einnig nýttum við okkur skrána **`hreyfi.m`** frá canvas eins og í dæmi 4 til þess að geta sett frá hreyfimynd sem finnst í **`Pollutant_animation2.MP4`**. Og sá kóði fynnst í **`Verkefni4_Final.m`** dæmi 5 hlutanum.

Dæmi 6

Sýnið hvernig mesti styrkur mengunarefnis í $t = 30$ þróast þegar m og n eru bæði breytileg á bilinu $[100, 3000]$, en hafið alltaf $m = n$. Notið viðmiðunargildi til að meta skekkju, safnið niðurstöðum og túlkið. Hvað virðist vera nægilega gott gildi á $m = n$ ef við viljum fá svar fyrir mesti styrkinn sem er rétt innan við 0.1%?

Svar

Við byrjum á því að ganga úr skugga um hvers stigs aðferð við notum



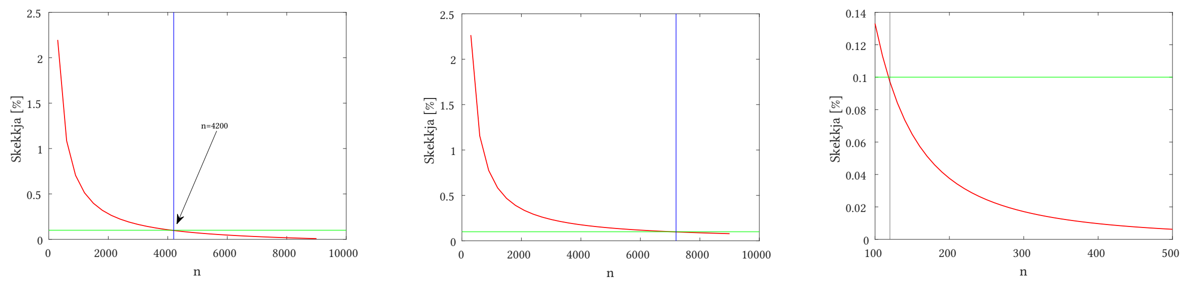
(a) Fyrsta stigs aðferð með $\mathbf{b}_j$ og fylki A frá (9) (b) Annars stigs aðferð með $\mathbf{b}_j$ og fylki A (10)

Mynd 4: Reikningur á skekkju mismunandi aðferða, þar sem sést vel að skekkja t er ráðandi.

Eftirfarandi kóði er notaður til að finna skekkju. **`iterdiffv1.m`** notast við upprunalega A og $\mathbf{b}_j$ (9), en **`iterdiffv2.m`** notast við seinna A og $\mathbf{b}_j$ (10). Í þessari röð ættu aðferðirnar að skila okkur 1. stigs og 2. stigs aðferð. notast við breytt A og $\mathbf{b}_j$.

```matlab
%% Viðmiðunargildi f dæmi 6
n_real=20000;T=30;L=5; %keyrt einusinni og geymt til að spara tíma.
[mat_real,~,~] = iterdiffv2(T,n_real,n_real);
%% Dæmi 6 t=30
close all; clc
T=30;L=5;
n_high=3200;
skekkja=zeros(2,n_high/100); %100 er skrefastærð
n=linspace(100,n_high,n_high/100);
n=round(n,0);
real_high_val=max(mat_real(:,end));
count=1;
for i=n
    [mat1,ts,x_1] = iterdiffv1(T,i,i); %fall sem notar upprunalega A fylki og b
    [mat2,td,x_2] = iterdiffv2(T,i,i); %fall sem skiptir um aðferð fyrir t eftir fyrstu ítrun
    high_val1=max(mat1(:,end)); %finnur hæsta gildið
    high_val2=max(mat2(:,end));

    skekkja1=abs(real_high_val-high_val1)/(real_high_val)*100; %reiknar skekkju
    skekkja2=abs(real_high_val-high_val2)/(real_high_val)*100;

    skekkja(1,count)=skekkja1;
    skekkja(2,count)=skekkja2;
    count=count+1;
end
logn=log(n);log_skekkja=log(skekkja);
p1 = polyfit(logn,log_skekkja(1,:),1);
p2 = polyfit(logn,log_skekkja(2,:),1);
```

Við skoðum síðan raungildi með 1.stigs aðferð með $n = 10000$ og reiknum skekkju á bili $n \in [0, 9000]$ þ.s. n stækkar um 300 í hverri ítrun fyrir mynd 5a og 5b en 10 fyrir 5c.



(a) Raungildi reiknað með 1. stigs aðferð með $n = 10000$. Skekkja sker $y = 0.1$ þegar $n \approx 4200$

(b) Raungildi reiknað með 2. stigs aðferð með $n = 10000$. Skekkja metin frá 1. stigs aðferð.

(c) Raungildi reiknað með 2. stigs aðferð með $n = 10000$. Skekkja sker $y = 0.1$ þegar $n \simeq 120$.

Mynd 5: Útreikningur á **hlutfallslegri (%)** skekkju mismunandi aðferða, þar sem sést vel að 1. stigs aðferðar er ráðandi.

Kóðinn fyrir myndir í 5 byggist á sama kóða og hér á undan, nema búið er að taka út annað `iterdiff` fallið og breytt n m.v. markmið. Það er greinilegt að 1. stigs er nægilega nákvæm, þegar $n = 4200$ er hlutfallsleg skekkja $\simeq 0.1\%$ og keyrslutími rétt undir 2 sekúndum. En það er auðvitað miðað við sömu aðferð við $n = 10000$. Í mynd 5b sést 1. stigs miðað við raungildi frá 2. stigs, þessi mynd sýnir munin gríðalega vel, skurðpunktur við 0.1% er við $n \approx 7200$, hér hefði mátt búast við öðru gildi á n, en við frekari prófanir á raungildi fyrir önnur n, t.d. $n = 1000$ (með 2. stigs aðferð) kom í ljós að skurðpunkturinn var sá sami, sem bendir til þess að aukastafir MATLAB eru takmarkandi. Í mynd 5c sýnir 2. stigs aðferðin hlutfallslega skekkju lækka mjög hratt þegar n stækkar. Skekkjan verður lægri en 0.1% þegar $n \simeq 120$, og það er miðað við 2. stigs raungildi þegar $n = 10000$. Þetta sýnir að $n = 100$ gefur skekkju $\approx 0.13\%$ sem er nægilega gott gildi. Fyrir dæmin framundan notum við því 2. stigs aðferð **`iterdiffv2.m`** með $n = 100$. Kóða fyrir sérhverja mynd má finna í aðal skjalinu **`Verkefni4_Final.m`**

Erfiðara jaðarskilyrði

Nú gerum ráð fyrir að engin mengun sé í tíma $t = 0$ þ.e.

$$C(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$

Í tíma $t = 0$ byrjar mengunarefni að leka inní ána í vinstri enda $x = 0$. Lekinn eykst línulega og nær hámarki eftir 20 mínútur. Tíu mínútur seinna er skrúfað á lekanum smám saman, aftur línulega.

$$C(0, t) = \begin{cases} t/20 & \text{ef } 0 \leq t \leq 20 \\ 1 & \text{ef } 20 \leq t \leq 30 \\ 2.5 - t/20 & \text{ef } 30 \leq t \leq 50 \\ 0 & \text{ef } t < 50 \end{cases}$$

Í $x = L$ er Neumann jaðarskilyrði

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

Það lýsir flæði út úr kerfi í þessum enda bilsins.

Dæmi 7

Skrifið nýjar strjálaðar jöfnur fyrir stuðlana $w_{i,j}$ sem samsvara skilyrðunum hér að ofan. Notið þessar jöfnur ásamt **1** til að skrifa jaðargildisverkefnið á formi

$$A_2 \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{m,j} \end{pmatrix} = \mathbf{b}_j \tag{13}$$

þar sem A_2 er fylki og vigurinn $\mathbf{b}_j$ er háður gildunum í tíma $t = t_{j-1}$. Sýnið útleiðslu.

Svar

Dirichlet jaðargildið í jöfnu (13) strjálað gefur jöfnu

$$w_{0,j} = \begin{cases} jk/20 & \text{ef } 0 \le j \le \frac{20}{T}n \\ 1 & \text{ef } \frac{20}{T}n \le j \le \frac{30}{T}n \\ 2.5 - jk/20 & \text{ef } \frac{30}{T}n \le j \le \frac{50}{T}n \\ 0 & \text{ef } j < \frac{50}{T}n \end{cases} \tag{14}$$

$$C_{(i',j)_{n,j}} = 0 \quad (j \ge 0) \tag{15}$$

Notum jöfnu 5.3 til að leiða út jöfnu útfrá (15).

$$f_i' \approx \frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2h} \Rightarrow \frac{3C_{i,j} - 4C_{i-1,j} + C_{i-2,j}}{2h} = 0$$

$$3C_{n,j} - 4C_{n-1,j} + C_{n-2,j} = 0 \tag{16}$$

Þannig að síðasta línan í A_2 fylkinu fylgir jöfnu (16) og $w_{n,j} = 0 \quad (j \ge 0)$.

Eins og áður eru stuðlar $\mathbf{b}_j$ þar sem $(1 \le i \le m-1)$ gefið með (8).

Þá fáum við að nýja A_2 og $\mathbf{b}_j$ í annari ítrun

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ 4w_{1,j-1} - w_{1,j-2} \\ \vdots \\ 4w_{m-1,j-1} - w_{m-1,j-2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\beta - 2\alpha & 3 + 4\alpha & 2\beta - 2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta - 2\alpha & 3 + 4\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\beta - 2\alpha & 3 + 4\alpha & 2\beta - 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2\beta - 2\alpha & 3 + 4\alpha & 2\beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

En fyrsta ítrun er

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} w_{0,j-1} \\ w_{1,j-1} \\ \vdots \\ w_{m-1,j-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta-\alpha & 1+2\alpha & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{18.2}$$

Dæmi 8

Skrifið forrit sem leysir þetta jaðargildisverkefni. Þið fáið að stjórna gildi á L, T , m og n en hafið gjarnan fyrri liði til hliðsjónar. Sýnið niðurstöðurnar myndrænt og túlkið.

Svar

Gildin á föstunum sem við völdum voru eftirfarandi

$$L = 5, \quad T = 100, \quad m = n = 100$$

Hér notum við skjalið **iterdiffd8.m** í MATLAB sem er miðað út frá jöfnum (17) og (18)

```matlab
function [us,ts,xs] = iterdiffd8(T,N,M)
  D = 0.01; v = 0.1; L = 5; h = L/M; k = T/N;
  alpha = k*D/h^2; beta = v*k/2/h;
  ts = 0:k:T; xs = 0:h:L;

  A = sparse( ...
      [2:M, 2:M, 2:M],[1:M-1, 2:M, 3:M+1], ...
      [repelem(-beta-alpha,M-1), ...
       repelem(1+2*alpha,  M-1), ...
       repelem(beta-alpha, M-1), ...
      ],M+1,M+1 ...
  );
  A(1,1) = 1; A(end,end) = 3; A(end,end-1) = -4; A(end,end-2) = 1;

  A2 = sparse( ...
      [2:M, 2:M, 2:M],[1:M-1, 2:M, 3:M+1],...
      [repelem(-2*beta-2*alpha,M-1), ...
       repelem(3+4*alpha,       M-1), ...
       repelem(2*beta-2*alpha, M-1), ...
      ], M+1,M+1 ...
  );
  A2(1,1) = 1; A2(end,end) = 3; A2(end,end-1) = -4; A2(end,end-2) = 1;

  us = zeros(M+1,N+1);
```

```matlab
    bound = arrayfun(@(j) f(j,T,N), 1:N+1);
    us(1,:) = bound;
    us(:,2) = A\us(:,1);
    us(1,2) = bound(2);

    bv = us(:,2);
    bv(end) = 0;
    bv(2:M) = 4*us(2:M,2) - us(2:M,1);
    for j = 3:N+1
        us(:,j) = A2\bv;
        us(1,j) = bound(j);
        bv(1) = bound(j); bv(end) = 0;
        bv(2:M) = 4*us(2:M,j) - us(2:M,j-1);
    end
end
```

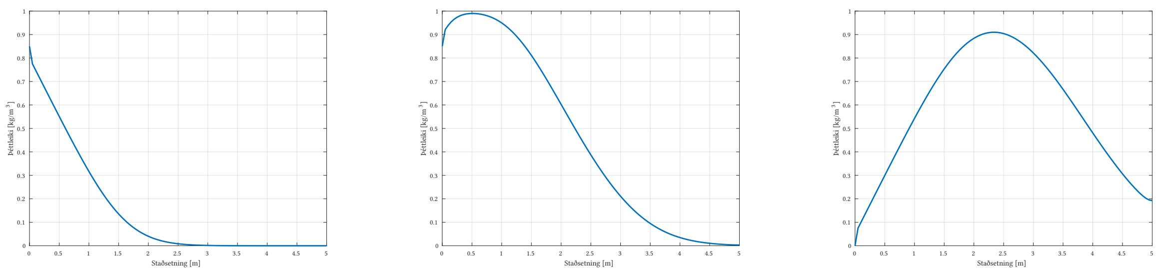
sem notast einnig við fallið `f` sem skilgreint er í sama skjali fyrir neðan `iterdiffd8` fallið:

```matlab
function C = f(j,T,N)
    k = T/N;
    if j <= 20/T*N
        C = (j-1)*k/20;
    elseif j >= 20/T*N && j <= 30/T*N
        C = 1;
    elseif j >= 30/T*N && j <= 50/T*N
        C = 2.5 - (j-1)*k/20;
    else
        C = 0;
    end
end
```

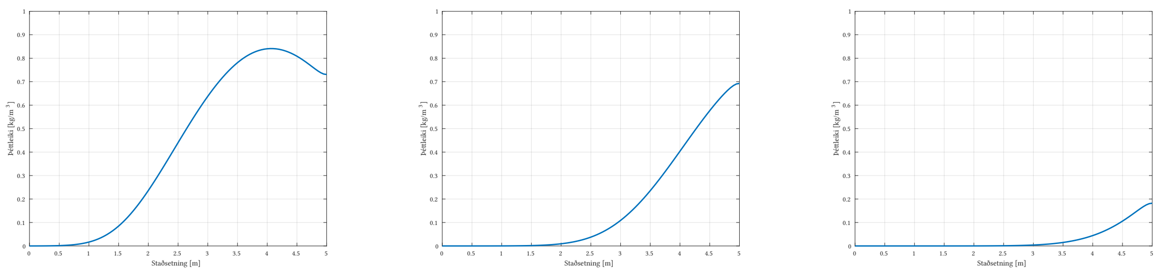
Aðal forritið er svo eftirfarandi:

```matlab
T = 100; N = 100; M = N; k = T/N;
[us1,ts1,xs1] = iterdiffd8(T,N,M);
```

Myndrænt má sjá myndband **`Pollutant_Animation_d8.mp4`** sem fylgir með í skilum. Eftirfarandi myndir sýna lausnir jaðargildisverkefnisins á tilgreindum tímapunktum. Sleppt er við $t = 0$ vegna þess að skv. nýju upphafsgildunum er þéttleiki mengunarefnisins $0 \forall x$ við $t = 0$ sem væri óáhugavert graf.



(a) $t = 1\frac{T}{6}$ (b) $t = 2\frac{T}{6}$ (c) $t = 3\frac{T}{6}$



(d) $t = 4\frac{T}{6}$ (e) $t = 5\frac{T}{6}$ (f) $t = 6\frac{T}{6}$

Mynd 6: Jafna (1) leyst með erfiðari jaðarskilyrðum á mismunandi tímapunktum.

Dæmi 9

Segjum að í tíma t er mesti styrkur mengunarefnis $C_{\max(t)}$ og að það mælist í staðsetningu $x_{\max(t)}$. Teiknið gröf þessara tveggja falla á nægilega löngu tímabili.

Svar

Hér er notað **d9plot.m** skjalið sem fylgir með skilum og er einnig í **Verkefni4_Final.m**. Hámarksgildin eru svo reiknuð með eftirfarandi kóða í línu 1-5. Notast er við **iterdiffd8.m** sem er skilgreint í dæmi 8.

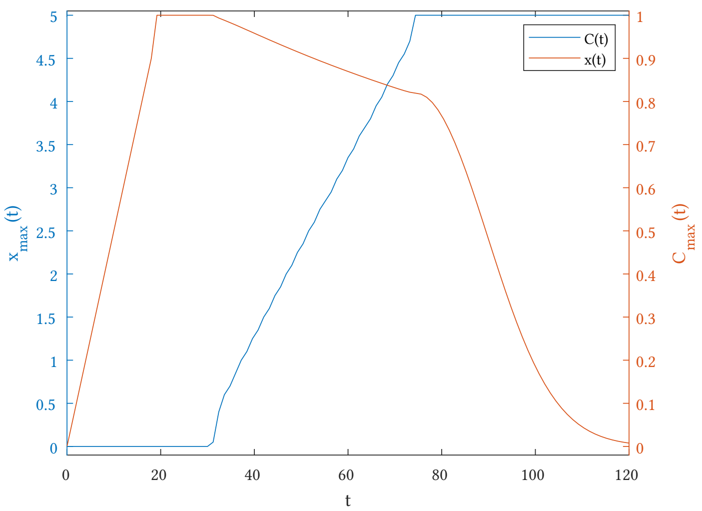
```matlab
1 N = 100; M = N; T = 120;
2
3 [us1,ts,xs1] = iterdiffd8(T,N,M);
4
5 [M,I] = max(us1,[], 1);
```

Sýnishorn 1: Kóðinn til að reikna mestu mengun fyrir hvern tímapunkt

Lausnin við þessu er síðan plottað á graf þ.s. hámarksgildin á C og x eru sýnd með tvem mismunandi y-ásum.

```matlab
yyaxis right
plot(ts,M)
ylim([-0.02,1.01])
hold on
ylabel("C_{max}(t)")
yyaxis left
plot(ts,xs1(I))
ylim([-0.1,5.05])
legend("C(t)", "x(t)")
```

```
xlabel("t")
ylabel("x_{max}(t)")
hold off
```



Mynd 7: Mynd af mestu mengun og staðsetningu mestu mengun sem föll af tíma. Það sést að mesta mengun helst í byrjun á meðan mengun eykst, og færist svo í enda þegar mengun byrjar að minnka.

Sjálfstæð vinna

Haldið áfram að rannsaka jöfnuna. Til dæmis er hægt að skoða eftirfarandi hugmyndir.

- Nota önnur raunhæf upphafs- og jaðarskilyrði. Túlka niðurstöðurnar.
- Framkvæma Crank-Nicolson aðferð til að leysa hlutafleiðujöfnuna. Gert er grein fyrir henni í glósunum. Berið saman nákvæmni í aðferðunum tveimur.
- Skoða almennari jöfnu þar sem straumhraði v er orðinn háður staðsetningu x. Jafnan er þá

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x)\frac{\partial C}{\partial x} - v'(x)C \tag{19}$$

Nota má sömu upphafs- og jaðarskilyrði og í verkefninu, en þá minnst tvö dæmi um fall $v(x)$.

Svar

Leiðum út frá jöfnu (19) nýjar jöfnur fyrir A_1 og A_2.

Fyrst fyrir skref eitt

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} = \frac{D}{h^2}(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) - \frac{v(x_i)}{2h}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - v'(x_i)w_{i,j}$$

Hér er sleppt nokkrum skrefum því þau eru nákvæmlega eins og í dæmi 1, einnig er notað aðrar skilgreiningar á stuðlunum α o.s.frv. til þess að spara pláss seinna í jöfnu (22).

$$\alpha_1(x_i) = -\frac{v(x_i)k}{2h} - \frac{kD}{h^2}, \quad \beta_1(x_i) = 1 + 2\frac{kD}{h^2} + kv'(x_i), \quad \gamma_1(x_i) = \frac{v(x_i)k}{2h} - \frac{kD}{h^2} \tag{20.1}$$

$$w_{i,j-1} = w_{i-1,j}\alpha_1(x_i) + w_{i,j}\beta_1(x_i) + w_{i+1,j}\gamma_1(x_i) \tag{20.2}$$

Næst fyrir seinni skrefin:

$$\frac{3w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{2k} =$$

$$= \frac{D}{h^2}(w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}) - \frac{v(x_i)}{2h}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - v'(x_i)C_{i,j}$$

$$-4w_{i,j-1} + w_{i,j-2} = w_{i-1,j}2k\left(\frac{D}{h^2} + \frac{v(x_i)}{h}\right)$$

$$+w_{i,j}\left(-3 - 2k\left(v'(x_i) + 2\frac{D}{h^2}\right)\right) + w_{i+1,j}2k\left(\frac{D}{h^2} - \frac{v(x_i)}{2h}\right)$$

$$\alpha_2 = -2k\left(\frac{D}{h^2} + \frac{v(x_i)}{h}\right) \quad \beta_2 = \left(3 + 2k\left(v'(x_i) + 2\frac{D}{h^2}\right)\right) \quad \gamma_2 = -2k\left(\frac{D}{h^2} - \frac{v(x_i)}{2h}\right) \tag{21.1}$$

$$4w_{i,j-1} - w_{i,j-2} = \alpha_2 w_{i-1,j} + \beta_2 w_{i,j} + \gamma_2 w_{i+1,j} \tag{21.2}$$

Með sömu jaðar- og upphafsskilyrði og dæmi 7, þá er $\mathbf{b}_j$ eins, og þá leiðum við A_1 og A_2 út frá jöfnum (20) og (21).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1(x_1) & \beta_1(x_1) & \gamma_1(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(x_2) & \beta_1(x_2) & \gamma_1(x_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_1(x_{m-2}) & \beta_1(x_{m-2}) & \gamma_1(x_{m-2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1(x_{m-1}) & \beta_1(x_{m-1}) & \gamma_1(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{22.1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2(x_1) & \beta_2(x_1) & \gamma_2(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(x_2) & \beta_2(x_2) & \gamma_2(x_2) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_2(x_{m-2}) & \beta_2(x_{m-2}) & \gamma_2(x_{m-2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2(x_{m-1}) & \beta_2(x_{m-1}) & \gamma_2(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{22.2}$$

Einnig skilgreinum við hraðann (v) sem fall af staðsetningu (x) og afleiðu þess á tvo vegu, fyrst í jöfnu (23) og seinna í jöfnu (24):

$$v(x) = (x^2 + 6x + 3)\frac{\sin(x^2)^2}{300} \tag{23.1}$$

$$v'(x) = (6 + 2x)\frac{\sin(x^2)^2}{300} + x(3 + 6x + x^2)\frac{\sin(2x^2)}{150} \tag{23.2}$$

$$v(x) = \frac{x^2 + 6x + 3}{300} \tag{24.1}$$

$$v'(x) = \frac{6 + 2x}{300} \tag{24.2}$$

Þá fáum við útfrá jöfnum 22.1 og 22.2 eftirfarandi kóða

```matlab
function [us,ts,xs] = iterdiffsjalf(T,N,M)
D = 0.01; L = 5; h = L/M; k = T/N;
```

```
ts = 0:k:T; xs = 0:h:L;

alpha1 = @(j) -v(j*h)*k/2/h - k*D/h^2;
beta1 = @(j) 1+2*k*D/h^2 - k*vp(j*h);
gamma1 = @(j) v(j*h)*k/2/h - k*D/h^2;

alpha2 = @(j) -2*k*(D/h^2 + v(j*h)/h/2);
beta2 = @(j) -(-3-2*k*(vp(j*h) + 2*D/h^2));
gamma2 = @(j) -2*k*(D/h^2 - v(j*h)/2/h);

A = sparse( ...
    [2:M, 2:M, 2:M],[1:M-1, 2:M, 3:M+1], ...
    [arrayfun(alpha1, 1:M-1), ...
     arrayfun(beta1, 1:M-1), ...
     arrayfun(gamma1, 1:M-1), ...
    ],M+1,M+1 ...
);
A(1,1) = 1; A(end,end) = 3; A(end,end-1) = -4; A(end,end-2) = 1;

A2 = sparse( ...
    [2:M, 2:M, 2:M],[1:M-1, 2:M, 3:M+1],...
    [arrayfun(alpha2, 1:M-1), ...
     arrayfun(beta2, 1:M-1), ...
     arrayfun(gamma2, 1:M-1), ...
    ], M+1,M+1 ...
);
A2(1,1) = 1; A2(end,end) = 3; A2(end,end-1) = -4; A2(end,end-2) = 1;

us = zeros(M+1,N+1);
bound = arrayfun(@(j) f(j,T,N), 1:N+1);
us(1,:) = bound;
us(:,2) = A\us(:,1);
us(1,2) = bound(2);

bv = us(:,2);
bv(end) = 0;
bv(2:M)  = 4*us(2:M,2) - us(2:M,1);
for j = 3:N+1
    us(:,j) = A2\bv;
    us(1,j) = bound(j);
    bv(1) = bound(j); bv(end) = 0;
    bv(2:M) = 4*us(2:M,j) - us(2:M,j-1);
end
end
```

Einnig er notað í kóðanum fyrir ofan eftirfarandi auka föll

```matlab
1 function y = v(x)
2     y = (x^2+6*x+3)*2*sin(x^2)^2/600;
3     % y = (x^2+6*x+3)/300;
4 end
5 function y = vp(x)
6     y = (2/600)*(6 + 2*x)*(sin(x^2)^2) + (2/300)*x*(3 + 6*x + x^2)*sin(2*(x^2));
7     % y = (1/300)*(6 + 2*x);
8 end
```

Sýnishorn 2: Kóði fyrir hraðaföll

Í sýnishorni 2-3 og 2-7 þá sjást línurnar fyrir hraða fallið í jöfnu (24) sem hafa verið merktar sem athugasemnd, en það má finna hvert fall fyrir sig í **iterdiffsjalf.m** og **iterdiffsjalf2.m** skránum í réttri röð.

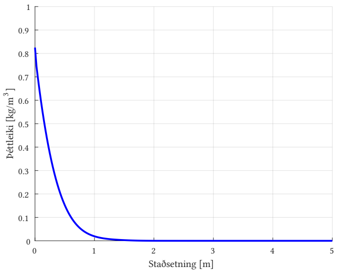
Einnig er `f` fallið það sama og í dæmi 8.

```matlab
function C = f(j,T,N)
    k = T/N;
    if j <= 20/T*N
        C = (j-1)*k/20;
    elseif j >= 20/T*N && j <= 30/T*N
        C = 1;
    elseif j >= 30/T*N && j <= 50/T*N
        C = 2.5 - (j-1)*k/20;
    else
        C = 0;
    end
end
```

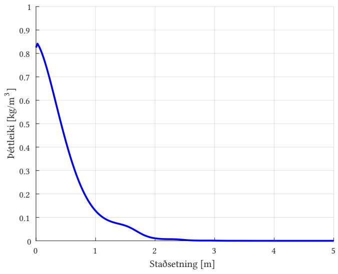
Í myndum 8 og 9 má sjá ramma úr hreyfimynd af lausnum á jöfnu (19) með hraðaföllum (23) og (24) í réttri röð og fyrir báðar myndir er $T = 100$. Hreyfimyndirnar má sjá í **Pollutant_Animationsjalf1.mp4** og **Pollutant_Animationsjalf2.mp4** og eru framleiddar með **Verkefni4_Final.m** skránni.

Það má taka eftir að myndir 8, 9 og 1 eru allar mjög mismunandi, sem gefur til kynna að flæðihraði árinnar hefur gríðarleg áhrif á hvernig mengun ferðast eftir ánni.

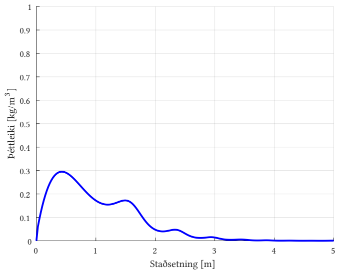
Það sést að þar sem hraðinn nálgast núll á mynd 8 þá þjappast menguninn saman, þó sést líka að við náum ekki að herma sanna fallið þar sem hraðinn verður núll (því þetta er strjál nálgun og við sækjum *örugglega* aldrei í punkt þar sem $v(x_i) = 0$), því þá myndi einn partur af ánni ekki flæða inní annan.



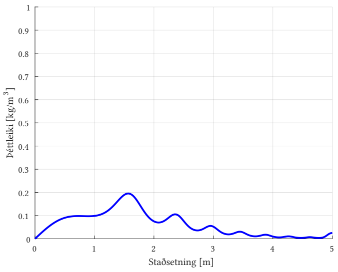
(a) $t = 1\frac{T}{6}$



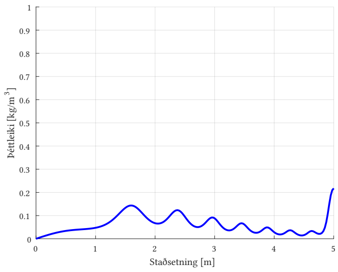
(b) $t = 2\frac{T}{6}$



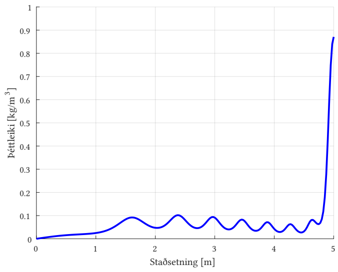
(c) $t = 3\frac{T}{6}$



(d) $t = 4\frac{T}{6}$

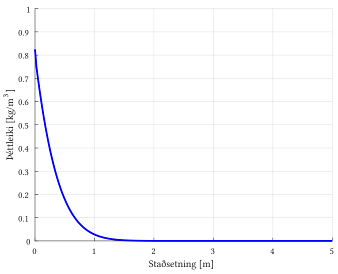


(e) $t = 5\frac{T}{6}$

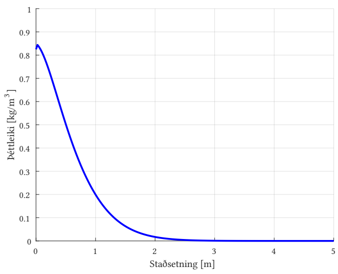


(f) $t = 6\frac{T}{6}$

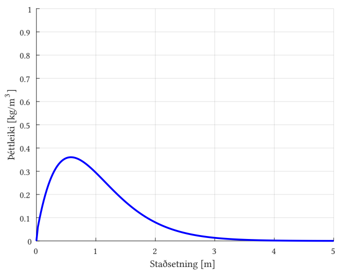
Mynd 8: Jafna (19) með hraðafalli (23) leyst með (22).



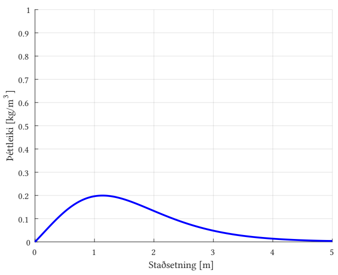
(a) $t = 1\frac{T}{6}$



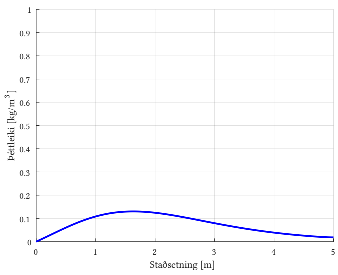
(b) $t = 2\frac{T}{6}$



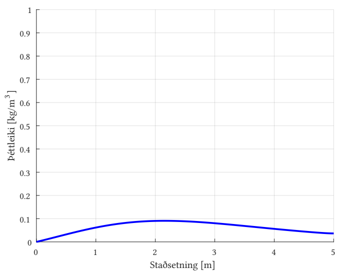
(c) $t = 3\frac{T}{6}$



(d) $t = 4\frac{T}{6}$



(e) $t = 5\frac{T}{6}$



(f) $t = 6\frac{T}{6}$

Mynd 9: Jafna (19) með hraðafalli (24) leyst með (22).