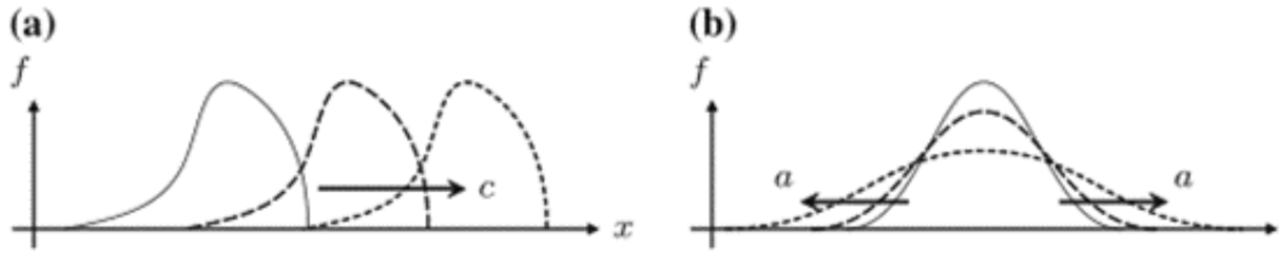
Skilaverkefni 5 í Tölulegri Greiningu

Inngangur

Markmið verkefnisins er að læra hvernig mengunarefni dreifist á yfirborði ár eða stöðuvatns eftir leka. Tveir þættir eru hér að verki. Í fyrsta lagi er meðburður (e. advection) sem er valdið af straumi í ánni, og öðru lagi útbreiðsla (e. diffusion), sjá mynd hér að neðan:



Hægt er að sýna að styrkur mengunarefnis $C(x,t)$ sem er mælt í kg/m^3 uppfyllir hlutafleiðujöfnu sem nefnist advection-diffusion equation á ensku:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\frac{\partial C}{\partial x} \tag{1}$$

Hér er v hraði straumsins og D er sveimsstuðull. Jafnan er leyst fyrir $t \geq 0$ og $0 \leq x \leq L$ (við skoðum aðeins takmarkað svæði í ánni en við stjórnum hversu stórt það er). Svo að hlutafleiðujafnan sé leysanleg þarf einnig að setja fram upphafsgildi

$$C(x,0) = c_0(x) \ (0 \leq x \leq L) \tag{2}$$

sem lýsir ástandi árinnar í upphafi. Fallið $c_0(x)$ verður breytilegt eftir liðum í verkefninu. Einnig eru gefin jaðargildi í $x = 0$ og $x = L$. Vinstra megin á jaðrinum þ.e. $x = 0$ er Dirichlet jaðarskilyrði

$$C(0,t) = f(t) \ (t \geq 0) \tag{3}$$

þannig að styrkur mengunarefnisins er alltaf þekkt þar. Aftur verður fallið $f(t)$ breytilegt í verkefninu. Hægra megin í $x = L$ verða hins vegar mismunandi jaðarskilyrði.

Eftirfarandi stuðlar eru fastir út verkefnið:

$$v = 0.1\,\mathrm{m/min} \qquad D = 0.01\,\mathrm{m^2/min}$$

Strjálun og fyrsta keyrslan

Hlutafleiðujafnan er ekki ólík varmaleiðnijöfnu og við notum svipað strjálunarmynstur. Við strjálum x-ásinn

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = L$$

Skrefastærð er þar $h = L/m$. Ef við leysum jöfnuna til tímans $t = T$ er tímabilið $[0, T]$ strjálað sömuleiðis:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$$

með tímaskrefastærð $k = T/n$. Við viljum reikna nálgun að lausn í $x = x_i$ og $t = t_j$ sem er táknuð með $w_{i,j}$.

<u>1.</u> Notið misnunarformúlur úr tölulegri diffrun til að fá strjála hlutafleiðujöfnu (1) í innri punkti (x_i, t_j) þar sem $1 \leq i \leq m-1$ og $1 \leq j \leq n$:

$$w_{i,j} - w_{i,j-1} = \frac{kD}{h^2}\Big(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}\Big) - \frac{kv}{2h}\Big(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}\Big)$$

Sýnið alla útreikninga.

<u>2.</u> Í þessari keyrslu gefum við okkur upphafsgildi

$$C(x, 0) = e^{\frac{-(x-1)^2}{D}} \quad (0 \leq x \leq L)$$

sem lýsir ástandi mengunar í upphafi. Bæði í $x = 0$ og $x = L$ setjum við einföld Dirichlet skilyrði

$$C(0, t) = C(L, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

Ritið strjálaðar jöfnur (s.s. fyrir $w_{i,j}$) sem samsvara þessum þremur skilyrðum. Sýnið útreikninga.

<u>3.</u> Umritið jöfnurnar úr **1** og **2** sem línulegt jöfnuhneppi

$$A \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{m,j} \end{pmatrix} = \mathbf{b_j}$$

þar sem A er fast fylki og vigurinn $\mathbf{b_j}$ er háður gildunum í tíma $t = t_{j-1}$. Hér þurfa A og $\mathbf{b_j}$ að koma skýrt fram ásamt útleiðslu.

4. Skrifið forrit með inntaksbreytum T, m and n sem leysir hlutafleiðujöfnuna á tímabilinu $[0, T]$ miðað við jaðar- og upphafsskilyrði hér að ofan. Útkoman á að vera fylki sem inniheldur öll gildi á $w_{i,j}$ þar sem $0 \leq i \leq m$ og $0 \leq j \leq n$. Sem prufukeyrslu notum við gildin

$$L = 5 \qquad T = 30 \qquad m = n = 100$$

Sýnið myndrænt dreifingu mengunarefnis í tímabili $[0, T]$ á tvo vegu, annars vegar hreyfimynd og hins vegar graf af $C(x, t)$ sem fall af x fyrir nokkur jafndreifð gildi á t.

Tjékk. Ef liðirnir 1-4 eru rétt gerðir á að athuga að styrkur mengunarefnis í $t = 30$ sé mest 0.0852 nær $x = 4$. Hegðunin nær $x = L$ á að vera smá óeðlileg en við lögum þetta í seinni hluta.

Sparse uppsetning og skekkjumat

5. Við notum sömu upphafs- og jaðarskilyrði og í liðum 1 til 4. Erfitt er að hækka gildi á m og n (og þar af leiðandi fá hærri nákvæmni) mikið nema fylkið A í lið 3 sé skilgreint sem sparse fylki. Skrifið nýtt forrit sem skilgreinir A á þann hátt og keyrið það með inntaksbreytum

$$T = 30 \qquad m = n = 1000$$

Berið saman við svörin í lið 4.

6. Sýnið hvernig mesti styrkur mengunarefnis í $t = 30$ þróast þegar m og n eru bæði breytileg á bilinu $[100, 3000]$, en hafið alltaf $m = n$. Notið viðmiðunargildi til að meta skekkju, safnið niðurstöðum og túlkið. Hvað virðist vera nægilega gott gildi á $m = n$ ef við viljum fá svar fyrir mesti styrkinn sem er rétt innan við 0.1%?

Framhald á næstu síðu!

Erfiðara jaðarskilyrði

Nú gerum ráð fyrir að engin mengun sé í tíma $t = 0$ þ.e.

$$C(x, 0) = 0 \ (0 \le x \le L)$$

Í tíma $t = 0$ byrjar mengunarefni að leka inní ána í vinstri enda $x = 0$. Lekinn eykst línulega og nær hámarki eftir 20 mínútur. Tíu mínútur seinna er skrúfað á lekanum smám saman, aftur línulega.

$$C(0,t) = \begin{cases} t/20 & \text{ef} \quad 0 \le t \le 20 \\ 1 & \text{ef} \quad 20 \le t \le 30 \\ 2.5 - t/20 & \text{ef} \quad 30 \le t \le 50 \\ 0 & \text{ef} \quad t > 50 \end{cases}$$

Í $x = L$ er Neumann jaðarskilyrði

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \ (t \ge 0)$$

Það lýsir flæði út úr kerfi í þessum enda bilsins.

7. Skrifið nýjar strjálaðar jöfnur fyrir stuðlana $w_{i,j}$ sem samsvara skilyrðunum hér að ofan. Notið þessar jöfnur ásamt **1** til að skrifa jaðargildisverkefnið á formi

$$A_2 \begin{pmatrix} w_{0,j} \\ w_{1,j} \\ \vdots \\ w_{m,j} \end{pmatrix} = \mathbf{b_j}$$

þar sem A_2 er fylki og vigurinn $\mathbf{b_j}$ er háður gildunum í tíma $t = t_{j-1}$. Sýnið útleiðslu.

8. Skrifið forrit sem leysir þetta jaðargildisverkefni. Þið fáið að stjórna gildi á L, T, m og n en hafið gjarnan fyrri liði til hliðsjónar. Sýnið niðurstöðurnar myndrænt og túlkið.

9. Segjum að í tíma t er mesti styrkur mengunarefnis $C_{\max}(t)$ og að það mælist í staðsetningu $x_{\max}(t)$. Teiknið gröf þessara tveggja falla á nægilega löngu tímabili.

Sjálfstæð vinna

Haldið áfram að rannsaka jöfnuna. Til dæmis er hægt að skoða eftirfarandi hugmyndir.

- Nota önnur raunhæf upphafs- og jaðarskilyrði. Túlka niðurstöðurnar.
- Framkvæma Crank-Nicolson aðferð til að leysa hlutafleiðujöfnuna. Gert er grein fyrir henni í glósunum. Berið saman nákvæmni í aðferðunum tveimur.
- Skoða almennari jöfnu þar sem straumhraði v er orðinn háður staðsetningu x. Jafnan er þá

  $$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v(x)\frac{\partial C}{\partial x} - v'(x)C$$

  Nota má sömu upphafs- og jaðarskilyrði og í verkefninu, en þá minnst tvö dæmi um fall $v(x)$.