Háskólinn í Reykjavík

Snúningspendúll (Torsional Pendulum)

Eðlisfræði 1

Vinnuseðill fyrir verklega æfingu

Útgáfa 29-09-2022

Kennari

Andrei Manolescu, Sigurður Ingi Erlingsson, Haraldur Auðunsson

1 Tilgangur tilraunar

Í þessari tilraun verða helstu eiginleikar snúningspendúls kannaðir. Dæmi um slíkan snúningspendúl sést á mynd 14.19 í bók Young og Freedmann. En í þessari tilraun verður notast við lóðréttan gorm, ekki gangfjöður (e. mainspring) eins og í úrverkinu á mynd 14.19 sýnir. Tilgangur tilraunarinnar er að greina vindustuðul pendúlsins κ, lotu sveiflunnar T og dempunarstuðulinn b sem segir til hversu hratt sveiflurnar deyja út.

Þegar snúningspendúl er snúið um horn θ þá verkar á móti kraftvægi $\tau = -\kappa\theta$, þar sem κ er vindustuðul snúningspendúls sem ræðst af efniseiginleikum hans. Til að snúa upp á snúningspendúlinn þarf að toga í band um trissu með radíus R sem veldur kraftvægi $\tau_F = FR$. Þegar kerfinu er svo sleppt fer það að sveiflast með lotu T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \quad \text{[án dempunar]} \tag{1}$$

þar sem I er hverftregða snúningspendúlsins. Vegna dempunar minnkar útslag (*e. amplitude*) sveiflunnar samkvæmt

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2I}t}, \tag{2}$$

og lota sveiflunnar eykst lítillega $\left(\frac{b^2}{4I^2} \ll \frac{\kappa}{I}\right)$ samkvæmt

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}}}. \tag{3}$$

2 Búnaður og uppsetning

Til að framkvæma tilraunina þarf **stálgorm** sem festur er við **málmstöng**. Efri endi stálgormsins er festur við **snúningsmæli** (*e. Rotary Motion Sensor (RMS)*) sem mælir snúningshorn θ. Ofan á snúningsmæli er **plasttrissa með bandi** sem togað er í til að snúa upp á stálgorminn. Togkraftur er mældur með **kraftmæli** (*e. Force Sensor*). Bæði kraftmælir og snúningsmælir eru tengdir við PASCO viðmót sem sendir mælingar í tölvu. Til að skoða sveiflur er **málmskífa** notuð í stað plasttrissu og **segull** notaður til að breyta dempun.

3 Framkvæmd

Passið að gormurinn sé festur við RMS með botnskrúfunni og að hann sé beinn án þess að vera of mikið strekktur. Opnið Capstone hugbúnaðinn og tengið mælana við PASCO viðmótið: RMS í *digital* tengin 1-2 eða 3-4 og kraftmælinn í *analog* tengin (A, B eða C). Stillið mælitíðnina í 50 Hz: þetta þýðir að mælarnir munu báðir taka 50 mælingar á sekúndu.

3.1 Vindustuðull

Festið plastskífuna ofan á RMS. Í tölvunni veljið þið að gera graf af krafti sem fall af horni. Vefjið strengnum utan um plastskífuna og festið enda hans í kraftmæli. Smellið á takkann sem segir **Tare** á kraftmælinum til að núllstilla kraftmælinn, passa að gera þetta áður en togað er í strenginn með mælinum. Hefjið mælingar í tölvunni og togið rólega í kraftmælinn svo vinda komi á gorminn, stoppið þegar skífan hefur snúist nokkra hringi. Mælið nú radíus skífunnar R sem strengurinn var vafinn utan um svo hægt sé að finna kraftvægið $\tau_F = FR$. Passið að mæla R innan í raufinni sem strengurinn er vafinn inn í.

3.2 Sveiflur og dempun

Fjarlægið plastskífuna af RMS og setjið málmskífuna í staðinn. Í tölvunni veljið þið graf: horn sem fall af tíma. Snúið skífunni þannig að sem mest vinda verði á stálgormi án þess þó að hann kikni, hefjið mælingar í tölvunni og sleppið svo disknum. Þegar diskurinn hefur staðnæmst má stöðva mælingu. Framkvæmið þessa mælingu þrisvar sinnum, fyrst án seguls svo dempun orsakist aðeins af núning í RMS, síðan bæta seglinum við og taka tvær mælingar með mismunandi fjarlægð milli skífu og seguls. Því nær sem segullinn er skífunni því fyrr mun sveiflan staðnæmast. Passið að mælingar innihaldi nógu margar sveiflur (útgildi) til hægt sé að framkvæma gagnagreiningu. Að lokum skal mæla radíus og massa málmskífunnar til að hægt sé að reikna hverfitregðu hennar I.

Eftir tilraunina vinsamlegast takið til á vinnuborði svo þið skiljið við það eins og komið var að því.

4 Gagnagreining

4.1 Vindustuðull

Eins og fram kom í framkvæmdinni byrjum við á að reikna kraftvægið útfrá kraftinum F sem var mælt með kraftmæli og radíus skífunnar R. Teiknum nú upp graf sem sýnir kraftvægi sem fall af snúningshorninu θ. Hallatala línunnar gefur gildi vindustuðulsins κ. Hafið í huga að hallatala línunnar getur orðið neikvæð en κ er ávallt skilgreindur sem jákvæður.

4.2 Sveiflur og dempun

Næst skal notast við gröfin sem sýna horn sem fall af tíma til að finna dempunarstuðulinn b. Til þess þarf að finna útslag sveiflunnar sem fall af tíma þar sem útslagið er á lógaritmískum skala. Dragið meðalgildi snúningshornsins frá botn og topp punktum grafsins til að fá 10 mismunandi útslög. Tökum næst algildið af þeim þar sem verið er að skoða stærð útslaganna sem eru jákvæðar stærðir. Þar á eftir skal taka náttúrulega logrann ln(.) af þeim gildum og teikna upp sem fall af tíma. Hallatala bestu línunnar gegnum mælipunktana verður $-\frac{b}{2I}$ samkvæmt jöfnu (2). Reiknið næst hverfitregðu málmskífunnar út frá massa og radíus (sjá töflu 9.2 í kennslubókinni). Notið þessa aðferð til að fá alla 3 dempunarstuðlana b við mismunandi dempanir. Þessi stuðull er ávallt jákvæð stærð og ætti að hækka þegar segullinn er settur nær disknum.

Einnig skal fyrir hvert tilvik mæla lotuna á sveiflunni út frá gögnunum og bera við niðurstöður úr jöfnum (1) og (3). Gerið óvissuútreikninga á vindustuðlinum κ og einnig fyrir dempunarstuðulinn b. Passa skal að taka skekkju hverfitregðunnar einnig til skoðunnar. Setjið upp töflu með öllum ykkar niðurstöðum.

5 Fræðin

5.1 Vindustuðull κ

Bandi er vafið utan um plasttrissuna. Þegar togað er í bandið með krafti F þá veldur það kraftvægi $\tau_F = FR$. Á móti þessu kraftvægi verkar kraftvægi frá snúningspendúlnum $\tau = -\kappa\theta$, sem er í réttu hlutfalli við snúningshornið θ. Í jafnvægi gildir

$$\Sigma\tau = FR - \kappa\theta \stackrel{!}{=} 0, \tag{4}$$

sem gefur línulegt samband milli τ_F og snúningshorns, $\tau_F = \kappa\theta$. Athugið að einingin á vindustuðlinum κ er Nm, þar sem hornið er einingalaust (í radíönum).

5.2 Sveifla snúningspendúls

Þegar snúið er upp á snúningspendúl og honum svo sleppt verka tvö kraftvægi í hreyfingunni: $\tau = -\kappa\theta$ vegna vindugormsins og svo $\tau_b = -b\frac{d\theta}{dt}$ sem lýsir dempun, og b kallast dempunarstuðull. Annað lögmál Newtons fyrir snúning lýsir sveiflunni

$$\Sigma\tau = -\kappa\theta - b\frac{d\theta}{dt} \stackrel{!}{=} I\frac{d^2\theta}{d^2t}. \tag{5}$$

Á hægri hliðinni notuðum við $\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{d^2t}$. Þessa jöfnu er hægt að umrita á formið

$$\frac{d^2\theta}{d^2t} + \frac{b}{I}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0, \tag{6}$$

sem er staðalform á 2. stigs diffurjöfnu með fastastuðlum. Athugið að einingin á b er Nm s. Þessi diffurjafna er leyst í fyrirlestri og lausnin er

$$\begin{aligned} \theta(t) &= A_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}}\; t\right) e^{-\frac{b}{2I}t} \\ &= \underbrace{\left(A_0 e^{-\frac{b}{2I}t}\right)}_{A(t)} \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}}\; t\right), \end{aligned} \tag{7}$$

þar sem útslagið er dregið sérstaklega dregið fram, samanber jöfnu (2). Athugið að kósínus-fallið er lotubundið með lotu 2π og við getum fundið lotu sveiflunnar (tíminn $t = T$ sem þarf fyrir kósínusinn endurtaka sig) út frá skilyrðinu

$$\sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}}\; T = 2\pi, \tag{8}$$

sem gefur niðurstöðuna í jöfnu (3), og þegar $b = 0$ (engin dempun) þá fæst

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \tag{9}$$

sem er niðurstaðan í jöfnu (1).