Kinematyka

Ruch po okręgu

$$\vec{r} = R\left(\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega\left(-\sin(\varphi)\vec{i} + \cos(\varphi)\vec{j}\right) = R\omega\left(\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\left(\cos(\varphi)\vec{i} + \sin(\varphi)\vec{j}\right)$$

Ruch obrotowy

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ ; \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\omega$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

(suma składnika stycznego i normalnego)

Ruch płaski

$$\vec{BB'} = \vec{AA'} + \vec{\Delta\varphi} \times \vec{AB}$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

$$\vec{a} = \vec{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB}\right)$$

Dynamika

II ZDN

Ruch postępowy

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}m$$

Ruch obrotowy

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t} = \vec{\varepsilon}I$$

Praca i moc

Ruch postępowy

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \circ \vec{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad W = \int \vec{F} \circ \vec{\mathrm{d}s}$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \circ \vec{v}$$

Ruch obrotowy

$$\mathrm{d}W = \vec{M} \circ \mathrm{d}\vec{\varphi} \quad \Rightarrow \quad W = \int \vec{M} \circ \mathrm{d}\vec{\varphi}$$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Praca w polu siły potencjalnej o potencjale $V(\vec{r})$, gdzie $\vec{F} = -\mathrm{grad}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right]$

$$W = \int_A^B \vec{F} \circ \mathrm{d}\vec{r} = -\int_A^B \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right] \circ [\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z] = -\int_A^B \mathrm{d}V = V(A) - V(B)$$

Środek masy

$$\vec{r_C} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

Momenty statyczne

Względem płaszczyzny YZ

$$S_x = \int x\,\mathrm{d}m$$

wtedy

$$x_C = \frac{S_x}{m}$$

Momenty bezwładności

Względem osi X

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$$

Względem płaszczyzny ZY

$$I_{xx} = \int x^2\,\mathrm{d}m$$

Względem punktu O

$$I_O = \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$$

Twierdzenie Steinera

$$I = I_C + md^2$$

Moment dewiacyjny względem płaszczyzny XY

$$I_{xy} = \int xy\,\mathrm{d}m$$

Pęd i moment pędu (kręt)

Dla bryły sztywnej w ruchu postępowym

$$\vec{p} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

$$\vec{K} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v}\,\mathrm{d}m$$

W ruchu obrotowym

$$\vec{K} = I\vec{\omega}$$

Energia kinetyczna bryły sztywnej

W dowolnym ruchu

$$E_k = \frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}m$$

W ruchu postępowym

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

W ruchu obrotowym

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$$