Condición Necesaria y Suficiente de Integrabilidad

Brioso Jurado, Adrián Xavier — Reyes García, Elisabeth

March 17, 2025

Resumen

En el presente documento se explica la condición necesaria y suficiente de integrabilidad según Riemann.

1 Condición Necesaria y Suficiente de Integrabilidad según Riemann

1.1 Definición

Una función $f(x)$ se dice *integrable según Riemann* en un intervalo $[a, b]$ si existe el límite de las sumas integrales:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma(P, \xi_i),$$

donde $\lambda = \max \Delta x_i$ y $\sigma(P, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

1.2 Condiciones

1. **Condición necesaria:** $f(x)$ debe ser **acotada** en $[a, b]$.
    - Si $f(x)$ no está acotada, las sumas integrales pueden divergir (ver demostración con funciones no acotadas).
2. **Condición suficiente:** $f(x)$ es integrable si es acotada y su conjunto de discontinuidades es finito.
    - **Ejemplo 1:** Las funciones que sean continuas en $[a, b]$ son integrables en ese intervalo.
    - **Ejemplo 2:** Las funciones con discontinuidades en un conjunto finito de puntos son integrables. Al modificar la función en puntos aislados el valor de la integral no se ve afectado.
    - **Contraejemplo:** La función de Dirichlet no es integrable ya que es discontinua en todo el intervalo $[a, b]$.

Demostraciones y Ejemplos

- **Función constante:** $f(x) = c$ es integrable en $[a, b]$, y
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$
- **Función no nula en un punto:** Si $f(x) = 0$ excepto en un punto, entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$. Esto se puede ampliar a un número finito de puntos.
- **Función de Dirichlet:**
$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
No es integrable en ningún $[a, b]$ ya que las sumas integrales alternan entre 0 y $b - a$.

Conclusiones

La **integrabilidad según Riemann** requiere:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \text{ es integrable en } [a,b] \\ \Longleftrightarrow \\ f(x) \text{ es acotada y presenta una cantidad finita de} \\ \text{discontinuidades.} \end{array}}$$