Condición Necesaria y Suficiente de Integrabilidad

Brioso Jurado, Adrián Xavier
Reyes García, Elisabeth

March 20, 2025

Resumen

En el presente documento se explica la condición necesaria y suficiente de integrabilidad según Riemann.

1 Condición Necesaria y Suficiente de Integrabilidad según Riemann

1.1 Definición

Una función $f(x)$ se dice *integrable según Riemann* en un intervalo $[a,b]$ si existe el límite de las sumas integrales:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma(P, \xi_i),$$

donde $\lambda = \max \Delta x_i$ y $\sigma(P, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

De igual forma, se puede definir la integrabilidad mediante las **sumas de Darboux**:

- **Suma superior de Darboux:** $S(P,f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, donde $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.
- **Suma inferior de Darboux:** $s(P,f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, donde $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Se puede decir entonces que una función f es Riemann integrable si:

$$f \in \mathbb{R}[a,b] \iff \forall \epsilon > 0 : S(f,P) - s(f,P) < \epsilon \iff \underline{I} = \overline{I}$$

Por tanto,

$$\int_a^b f = \lim_{\{P\}} S(f,P) = \lim_{\{P\}} s(f,P)$$

1.2 Condiciones

1. **Condición necesaria:** $f(x)$ debe ser **acotada** en $[a, b]$.

   Demostración. Sea f continua en $[a, b]$. Por el **Teorema de Heine-Cantor**, f es uniformemente continua en $[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:
   $$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$
   Consideremos una partición P de $[a, b]$ con $\lambda = \max \Delta x_i < \delta$. Para las sumas de Darboux:
   $$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i,$$
   donde $M_i = \sup f$ y $m_i = \inf f$ en $[x_{i-1}, x_i]$. Por continuidad uniforme:
   $$M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b - a} \quad \forall i.$$
   Luego:
   $$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon.$$
   Como ϵ es arbitrario, $\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. Por tanto, f es integrable. □

2. **Condición suficiente:** $f(x)$ es integrable si es acotada y su conjunto de discontinuidades es finito.

   - **Condición 1:** Las funciones que sean continuas en $[a, b]$ son integrables en ese intervalo.

     Demostración. Sea f continua en $[a, b]$. Por el **Teorema de Heine-Cantor**, f es uniformemente continua. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:
     $$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$
     Para una partición P con $\lambda < \delta$, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$:
     $$M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b - a}$$
     Luego:
     $$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \epsilon$$
     Como ϵ es arbitrario, f es integrable. □

   - **Condición 2:** Toda función monótona en $[a, b]$ es integrable.

Demostración. Sea f monótona creciente en $[a, b]$ (análogo para funciones decrecientes). Por ser monótona, f está acotada ($f(a) \leq f(x) \leq f(b)$). Dado $\epsilon > 0$, consideremos una partición P de $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
Para las sumas de Darboux:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\, \Delta x,$$

donde $M_i = f(x_i)$ y $m_i = f(x_{i-1})$ por la monotonía. Al simplificar:

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

se obtiene:

$$S(P, f) - s(P, f) = \Delta x \cdot (f(b) - f(a)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}.$$

Despejando n:

$$\frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\epsilon}.$$

Con esta n, se cumple $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$. Por tanto, f es integrable. $\square$

- **Condición 3:** Las funciones con discontinuidades en un conjunto finito de puntos son integrables. Al modificar la función en puntos aislados el valor de la integral no se ve afectado.

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada con discontinuidades solo en $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Demostraremos que $f \in \mathbb{R}[a, b]$.
Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.
Dado $\epsilon > 0$, creamos una vecindad alrededor de cada discontinuidad c_k:

$$I_k = \left(c_k - \frac{\epsilon}{8nM}, c_k + \frac{\epsilon}{8nM}\right) \cap [a, b], \quad k = 1, \ldots, n.$$

La unión de estos intervalos tiene longitud total $\leq n \cdot \frac{\epsilon}{4nM} = \frac{\epsilon}{4M}$.
Fuera de $\bigcup I_k$ (la unión de todas las discontinuidades), f es continua. Por el Teorema de Heine-Cantor, es uniformemente continua en el conjunto cerrado $[a, b] \setminus \bigcup I_k$. Existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Tomemos una partición P que incluya todos los extremos de los I_k y tenga norma $\lambda < \min\left\{\delta, \frac{\epsilon}{8nM}\right\}$.

Separamos la suma en dos partes:

$$\begin{aligned}
S(P,f)-s(P,f) &= \sum_{\text{subintervalos en } \bigcup I_k} (M_i-m_i)\Delta x_i + \sum_{\text{resto}} (M_i-m_i)\Delta x_i \\
&\leq \sum_{\bigcup I_k} 2M\Delta x_i + \sum_{\text{resto}} \frac{\epsilon}{2(b-a)}\Delta x_i \\
&\leq 2M\cdot\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) \\
&= \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Si g es distinta de f solo en $\{c_1,...,c_m\}$, entonces $|f-g|\neq 0$ solo en esos puntos. Como los puntos tienen medida cero:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = 0 \implies \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

□

Ejemplos de Funciones Integrables según las Condiciones Suficientes

1. **Condición 1: Funciones continuas en $[a,b]$.**

   Ejemplo 1. *Sea $f(x)=e^x$ en $[0,1]$. Esta función es continua en todo su dominio. Por el* ***Teorema de Heine-Cantor****, al ser continua en un intervalo cerrado, es uniformemente continua y por tanto integrable y su integral es:*

   $$\int_0^1 e^x\,dx = e-1.$$

2. **Condición 2: Funciones monótonas en $[a,b]$.**

   Ejemplo 2. *Sea $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ la función escalonada:*

   $$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<1\\ 2, & 1\leq x<2\\ 5, & 2\leq x\leq 3\end{cases}$$

   f es monótona creciente y tiene discontinuidades en $x=1$ y $x=2$. Aunque presenta saltos finitos es integrable:

   $$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 0(1-0)+2(2-1)+5(3-2) = 7.$$

3. **Condición 3: Funciones con discontinuidades finitas.**

Ejemplo 3. *Sea* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

f *es discontinua únicamente en* $x = 1$. *Como el conjunto de discontinuidades es finito,* f *es integrable y:*

$$\int_0^2 f(x)\, dx = 0.$$

Demostración. Las modificaciones en puntos aislados no afectan la integral. La función no es nula en $x = 1$ y por tanto tiene medida cero. □

Contraejemplo: Función No Integrable

Ejemplo 4. *La* ***función de Dirichlet*** *en* $[0, 1]$*:*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

No es integrable según Riemann, ya que es discontinua en todo el intervalo ($\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *es denso y no tiene medida cero). Para cualquier partición* P*:*

$$S(P, D) = 1 \quad y \quad s(P, D) = 0 \implies S - s = 1 \not< \epsilon.$$

Conclusiones

La **integrabilidad según Riemann** requiere:

$f(x)$ es integrable en $[a, b]$

$$\iff$$

$f(x)$ es acotada en [a,b] y se cumple una de las siguientes condiciones:

- f es continua en $[a, b]$.
- f es monótona en $[a, b]$.
- f es presenta discontinuidades finitas.