Solución del Circuito RC

Parte A

a. Ecuación diferencial para la carga $Q(t)$

La ecuación del circuito es:

$$R \cdot I(t) + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

donde $E(t) = E_0$ (constante) y $I(t) = Q'(t)$.

Sustituyendo:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E_0}{R}$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}Q = \frac{E_0}{R}e^{\frac{t}{RC}}$$

Reconociendo la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E_0}{R}e^{\frac{t}{RC}}$$

Integrando ambos lados:

$$Qe^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}dt = E_0Ce^{\frac{t}{RC}} + K$$

Despejando $Q(t)$:

$$Q(t) = E_0C + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Usando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = E_0C + K \Rightarrow K = -E_0C$$

Por lo tanto:

$$Q(t) = E_0 C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La corriente es:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Verificar que límite $Q(t) = E_0 C$, límite $I(t) = 0$

Para la carga:

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = \lim_{t \to \infty} E_0 C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E_0 C(1 - 0) = E_0 C$$

Para la corriente:

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \cdot 0 = 0$$

Comparación de los métodos numéricos con la solución analítica

Para comparar la exactitud de los métodos utilizaremos un ejemplo con los parámetros de:

$$E_0 = 110, R = 50, C = 0{,}05, h = 0{,}1$$

Además usaremos como valor real t = 10 y valor aproximado t = 9,9

Tiempo (t)	**Valor**
9,9	5,399264
10	5,395153

Conociendo ambos de estos resultados se concluye que el error relativo hacia atrás es de 0.000761

Cuadro 1: Solución analítica con el valor aproximado y el valor real

Tiempo (t)	**Valor**
9,7	5,395125
9,8	5,399320
9,9	5,403347

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.001517 y un número de condición de 1.993442

Cuadro 2: Método de Euler

Tiempo (t)	**Valor**
9,7	5,386299
9,8	5,390756
9,9	5,395039

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000021 y un número de condición de 0.027595

Cuadro 3: Método Euler Mejorado

Tiempo (t)	**Valor**
9,7	5,286954
9,8	5,293976
9,9	5,300767

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.017481 y un número de condición de 22.971090

Cuadro 4: Método de Runge - Kutta 4