

Proyecto Conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica, Equipo No. 20

Brioso Jurado, Adrián Xavier
Grupo B211

ADRIAN.XBRIOSO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

García Ruiz, Alejandro
Grupo B212

ALEJANDRO.GARCIA@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

López Castro, Alejandro
Grupo B212

ALEJANDRO.LOPEZ@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Tutor(es): Ania Mesa, Damián Valdés, Jackson Vera, Amanda Noris, Juan Miguel Pérez

Resumen

En este proyecto se aborda el tema de cómo las ecuaciones diferenciales ordinarias describen el comportamiento dinámico de distintos tipos de circuitos eléctricos. Se inicia presentando el circuito RC, conformado por un resistor y un capacitor, donde la ecuación diferencial

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E_0$$

modela la carga del capacitor tras cerrar el interruptor. Se determina la función de carga $Q(t)$, la corriente $I(t)$ y el comportamiento asintótico del sistema, realizando su análisis mediante un campo de isoclinas. Más adelante, en la parte de bifurcación, se introduce un modelo no lineal para la corriente $z(t)$ con la EDO

$$\dot{z} = \mu - z^2,$$

que permite estudiar cómo el voltaje μ puede generar o eliminar estados estacionarios, a la vez que se interpreta la respuesta del circuito ante distintos regímenes de operación.

Por último, se analiza un circuito RLC, donde la interacción entre resistencia, inductor y capacitor lleva a un sistema lineal de dos ecuaciones que describe la evolución de la carga y la corriente. Se estudia el punto crítico del sistema, su estabilidad y se interpreta el plano de fase como representación de la descarga oscilatoria del capacitor dentro del circuito.

Abstract

This project addresses how ordinary differential equations describe the dynamic behavior of different types of electrical circuits. It begins by presenting the RC circuit, composed of a resistor and a capacitor, where the differential equation

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E_0$$

models the charge of the capacitor after the switch is closed. The charge function $Q(t)$, the current $I(t)$, and the asymptotic behavior of the system are determined, and their analysis is carried out using an isocline field. Later, in the bifurcation section, a nonlinear model for the current $z(t)$ is introduced, governed by the ODE

$$\dot{z} = \mu - z^2,$$

which makes it possible to study how the voltage μ can generate or eliminate steady states, while also interpreting the circuit's response under different operating regimes.

Finally, an RLC circuit is analyzed, where the interaction between resistance, inductor, and capacitor leads to a linear system of two equations that describes the evolution of the charge and the current. The critical point of the system and its stability are examined, and the phase plane is interpreted as a representation of the oscillatory discharge of the capacitor within the circuit.

Palabras Clave: EDO, Matemática Numérica, Circuito RC.

Tema: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica aplicada a un circuito eléctrico.

1. Resumen Extendido

1.1 Modelado Matemático del Circuito RLC

Un circuito RLC en serie consta de tres componentes fundamentales: resistencia (R), inductancia (L) y

capacitancia (C), conectados en serie con una fuente de voltaje $E(t)$. Las variables clave son la carga $Q(t)$ en el capacitor y la corriente $I(t)$, relacionadas por:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t)$$

Aplicando la ley de Kirchhoff, se obtiene la ecuación del circuito:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Derivando y sustituyendo, se llega a la EDO de segundo orden para la corriente:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

1.2 Analogía Mecánica-Eléctrica

Existe una correspondencia directa entre el circuito RLC y los sistemas masa-resorte-amortiguador:

| Sistema Mecánico | Sistema Eléctrico |
|---------------------------|---------------------------------|
| Masa m | Inductancia L |
| Amortiguamiento c | Resistencia R |
| Constante del resorte k | Recíproco de capacitancia $1/C$ |
| Posición x | Carga Q o corriente I |
| Fuerza $F(t)$ | Voltaje $E(t)$ o $E'(t)$ |

Esta analogía permite trasladar resultados entre dominios físicos diferentes.

1.3 Solución para Corriente Alterna

Para un voltaje de entrada $E(t) = E_0 \sin \omega t$, la solución completa es:

$$I(t) = I_{tr}(t) + I_{sp}(t)$$

donde $I_{tr}(t)$ es la corriente transitoria (decae exponencialmente) e $I_{sp}(t)$ es la corriente estacionaria periódica.

1.4 Impedancia y Fase

La **impedancia** del circuito se define como:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

La corriente estacionaria tiene amplitud $I_0 = E_0/Z$ y presenta un **retraso de fase** δ :

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

El **tiempo de retraso** es δ/ω segundos.

2. Parte A: Circuito RC e isoclinas

a. Ecuación diferencial para la carga $Q(t)$

La ecuación del circuito es:

$$R \cdot I(t) + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

donde $E(t) = E_0$ (constante) y $I(t) = Q'(t)$.

Sustituyendo:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E_0}{R}$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\frac{t}{RC}} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} Q = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Reconociendo la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt} \left(Q e^{\frac{t}{RC}} \right) = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Integrando ambos lados:

$$Q e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} dt = E_0 C e^{\frac{t}{RC}} + K$$

Despejando $Q(t)$:

$$Q(t) = E_0 C + K e^{-\frac{t}{RC}}$$

Usando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = E_0 C + K \Rightarrow K = -E_0 C$$

Por lo tanto:

$$Q(t) = E_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La corriente es:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Verificar que límite $Q(t) = E_0 C$, límite $I(t) = 0$

Para la carga:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E_0 C (1 - 0) = E_0 C$$

Para la corriente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \cdot 0 = 0$$

Comparación de los métodos numéricos con la solución analítica

Para comparar la exactitud de los métodos utilizaremos un ejemplo con los parámetros de:

$$E_0 = 110, R = 50, C = 0.05, h = 0.1$$

Además usaremos como valor real $t = 10$ y valor aproximado $t = 9.9$

| Tiempo (t) | Valor |
|------------|----------|
| 9.9 | 5,399264 |
| 10 | 5,395153 |

Conociendo ambos de estos resultados se concluye que el error relativo hacia atrás es de 0.000761

Cuadro 1: Solución analítica con el valor aproximado y el valor real

| Tiempo (t) | Valor |
|------------|----------|
| 9.7 | 5,395125 |
| 9.8 | 5,399320 |
| 9.9 | 5,403347 |

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.001517 y un número de condición de 1.993429

Cuadro 2: Método de Euler

| Tiempo (t) | Valor |
|------------|----------|
| 9.7 | 5,386299 |
| 9.8 | 5,390756 |
| 9.9 | 5,395039 |

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000021 y un número de condición de 0.027595

Cuadro 3: Método Euler Mejorado

| Tiempo (t) | Valor |
|------------|----------|
| 9.7 | 5,386420 |
| 9.8 | 5,390874 |
| 9.9 | 5,395153 |

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000761 y un número de condición de 1

Cuadro 4: Método de Runge - Kutta 4

Con el objetivo de calcular el orden de convergencia de dichos métodos haremos 10 iteraciones de ellos por cada uno de los siguientes valores de $h = 0.5; 0.2; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01$ para así obtener el orden entre cada uno de los tamaños de pasos usando la siguiente fórmula:

Fórmula del orden de convergencia:

$$p = \frac{\log\left(\frac{\text{Error}_{h_1}}{\text{Error}_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

Cuadro 5: Órdenes de convergencia de los métodos numéricos

| Método | 0.5→0.2 | 0.2→0.1 | 0.1→0.05 | 0.05→0.02 |
|----------------|---------|---------|----------|-----------|
| Euler | 1.0595 | 1.0249 | 1.0122 | 1.0055 |
| Euler Mejorado | 2.1025 | 2.0429 | 2.0218 | 2.0099 |
| Runge-Kutta 4 | 4.1104 | 4.0470 | 4.0241 | 4.0109 |

c. Campo de Isoclinas

3. Parte B: Bifurcación

En esta parte se analiza el comportamiento no lineal de un circuito eléctrico que contiene un diodo, elemento cuya relación corriente-voltaje no es lineal. Este tipo de circuitos puede presentar **bifurcaciones**, es decir, cambios cualitativos en su dinámica cuando se modifica el voltaje aplicado.

El modelo simplificado que representa este fenómeno se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2,$$

donde $z(t)$ representa la corriente y μ es un parámetro de control asociado al voltaje aplicado. Este modelo muestra cómo el comportamiento del circuito cambia según el valor de μ .

a. Determinación de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio se obtienen imponiendo la condición de equilibrio:

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

De la ecuación se deduce:

$$\mu - z^2 = 0,$$

y por tanto:

$$z = \pm\sqrt{\mu}.$$

Esto significa que:

- Si $\mu > 0$, existen dos equilibrios reales: $z_1 = +\sqrt{\mu}$ y $z_2 = -\sqrt{\mu}$.
- Si $\mu = 0$, ambos colapsan en un único punto $z = 0$.
- Si $\mu < 0$, no existen equilibrios reales.

b. Estabilidad de los equilibrios

Para estudiar la estabilidad se linealiza la ecuación alrededor de un equilibrio z^* :

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \left. \frac{d}{dz}(\mu - z^2) \right|_{z=z^*} \delta z.$$

Como

$$\frac{d}{dz}(\mu - z^2) = -2z,$$

entonces la ecuación linealizada queda:

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = -2z^* \delta z.$$

De aquí:

- Si $z^* = +\sqrt{\mu}$, el coeficiente $-2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow$ equilibrio **estable**.
- Si $z^* = -\sqrt{\mu}$, el coeficiente $+2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow$ equilibrio **inestable**.

Por lo tanto, cuando $\mu > 0$, el sistema posee un equilibrio estable y otro inestable.

c. Diagrama de bifurcación

El diagrama se representa en el plano (μ, z) :

- Para $\mu < 0$, no hay equilibrios reales.
- En $\mu = 0$, ambos equilibrios coinciden en el origen.
- Para $\mu > 0$, aparecen dos ramas: $z = +\sqrt{\mu}$ (estable) y $z = -\sqrt{\mu}$ (inestable).

Esto corresponde a una **bifurcación tipo silla-nodo**, donde dos equilibrios surgen a partir de un valor crítico del parámetro.

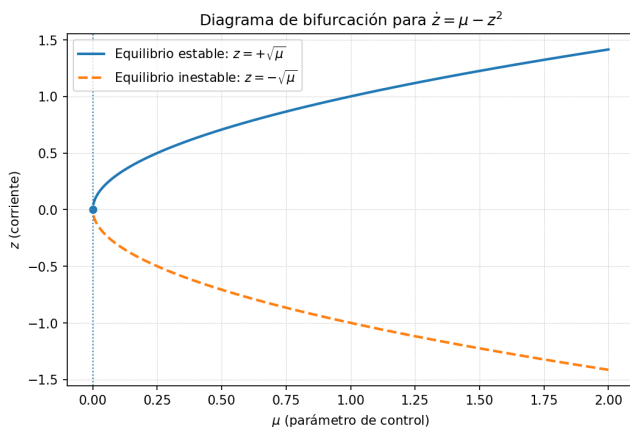


Figura: Diagrama de bifurcación del modelo $\dot{z} = \mu - z^2$. La rama superior es estable y la inferior inestable.

d. Interpretación física

En el contexto del circuito:

- μ representa el **voltaje aplicado**.
- $z(t)$ representa la **corriente** que atraviesa el diodo.

Cuando $\mu < 0$, el voltaje no alcanza el umbral necesario y el sistema no tiene un estado estacionario real: el diodo permanece “apagado”, sin conducción. Cuando $\mu > 0$, aparecen dos posibles estados estacionarios:

- Uno estable, que corresponde a la corriente positiva (conducción normal del diodo).
- Otro inestable, que representaría una corriente negativa físicamente irreal.

Así, el cambio de signo de μ simboliza el paso de un régimen sin corriente a un régimen estable de conducción. Este comportamiento es análogo a la activación de un diodo real al superar su voltaje umbral.

Para concluir, el modelo $\dot{z} = \mu - z^2$ muestra cómo un circuito eléctrico no lineal puede cambiar su comportamiento de forma cualitativa al variar el voltaje aplicado. Cuando μ cruza el valor crítico 0, el sistema pasa de no tener equilibrios (sin conducción) a tener dos (uno estable y otro inestable), lo que describe perfectamente la aparición de un estado de conducción estable en el circuito con diodo.

Este análisis evidencia cómo las bifurcaciones permiten comprender la transición entre diferentes regímenes dinámicos en sistemas eléctricos no lineales.

4. Parte C: Plano de fase y estabilidad

Circuito RLC con parámetros numéricos

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = I, \\ \frac{dI}{dt} = -2I - 5Q, \end{cases}$$

a. Calcular punto crítico y clasificar sistema según tipo y estabilidad

Clasificación del sistema según:

- **Tipo:** Es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (derivadas respecto a una sola variable independiente t).
- **Orden:** Es un sistema de orden 1 (el mayor orden de derivación que aparece es 1).
- **Linealidad:** Es un sistema lineal (las dos ecuaciones son lineales).
- **Homogeneidad:** Es un sistema homogéneo (ambas ecuaciones son homogéneas).

- **Estabilidad:** El cuaderno muestra que es un sistema con un punto de silla inestable (uno de los autovalores tiene parte real positiva, según el análisis llevado a cabo).

Representación matricial

En el cuaderno se propone la siguiente representación matricial (con la notación usada en el notebook):

$$\begin{bmatrix} Q' \\ I' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix}.$$

Tomándolo como

$$X' = AX$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} I \\ Q \end{bmatrix}.$$

Resolución del sistema

Para encontrar los autovalores se calcula

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

En el cuaderno se obtiene:

$$(1 - \lambda)(-5 - \lambda) = 0$$

y por tanto los autovalores son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -5.$$

Los autovectores asociados se hallan resolviendo $(A - \lambda I)v = 0$; en el cuaderno se dan los siguientes vectores:

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución general, de acuerdo con la diagonalización propuesta, es

$$X(t) = c_1 v_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 v_{\lambda_2} e^{\lambda_2 t}.$$

Cálculo del punto crítico

El punto crítico se obtiene imponiendo $Q' = 0$ e $I' = 0$ en el sistema:

$$\begin{cases} I = 0, \\ -2I - 5Q = 0. \end{cases}$$

De esto se deduce $Q = 0$ e $I = 0$, luego el punto crítico del sistema es $(0, 0)$.

b. Plano de fase