Solución del Circuito RC

Parte A

a. Ecuación diferencial para la carga $Q(t)$

La ecuación del circuito es:

$$R \cdot I(t) + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

donde $E(t) = E_0$ (constante) y $I(t) = Q'(t)$.

Sustituyendo:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = \frac{E_0}{R}$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\frac{t}{RC}} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} Q = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Reconociendo la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt} \left(Q e^{\frac{t}{RC}} \right) = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Integrando ambos lados:

$$Q e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} dt = E_0 C e^{\frac{t}{RC}} + K$$

Despejando $Q(t)$:

$$Q(t) = E_0 C + K e^{-\frac{t}{RC}}$$

Usando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = E_0 C + K \Rightarrow K = -E_0 C$$

Por lo tanto:

$$Q(t) = E_0C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Y la corriente quedaría:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Verificar que límite $Q(t) = E_0C$, límite $I(t) = 0$

Caso de la carga:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} E_0C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E_0C(1-0) = E_0C$$

Caso de la corriente:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \cdot 0 = 0$$