

Proyecto Conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica, Equipo No. 20

Brioso Jurado, Adrián Xavier
Grupo B211

ADRIAN.XBRIOSO@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

García Ruiz, Alejandro
Grupo B212

ALEJANDRO.GARCIA@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

López Castro, Alejandro
Grupo B212

ALEJANDRO.LOPEZ@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU

Tutor(es): Ania Mesa, Damián Valdés, Jackson Vera, Amanda Noris, Juan Miguel Pérez

Resumen

En este proyecto se aborda el tema de cómo las ecuaciones diferenciales ordinarias describen el comportamiento dinámico de distintos tipos de circuitos eléctricos. Se inicia presentando el circuito RC, conformado por un resistor y un capacitor, donde la ecuación diferencial

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E_0$$

modela la carga del capacitor tras cerrar el interruptor. Se determina la función de carga $Q(t)$, la corriente $I(t)$ y el comportamiento asintótico del sistema, realizando su análisis mediante un campo de isoclinas. Más adelante, en la parte de bifurcación, se introduce un modelo no lineal para la corriente $z(t)$ con la EDO

$$\dot{z} = \mu - z^2,$$

que permite estudiar cómo el voltaje μ puede generar o eliminar estados estacionarios, a la vez que se interpreta la respuesta del circuito ante distintos regímenes de operación.

Por último, se analiza un circuito RLC, donde la interacción entre resistencia, inductor y capacitor lleva a un sistema lineal de dos ecuaciones que describe la evolución de la carga y la corriente. Se estudia el punto crítico del sistema, su estabilidad y se interpreta el plano de fase como representación de la descarga oscilatoria del capacitor dentro del circuito. Para auxiliar al lector, se adjunta con este informe un archivo .ipynb que contiene explicaciones más resumidas y códigos en Python a los que se hacen referencia.

Abstract

This project addresses how ordinary differential equations describe the dynamic behavior of different types of electrical circuits. It begins by presenting the RC circuit, composed of a resistor and a capacitor, where the differential equation

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E_0$$

models the charge of the capacitor after the switch is closed. The charge function $Q(t)$, the current $I(t)$, and the asymptotic behavior of the system are determined, and their analysis is carried out using an isocline field. Later, in the bifurcation section, a nonlinear model for the current $z(t)$ is introduced, governed by the ODE

$$\dot{z} = \mu - z^2,$$

which makes it possible to study how the voltage μ can generate or eliminate steady states, while also interpreting the circuit's response under different operating regimes.

Finally, an RLC circuit is analyzed, where the interaction between resistance, inductor, and capacitor leads to a linear system of two equations that describes the evolution of the charge and the current. The critical point of the system and its stability are examined, and the phase plane is interpreted as a representation of the oscillatory discharge of the capacitor within the circuit. To assist the reader, an .ipynb file is attached to this report containing more concise explanations and Python codes that are referenced throughout the document.

Palabras Clave: EDO, Matemática Numérica, Circuito RC.

Tema: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Matemática Numérica aplicada a un circuito eléctrico.

1. Resumen Extendido

1.1 Modelado Matemático del Circuito RLC

Un circuito RLC en serie consta de tres componentes fundamentales: resistencia (R), inductancia (L) y capacitancia (C), conectados en serie con una fuente de voltaje $E(t)$. Las variables clave son la carga $Q(t)$ en el capacitor y la corriente $I(t)$, relacionadas por:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t)$$

Aplicando la ley de Kirchhoff, se obtiene la ecuación del circuito:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Derivando y sustituyendo, se llega a la EDO de segundo orden para la corriente:

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

1.2 Analogía Mecánica-Eléctrica

Existe una correspondencia directa entre el circuito RLC y los sistemas masa-resorte-amortiguador:

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico
Masa m	Inductancia L
Amortiguamiento c	Resistencia R
Constante del resorte k	Recíproco de capacitancia $1/C$
Posición x	Carga Q o corriente I
Fuerza $F(t)$	Voltaje $E(t)$ o $E'(t)$

Esta analogía permite trasladar resultados entre dominios físicos diferentes.

1.3 Solución para Corriente Alterna

Para un voltaje de entrada $E(t) = E_0 \sin \omega t$, la solución completa es:

$$I(t) = I_{tr}(t) + I_{sp}(t)$$

donde $I_{tr}(t)$ es la corriente transitoria (decae exponencialmente) e $I_{sp}(t)$ es la corriente estacionaria periódica.

1.4 Impedancia y Fase

La **impedancia** del circuito se define como:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

La corriente estacionaria tiene amplitud $I_0 = E_0/Z$ y presenta un **retraso de fase** δ :

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

El **tiempo de retraso** es δ/ω segundos.

2. Parte A: Circuito RC e isoclinas

a. Ecuación diferencial para la carga $Q(t)$

La ecuación del circuito es:

$$R \cdot I(t) + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

donde $E(t) = E_0$ (constante) y $I(t) = Q'(t)$.

Sustituyendo:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E_0}{R}$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC} dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\frac{t}{RC}} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} Q = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Reconociendo la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt} (Q e^{\frac{t}{RC}}) = \frac{E_0}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

Integrando ambos lados:

$$Q e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \int e^{\frac{t}{RC}} dt = E_0 C e^{\frac{t}{RC}} + K$$

Despejando $Q(t)$:

$$Q(t) = E_0 C + K e^{-\frac{t}{RC}}$$

Usando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = E_0 C + K \Rightarrow K = -E_0 C$$

Por lo tanto:

$$Q(t) = E_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La corriente es:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Verificar que límite $Q(t) = E_0 C$, límite $I(t) = 0$

Para la carga:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E_0 C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E_0 C (1 - 0) = E_0 C$$

Para la corriente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \cdot 0 = 0$$

Comparación de los métodos numéricos con la solución analítica

Para comparar la exactitud de los métodos utilizaremos un ejemplo con los parámetros de:

$$E_0 = 110, R = 50, C = 0.05, h = 0.1$$

Además usaremos como valor real $t = 10$ y valor aproximado $t = 9,9$

Tiempo (t)	Valor
9,9	5,399264
10	5,395153

Conociendo ambos de estos resultados se concluye que el error relativo hacia atrás es de 0.000761

Cuadro 1: Solución analítica con el valor aproximado y el valor real

Tiempo (t)	Valor
9,7	5,395125
9,8	5,399320
9,9	5,403347

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.001517 y un número de condición de 1.993429

Cuadro 2: Método de Euler

Tiempo (t)	Valor
9,7	5,386299
9,8	5,390756
9,9	5,395039

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000021 y un número de condición de 0.027595

Cuadro 3: Método Euler Mejorado

Tiempo (t)	Valor
9,7	5,386420
9,8	5,390874
9,9	5,395153

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000761 y un número de condición de 1

Cuadro 4: Método de Runge - Kutta 4

Con el objetivo de calcular el orden de convergencia de dichos métodos haremos 10 iteraciones de ellos por cada uno de los siguientes valores de $h = 0.5; 0.2; 0.1; 0.05; 0.02$ para así obtener el orden entre cada uno de los tamaños de pasos usando la siguiente fórmula:

Fórmula del orden de convergencia:

$$p = \frac{\log\left(\frac{\text{Error}_{h_1}}{\text{Error}_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

Cuadro 5: Órdenes de convergencia de los métodos numéricos

Método	0.5→0.2	0.2→0.1	0.1→0.05	0.05→0.02
Euler	1.0595	1.0249	1.0122	1.0055
Euler Mejorado	2.1025	2.0429	2.0218	2.0099
Runge-Kutta 4	4.1104	4.0470	4.0241	4.0109

El promedio de los órdenes de convergencia de los métodos numéricos es de: 1.0209 para el Método de Euler, 2.0363 para el Método de Euler Mejorado y 4.0394 para el Método de Runge-Kutta 4.

Para visualizar mejor los resultados de la aplicación de estos tres métodos numéricos a la ecuación diferencial dada, se muestran las siguientes gráficas, resultado de la ejecución del primer script de Python del Notebook adjuntado.

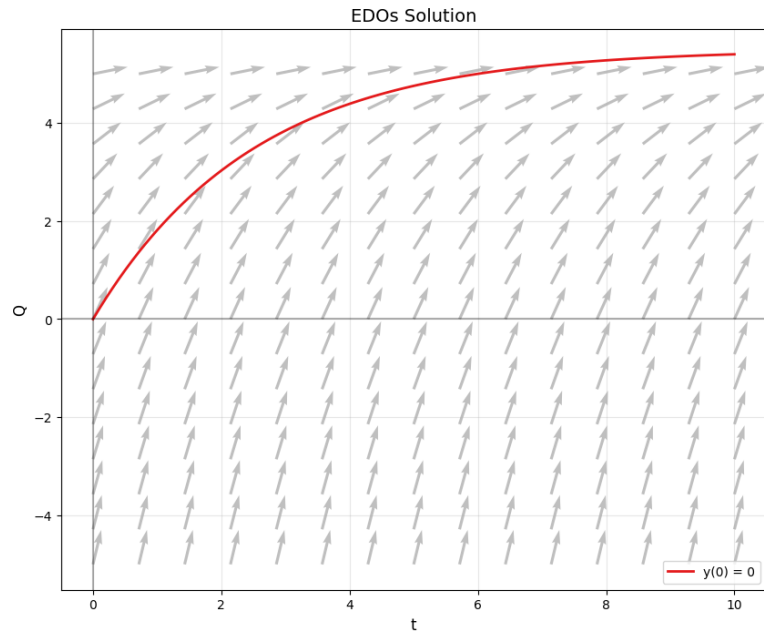


Figura 1: Solución analítica del circuito RC.

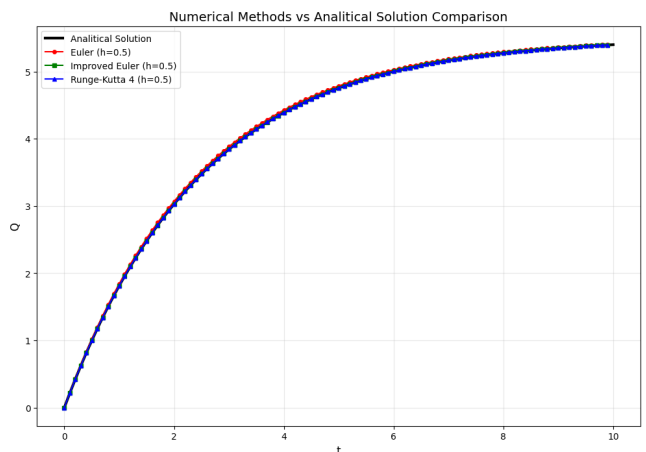


Figura 2: Comparación de métodos numéricos (Euler, Euler Mejorado y Runge-Kutta 4) con la solución analítica del circuito RC.

c. Campo de Isoclinas

Se adjunta a continuación la representación gráfica del campo de isoclinas, resultado de ejecutar el primer script de Python que contiene el Notebook adjuntado al informe

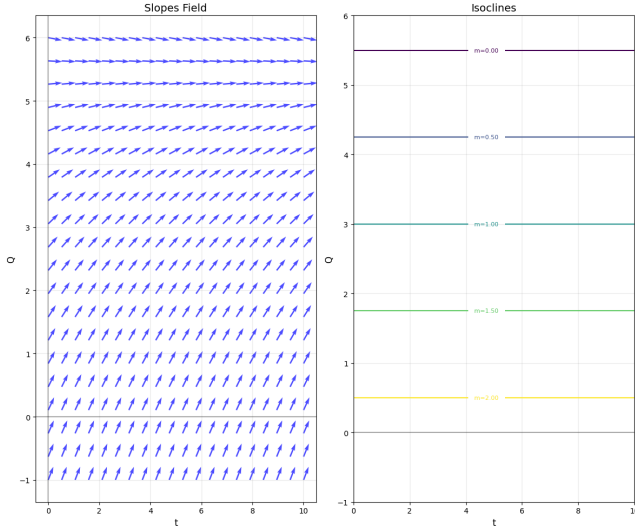


Figura 3: Campo de isoclinas del circuito RC.

¿Por qué el comportamiento exponencial en el circuito RC? La forma exponencial surge naturalmente porque la velocidad de carga es proporcional a la carga que falta por acumular, creando este característico crecimiento rápido inicial que luego se frena gradualmente, siendo el término RC la constante de tiempo que determina que tan rápido se carga el capacitor.

Comportamiento inicial ($t = 0$)

- Al conectar la batería, el capacitor está descargado ($Q = 0$)
- Todo el voltaje de la batería E_0 cae en la resistencia
- La corriente es **máxima**: $I(0) = E_0/R$
- La carga comienza a fluir rápidamente al capacitor

Comportamiento transitorio

- A medida que el capacitor se carga, se opone al paso de más carga
- El voltaje en el capacitor aumenta: $V_C = Q/C$
- El voltaje disponible para la resistencia disminuye: $V_R = E_0 - Q/C$
- La corriente disminuye exponencialmente: $I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC}$

Comportamiento final ($t \rightarrow \infty$)

- El capacitor alcanza su carga máxima: $Q_{max} = E_0 C$
- El voltaje del capacitor iguala al de la batería
- La corriente se hace cero
- El sistema alcanza el equilibrio

3. Parte B: Bifurcación

En esta parte se analiza el comportamiento no lineal de un circuito eléctrico que contiene un diodo, elemento cuya relación corriente-voltaje no es lineal. Este tipo de circuitos puede presentar **bifurcaciones**, es decir, cambios cualitativos en su dinámica cuando se modifica el voltaje aplicado.

El modelo simplificado que representa este fenómeno se describe mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^2,$$

donde $z(t)$ representa la corriente y μ es un parámetro de control asociado al voltaje aplicado. Este modelo muestra cómo el comportamiento del circuito cambia según el valor de μ .

a. Determinación de los puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio se obtienen imponiendo la condición de equilibrio:

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

De la ecuación se deduce:

$$\mu - z^2 = 0,$$

y por tanto:

$$z = \pm\sqrt{\mu}.$$

Esto significa que:

- Si $\mu > 0$, existen dos equilibrios reales: $z_1 = +\sqrt{\mu}$ y $z_2 = -\sqrt{\mu}$.
- Si $\mu = 0$, ambos colapsan en un único punto $z = 0$.
- Si $\mu < 0$, no existen equilibrios reales.

b. Estabilidad de los equilibrios

Para estudiar la estabilidad se linealiza la ecuación alrededor de un equilibrio z^* :

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \left. \frac{d}{dz}(\mu - z^2) \right|_{z=z^*} \delta z.$$

Como

$$\frac{d}{dz}(\mu - z^2) = -2z,$$

entonces la ecuación linealizada queda:

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = -2z^* \delta z.$$

De aquí:

- Si $z^* = +\sqrt{\mu}$, el coeficiente $-2\sqrt{\mu} < 0 \Rightarrow$ equilibrio **estable**.
- Si $z^* = -\sqrt{\mu}$, el coeficiente $+2\sqrt{\mu} > 0 \Rightarrow$ equilibrio **inestable**.

Por lo tanto, cuando $\mu > 0$, el sistema posee un equilibrio estable y otro inestable.

c. Diagrama de bifurcación

El diagrama se representa en el plano (μ, z) :

- Para $\mu < 0$, no hay equilibrios reales.
- En $\mu = 0$, ambos equilibrios coinciden en el origen.
- Para $\mu > 0$, aparecen dos ramas: $z = +\sqrt{\mu}$ (estable) y $z = -\sqrt{\mu}$ (inestable).

Esto corresponde a una **bifurcación tipo silla-nodo**, donde dos equilibrios surgen a partir de un valor crítico del parámetro.

Al ejecutar el tercer script en Python del Notebook adjuntado, podemos obtener la representación gráfica del diagrama de bifurcación:

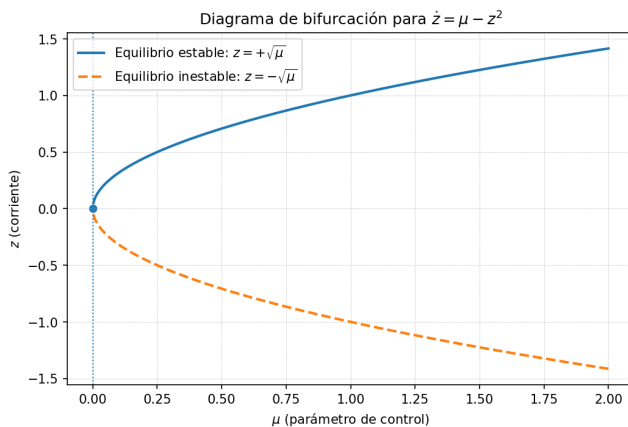


Figura 4: Diagrama de bifurcación del modelo $\dot{z} = \mu - z^2$. La rama superior es estable y la inferior inestable.

d. Interpretación física

En el contexto del circuito:

- μ representa el **voltaje aplicado**.
- $z(t)$ representa la **corriente** que atraviesa el diodo.

Cuando $\mu < 0$, el voltaje no alcanza el umbral necesario y el sistema no tiene un estado estacionario real: el diodo permanece “apagado”, sin conducción. Cuando $\mu > 0$, aparecen dos posibles estados estacionarios:

- Uno estable, que corresponde a la corriente positiva (conducción normal del diodo).
- Otro inestable, que representaría una corriente negativa físicamente irreal.

Así, el cambio de signo de μ simboliza el paso de un régimen sin corriente a un régimen estable de conducción. Este comportamiento es análogo a la activación de un diodo real al superar su voltaje umbral.

Para concluir, el modelo $\dot{z} = \mu - z^2$ muestra cómo un circuito eléctrico no lineal puede cambiar su comportamiento de forma cualitativa al variar el voltaje aplicado. Cuando μ cruza el valor crítico 0, el sistema pasa de no tener equilibrios (sin conducción) a tener dos (uno estable y otro inestable), lo que describe perfectamente la aparición de un estado de conducción estable en el circuito con diodo.

Este análisis evidencia cómo las bifurcaciones permiten comprender la transición entre diferentes regímenes dinámicos en sistemas eléctricos no lineales.

4. Parte C: Plano de fase y estabilidad

Circuito RLC con parámetros numéricos

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = I, \\ \frac{dI}{dt} = -2I - 5Q, \end{cases}$$

a. Calcular punto crítico y clasificar sistema según tipo y estabilidad

Clasificación del sistema según:

- **Tipo:** Es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (derivadas respecto a una sola variable independiente t).
- **Orden:** Es un sistema de orden 1 (el mayor orden de derivación que aparece es 1).
- **Linealidad:** Es un sistema lineal (las dos ecuaciones son lineales).
- **Homogeneidad:** Es un sistema homogéneo (ambas ecuaciones son homogéneas).
- **Estabilidad:** Es un sistema estable ya que tiene autovalores complejos con parte real negativa.

Representación matricial

Representación matricial del sistema:

$$\begin{bmatrix} Q' \\ I' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}.$$

Tomándolo como

$$X' = AX$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}.$$

Resolución del sistema

Para encontrar los autovalores se calcula

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Obteniendo:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

y por tanto los autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Dado que los autovalores son complejos, tomamos uno de los dos, en este caso $\lambda_1 = -1 + 2i$, y resolvemos $(A - \lambda_1 I)v = 0$, obteniendo un autovector complejo:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - 2i \end{bmatrix}.$$

La solución compleja correspondiente es entonces

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} v = e^{-t} \begin{bmatrix} e^{2it} \\ (-1 - 2i)e^{2it} \end{bmatrix}.$$

Usando la identidad $e^{2it} = \cos(2t) + i \sin(2t)$, se obtiene:

$$e^{2it} = \cos(2t) + i \sin(2t),$$

$$(-1 - 2i)e^{2it} = -\cos(2t) - 2\sin(2t) + i(-\sin(2t) + 2\cos(2t)).$$

Al separar la solución compleja en sus partes real e imaginaria obtenemos dos soluciones reales linealmente independientes:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) - 2\sin(2t) \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ -\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{bmatrix}.$$

Los autovectores asociados se hallan resolviendo $(A - \lambda I)v = 0$; obteniendo como resultado los siguientes vectores:

$$v_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t - 2\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$v_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -\sin 2t + 2\cos 2t \end{bmatrix}.$$

Concluyendo en que la solución general es

$$X(t) = c_1 v_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 v_{\lambda_2} e^{\lambda_2 t}.$$

Cálculo del punto crítico

El punto crítico se obtiene imponiendo $Q' = 0$ e $I' = 0$ en el sistema:

$$\begin{cases} I = 0, \\ -2I - 5Q = 0. \end{cases}$$

De esto se deduce $Q = 0$ e $I = 0$, luego el punto crítico del sistema es $(0, 0)$, siendo este un punto estable.

b. Plano de fase

A través de la ejecución del último código en Python del Notebook adjuntado a este informe, se puede graficar el plano de fase que corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias cuyo punto crítico se calculó en la sección anterior. A continuación la correspondiente gráfica:

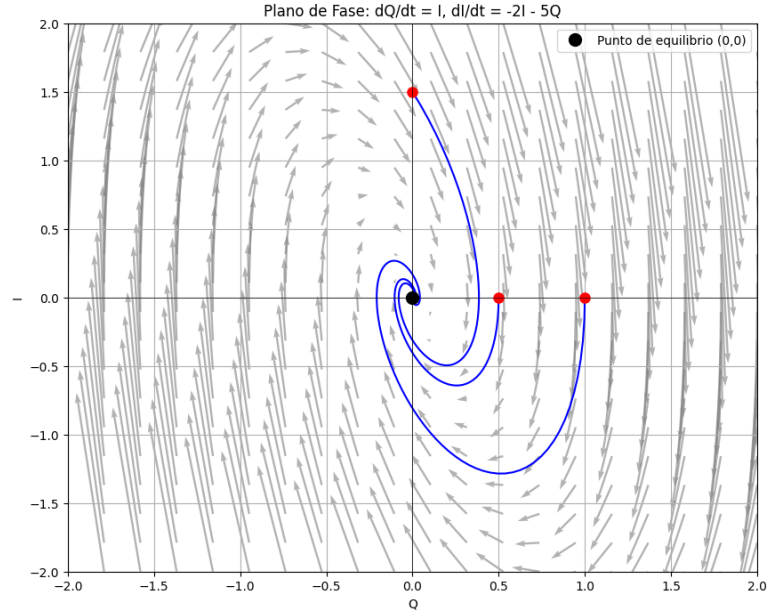


Figura 5: Plano de fase del sistema RLC con punto crítico en el $(0, 0)$.

La figura muestra un **foco estable** centrado en el origen, ya que todas las trayectorias se aproximan en espiral a $(Q, I) = (0, 0)$ para cualquier condición inicial elegida. Esto se debe a que los autovalores de la matriz del sistema son complejos conjugados con parte real negativa, $\lambda = -1 \pm 2i$: la parte real -1 provoca un decaimiento exponencial de la amplitud (factor e^{-t}), mientras que la parte imaginaria $\pm 2i$ genera oscilaciones con frecuencia angular amortiguada $\omega_d = 2$ rad/s (período $T = 2\pi/\omega_d = \pi$).

En términos físicos, las oscilaciones corresponden al intercambio de energía entre el capacitor y el inductor, y la resistencia disipa energía, provocando una reducción progresiva de la amplitud. El sentido de giro es horario: por ejemplo, en el cuadrante superior derecho ($Q > 0, I > 0$) se tiene $dQ/dt = I > 0$ y $dI/dt = -2I - 5Q < 0$, lo que desplaza el estado hacia la derecha y hacia abajo, iniciando la rotación en sentido horario.

Las flechas del campo de pendientes indican la dirección y la magnitud instantánea del vector $(dQ/dt, dI/dt)$ en cada punto del plano, mientras que las trayectorias resultantes, trazadas para distintas condiciones iniciales, ilustran cómo el sistema retorna al equilibrio. El origen es el único punto crítico del sistema y actúa como atractor: para todas las condiciones iniciales mostradas, la carga y la corriente tienden a cero a medida que el sistema alcanza el estado de reposo.