Solución del Circuito RC

Parte A

a. Ecuación diferencial para la carga $Q(t)$

La ecuación del circuito es:

$$R \cdot I(t) + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

donde $E(t) = E_0$ (constante) y $I(t) = Q'(t)$.

Sustituyendo:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E_0$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}Q = \frac{E_0}{R}$$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{t}{RC}}$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}Q = \frac{E_0}{R}e^{\frac{t}{RC}}$$

Reconociendo la derivada del producto:

$$\frac{d}{dt}\left(Qe^{\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E_0}{R}e^{\frac{t}{RC}}$$

Integrando ambos lados:

$$Qe^{\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}dt = E_0Ce^{\frac{t}{RC}} + K$$

Despejando $Q(t)$:

$$Q(t) = E_0C + Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Usando la condición inicial $Q(0) = 0$:

$$0 = E_0C + K \Rightarrow K = -E_0C$$

Por lo tanto:

$$Q(t) = E_0C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

La corriente es:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

b. Verificar que límite $Q(t) = E_0C$, límite $I(t) = 0$

Para la carga:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} E_0C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E_0C(1 - 0) = E_0C$$

Para la corriente:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E_0}{R} \cdot 0 = 0$$

Comparación de los métodos numéricos con la solución analítica

Para comparar la exactitud de los métodos utilizaremos un ejemplo con los parámetros de:

$$E_0 = 110, R = 50, C = 0{,}05, h = 0{,}1$$

Además usaremos como valor real t = 10 y valor aproximado t = 9,9

Tiempo (t)	**Valor**
9,9	5,399264
10	5,395153

Conociendo ambos de estos resultados se concluye que el error relativo hacia atrás es de 0.000761

Cuadro 1: Solución analítica con el valor aproximado y el valor real

Tiempo (t)	**Valor**
9,7	5,395125
9,8	5,399320
9,9	5,403347

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.001517 y un número de condición de 1.993429

Cuadro 2: Método de Euler

Tiempo (t)	Valor
9,7	5,386299
9,8	5,390756
9,9	5,395039

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000021 y un número de condición de 0.027595

Cuadro 3: Método Euler Mejorado

Tiempo (t)	Valor
9,7	5,386420
9,8	5,390874
9,9	5,395153

Dando un error relativo hacia adelante de un 0.000761 y un número de condición de 1

Cuadro 4: Método de Runge - Kutta 4

Con el objetivo de calcular el orden de convergencia de dichos métodos haremos 10 iteraciones de ellos por cada uno de los siguientes valores de h = 0.5; 0.2; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01 para asi obtener el orden entre cada uno de los tamaños de pasos usando la siguiente fórmula:

Fórmula del orden de convergencia:

$$p = \frac{\log\left(\frac{\text{Error}_{h_1}}{\text{Error}_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

Cuadro 5: Órdenes de convergencia de los métodos numéricos

Método	**0.5→0.2**	**0.2→0.1**	**0.1→0.05**	**0.05→0.02**	**0.02→0.01**	**Promedio**
Euler	1.0595	1.0249	1.0122	1.0055	1.0024	1.0209
Euler Mejorado	2.1025	2.0429	2.0218	2.0099	2.0043	2.0363
Runge-Kutta 4	4.1104	4.0470	4.0241	4.0109	4.0044	4.0394