CPE Lyon - 3ETI 2020-2021

Analyse (M-ANA) : Travaux pratiques Matlab

Exercice 1 : reconstruction d'un signal à partir de ses coefficients de Fourier

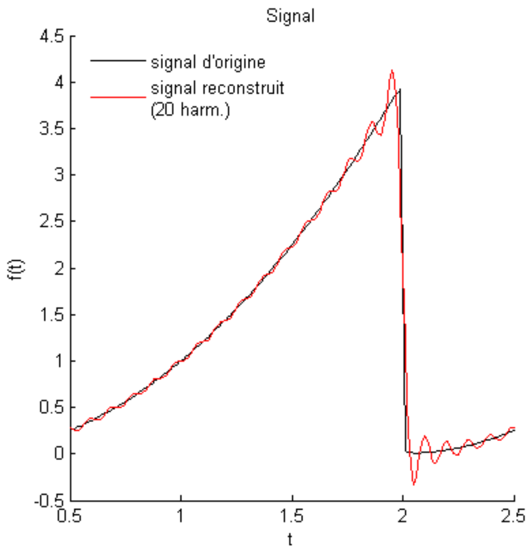
L'objectif de cet exercice est de déterminer le spectre d'un signal périodique dont on ne connaît pas l'expression analytique (c'est-à-dire pas de formule mathématique de $f(t)$) mais dont on dispose les données, sur une période entière du signal, sous la forme d'un tableau Matlab de 2 lignes : la 1ère contient les valeurs de t et la 2nde les valeurs de $f(t)$. Vous trouverez ce tableau dans le fichier texte « signal1.txt » dans CPe-campus. On pourra procéder de la façon suivante :

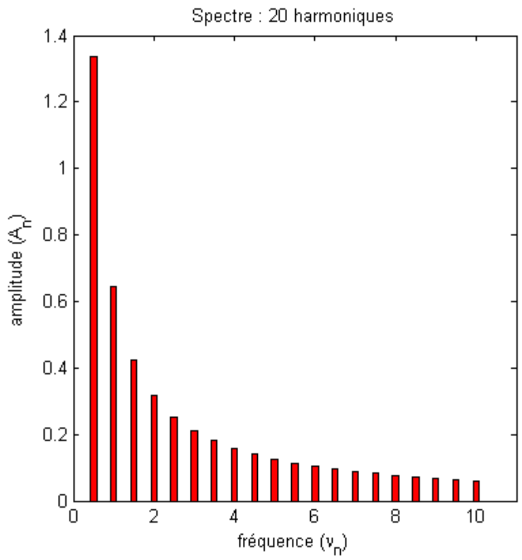
- Etape 1 : Copier ce tableau, le coller dans un fichier Matlab et l'enregistrer dans une matrice à 2 lignes nommée `signal` :

```
signal=[0.5000 0.5100 0.5200 0.5300 0.5400  … ;     % t
            0.2506 0.2607 0.2710 0.2815 0.2922  … ] ;  % f(t)
```

- Etape 2 : Afficher la courbe représentative de ce signal dans une 1ère fenêtre (commande `plot`)
- Etape 3 : Calculer la période T, la fréquence ν et la pulsation ω de ce signal : on enregistrera ces données dans la variables nommées `T`, `nu` et `omega` respectivement.
- Etape 4 : Calculer le coefficient de Fourier a_0 (commande `trapz`)
- Etape 5 : Calculer dans une boucle `for` les coefficients de Fourier $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ avec $N = 20$ par exemple ainsi que les fréquences ν_n et les amplitudes A_n, que l'on enregistrera dans une matrice $2 \times N$ nommée `harmoniques` ; la 1ère ligne contient les fréquences, la 2ème ligne contient les amplitudes.
- Etape 6 : Afficher le spectre dans une 2nde fenêtre (commande `bar`)
- Etape 7 : Reconstruire le signal à partir des N harmoniques et l'afficher dans la 1ère fenêtre en superposition du signal d'origine avec une couleur différente (<u>indication</u> : utiliser la boucle `for` de l'étape 5).
- Etape 8 : On admettra que l'énergie totale du signal d'origine est égale à $16/5$; à l'aide de la formule de Parseval, calculer le taux d'énergie transportée par les N harmoniques (commande `sum`) et commenter le résultat obtenu.

On doit obtenir le résultat suivant dans le cas où l'on prend en compte $N = 20$ harmoniques (page suivante) :





Le programme Matlab doit être le plus générique possible, de sorte que si l'on propose un autre signal, il n'y ait que le tableau de ce signal (celui que l'on récupère dans le fichier texte) à changer. Pour le savoir, récupérer sous CPe-campus le fichier « signal2.txt », copier puis coller le tableau dans votre programme Matlab en remplacement du précédent et l'exécuter (on admettra que l'énergie du signal d'origine est égale à $1/2$).

Exercice 2 : transformée de Fourier

On considère les fonctions suivantes :

$$\Pi(\mathrm{t}), \qquad \Pi(\mathrm{t}-2), \qquad \Pi\left(\frac{\mathrm{t}}{3}\right), \qquad t\Pi(t)$$

Récupérer la fonction `porte` utilisée dans l'exercice d'initiation Matlab rendu le 25 novembre 2019.

L'objectif de cet exercice est d'écrire un programme Matlab permettant de :

- calculer de façon approchée la transformée de Fourier d'une fonction (commande `trapz`)
- d'afficher la courbe de la fonction dans une fenêtre (commande `plot`)
- d'afficher, dans une autre fenêtre, la courbe de la partie réelle, de la partie imaginaire, du module et de la phase de la transformée de Fourier (commandes `subplot, real, imag, abs, angle`)
- d'afficher le module la transformée de Fourier théorique (c'est-à-dire calculée à la main) en superposition de la courbe approchée

Pour cela, copier et compléter le programme Matlab suivant :

```
clear variables;close all;

i=complex(0,1);

% axe temporel
t_min=-5;
t_max=5;
t_step=0.01;
t=t_min:t_step:t_max;

% axe fréquentiel
nu_min=-10;
nu_max=10;
nu_step=0.1;
nu=nu_min:nu_step:nu_max;

% choix du signal
signal=1;
switch signal
    case 1
        f=___________________________;  % signal
        tf_exact=____________________;  % transformée de Fourier exacte
    case 2
        f=___________________________;  % signal
        tf_exact=____________________;  % transformée de Fourier exacte
    case 3
        f=___________________________;  % signal
        tf_exact=____________________;  % transformée de Fourier exacte
    case 4
        f=___________________________;  % signal
        tf_exact=____________________;  % transformée de Fourier exacte
end

% affichage du signal
figure(1);
_____________________________________ ; % (commande plot)
legend('signal');legend('boxoff');

% calcul de la transformée de Fourier (calcul approché)
tf_approx=____________________________; % initialisation (commande zeros)
for k=1:length(nu)
    tf_approx(k)=_______________________________;  % (commande trapz)
end
```

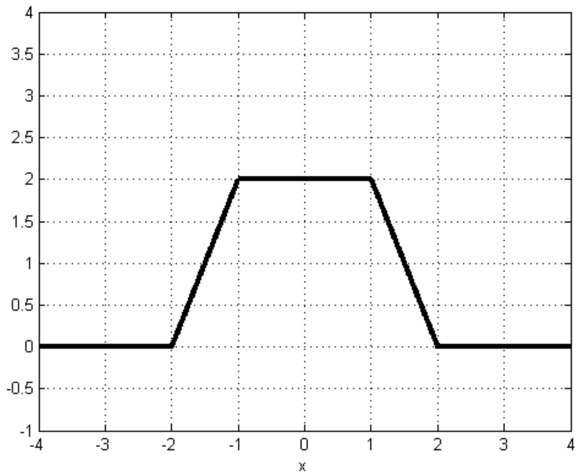
```
% affichage de la TF
figure(2);

% partie réelle
subplot(2,2,1);hold on;
plot(______________________________);
plot(______________________________);
title('Real(TF)');
legend('approx.','exact');legend('boxoff');

% partie imaginaire
subplot(2,2,2);hold on;
plot(______________________________);
plot(______________________________);
title('Imag(TF)');
legend('approx.','exact');legend('boxoff');

% module
subplot(2,2,3);hold on;
plot(______________________________);
plot(______________________________);
title('Module(TF)');
legend('approx.','exact');legend('boxoff');

% phase
subplot(2,2,4);hold on;
plot(______________________________);
plot(______________________________);
title('Phase(TF)');
legend('approx.','exact');legend('boxoff');
```

Commenter les résultats obtenus en essayant de faire le lien avec le cours (ces résultats illustrent certaines propriétés du cours, lesquelles ?).

Tester à nouveau votre programme avec les fonctions suivantes :

$$3te^{-2\pi|t|}, \qquad e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad \frac{t}{(1+9t^2)^2}$$

ainsi que la fonction dont la courbe représentative est :



Indication : récupérer la fonction `triangle` utilisée dans l'exercice d'initiation Matlab.

Exercice 3 : produit de convolution et transformée de Fourier

Taper le code suivant :

```
clear all;close all;hold on;
tmin=-5;tmax=5;pas=0.1;
t=[tmin:pas:tmax];n=length(t);
f0=(1+t.^2).^(-1);
f=f0+0.05*randn(1,n);
figure(1);
plot(t,f);
```

Ce programme affiche une lorentzienne (`f0=(1+t.^2).^(-1)`) à laquelle on a ajouté un bruit aléatoire (`0.05*randn(1,n)`).

1) Lissage par convolution via la commande `conv`

Calculer le produit de convolution du signal f par une fonction porte de hauteur 1 et de largeur a. Pour cela :

- proposer quatre largeurs de porte a différentes qui permettent de voir l'évolution du lissage de f (boucle `for`, commande `conv` avec option `'same'`)

- afficher dans une nouvelle figure les quatre graphiques (un par valeur de a) comportant chacun le signal non bruité f_0 et le signal issu de la convolution (commandes `plot, subplot`)

- mettre en évidence le domaine des valeurs de a qui permettent de lisser le signal sans le dénaturer

- commenter et interpréter les résultats

2) Lissage par convolution via la transformée de Fourier

Retrouver les résultats de la question 1) en utilisant une propriété de la transformée de Fourier (cf. cours) qui permet de calculer le produit de convolution du signal bruité par une porte sans utiliser la commande `conv` de Matlab (on pourra utiliser la commande `trapz` comme dans l'exercice précédent).

Exercice 4 : distribution de Dirac

Partie A : limite d'une série de fonctions continues

On considère la fonction suivante :

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} \qquad (1)$$

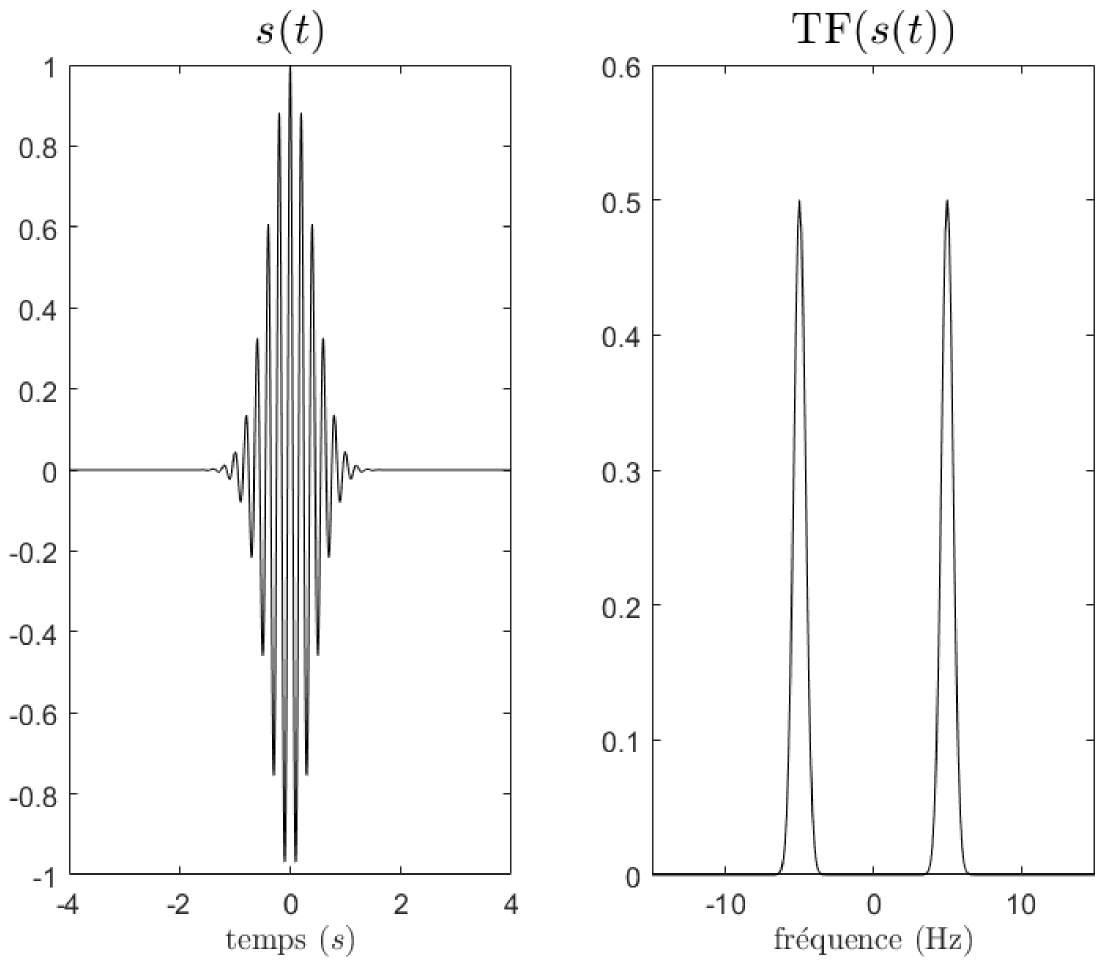
1) Construire un vecteur t contenant N valeurs régulièrement espacées et comprises entre $-D$ (inclus) et $+D$ (exclus).
   A. N. : $N = 2^{16}$ et $D = 4\ s$.
2) Tracer sur une même figure (en utilisant la commande `subplot`) les courbes représentatives de g_σ pour les valeurs de σ égales à $1/2^k$ avec $k = 1,3,5$ et 7. Commenter.
3) Tracer sur une autre figure les transformées de Fourier des fonctions g_σ de la question précédente [utiliser la fonction `TransFourier` accessible sur CPe-campus]. Commenter.

Partie B : convolution par un Dirac

On considère la fonction suivante :

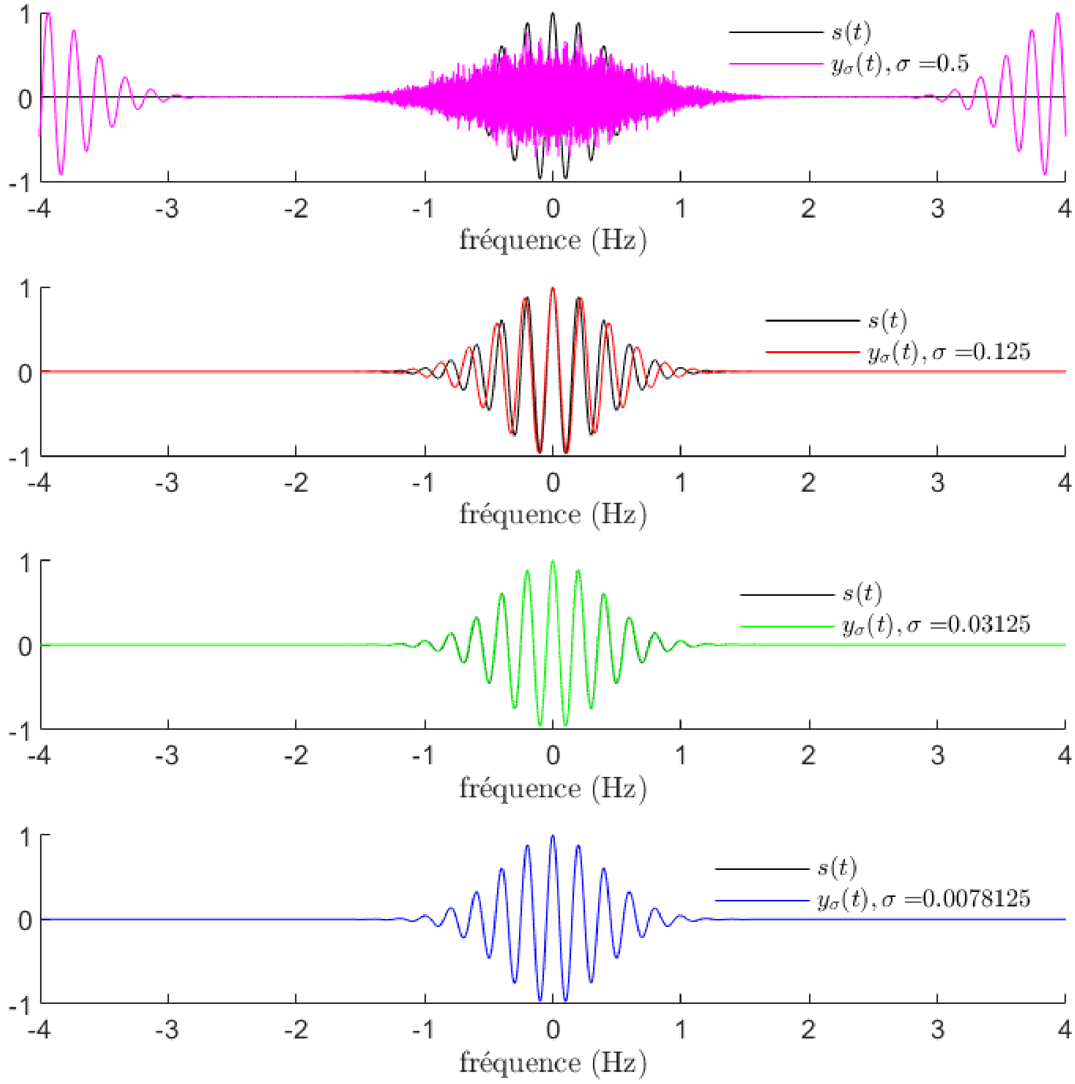
$$s(t) = e^{-\pi t^2}\cos(2\pi\nu_0 t) \qquad (2)$$

1) Afficher dans une même figure mais dans 2 repères différents (cf. commande `subplot`) la courbe de la fonction $s(t)$ avec $\nu_0 = 5\ Hz$ et la courbe de $\hat{s}(\nu) = \mathcal{F}(s(t))$ [utiliser la fonction `TransFourier` accessible sur CPe-campus].
   On doit obtenir la figure suivante :



   Commenter.

2) Tracer dans une même figure mais dans 4 repères différents la fonction $s(t)$ et la fonction $y_\sigma(t) = (s * g_\sigma)(t)$ pour les valeurs de σ égales à $1/2^k$ avec $k = 1{,}3{,}5$ et 7 [utiliser la commande `conv` de Matlab en choisissant l'option `'same'`]. On doit obtenir la figure suivante :



Commenter.

Exercice 5 : peigne de Dirac

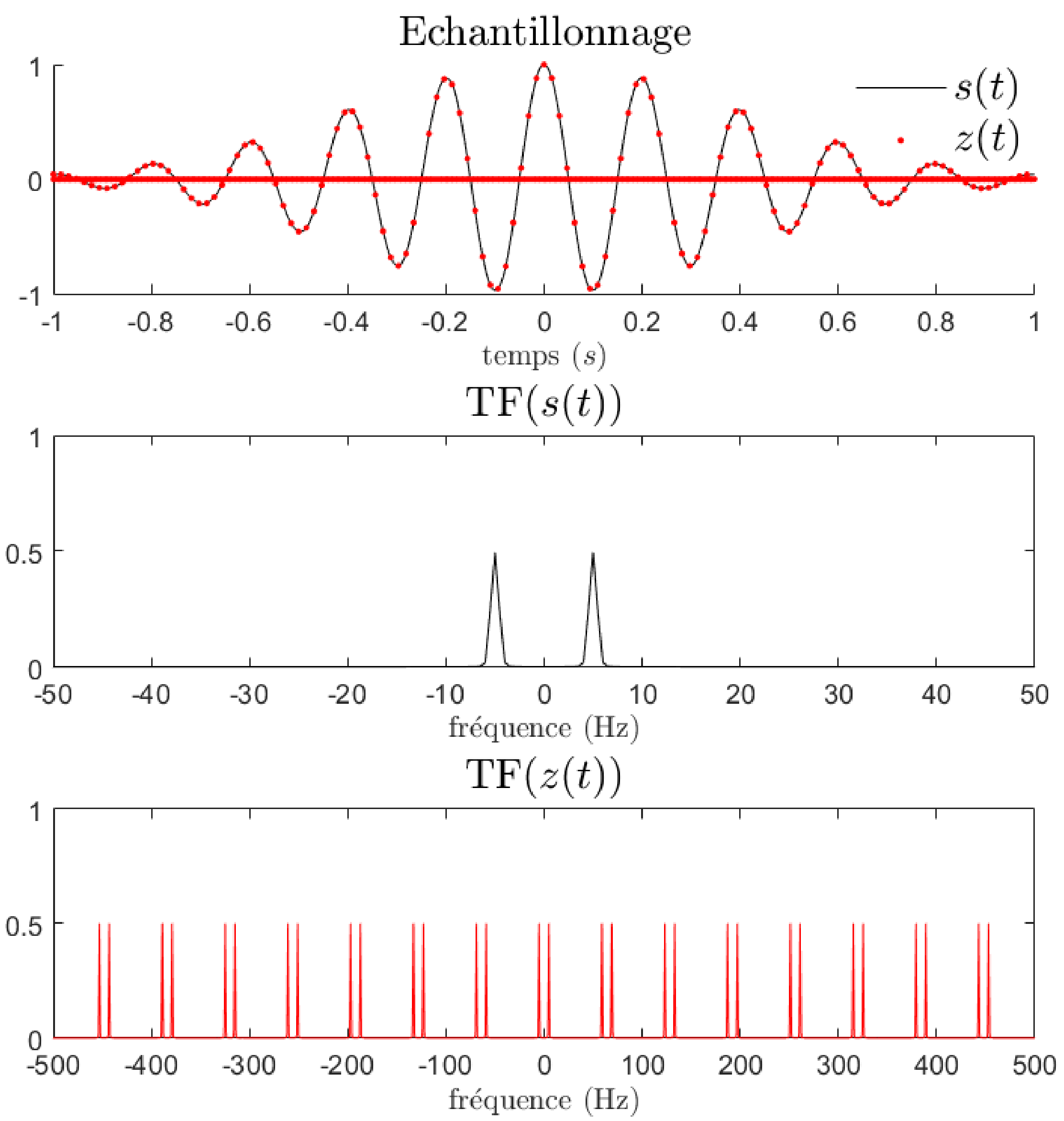
1) Construire un vecteur t contenant N valeurs régulièrement espacées et comprises entre $-D$ (inclus) et $+D$ (exclus).

   A. N. : $N = 2^{12}$ et $D = 1\ s$.

1) Afficher dans une même figure mais dans 4 repères différents (cf. commande `subplot`) les peignes de Dirac de période $T_1 = 2^{-5}$ et $T_2 = 2^{-6}$ [utiliser la fonction `peigne` accessible sur CPe-campus] et leurs transformées de Fourier. Commenter.
2) On considère le signal défini par la formule (2) de l'exercice 4.

   - calculer le produit $z(t) = s(t)Ш_{T_2}(t)$
   - calculer $\hat{s}(\nu) = \mathcal{F}(s(t))$ et $\hat{z}(\nu) = \mathcal{F}(z(t))$ [utiliser la fonction `TransFourier` accessible sur CPe-campus].

   Afficher dans une même fenêtre mais dans 3 repères différents $s(t), z(t), \hat{s}(\nu)$ et $\hat{z}(\nu)$ de sorte à obtenir le résultat suivant :



Commenter et expliquer ces résultats.

Exercice 6

Matlab permet de traiter la transformée de Fourier d'une image via la commande `fft2`, la transformée de Fourier inverse étant `ifft2`. La commande `fftshift` permet de recentrer l'image (comme dans le cas monodimensionnel). A toute matrice rectangulaire A de dimension $n \times m$, on peut associer une image de m pixels (largeur) sur n pixels (hauteur) et dont l'intensité de chaque pixel est égale au coefficient correspondant de la matrice. Cette image peut être affichée à l'aide de la commande Matlab `imshow(M)`.

1) On souhaite vérifier certains résultats de l'exercice 19 du chapitre IV:
   - Taper et exécuter le programme suivant :

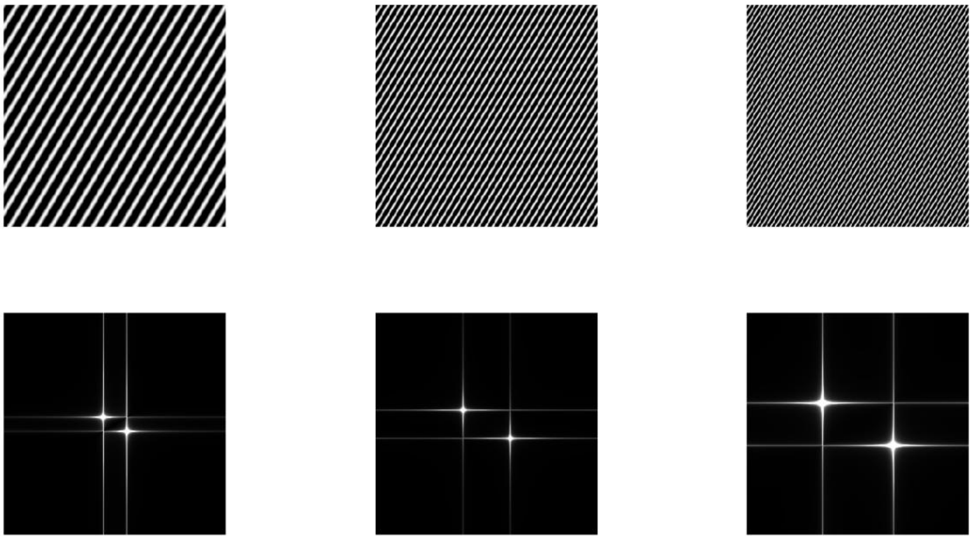
```
clear all;close all;
n=300;
m=n;
M=zeros(n,m);
for p=floor(0.25*n):floor(0.75*n)
    for q=floor(0.35*m):floor(0.65*m)
        M(p,q)=1;
    end
end

subplot(1,2,1);
imshow(M);
```

   - Compléter le programme par le calcul de la valeur absolue de la transformée de Fourier de `M`. On notera `TF_M_real` la matrice correspondant à cette transformée de Fourier.
   - Afficher l'image correspondante (commande `imshow`). Attention, `imshow` affiche une image en niveau de gris, ce qui signifie que la matrice donnée en paramètre de `imshow` doit avoir des coefficients compris entre 0 et 255 (utiliser la commande `uint8` pour convertir la matrice `TF_M_real` en une matrice, qu'on notera `TF_M_int`, ne contenant que des entiers compris entre 0 et 255). Commenter.
   - Changer les dimensions de la fenêtre puis exécuter à nouveau le programme. Commenter.
   - Reprendre le programme précédent mais cette fois-ci avec une fenêtre circulaire centrée sur le centre de l'image. Commenter.

2) Transformée de Fourier d'un motif périodique
   - Taper et exécuter le code suivant :

```
clear all;close all;
[x,y]=meshgrid(1:n,1:m);
M=cos(0.5*x+0.5*y);
subplot(1,2,1);
imshow(M);
```

   - Compléter le programme par le calcul de la valeur absolue de la transformée de Fourier de `M` puis afficher l'image correspondante et commenter.
   - Modifier le programme de sorte à faire apparaitre deux pics supplémentaires dans le transformée de Fourier.
   - Faire un programme permettant d'obtenir le résultat suivant (à peu de chose près) :



- Quel commentaire peut-on faire à la vue de ce dernier résultat ?

Exercice 7

On propose dans cet exercice de supprimer les composantes périodiques d'une image (`barbara.jpg` sur CPe-campus) à l'aide de la transformée de Fourier bidimensionnelle (commandes `fft2`, `fftshift` et `ifft2`).

- Ecrire le programme suivant, l'enregistrer dans le même répertoire que `barbara.jpg` puis l'exécuter :

```
clear all;close all;
A=imread('barbara.jpg');
[a,b]=size(A);
figure(1);
subplot(2,2,1);
imagesc(A);
colormap gray;
```

- Calculer la transformée de Fourier de A et afficher son module à l'aide de la commande `imagesc` (pour une lecture plus aisée, afficher plutôt le logarithme en base 10 de son module : commande `log10`).
- Observer les pics correspondant aux composantes périodiques de l'image.
- Isoler la partie centrale (elle contient une grande partie de l'information de l'image).
- Mettre à zéro tous les pixels de la transformée de Fourier dont la valeur est supérieure à un seuil que l'on déterminera.
- Ré-introduire la partie centrale dans la matrice de la transformée de Fourier.
- … et conclure !