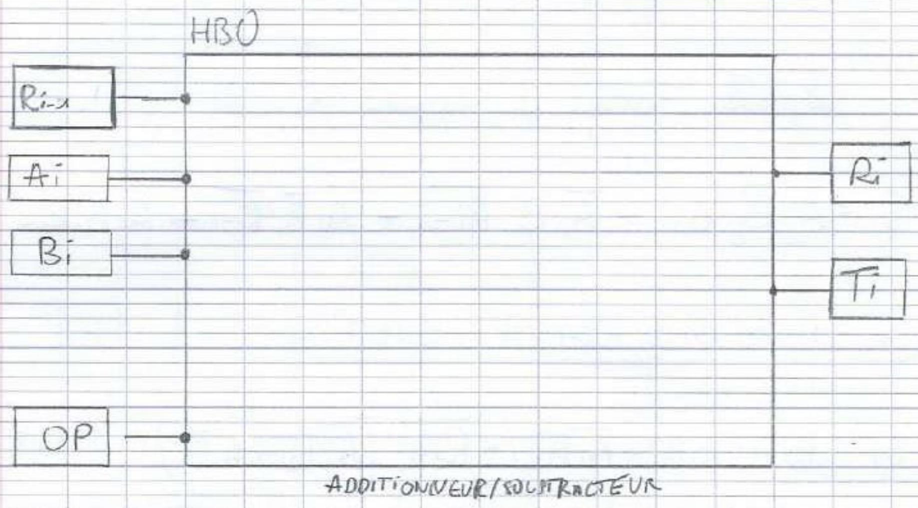
Levilly Timothée
Chretien Paul
François Axel
Schurck Alexandre

Operateur élémentaire d'addition/soustraction

1. Cahier des charges

- Le schéma bloc ci-dessous fait le bilan des signaux d'entrées et de sortie de l'opérateur élémentaire réalisé.



R_{i-1} : La retenue de l'opérateur de rang $i-1$
A_i et B_i : Les nombres binaires des deux nombres additionnés ou soustraits
OP : choix de l'opération effectuée $\begin{cases} 0 : \text{addition} \\ 1 : \text{soustraction} \end{cases}$

R_i : Retenue de l'opération
T_i : Résultat de l'opération effectuée

2. Conception fonctionnelle

2.1. Opérateur élémentaire d'addition

2.1.1. Table de vérité

A_i	B_i	R_{i-1}	R_i	S_i
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1

2.1.2 Terme de somme S_i

$$S_i = \bar{A_i} \cdot \bar{B_i} \cdot R_{i-1} + \bar{A_i} \cdot B_i \cdot \overline{R_{i-1}} + A_i \cdot \bar{B_i} \cdot \overline{R_{i-1}} + A_i \cdot B_i \cdot R_{i-1}$$

<u>Démonstration de $S_i = A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$:</u>

$$\begin{aligned} S_i &= \bar{A_i} \cdot \bar{B_i} \cdot R_{i-1} + \bar{A_i} B_i \overline{R_{i-1}} + A_i \cdot \bar{B_i} \cdot \overline{R_{i-1}} + A_i B_i R_{i-1} \\ &= R_{i-1} (\bar{A_i}\bar{B_i} + A_i B_i) + \overline{R_{i-1}} (\bar{A_i} B_i + A_i \bar{B_i}) \\ &= R_{i-1} (\overline{A_i \oplus B_i}) + R_{i-1} (A_i \oplus B_i) \\ &= R_{i-1} \oplus A_i \oplus B_i \end{aligned}$$

On a donc $S_i = A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$

2.1.3 Terme de retenue R_i

$$\begin{aligned} R_i &= A_i B_i + B_i R_{i-1} + A_i R_{i-1} \\ &= A_i B_i + R_{i-1}(A_i + B_i) \end{aligned}$$

- Tableau de Karnaugh :

$A_i B_i \backslash R_{i-1}$	0	1
00	0	0
01	0	1
11	1	1
10	0	1

- Tables de vérités de OU et OU-EXCLUSIF

A_i	B_i	$A_i + B_i$	$A_i \oplus B_i$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

$A_i + B_i = \overline{A_i}.B_i + A_i.\overline{B_i} + A_i.B_i$

$A_i \oplus B_i = \overline{A_i}.B_i + A_i.\overline{B_i}$

On a donc $A_i + B_i = A_i \oplus B_i + A_i.B_i$

En injectant ce dernier résultat dans R_i on a :

$$\begin{aligned}
R_i &= A_i B_i + R_{i-1}\left(A_i \oplus B_i + A_i B_i\right) \\
&= A_i B_i + R_{i-1}\left(A_i \oplus B_i\right) + R_{i-1} A_i B_i \\
&= A_i B_i \left(1 + R_{i-1}\right) + R_{i-1}\left(A_i \oplus B_i\right) \\
&= A_i B_i + R_{i-1}\left(A_i \oplus B_i\right)
\end{aligned}$$

2.2. Opérateur élémentaire soustraction

2.2.1. Table de vérité

A_i	B_i	R_{i-1}	R_i	D_i
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

2.2.2. Terme différence D_i

On a donc, par lecture,

$$D_i = \bar{A}_i \bar{B}_i R_{i-1} + \bar{A}_i B_i \overline{R_{i-1}} + A_i B_i R_{i-1} + A_i \bar{B}_i \overline{R_{i-1}}$$

On constate qu'on peut simplifier D_i avec l'opérateur $\oplus$.

$$D_i = \bar{A_i}\,\bar{B_i}\,R_{i-1} + \bar{A_i}\,B_i\,\overline{R_{i-1}} + A_i\,\bar{B_i}\,\overline{R_{i-1}} + A_i B_i\,R_{i-1}$$
$$D_i = R_{i-1}(\bar{A_i}\cdot\bar{B_i} + A_i B_i) + \overline{R_{i-1}}(\bar{A_i} B_i + A_i \bar{B_i})$$
$$D_i = R_{i-1}(\overline{A_i \oplus B_i}) + \overline{R_{i-1}}(A_i \oplus B_i)$$
$$D_i = R_{i-1} \oplus A \oplus B$$

On constate que $D_i = S_i$

2.2.3 Terme de retenue R_i

- Tableau de Karnaugh

$A_i B_i \backslash R_{i-1}$	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	1
10	0	0

$$R_i = \bar{A_i} B_i + \bar{A_i} R_{i-1} + B_i R_{i-1} = \bar{A_i} B_i + R_{i-1}(\bar{A_i} + B_i)$$

- Tableau de vérité $OU(f(A_i), f(B_i))$ et $\overline{\text{OU-EXCLUSIF}}$

A_i	B_i	$OU(f(A_i),f(B_i))$	$\overline{A_i \oplus B_i}$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1

$$OU(f(A_i) f(B_i)) = \bar{A_i} + B_i = \bar{A_i}\,\bar{B_i} + A_i B_i + \bar{A_i} B_i$$

$$\overline{A_i \oplus B_i} = \overline{\bar{A_i} \cdot B_i + A_i \bar{B_i}}$$

De Morgan

$$= \overline{\bar{A_i} B_i} \cdot \overline{A_i \bar{B_i}}$$
$$= (A_i + \bar{B_i}) \cdot (\bar{A_i} + B_i)$$
$$= \cancel{A_i \bar{A_i}}^{\,0} + A_i B_i + \bar{A_i}\,\bar{B_i} + \cancel{\bar{B_i} B_i}^{\,0}$$

Finalement, $\overline{A_i \oplus B_i} = A_i B_i + \overline{A_i}\,\overline{B_i}$

On a donc $OU\left(f(A_i), f(B_i)\right) = \overline{A_i} + B_i = \overline{A_i \oplus B_i} + \overline{A_i} B$

En injectant ce resultat dans R_i :

$$\begin{aligned} R_i &= \overline{A_i} B_i + R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i} + \overline{A_i} B_i\right) \\ &= \overline{A_i} B_i + R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right) + R_{i-1}\overline{A_i} B_i \\ &= \overline{A_i} B_i \left(1 + R_{i-1}\right) + R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right) \\ &= \overline{A_i} B_i + R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right) \end{aligned}$$

On a une relation similaire vis à vis de l'addition, mais differente

2.3 Opérateur élémentaire d'addition / soustraction

OP	R_i	T_i (S_i ou D_i)
0 (ADD)	$A_iB_i + R_{i-1}(A_i \oplus B_i)$	$A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$
1 (SOUS)	$\overline{A_i}B_i + R_{i-1}(\overline{A_i \oplus B_i})$	$A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$

$$T_i = A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$$

$$\begin{aligned} R_i &= \overline{OP}\left(A_i B_i + R_{i-1}(A_i \oplus B_i)\right) + OP\left(\overline{A_i} B_i + R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right)\right) \\ &= \overline{OP}\, A_i B_i + \overline{OP}\, R_{i-1}(A_i \oplus B_i) + OP\, \overline{A_i} B_i + OP\, R_{i-1}\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right) \\ &= B_i\left(\overline{OP} A_i + OP\, \overline{A_i}\right) + R_{i-1}\left(\overline{OP}(A_i \oplus B_i) + OP\left(\overline{A_i \oplus B_i}\right)\right) \\ &= B_i\left(OP \oplus A_i\right) + R_{i-1}\left(\overline{OP \oplus (A_i \oplus B_i)}\right) \\ &= B_i\left(OP \oplus A_i\right) + R_{i-1}\left(\overline{OP \oplus A_i \oplus B_i}\right) \end{aligned}$$

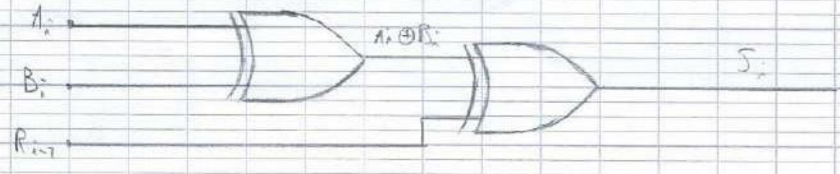
Les expressions les plus simplifiées sont :

$$T_i = A_i \oplus B_i \oplus R_{i-1}$$
$$R_i = B_i\left(OP \oplus A_i\right) + R_{i-1}\left(\overline{OP \oplus A_i \oplus B_i}\right)$$

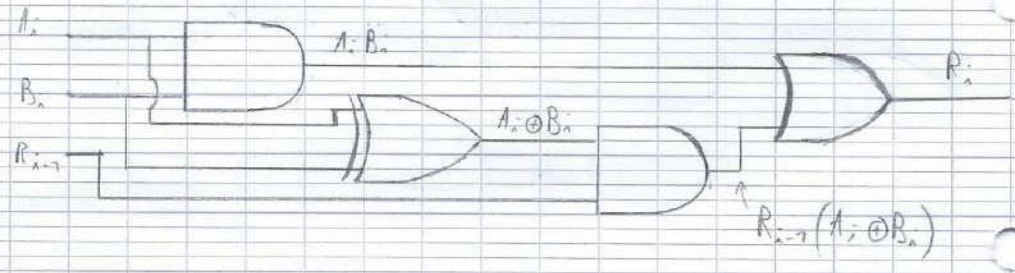
3. Description matérielle

3.1. Opérateur élémentaire d'addition

3.1.1. Terme somme



3.1.2 Terme de retenue



3.1.3 Bilan

Pour l'opérateur élémentaire addition, on a besoin de

- ET : 2 portes
- OU : 1 porte
- OU-EXCLUSIF : 3 portes

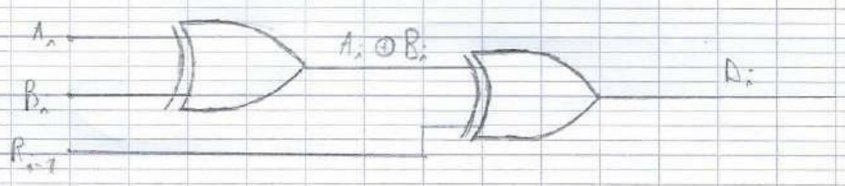
Cela correspond à 1 boîtier ET, 1 boîtier OU, 1 boîtier OU-EXCLUSIF, soit 3 boîtiers au total

Taux d'occupation :

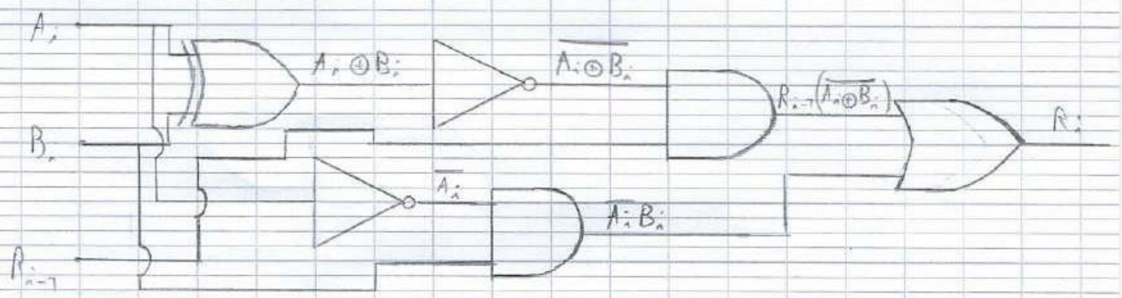
- Boitier ET (74LS08) : $\frac{2}{4} = 50\%$
- Boitier OU (74LS32) : $\frac{1}{4} = 25\%$
- Boitier OU-EXCLUSIF (74LS86) : $\frac{3}{4} = 75\%$

3.2 Opérateur élémentaire de soustraction

3.2.1 Terme de différence



3.2.2 Terme de retenue



3.2.3 Bilan

Pour l'opérateur élémentaire soustraction, on a besoin de

- ET : 2 portes
- OU : 1 porte
- NON : 2 portes
- OU-EXCLUSIF : 3 portes

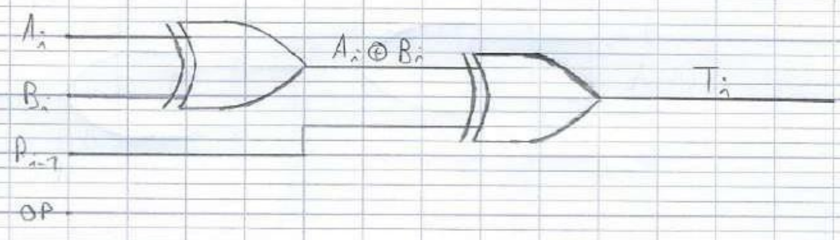
Cela correspond à 1 boitier ET, 1 boitier OU, 1 boitier NON et un boitier OU-EXCLUSIF, soit 4 boitiers au total

Taux d'occupation :

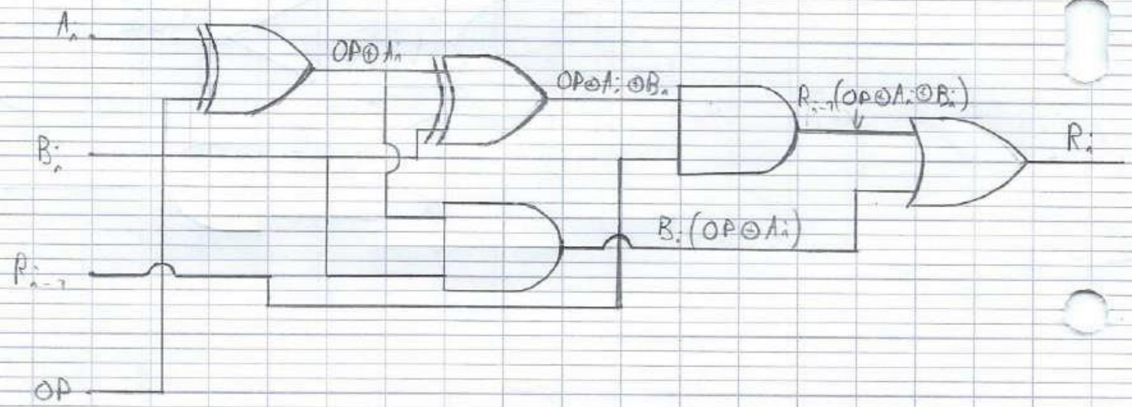
- Boitier ET (74LS08) : $\frac{2}{4} = 50\%$
- Boitier OU (74LS32) : $\frac{1}{4} = 25\%$
- Boitier OU-EXCLUSIF (74LS86) : $\frac{3}{4} = 75\%$
- Boitier NON (74LS04) : $\frac{2}{6} = 33{,}3\%$

3.3 Opérateur élémentaire d'addition/soustraction

3.3.1 Terme résultat



3.3.2 Terme de retenue



3.3.3 Bilan

Pour l'opération élémentaire d'addition/soustraction, on a besoin de :

- ET : 2 portes
- OU : 1 porte
- OU-EXCLUSIF : 4 portes

Cela correspond donc à 1 boîtier ET, 1 boîtier OU et 1 boîtier OU-EXCLUSIF, soit 3 boîtiers au total

Taux d'occupation :

- Boitier ET (74LS08) : $\frac{2}{4} = 50\%$
- Boitier OU (74LS32) : $\frac{1}{4} = 25\%$
- Boitier OU-EXCLUSIF (74LS86) : $\frac{4}{4} = 100\%$

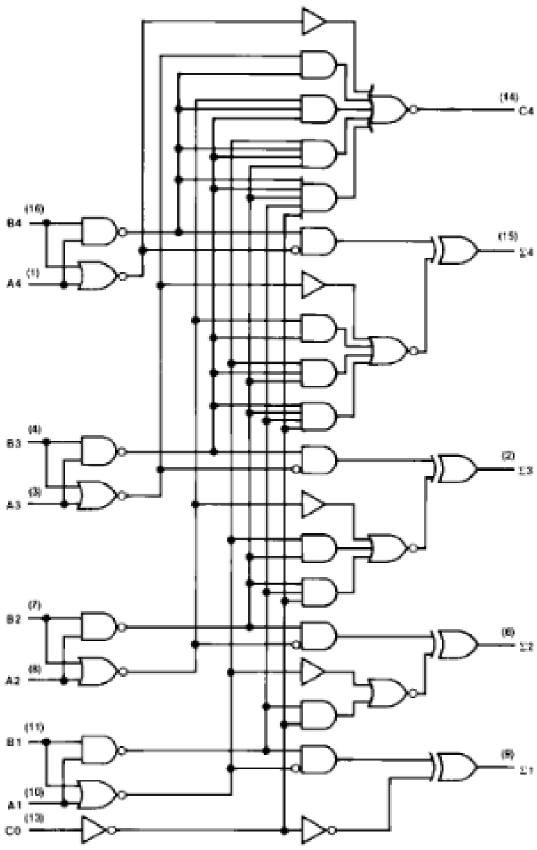
4. Document à rendre

En effectuant des recherches sur des circuits permettant de réaliser la fonction additions, nous avons trouvé 3 composants principaux permettant d’effectuer cette opération :

- 74LS83
- 74HC283
- HD74HC83

Voici leurs schéma respectifs :

- 74LS83



- 74HC283

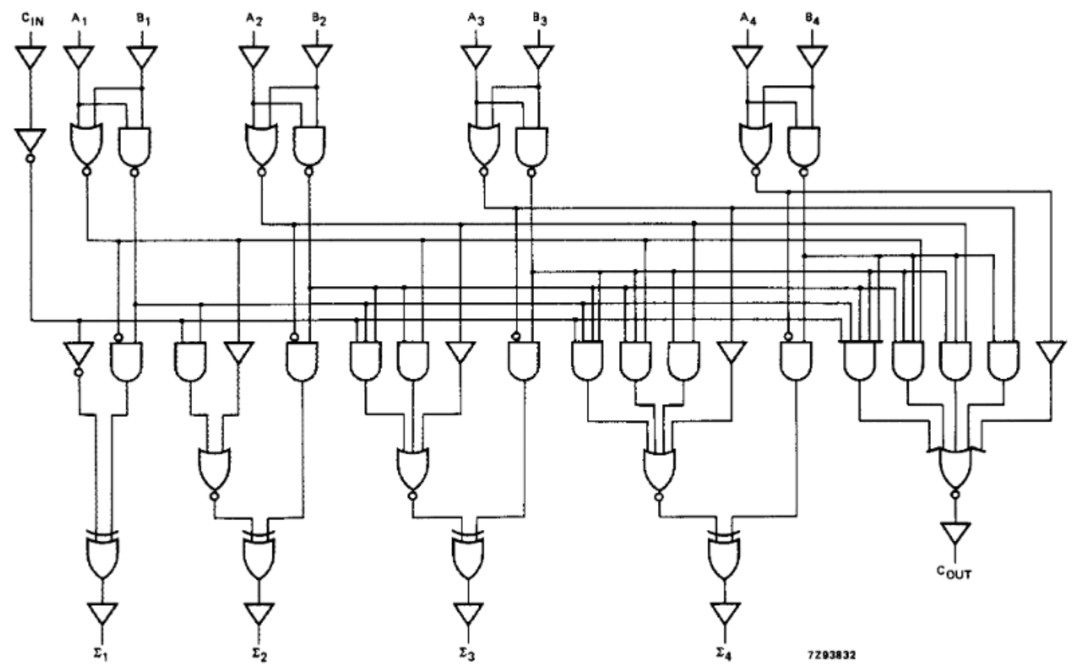
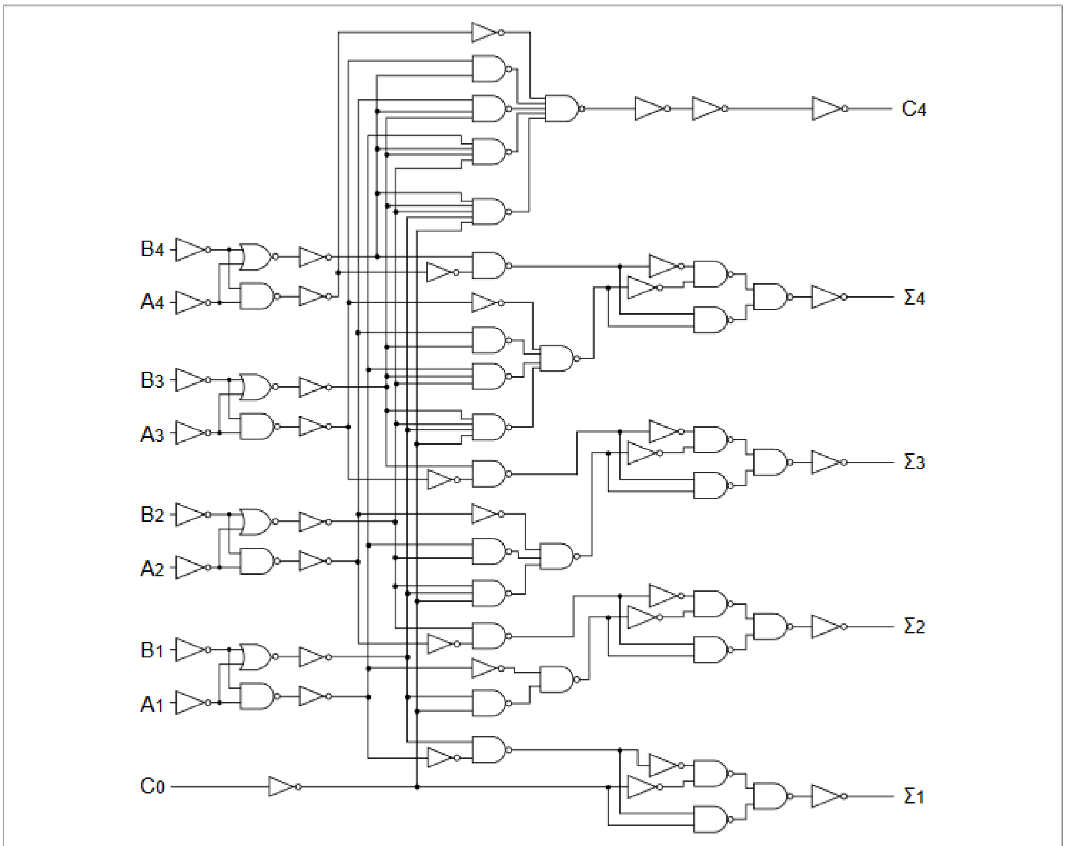


Fig.5 Logic diagram.

- HD74HC83



On constate tout d'abord qu'il s'agit d'additionneur 4 bits, à l'opposé de l'additionneur 1 bit du travail dirigé. Les 3 circuits utilisent le même principes de sommation que nous en prenant en compte les retenues. Cependant, comme il s'agit d'un sommateur 4 bits, les calculs des termes de retenues et de sommes sont très différents d'où les différences de circuits entre ceux trouver pour le 3 et ceux des circuits ci-dessus.

Sources :

https://pdf1.alldatasheet.fr/datasheet-pdf/view/51091/FAIRCHILD/74LS83.html

https://pdf1.alldatasheet.fr/datasheet-pdf/view/15580/PHILIPS/74HC283.html

https://pdf1.alldatasheet.fr/datasheet-pdf/view/63937/HITACHI/HD74HC83.html