TNS : Compte rendu TP1

3ETI 2020/2021, Groupe C

FRANCOIS-CHARLOT Axel
PINCEMIN Alexis

Préparation

1. La fréquence réduite est une variable fréquentielle continue et sans unité qui vaut
$$f = \nu T_e = \frac{\nu}{\nu_e}$$
2. En fonction des indices, la TFD-N points
    - A 0 comme valeur minimale,
    - A N-1 comme valeur maximale,
    - A 1 d'incrément.

    En fonction de la fréquence réduite, la TFD-N points a
    - A 0 comme valeur minimale,
    - A $1 - \frac{1}{N}$ comme valeur maximale,
    - A $\frac{1}{N}$ d'incrément.

    En fonction de la fréquence (en Hz), la TFD-N points a
    - A 0 comme valeur minimale,
    - A $\nu_e - \frac{\nu_e}{N}$ comme valeur maximale,
    - A $\frac{\nu_e}{N}$ d'incrément.
3. On a $S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]e^{-2i\pi kf}$.
    Ainsi, $S^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]e^{2i\pi kf}$.
    Finalement, $S^*(f) = S(-f)$.
4. Si $s[k]$ est paire (et réelle), alors
    $Im(s[k]) = 0$ et $s[k] = s[-k]$
    Ainsi, $Im\big(S(f)\big) = 0$ donc $S^*(f) = S(f)$.
    Donc $S(f)$ est réelle.
    De plus, $S(f) = S^*(f) = S(-f)$.
    Donc $S(f)$ est paire.

    On a bien $S(f)$ réelle et paire, conformément à la propriété de la transformée de Fourier des fonctions réelles et paires.

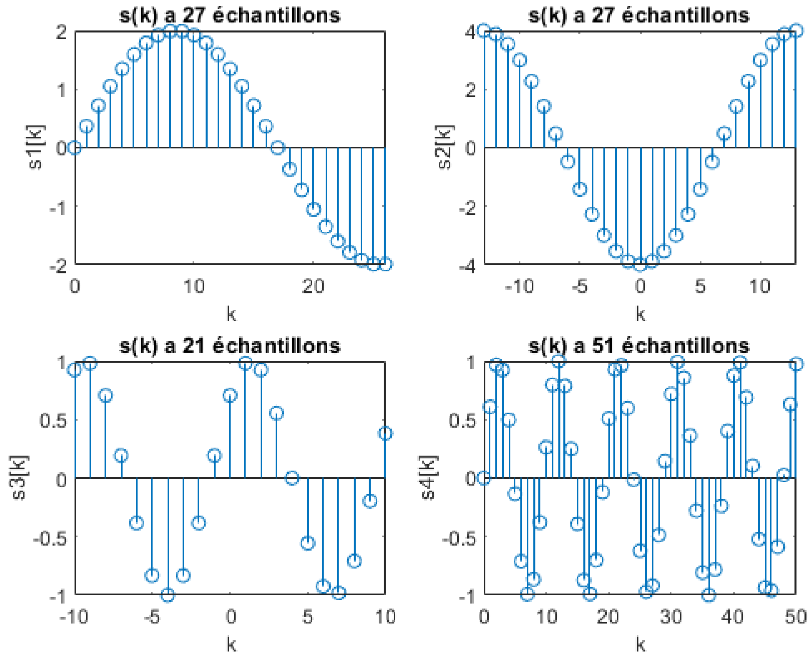
Génération de séquences et d'affichage

Exercice 1

Nous avons réalisé la fonction (SignalPeriodiqueFreqPure.m) permettant de générer les fonctions de la forme :

$$s[k] = Asin(2\pi f_0 k + \varphi) \text{ pour } k = k_d, \dots, k_f$$

Voici donc les 4 séquences des 4 fonctions respective obtenu grâce au script principal et la fonction :



Exercice 2

Nous avons réalisé la fonction (SignalFonctionComposee.m) permettant de générer les fonctions de la forme :

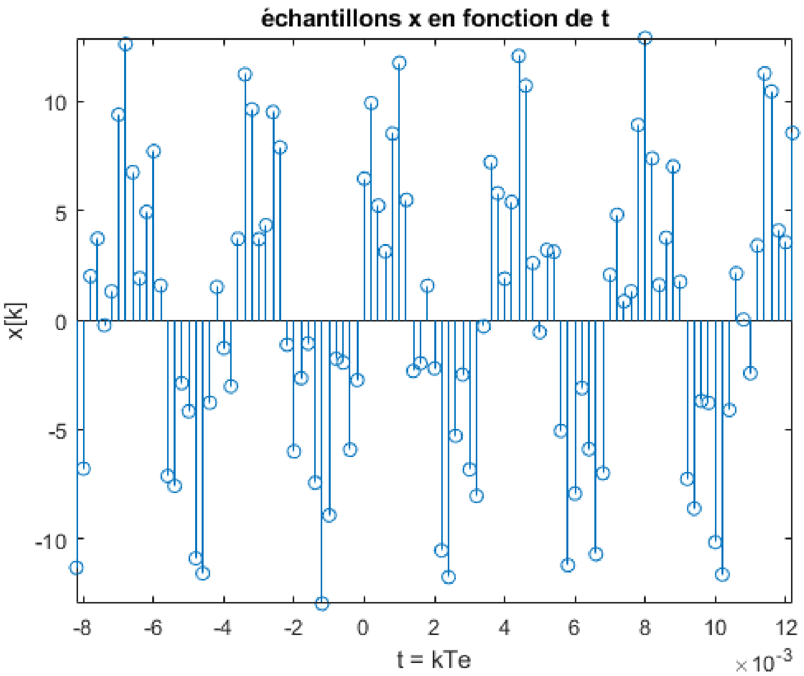
$$s(t) \; = A_1 sin(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) \; + A_2 sin(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

Voici donc les échantillons obtenus avec les paramètres

$$A_1 = 8, \qquad \nu_1 = 271Hz, \qquad \varphi_1 = 25°$$

$$A_2 = 5, \qquad \nu_2 = 1147Hz, \qquad \varphi_2 = 38°$$

$$t_d = -8.1ms, \qquad t_f = 12.05ms, \qquad \nu_e = 5000Hz$$



La fonction de l'exercice 2 devait faire appel à celle de la question 1. Or, cette première utilise un échantillonnage temporel alors que la seconde utilise un échantillonnage indiciel. Nous avons donc dû réaliser une opération de changement d'indice pour réussir à rendre les 2 fonctions compatibles.

Nous avons donc effectué les transformations de paramètres suivant :

- $k_d = floor(t_d \times \nu_e)$ (arrondi inférieur, pour être sûr que t_d soit compris dans l'échantillon)
- $k_f = ceil(t_f \times \nu_e)$ (arrondi supérieur, même raison pour t_f)
- $f_0 = \frac{\nu}{\nu_e}$

Grâce à ces changements de valeurs, on obtient bien la courbe attendue, échantillonnée à la fréquence ν_e.

Calculs de TFD

Exercice 3

On génère la fonction :

$$s(t) = A_1 sin(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) + A_2 sin(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

Avec pour paramètre :

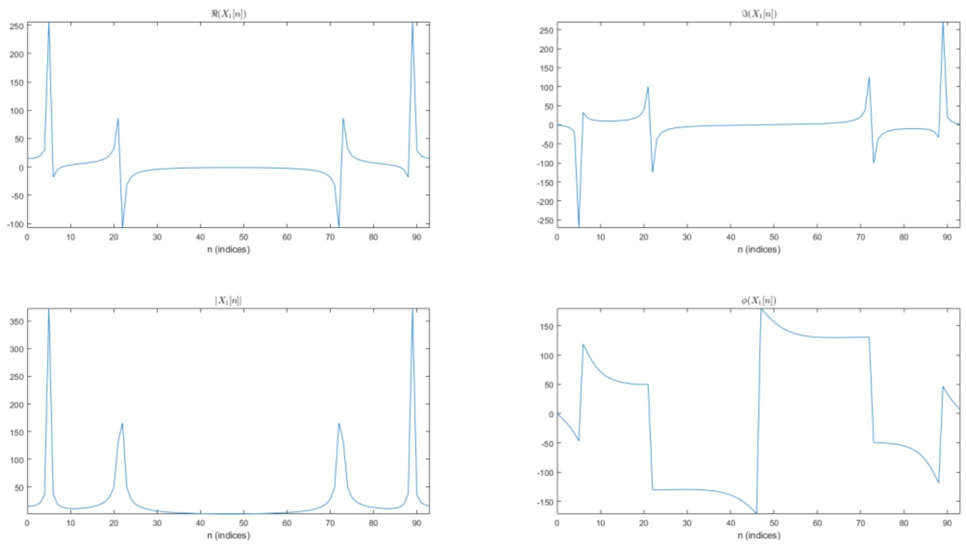
$$A_1 = 8, \quad \nu_1 = 271Hz, \quad \varphi_1 = 25°$$

$$A_2 = 5, \quad \nu_2 = 1147Hz, \quad \varphi_2 = 38°$$

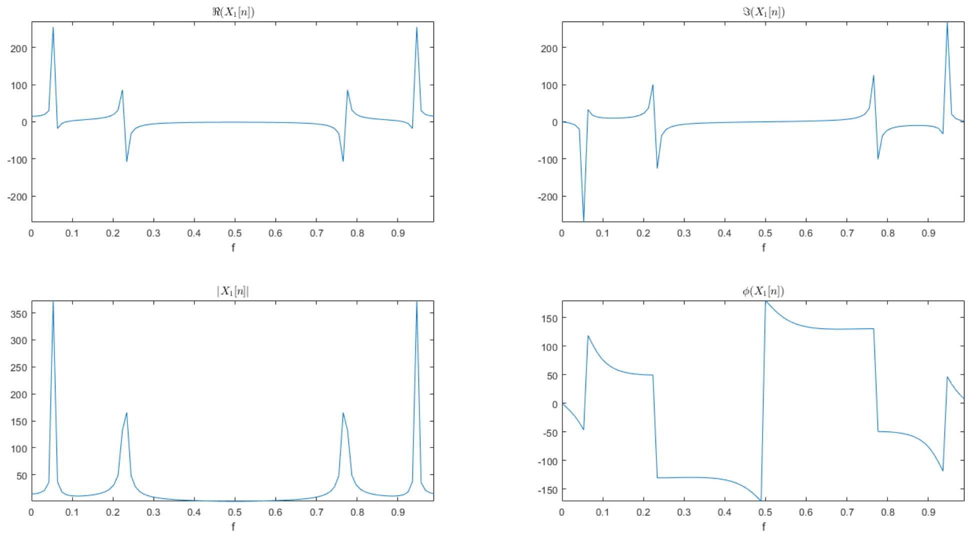
$$t_d = 0ms, \quad t_f = 18.41ms, \quad \nu_e = 5000Hz$$

Puis on calcule sa TFD K-points (où K = 94) et on trace le résultat en abscisse graduées :

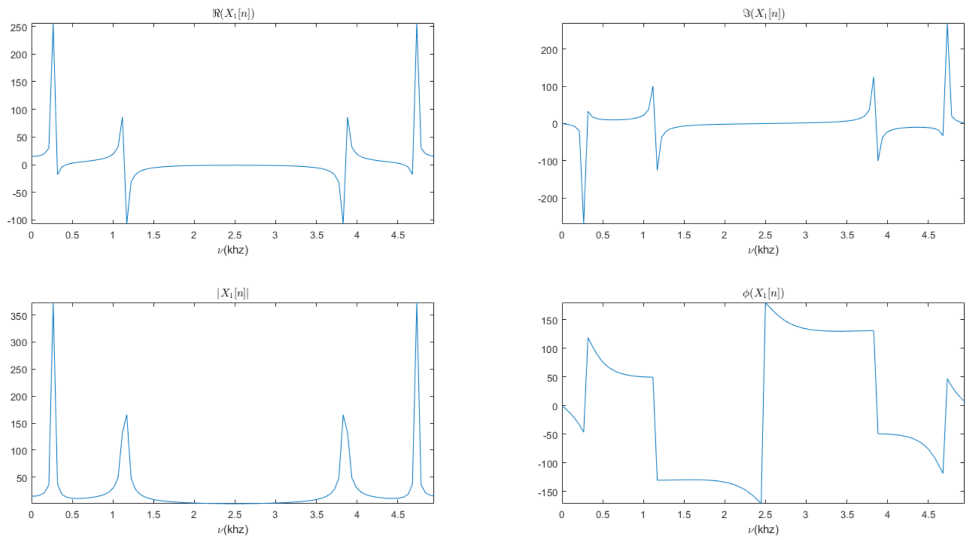
- en indice



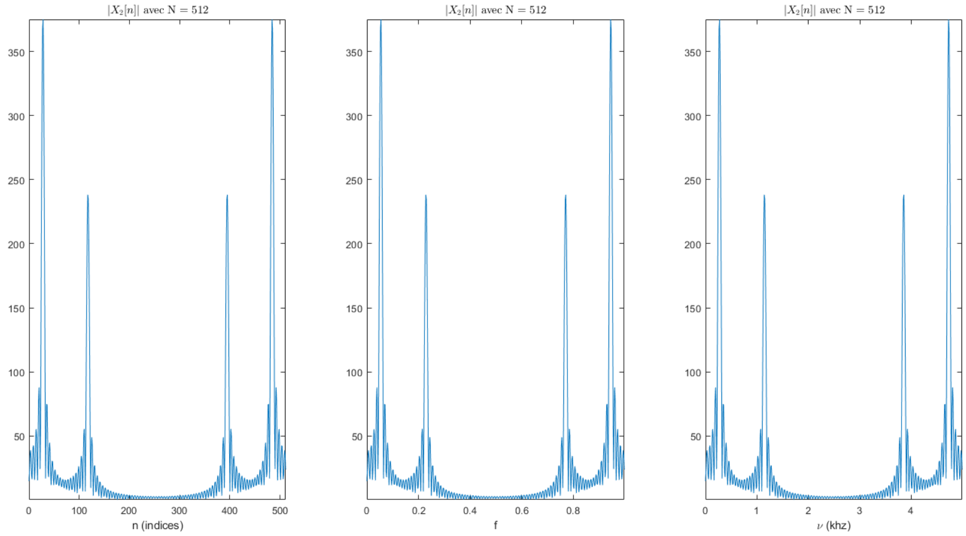
- en fréquence réduite



- en fréquence réelle (en kHz)



On calcule à présent sa TFD 512-points :



Sur la première courbe (TFD 94 points), on mesure que les indices et les fréquences réduites et réelles des 4 composantes maximales :

- k = 5 , soit f = 0.05376, soit ν = 268,8 Hz
- k = 21, soit f = 0.2366, soit ν = 1183 Hz
- k = 73, soit f = 0.7742, soit ν = 3871 Hz
- k = 89, soit f = 0.957, soit ν = 4785 Hz

Les relations liant les 3 modes de graduations sont bien valides selon les formules obtenues dans la partie préparatoire (et de plus, on constate aucune distorsion ce qui prouve que les 3 modes permettent d'obtenir un résultat identique).

Les 4 composantes correspondent aux 4 pics de fréquences de 2 fonctions sinusoïdales :

- Les 2 plus grandes (ν = 268,8 Hz et ν = 4785 Hz) correspondent à la composante $8 \times sin(2\pi \times 271 \times t + 25°)$. Pour être même tout à fait exact, le pic ν = 4785 Hz est le pic que l'on retrouve dans les fréquences négatives (qui serait donc à ν = 4785-5000 = -215 Hz) mais qui est périodisée à cause de l'échantillonnage.
- De même, les 2 plus petites (ν = 1183 Hz et ν = 3871 Hz) correspondent à la composante $5 \times sin(2\pi \times 1147 \times t + 38°)$.

Les fréquences mesurées sont légèrement différentes de celle programmées (269 au lieu de 271 et 1183 au lieu de 1147). Cela s'explique par le faible nombre de point de la TFD qui ne permet pas d'avoir une précision suffisante pour parfaitement lire les fréquences de notre échantillonnage. Nous pourrions augmenter la précision de la lecture en augmentant le nombre de points.

Nous refaisons à présent ces mesures sur la TFD 512 points :

On mesure que les indices et les fréquences réduites et réelles des 4 composantes maximales :

- k = 28 , soit f = 0.05479, soit ν = 274 Hz
- k = 117, soit f = 0.2289, soit ν = 1148 Hz
- k = 395, soit f = 0.773, soit ν = 3865 Hz

- k = 484, soit f = 0.9472, soit ν = 4736 Hz

Les fréquences mesurées sont encore très légèrement différentes de celle programmées (274 au lieu de 271 et 1148 au lieu de 1147) mais les valeurs sont beaucoup plus précises que celle obtenues avec la TFD 94 points. Augmenter le nombre de point d'une TFD permet d'augmenter la précision de cette dernière.

La présence de lobe autour de chaque composante s'explique par la limitation temporelle de notre échantillonnage. En effet, le signal que nous avons créé n'est pas réellement une sinusoïde pure (ou plutôt dans notre cas, une somme de 2 sinusoïdes) car elle n'est pas infinie (et mesurer une infinité de point, ce n'est pas possible), ainsi le signal que nous étudions est en réalité notre signal s(t) multiplié par la fonction porte centrée en 9,205ms et de largeur 18,41ms : $\Pi_{0.01841}(t - 0.009205)$. Or, on sait que $TF\big(f(t) \times g(t)\big) = F(\nu) \otimes G(\nu)$, et que le produit de convolution d'une porte est la fonction sinus cardinal. Ainsi, la TFD N-points fait apparaitre des fonctions sinus cardinal autour de chaque composante et c'est bien ce que l'on observe sur la courbe.

Exercice 4

On génère la fonction :

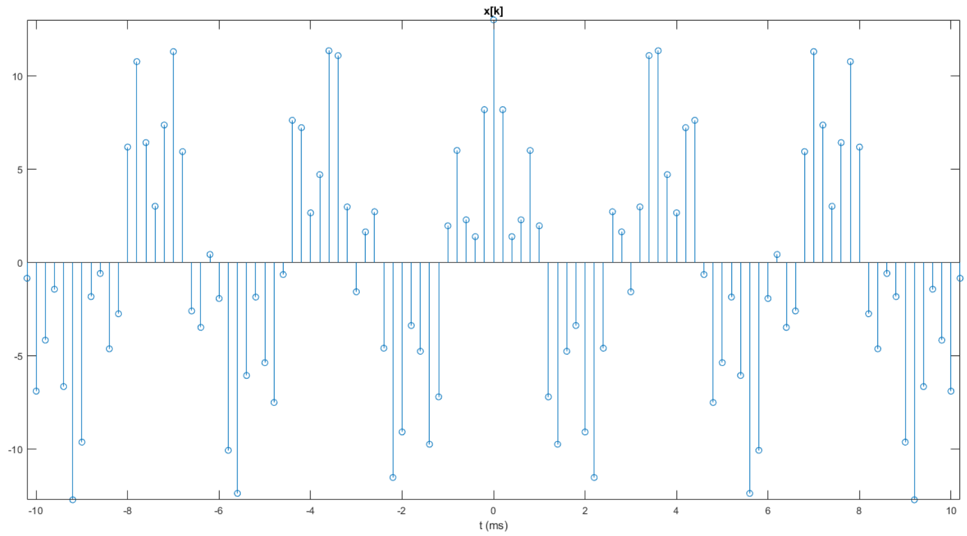
$$s(t) \ = A_1 sin(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) \ + A_2 sin(2\pi\nu_2 t + \varphi_2)$$

Avec pour paramètre :

$$A_1 = 8, \quad \nu_1 = 271Hz, \quad \varphi_1 = 90°$$

$$A_2 = 5, \quad \nu_2 = 1147Hz, \quad \varphi_2 = 90°$$

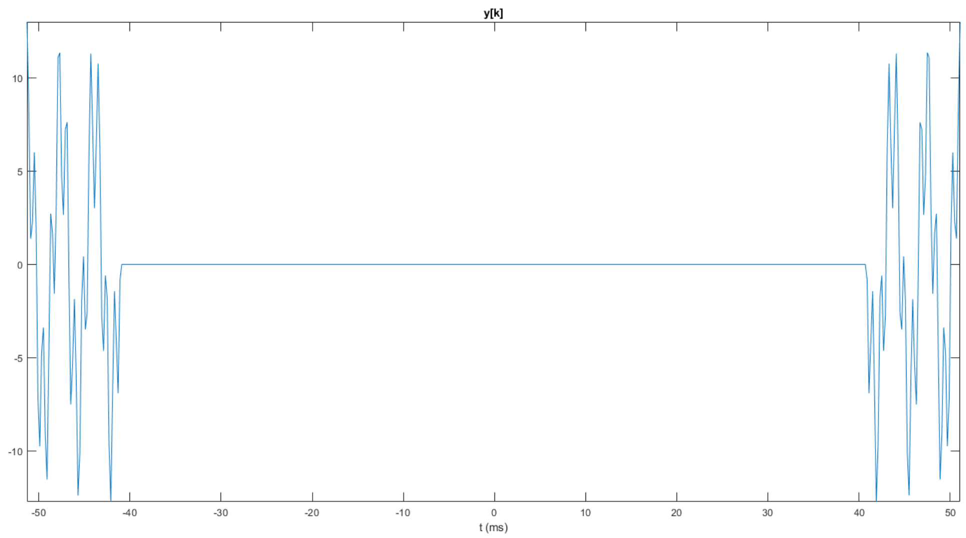
$$t_d = -10.12ms, \quad t_f = 10.12ms, \quad \nu_e = 5000Hz$$



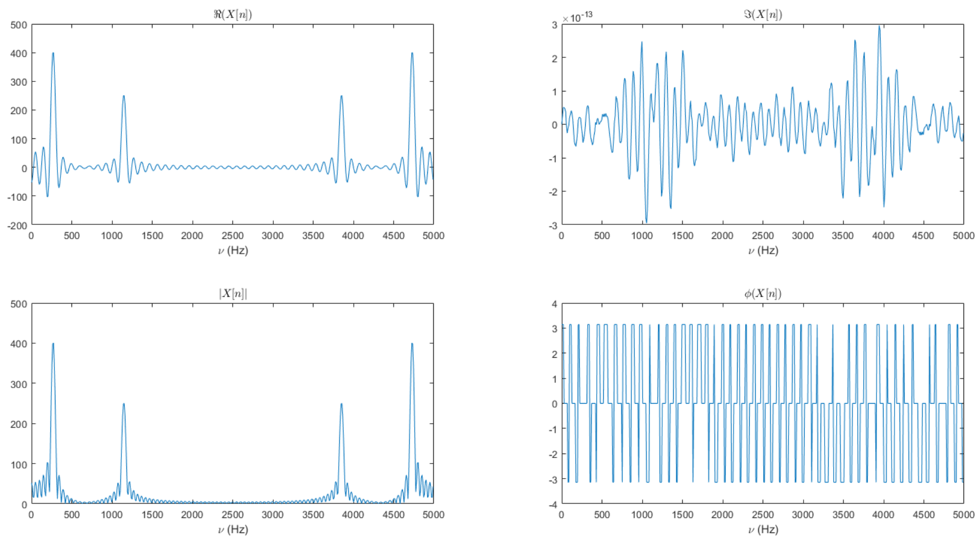
On obtient bien une séquence réelle et paire.

Afin de présenter correctement notre séquence $x[k]$ à l 'algorithme de calcul rapide fft il faut qu'on ait un nombre d'échantillons en puissance de 2. On ajoute donc à notre séquence $x[k]$ de longueur

$K = 103$ autant de zéros que nécessaire afin d'arriver à 29 = 512 points c'est-à-dire 512-103=409. Afin de conserver la parité de la séquence on découpe notre séquence initial $x[k]$ en deux. On ajoute à $y[k]$ les zéros après la 2ème moitié de x[k] et on complète notre nouvelle séquence $x[k]$ avec la 1ère moitié de $x[k]$. De plus l'augmentation du nombre d'échantillon va accroitre la résolution fréquentielle du signal.



On obtient donc la TFD 512 points :



La partie imaginaire n'est pas tout à fait nulle à cause des imprécisions de calcul mais est très faible. La phase cependant est assez inexploitable à cause de ces petites variations dans le signe de la partie imaginaire. Cependant, grâce à la théorie, on sait que la phase vaut 0 ou π selon si le signe de la partie réelle est positive ou négative.