CPE LYON

Année universitaire

2020 - 2021

Traitement numérique du signal – 3ETI

TP2

Transformée de Fourier discrète

Eric Van Reeth

1 Présentation du TP

Ce TP est consacré aux propriétés de la TFD et au choix des paramètres d'analyse pour réaliser une analyse spectrale optimale. Ce TP, comme tous les TP de TNS, se déroulera en binôme sous Matlab.

1.1 Préparation

La préparation doit être effectuée **avant la séance** afin de préparer au mieux les notions théoriques abordées dans le TP. Les réponses aux questions posées **doivent être personnelles à chaque binôme** et **incluses dans le compte-rendu** final remis pour évaluation.

1.1.1 Préparation – Partie 2

1. Quelle est la propriété essentielle d'une TFTD, propriété que ne possède pas une transformée de Fourier classique ?
2. Soit la séquence à valeurs réelles $x[k] = r^k U[k]$ avec $r < 1$. Calculer $X(f)$, la TFTD de $x[k]$ en fonction de r et f. On rappelle que :

$$U[k] = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases} \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{si } |q| < 1$$

1.1.2 Préparation – Partie 3

Soit $s[k] = \cos(2\pi f_0 k)$ pour $0 \leq k \leq M-1$.

1. Calculer $S(f)$, sa TFTD pour $f \neq f_0$ et $f \neq -f_0$. On rappelle que :

$$\sum_{k=0}^{M-1} q^k = \frac{1-q^M}{1-q} \quad \text{si } |q| \neq 1$$

   On noté également que :

$$\frac{1-e^{2i\pi x}}{1-e^{2i\pi y}} = \frac{e^{i\pi x}}{e^{i\pi y}} . \frac{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}}{e^{-i\pi y} - e^{i\pi y}} = e^{i\pi(x-y)} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi y)}$$

2. Calculer $S(f)$ pour $f = \pm f_0$

1.1.3 Préparation – Partie 4

Revoir le cours et le TD 1 sur le choix des paramètres de la TFD, les notions de finesse d'analyse et de résolution.

1.2 Évaluation du TP

Chaque binôme devra rédiger un compte-rendu. En plus du compte-rendu, **l'intégralité du code développé devra également être rendu**. Le code et le compte-rendu seront compressés dans**une archive (.zip) dont le nom contiendra tous les noms des membres du binôme**. L'archive sera remise sur le dépôt ms Teams dans un **délai d'une semaine après le TP**.
Voici quelques règles à suivre pour la rédaction du compte-rendu :

- Les réponses à la préparation doivent être intégrées dans le compte-rendu
- La notation portera sur votre capacité à répondre à **chacune des questions posées**, mais surtout sur la qualité des **commentaires et justifications qui pourront représenter plus de la moitié des points**
- La présentation, la qualité du français et de l'orthographe seront prises en compte

- Les figures doivent être numérotées, et toutes mesures, justifications et commentaires concernant les figures doivent être rédigés dans le compte rendu en renvoyant précisément à la figure numérotée s'y rapportant
- Le **compte-rendu sera remis au format pdf**
- Le nom de l'archive doit contenir les explicitement les noms des membres du binôme

2 TFTD d'une séquence de longueur infinie et TFD

On considère la séquence $x[k] = (0,91)^k U[k]$ de durée infinie, et la séquence de durée limitée $s[k] = (0,91)^k$ pour $0 \leq k \leq M-1$. On s'intéresse aux liens entre la TFTD de la première séquence et la TFD de la seconde.

1. Créer une fonction dont le paramètre d'entrée sera la longueur M de la séquence $s[k]$. Cette fonction doit permettre de :
   - calculer la séquence $s[k]$ et de la représenter (`stem`)
   - calculer $S[n]$, sa TFD 2048-points

   On prendra $M = 12$ pour démarrer.
2. Générer le vecteur correspondant à $X(f)$, TFTD de $x[k]$, pour les fréquences comprises entre $-1.5 \leq f \leq 1.5 - \frac{1}{N}$ avec un pas $\Delta f = \frac{1}{N}$ et $N = 2048$.
3. Sur une deuxième figure, afficher quatre « imagettes » en superposant les parties réelles de $S(f)$ et de $X(f)$, puis les parties imaginaires, enfin modules et phases avec des abscisses graduées en fréquences réduites.
   Note : Pour superposer plusieurs tracés, utiliser la syntaxe : `plot(x1,y1,x2,y2,...)` , où les `xi` sont des vecteurs abscisses et les `yi` les vecteurs ordonnées correspondants.
4. Expliquer le rôle et l'utilité de la fonction `fftshift` (voir aide Matlab), et l'appliquer à $S[n]$. Modifier en conséquence le vecteur des fréquences réduites associées, puis tracer sur une troisième figure les parties réelles de S et de X, puis les parties imaginaires, enfin modules et phases avec des abscisses graduées en fréquences réduites.
5. Afficher les résultats pour $M = 5$ et $M = 40$, et expliquer l'évolution de $S[n]$ en fonction de M. Une analyse fine des oscillations observées est attendue (origine, fréquence).

3 TFD de sinusoïdes

On s'intéresse à des séquences du type $s[k] = \cos(2\pi f_0 k)$ pour $0 \leq k \leq M-1$ et à leurs TFD N-points.

1. Élaborer une fonction dont les paramètres d'entrée seront : f_0 la fréquence du cosinus et N le nombre de points de la TFD à calculer. Cette fonction réalisera :
   - la génération de $s[k] = \cos(2\pi f_0 k)$ pour $0 \leq k \leq 34$ et son affichage
   - le calcul de sa TFD N-points (ne pas utiliser `fftshift` car N peut être impair)
   - l'affichage des parties réelle, imaginaire, module et phase de la TFD graduées en fréquence réduite
     Note : On pourra utiliser la syntaxe `stem(abscisse,ordonnee,'.')` pour plus de lisibilité
2. En utilisant la fonction précédente, générer une séquence $s[k]$ de 35 points constituée exactement de 5 périodes de cosinus. Si la séquence est correcte, le résultat de sa TFD 35-points doit être très simple.
   (a) Affichez les résultats obtenus et donner la finesse d'analyse Δf

(b) A quelles fréquences obtient-on des composantes non nulles ? Expliquer ces positions fréquentielles

(c) Noter les amplitudes des parties réelle et imaginaire, du module et les comparer avec les valeurs de la préparation

(d) Pour la même séquence temporelle, calculer et affichez la TFD 70-points et expliquer les différences par rapport à la TFD 35-points précédente

3. Générer une séquence de 35 points constituée exactement de 5.2 périodes de cosinus. Donner sa TFD-35 points.

   (a) Quelle est la valeur de la fréquence correspondant au pic d'amplitude ?

   (b) La fréquence mesurée correspond-elle à la valeur théorique ?

   (c) Quelles sont les amplitudes des composantes maximales ?

   (d) Expliquer les différences entre la TFD obtenue et celle de la question précédente : une interprétation temporelle ou fréquentielle peut être donnée

   (e) Déterminer le nombre de points N sur lequel la TFD doit être calculée pour obtenir la valeur exacte de la fréquence du cosinus

4 Résolution fréquentielle

On souhaite réaliser l'analyse spectrale par TFD d'un signal afin de mesurer les fréquences des composantes fréquentielles de celui-ci. Le signal sera différent pour chaque binôme, et sera attribué par l'encadrant durant la séance. L'analyse spectrale doit respecter les contraintes suivantes :

- l'échantillonnage du signal doit être correct mais non excessif
- les composantes distinctes doivent pouvoir être séparées. Pour certains signaux, elles peuvent être espacées de quelques Hz
- la finesse d'analyse doit être inférieure à 3 Hz
- les capacités mémoire et calcul (stockage du signal, nombre de points de la TFD) utilisées doivent être minimales

L'acquisition du nombre d'échantillons du signal désiré et le calcul de la densité spectrale d'énergie seront réalisés à l'aide de la fonction `analysespectrale.m` fournie. Taper la commande `help analysespectrale`, pour comprendre son fonctionnement.

1. Placer la fonction `analysespectrale.m` dans le répertoire de travail courant de Matlab, ainsi que le signal attribué

2. Dans la fenêtre de commande Matlab, appeler la fonction `analysespectrale` avec des paramètres permettant de respecter au moins les contraintes considérées comme essentielles. En fonction des résultats obtenus, affiner l'analyse spectrale en faisant varier ses trois paramètres d'entrée pour satisfaire à toutes les contraintes énoncées précédemment, et en particulier la visualisation claire de cinq composantes distinctes (ne pas oublier de minimiser les ressources utilisées).

3. Résumer précisément la démarche suivie pour le choix des paramètres et sa justification ainsi que les figures intermédiaires

4. Mesurer et donner les fréquences réelles des principales composantes identifiées sur la figure finale

5. Au vu des résultats obtenus, vérifier le pouvoir de résolution de l'analyse