TNS : Compte rendu TP2

3ETI 2020/2021, Groupe C
FRANCOIS-CHARLOT Axel
PINCEMIN Alexis

Préparation

Partie 2

1. La TFTD possède la propriété d'être continue et de période 1 contrairement à la TFD.
2. On a $x[k] = r^k U[k]$
   Par définition de la TFTD, on a :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-2i\pi fk}$$
$$\Rightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^k U(k) e^{-2i\pi fk}$$
$$\Rightarrow X(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(re^{-2i\pi f}\right)^k$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc :

$$X(f) = \frac{1}{1 - re^{-2i\pi f}}$$

Partie 3

1. On a $s[k] = \cos(2\pi f_0 k)$ avec $0 < k < M - 1$
   Par définition de la TFTD, on a :

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] e^{-2i\pi fk}$$
$$\Rightarrow S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} \cos(2\pi f_0 k)\, e^{-2i\pi fk}$$

   Or, d'après la formule d'Euler, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
   D'où :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{e^{2i\pi k f_0} + e^{-2i\pi k f_0}}{2} e^{-2i\pi fk}$$
$$\Rightarrow S(f) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2}\left(e^{2i\pi k(f_0-f)} + e^{-2i\pi k(f_0+f)}\right)$$

   De nouveau, nous nous retrouvons avec 2 série géométriques de raison inférieure à 1, nous avons donc

$$S(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{2i\pi M(f_0-f)}}{1 - e^{2i\pi(f_0-f)}} + \frac{1 - e^{-2i\pi M(f_0+f)}}{1 - e^{2i\pi(f_0+f)}}\right)$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - e^{2i\pi M(f_0 - f)}}{1 - e^{2i\pi(f_0 - f)}} + \frac{1 - e^{-2i\pi M(f_0 + f)}}{1 - e^{2i\pi(f_0 + f)}}\right)$$

D'après la formule de l'énoncé, il vient :

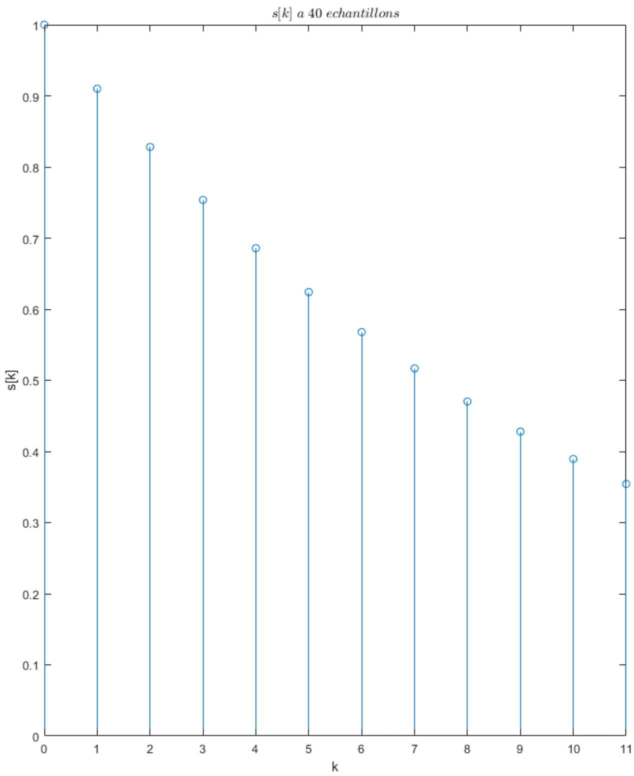
$$S(f) = \frac{1}{2}\left(e^{i\pi(f_0 - f)(M-1)}\frac{\sin(\pi(f_0 - f)M)}{\sin(\pi(f_0 - f))} + e^{-i\pi(f_0 + f)(M-1)}\frac{\sin(\pi(f_0 + f)M)}{\sin(\pi(f_0 + f))}\right)$$

2. On a

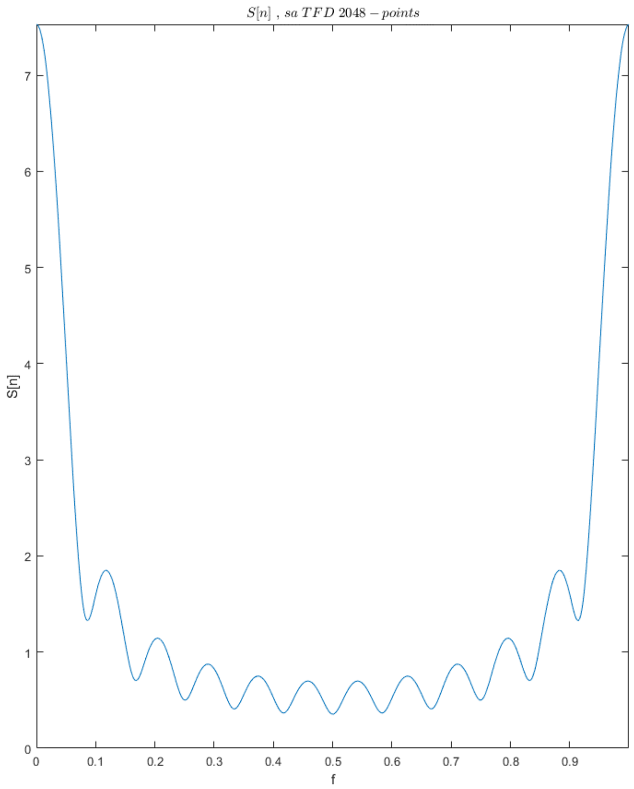
$$\lim_{f \to -f_0} S(f) = \frac{1}{2}(0 + M) = \frac{M}{2}$$
$$\lim_{f \to +f_0} S(f) = \frac{1}{2}(M + 0) = \frac{M}{2}$$

TFTD d'une séquence de longueur infinie et TFD

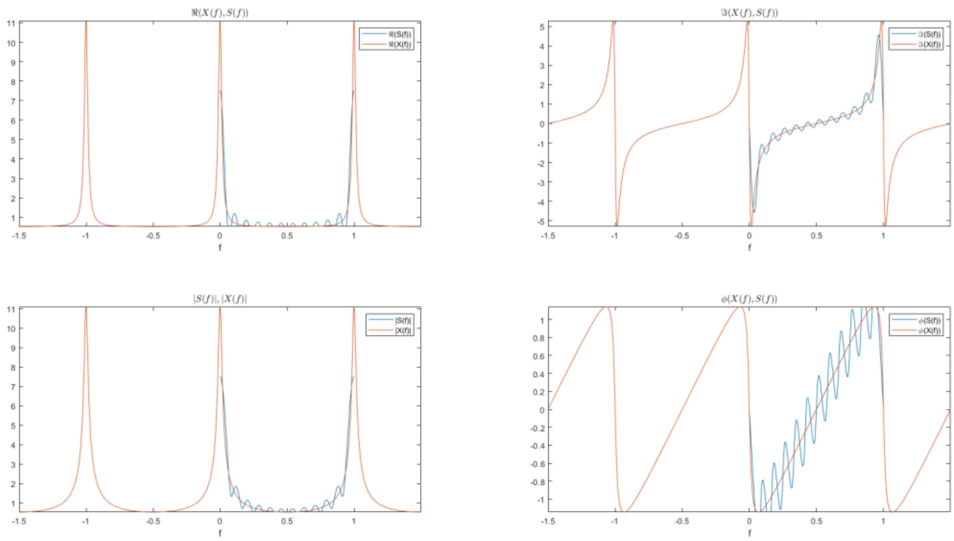
1. Nous créons la fonction CreationSequence.m, et voici le résultat affiché lorsqu'elle est appelée par le script exo1.m



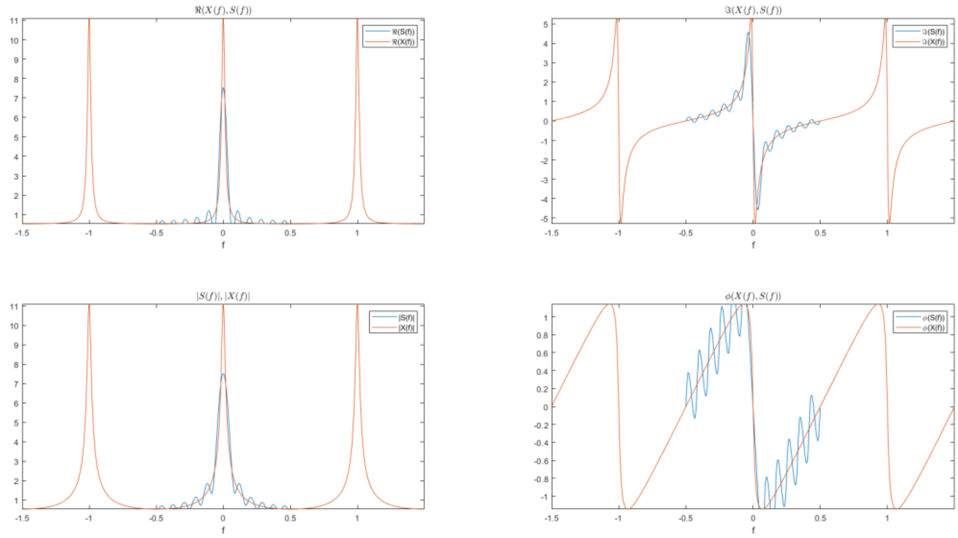
2. Nous utilisons la formule calculée lors de la préparation pour créer X(f) la TFTD de s[k]. Voici le résultat obtenu



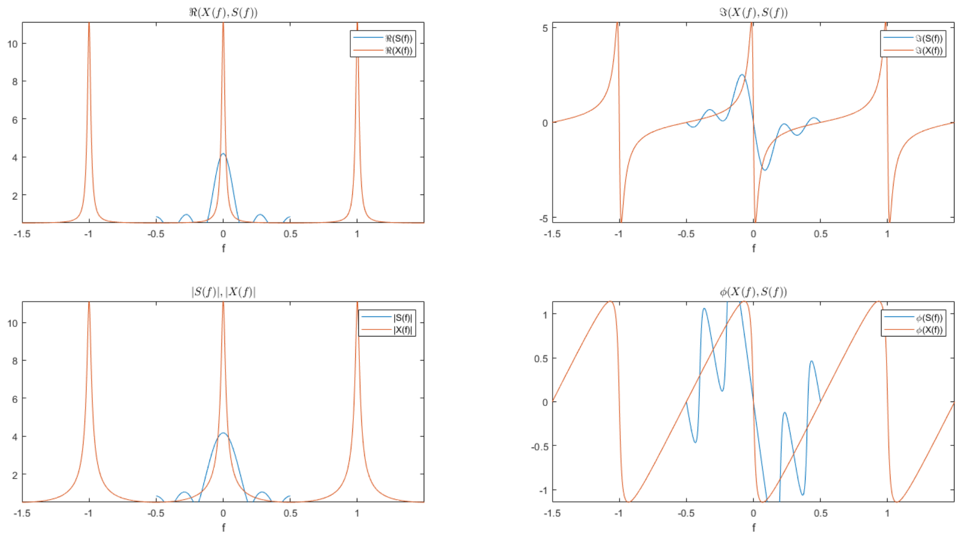
3. Nous superposons à présent les courbes respectives de la partie réelle, imaginaire, le module et la phase de S[n] et X(f), et nous obtenons le résultat suivant



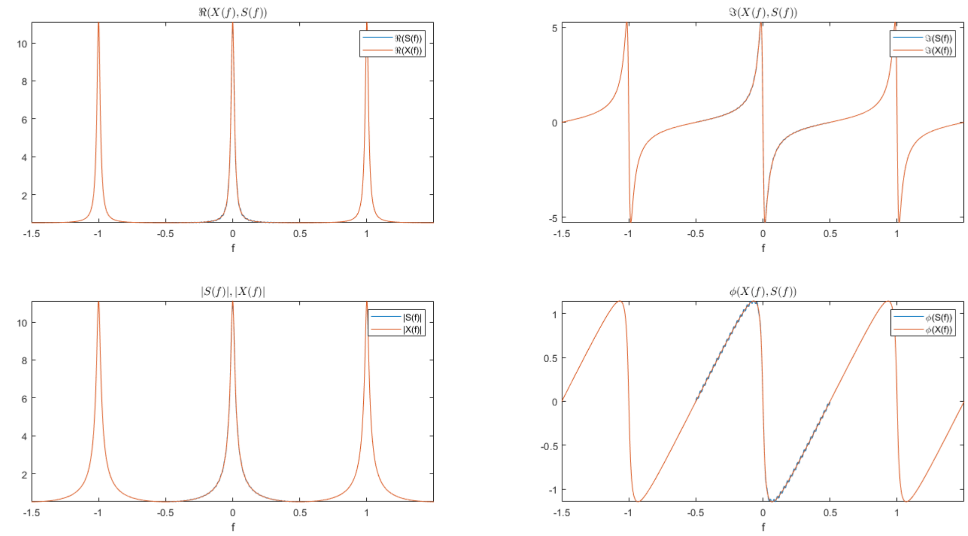
4. La fonction fftshift permet de recentrer en 0 la TFD. En l'appliquant à S[n], on peut ainsi observer la courbe entre –0,5 et 0,5 (0,5 – 1/Δf) pour être tout à fait exact). Pour cela, il faut cependant auparavant modifier le vecteur des fréquences réduites lui soustrayant –0,5. Nous obtenons la courbe suivante :



5. Nous réitérons ces calculs pour M = 5, et nous obtenons la courbe suivante :



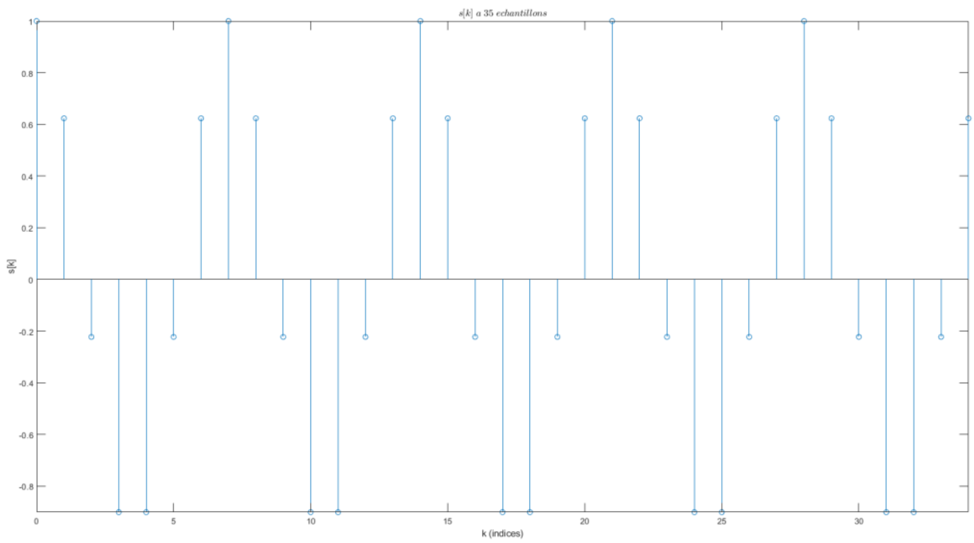
Puis pour M = 40 :

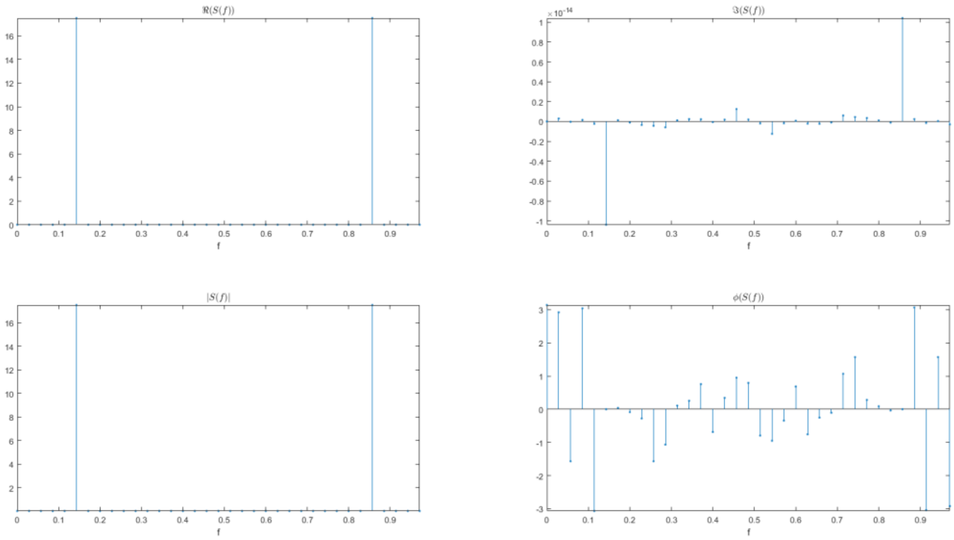


On constate que plus M est grand plus la résolution est grande. En effet, le signal étant échantillonné, et ainsi multiplié par une porte, on observe une convolution par un sinus cardinal. Or la largeur est lobe est d'autant plus grande, et son amplitude plus faible que la largeur de la porte est petite. Ainsi le TFD d'un signal avec peu de point sera convoluer par un sinus cardinal de faible amplitude mais très large. L'inverse se produit lorsque l'on prend plus de point, et en effet on constate bien qu'avec M = 40 on observe une convolution par un sinus cardinal de grande amplitude mais de faible largeur de lobe, ce qui permet une lecture plus précise.

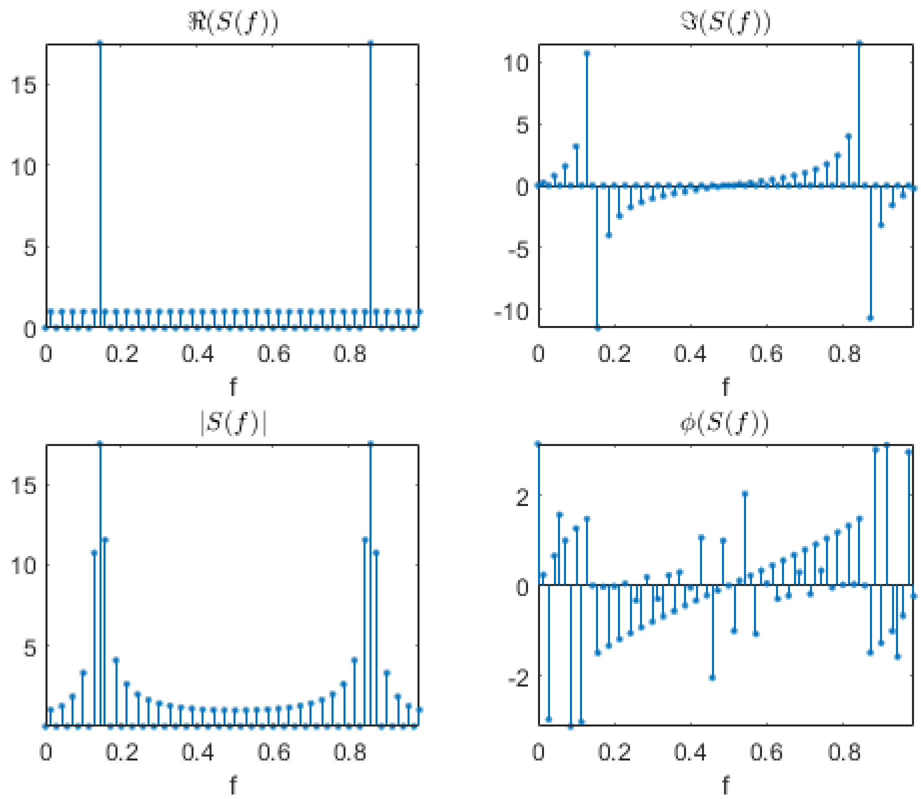
TFD de sinusoïde

2. Nous créons la fonction CreationCos.m. Pour avoir exactement 5 périodes en 35 points, il nous faut choisir une fréquence de f0 = 5/35 = 1/7 Hz.
    a. Voici le résultat affiché que l'on appelle la fonction CreationCos avec pour paramètres f0 = 0,7 et N = 35 grâce au script exo2.m



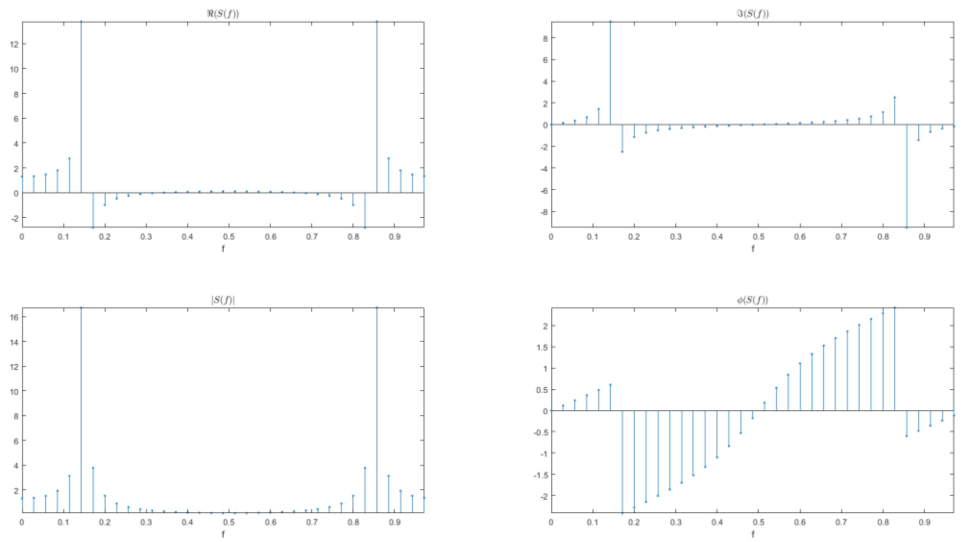


b. Nous obtenons des composantes non nulles aux fréquences réduites 0,1428, ce qui correspond à une fréquence de 1/7 (1/7 ≈ 0,1428).
c. Nous constatons que l'amplitude maximale de la partie réelle est M/2 = 35/2 et celle de la partie imaginaire 0 conformément à la prépa
d. Nous affichons la TFD 70 points :

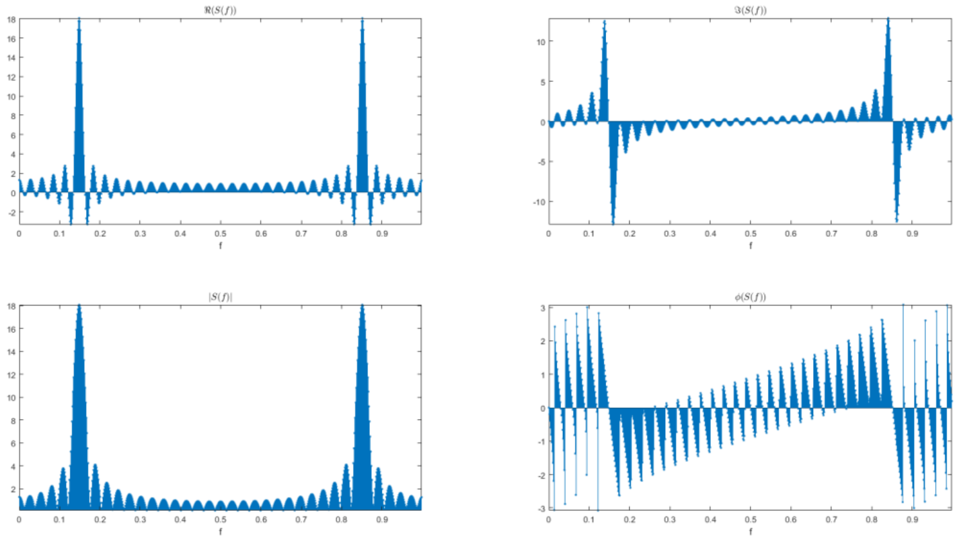


Dans cette courbe, on a une partie imaginaire non nulle contrairement à tout à l'heure. On observe pas ces point à la TFD 35-point car on a le même nombre de points dans la TFD que dans la longueur de la séquence temporelle, ce qui permet une analyse fréquentielle correcte des s[k] puisque S(f) contient exactement les même échantillons que s[k] sur son domaine de définition. En revanche, pour la TFD 70-points, la TFD est calculée sur plus de points qui ne composent la séquence temporelle, ainsi la période de répétition du motif s[k] est supérieure à la longueur de la séquence, et on observe la courbe de la convolution par un sinus cardinal causé par l'échantillonnage sur une durée donnée.

3. Nous générons à présent une fonction cos qui possède 5,2 périodes. Nous devons donc prendre f0 = 5,2/35 (≈ 0,1486)
   Voici le résultat obtenu après la TFD 35 points

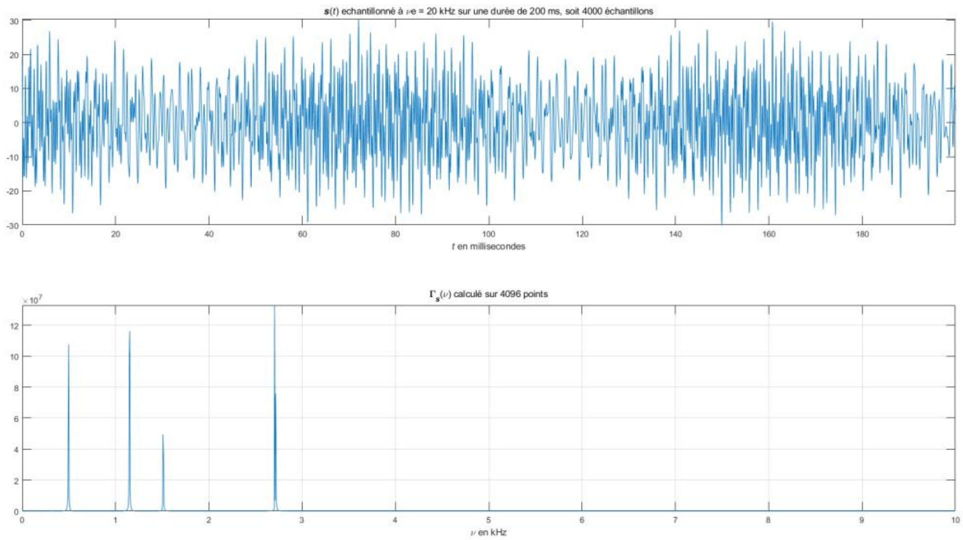


   a. Le pic d'amplitude correspond à la fréquence réduites 0,1428, ce qui correspond à une fréquence de 1/7.
   b. Non, la fréquence mesurée est différente de celle attendue : on mesure 0,1428 alors qu'on s'attend à avoir 0,1486.
   c. On mesure max(S(f)) = 16,72.
   d. Nous n'avons pas un pas assez grand pour avoir la valeur exacte de 5.2/35, pour pouvoir le voir il faut prendre un nombre de point multiple de 35/5.2 ≈ 6.73076
   e. Si on prend donc N = 673 points, on nous obtenons une courbe plus adéquate pour mesurer exactement la fréquence. On obtient :

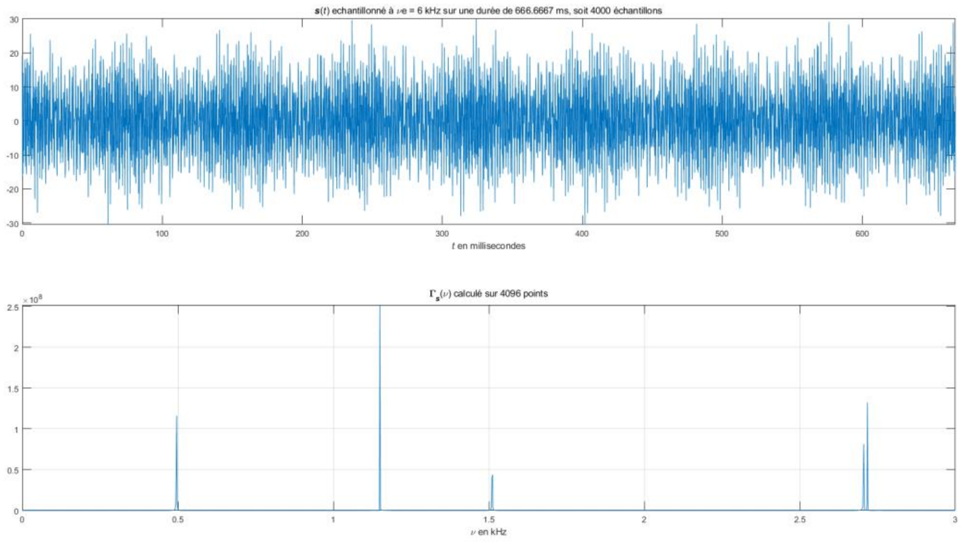


Résolution fréquentielle

On met la plus grande valeur d'échantillonnage possible afin de nous représenter au mieux le signal.

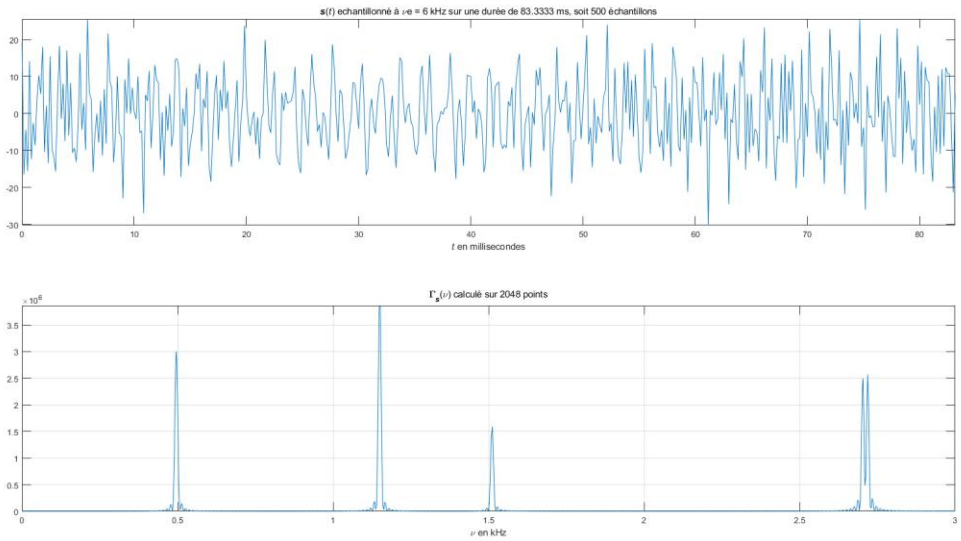


On peut ainsi mesurer la plus grande fréquence qui compose ce signal, et donc grâce au critère de Shannon, nous pouvons décider d'une fréquence d'échantillonnage plus adapté. La fréquence la plus élevé est de 2,716 kHz, nous choisissons donc une fréquence au moins 2 fois supérieur à cette dernière. Nous prenons donc $\nu_e = 6000\ Hz$

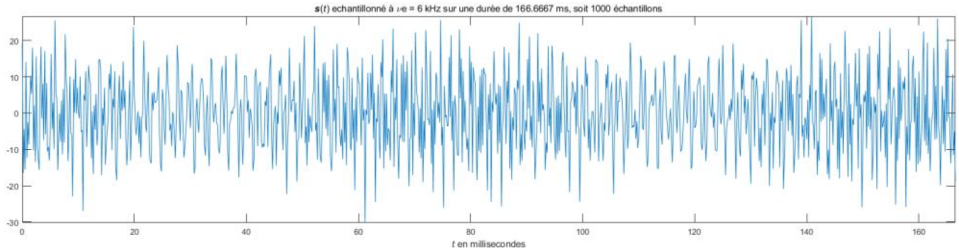


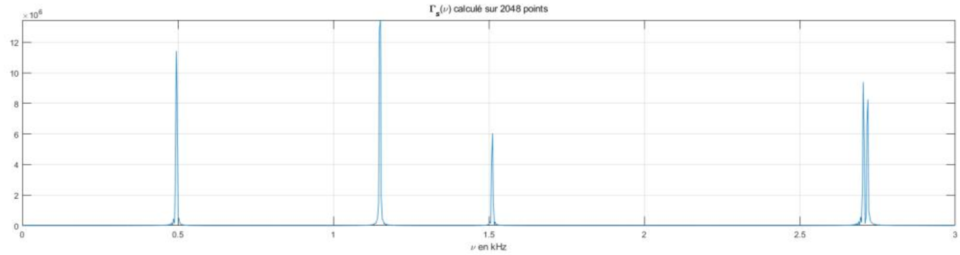
La fréquence d’échantillonnage étant à présent fixé, nous devons choisir la valeur de n tel que la condition imposée sur la finesse d’analyse soit respectée, $\frac{\nu_e}{N} < 3$. Ainsi, il vient $N > 2000 = 2048$ (plus proche valeur). (Cette courbe n’est pas valide car $N < M$)

A présent il nous faut choisir M. On sait que pour obtenir une TFD correcte il faut $N \geq M$, donc $M \leq 2048$. De plus, le nombre de point influe sur la résolution de le TFD. Or, nous constatons que le signal présente 2 pic très proche à 2,704 et 2,716 kHz. On diminue donc le nombre de point M jusqu'à ce que les 2 pics ne soient plus discernable, et on prendra la valeur précédente. On trouve $M = 500$



Cependant les 2 pics étant légèrement superposé, on prendra $M = 1000$ afin d’éviter toute confusion.





Récapitulatif des valeurs choisie :

- $\nu_e = 6000\ Hz$
- $N = 2048$
- $M = 1000$

Les fréquences réelles des principales composantes identifiées sur la figure finale sont :

- $\nu_1 = 495\ Hz$
- $\nu_2 = 1151\ Hz$
- $\nu_3 = 1511\ Hz$
- $\nu_4 = 2704\ Hz$
- $\nu_5 = 2716\ Hz$

Le pouvoir de résolution de l'analyse est de l'ordre de $\frac{1}{166.66*10^{-3}} = 6\ Hz$.