Traitement des Signaux Aléatoires
Estimation Spectrale

4 ETI – CPE Lyon

Travaux Pratiques TSA

Noms, Prénoms : FRANCOIS Axel, PINCEMIN Alexis

Groupe : D

Date : 12/10/21

Objectifs du TP

- Comprendre la notion de densité spectrale d'énergie ou de puissance moyenne
- Manipuler différents estimateurs empiriques (à partir d'une série temporelle de taille finie) de DSE/DSPM
- Etudier l'effet du compromis biais-variance d'un estimateur

1 Préparation

Question 1 Comment peut-on calculer simplement la densité spectrale d'énergie (DSE) d'un signal certain d'énergie finie ?

réponse

La DSE d'une signal certain d'énergie finie ($x(t)$) est définie par la formule $\Gamma_x = |X(f)|^2$ □

Question 2 Comment est définie la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) d'un processus aléatoire ?

réponse

La densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) $\Gamma_x(\nu)$ d'un signal aléatoire est définie comme étant la transformé de fourier de sa fonction d'autocorrélation (Théorème de Wiener-Khintchine).
$\Gamma_x(\nu) = TF(\gamma_X(\tau)) = \int_{\Re} \gamma_X(\tau) e^{-2i\pi\nu\tau} d\nu$ □

Question 3 Quelles sont les grandeurs qui permettent de chiffrer la qualité d'une estimation dans le cas général ? et la qualité de l'estimation spectrale en particulier.

réponse

Les grandeurs qui permettent de chiffrer la qualité d'une estimation sont le biais et la variance.
Les grandeurs qui permettent de chiffrer la qualité de l'estimation de la densité spectrale sont le

biais, la variance, la précision d'estimation et la résolution fréquentielle. □

Question 4 Exprimer la densité spectrale de puissance moyenne (DSPM) GB (f) d'un bruit blanc stationnaire centré.

réponse

La densité spectrale de puissance moyenne d'un bruit blanc stationnaire centré est définie par $\Gamma_x(\nu) = \frac{\Gamma_0}{2}$ □

Question 5 Exprimer GX (f) , où X(t) est la sortie d'un filtre excité par un bruit blanc centré, en fonction de la DSPM du bruit blanc et des caractéristiques du filtre.

réponse

$\Gamma_x(\nu) = \Gamma_x(\nu)|H(\nu)|^2 = \frac{\Gamma_0}{2}|H(\nu)|^2$ □

Question 6 En une phrase (sans formule), décrire le procédé de calcul de la DSPM estimée G1 (f) d'une séquence aléatoire via l'estimateur simple.

réponse

On estime la fonction d'autocorrélation de X, puis on calcul sa transformée de Fourier. On considère l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation. □

Question 7 Rappeler le mode de graduation d'une TFD-N points en fréquences réduites.

réponse

La graduation d'une TFD-N points en fréquences réduites va de 0 à $1-\frac{1}{N}$ avec un pas de $\Delta f = \frac{1}{N}$ □

Question 8 Décrire (avec une phrase) le procédé de calcul de la DSPM estimée G2 (f) d'une séquence aléatoire via l'estimateur moyenné.

réponse

On moyenne plusieurs estimations supposées indépendantes. On calcule plusieurs mesures du type $\hat{\Gamma}_1(f)$ en divisant les N points disponibles sur le signal en L tranches de M points.On obtient $\hat{\Gamma}_2(f)$ □

Question 9 Que signifie le terme «compromis biais-variance» dans le cas de l'estimateur moyenné ?

réponse

A N fixé, il faut trouver un compromis entre le biais et la variance. En effet, pour diminuer la variance de $\hat{\Gamma}_2(f)$, on augmente le nombre de tranches L. Mais alors M diminue et le biais augmente. □

Question 10 Quelles modifications sont apportées au procédé de calcul de l'estimateur de Welch par rapport à l'estimateur moyenné ?

réponse

Deux modifications sont apportées au procédé de calcul de l'estimateur de Welch par rapport à l'estimateur moyenné :
— chaque tranche de signal est pondérée par une fenêtre h ;
— les tranches peuvent se recouvrir ;

□

3 Estimation de la DSPM d'un bruit blanc gaussien filtré

3.1 Génération du bruit à analyser

A quoi sert l'entier permettant d'initialiser le générateur ?

réponse ci-dessous

L'entier permettant d'initialiser le générateur est ce que l'on appelle une seed, car le générateur est réalité pseudo-aléatoire (il s'agit une séquence qui se répète si l'on fait assez de génération). La seed permet donc de d'initialiser le générateur à une certaine valeur. Le grand avantage est que si l'on remet la même seed, on obtiendra la même suite de nombre pseudo-aléatoire. □

3.2 Estimateur spectral simple

3.2.1 Script de la fonction `Matlab` développée

code ci-dessous

```
function [Gamma1,VecteurFreq, N] = EstimateurSpectralSimple(x,nd,nf, nFFT)

SeqAAnalyser = x(nd:nf);
N = nf - nd +1;

TF = fft(SeqAAnalyser,nFFT);
Gamma1 =1/N * abs(TF).^2;
VecteurFreq = 0:1/nFFT:1-1/nFFT;
end
```

□

3.2.2 Expérimentation

A. Étude du biais et de la variance en fonction du nombre N d'échantillons de bruit

figures ci-dessous

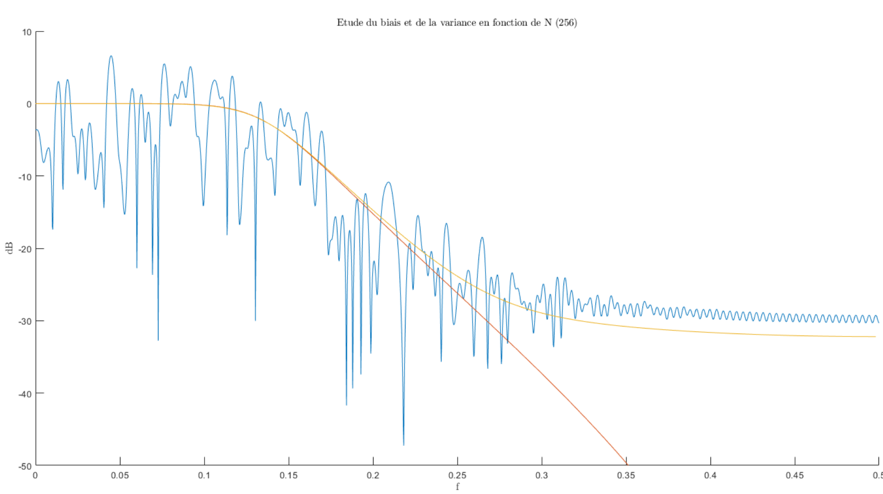

FIGURE 1 – N faible (256) – indice de début de la séquence à 1

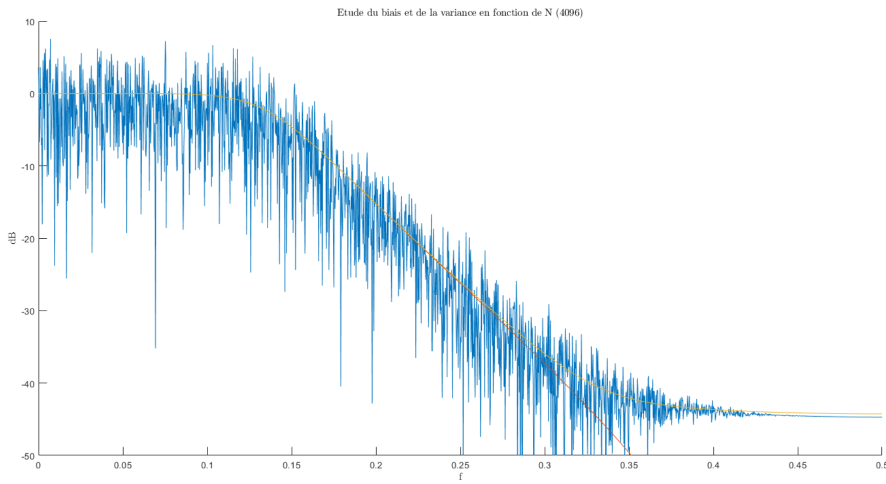

FIGURE 2 – N élevé (4096) – indice de début de la séquence à 1

☐

Commentaires.

réponse ci-dessous

Augmenter le nombre N d'échantillons permet d'augmenter la résolution fréquentielle. ☐

B. Étude du biais et de la variance en fonction de la réalisation considérée, à N fixé

figures ci-dessous

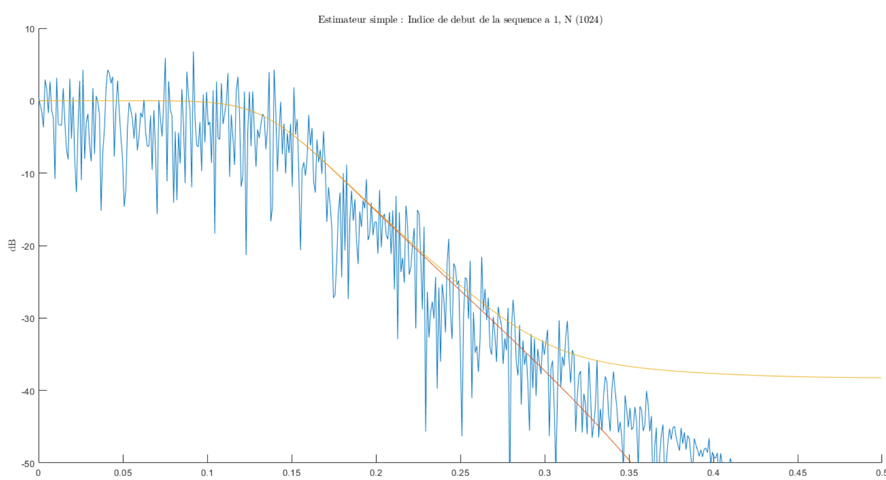

FIGURE 3 – $N \sim 1000$ – indice de début de la séquence à 1

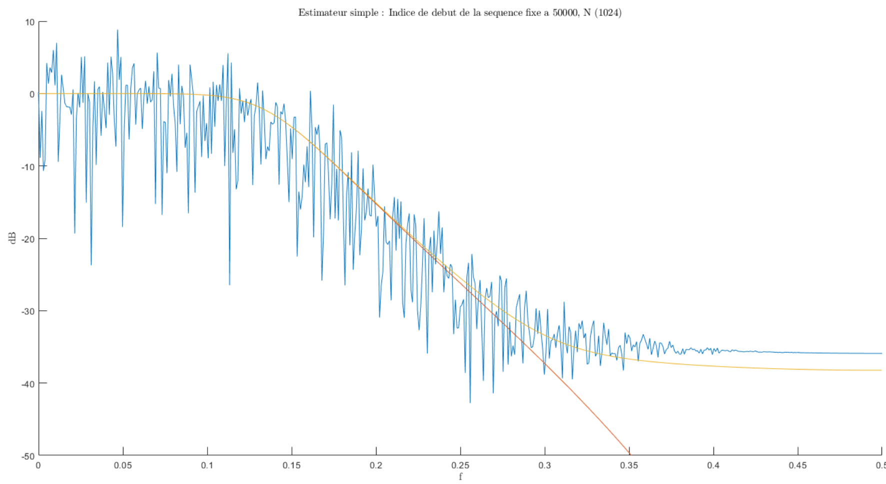

FIGURE 4 – $N \sim 1000$ – indice de début de la séquence fixé à une autre position ($\gg 1000$) dans la séquence

□

Commentaires.

réponse ci-dessous

L'apparition de hautes fréquences observée dans la figure 3 est causée par le fait d'avoir pris un premier indice à 1. Pour avoir une bonne observation, il vaut mieux prendre le signal en son centre.

□

C. Étude du biais et de la variance en fonction du nombre $NFFT$ de FFT

figures ci-dessous

□

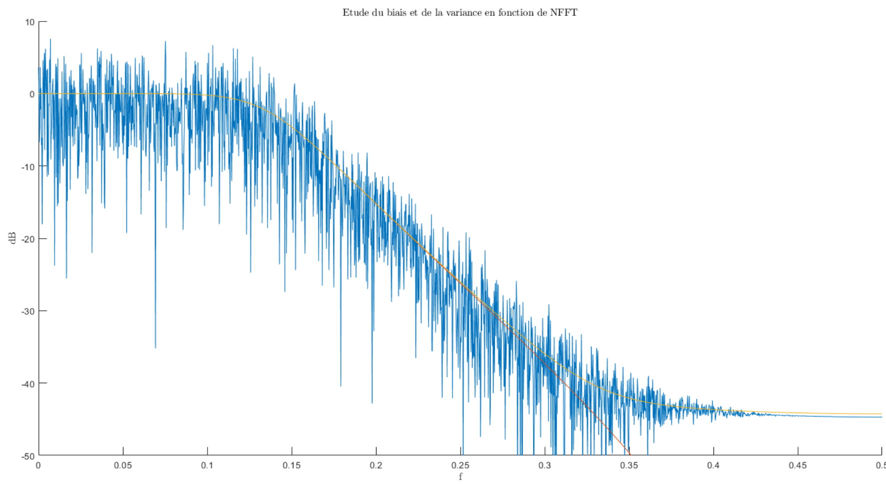

FIGURE 5 – N constant – indice de début de la séquence à 1 – $NFFT \sim N$

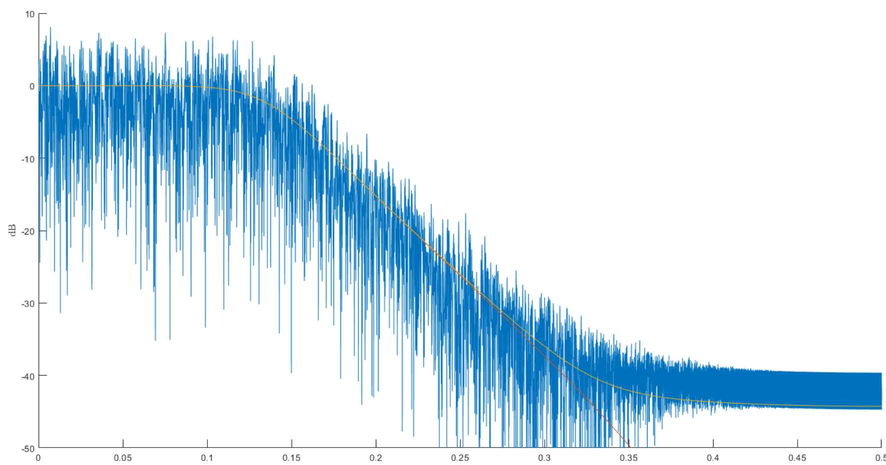

FIGURE 6 – N constant – indice de début de la séquence à 1 – $NFFT \gg N$

Commentaires.

réponse ci-dessous

Prendre un NFFT trop grand nuis à la lisibilité de la courbe. Il faut donc garder le même ordre de grandeur entre N et NFFT. □

D. Conclusion : Quel est le principal défaut de l'estimateur simple ?

réponse ci-dessous

Le principal défaut de l'estimateur simple est son biais important :

$$\text{On a} \quad W_B^N(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \cdot \left(\dfrac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \right)^2 & f \neq 0 \\ N & f = 0 \end{cases}$$

Sur le courbe théorique, cela se traduit par un courbe jaune (courbe de la DSPM convoluée par le biais) très éloignée de celle de la courbe orange (DSPM théorique), surtout pour les hautes fréquences. □

3.3 Estimateur spectral moyenné

On fixera N = 4096 dans tout ce qui suit.

3.3.1 Script de la fonction `Matlab` développé

code ci-dessous

```
function [Gamma2, VecteurFreq] = EstimateurSpectralMoyenne(x, N, M, NFFT)

seq = x(1:N);
[Gamma2,VecteurFreq] = pwelch(seq,rectwin(M),0,NFFT,1,'twosided');

end
```

□

3.3.2 Expérimentation

En précisant bien la valeur des paramètres utilisés pour les essais, affichez les figures correspondantes aux conditions indiquées.

figure ci-dessous

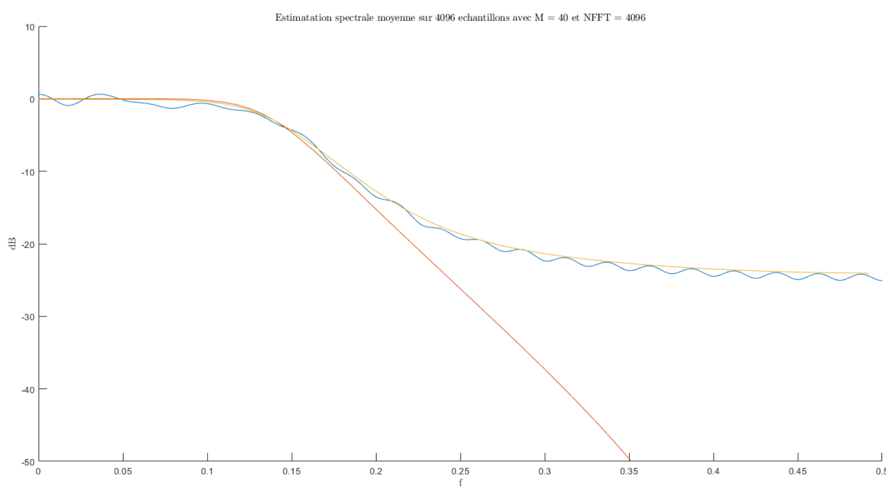

FIGURE 7 – $N = 4096$ – tranches courtes $M = 40$, $NFFT = 4096$

□

Commentaires

réponse ci-dessous

L'utilisation de tranche courte, et donc de très nombreuses tranches, diminue très fortement la résolution fréquentielle. Un M trop petit à pour effet de complètement lisser la DSPM, et donc de la rendre inexploitable. Dans ce cas, la variance et le biais sont tous deux maximums. □

figure ci-dessous

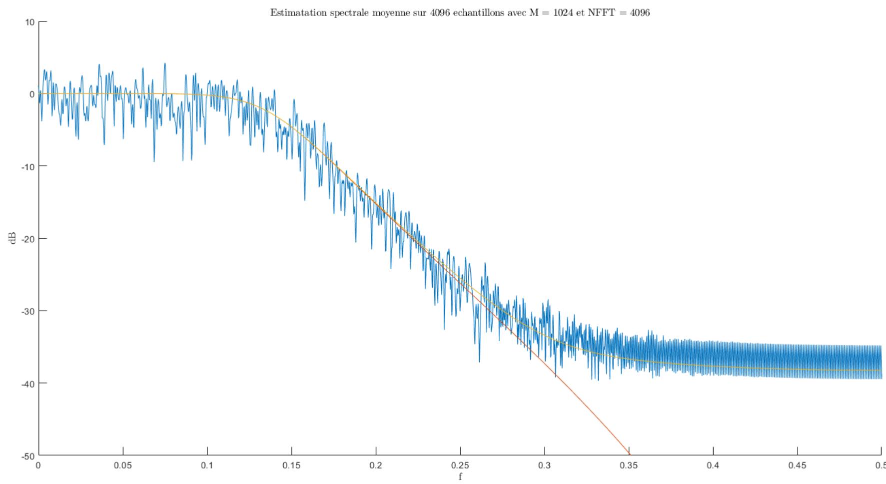

FIGURE 8 – $N = 4096$ – tranches longues $M = 1024$, $NFFT = 4096$

□

Commentaires

réponse ci-dessous

L'utilisation de tranche longue, et donc de peu de tranches, augmente la résolution fréquentielle. De plus, le biais est nettement inférieur à celui observé dans le cas précédent. Néanmoins, la variance reste très important puisqu'on observe des variations très importante. □

figure ci-dessous

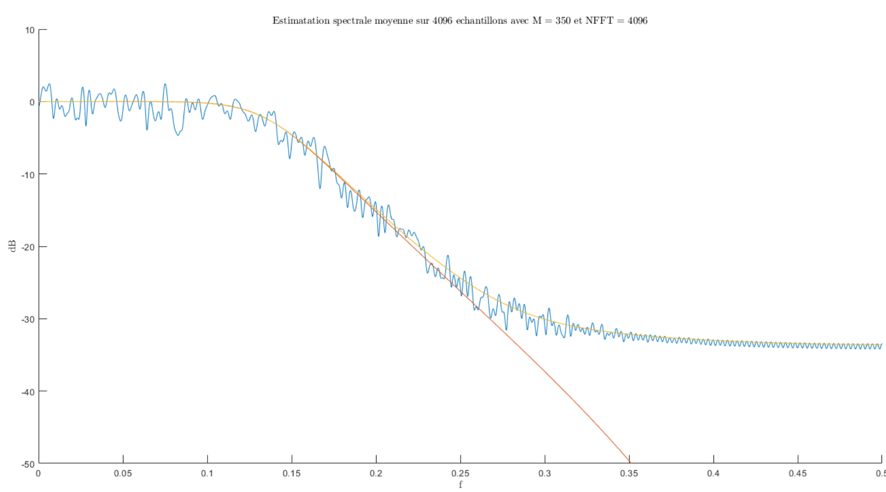

FIGURE 9 – $N = 4096$ – « Meilleur »compromis biais variance atteint pour $M = 350$, $NFFT = 4096$

□

Quelle information permettrait d'obtenir le meilleur compromis biais-variance ?

réponse ci-dessous

Le meilleur compris biais-variance est obtenus en fixant le nombre L ($= N/M$) d'intervalle et d'augmenter le plus possible le nombre de point N. On aura alors $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{L}}$ □

4 Estimateur de Welch

4.1 Etude préalable des fenêtres

Quelles différences de comportement fréquentiel peut-on observer pour les 6 fenêtres proposées (lobe principal, lobes latéraux. . .).

réponse ci-dessous

Nom fenêtre	Largeur lobe principal	Largeur lobes secondaires	Taux d'atténuation d'amplitude lobes secondaires
Rectangulaire	0.0507812	0.0244141	-13 dB puis -6 dB/oct
Triangulaire	0.1054688	0.0527346	-26 dB puis -12 dB/oct
Hanning	0.1035156	0.0253906	-31dB puis -18 dB/oct
Hamming	0.1054688	0.024414	"-41 dB" (tendance) puis -6 dB/oct
Blackman	0.15625	0.026367	-58 dB puis -6 dB/oct
Gauss	0.1601562	0.0234379	-44dB puis -6 dB/oct

□

4.1.1 Script de la fonction `Matlab` développée

code ci-dessous

```
function [Gamma3,VecteurFreq] = EstimateurSpectralWelch(x,N,Nom_fenetre,M,NOVERLAP,NFFT)

seq = x(1:N);

eval(['WIN=',Nom_fenetre,'(M);']);

[Gamma3,VecteurFreq] = pwelch(seq,WIN,NOVERLAP,NFFT,1,'twosided');

end
```

□

4.1.2 Expérimentation

A. Etude du biais et de la variance en fonction du taux de recouvrement entre tranches
Pour N, M et $NFFT$ fixés et pour une fenêtre choisie, tracez les figures correspondantes aux conditions indiquées ci-dessous.

figure ci-dessous

□

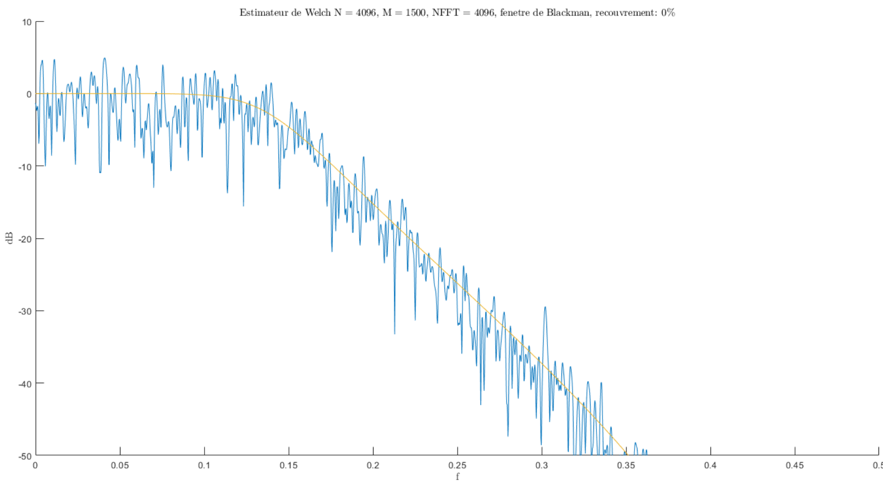

FIGURE 10 – $N = 4096$ – $M = 1500$, $NFFT = 4096$. Choix de fenêtre = Blackman – Recouvrement de 0%

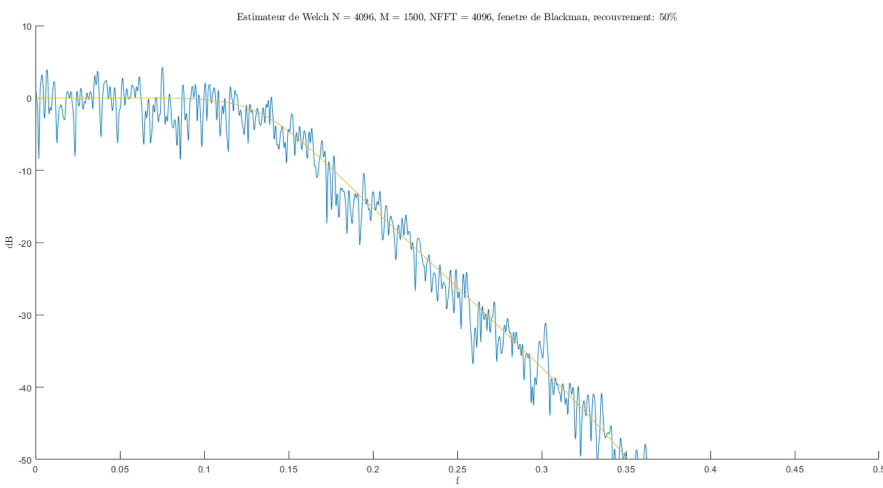

FIGURE 11 – $N = 4096$ – $M = 1500$, $NFFT = 4096$. Choix de fenêtre = Blackman – Recouvrement de 50%

Que permet le recouvrement entre tranches ?

réponse ci-dessous

Le recouvrement entre tranches permet de diminuer l'amplitude du signal estimé. □

B. Etude du biais et de la variance en fonction de la fenêtre utilisée
Pour N, M et $NFFT$ fixés et pour différents choix de fenêtre, tracez les figures correspondantes aux conditions indiquées ci-dessous.

figure ci-dessous

□

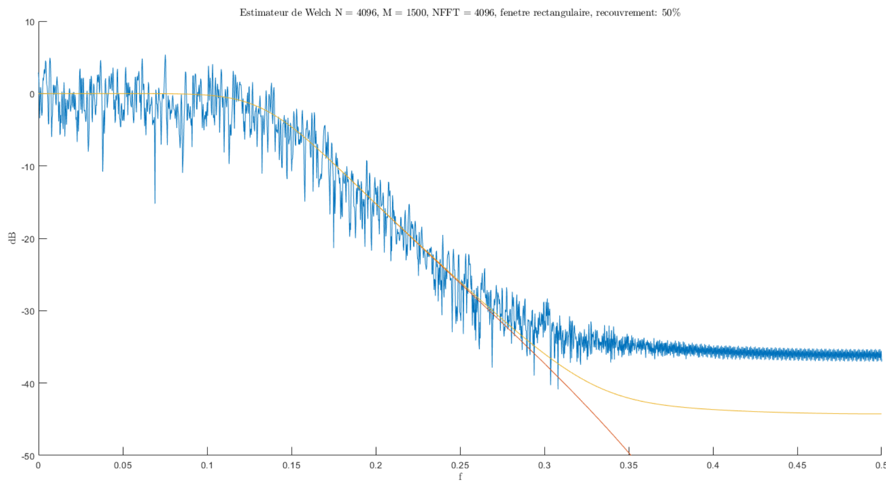

FIGURE 12 – $N = 4096$ – $M = 1500$, $NFFT = 4096$. Fenêtre Rectangle – Recouvrement de 50%

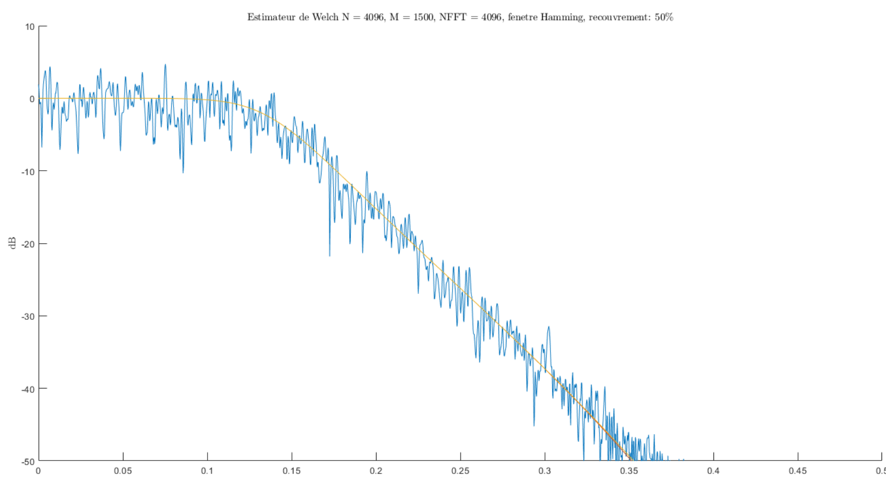

FIGURE 13 – $N = 4096$ – $M = 1500$, $NFFT = 4096$. Fenêtre Hamming – Recouvrement de 50%

Que permet l'utilisation d'une fenêtre autre que rectangulaire ? Expliquer.

réponse ci-dessous

La fenêtre rectangulaire est la plus performante pour estimer les basses fréquence mais est très mauvaise pour les hautes fréquences à cause de les lobes secondaires large et de gain plutôt élevés. Il est donc pertinent d'utiliser une autre fenêtre pour correctement estimer les hautes fréquences. □

Pour quelles valeurs des paramètres d'analyse obtenez vous le « meilleur »résultat (celui qui vous parait le plus satisfaisant) ?

réponse ci-dessous

Longueur de la séquence analysée $N = 2^{16}$
Longueur des tranches $M = 1000$
Type de fenêtre : Blackman

Taux de recouvrement = 50%
Nombre de points de transformée de Fourier $NFFT = 2^{16}$

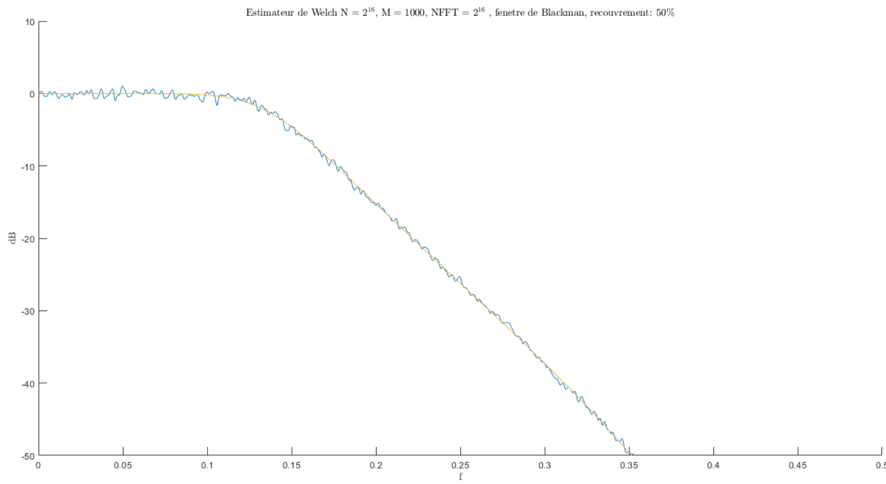

FIGURE 14 – $N = 2^{16}$ – $M = 1000$, $NFFT = 2^{16}$. Fenêtre Blackman – Recouvrement de 50%

□

5 Utilisation des estimateurs précédents pour analyser un signal inconnu

5.1 Modification des programmes

Script d'une des fonctions modifiée

code ci-dessous

```
close all;
clc;
clear variables;

load sig

N = 100000;
Nom_fenetre = 'blackman';
M = 5000;
NOVERLAP = 0.5 * M;
NFFT = 2^17;
[Gamma1,VecteurFreq1, N] = EstimateurSpectralSimple(s,1,N, NFFT);
[Gamma2, VecteurFreq2] = EstimateurSpectralMoyenne(s, N, M, NFFT);
[Gamma3,VecteurFreq3] = EstimateurSpectralWelch(s,N,Nom_fenetre,M,NOVERLAP,NFFT);

figure(15)
semilogy(VecteurFreq1,Gamma1)
axis([0 0.5 10 10^7])
title('Estimateur simple : N = 100000, M = 5000, NFFT = $2^{17}$, fenetre Blackman,
    recouvrement: 50\%','interpreter','latex'),
ylabel('dB','interpreter','latex')
xlabel('f','interpreter','latex')
figure(16)
semilogy(VecteurFreq2,Gamma2)
axis([0 0.5 10 10^7])
title('Estimateur moyenne : N = 100000, M = 5000, NFFT = $2^{17}$, fenetre Blackman,
    recouvrement: 50\%','interpreter','latex'),
ylabel('dB','interpreter','latex')
xlabel('f','interpreter','latex')
figure(17)
semilogy(VecteurFreq3,Gamma3)
axis([0 0.5 10 10^7])
title('Estimateur de Welch : N = 100000, M = 5000, NFFT = $2^{17}$, fenetre Blackman,
    recouvrement: 50\%','interpreter','latex'),
ylabel('dB','interpreter','latex')
xlabel('f','interpreter','latex')
```

□

5.2 Expérimentation

Afficher les spectres estimés obtenus avec chacune des 3 méthodes étudiées.

figure ci-dessous

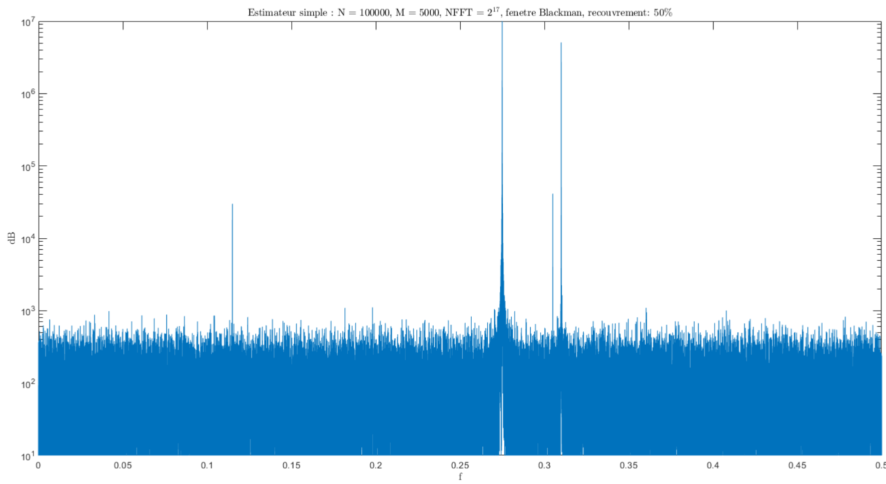

FIGURE 15 – Estimateur spectral simple. $N = 10^5$ – $M = 5000$, $NFFT = 2^{17}$. *Fenêtre Blackman – Recouvrement de* 50%.

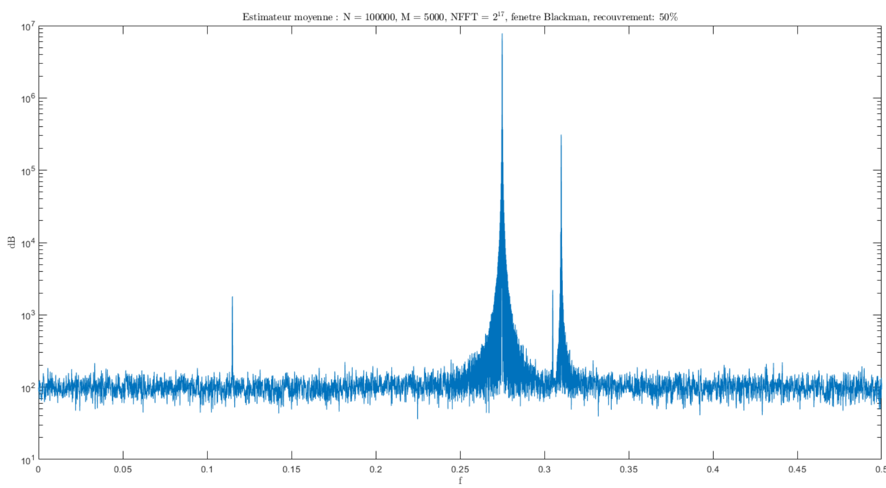

FIGURE 16 – Estimateur spectral moyenné. $N = 10^5$ – $M = 5000$, $NFFT = 2^{17}$. *Fenêtre Blackman – Recouvrement de* 50%.

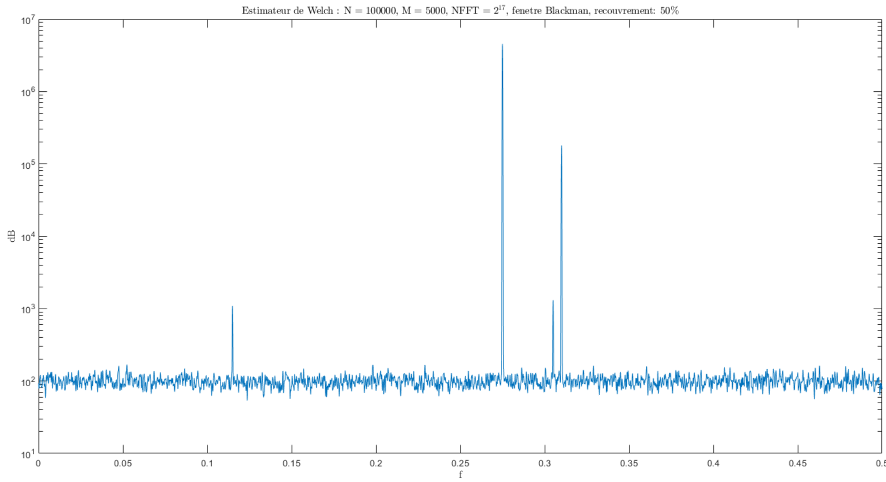

FIGURE 17 – Estimateur spectral de Welch. $N = 10^5$ – $M = 5000$, $NFFT = 2^{17}$. *Fenêtre Blackman – Recouvrement de* 50%.

Décrivez précisément la démarche expérimentale suivie. Avec quelle méthode êtes vous capable avec certitude de décrire le contenu fréquentiel de ce signal ?

réponse ci-dessous

La méthode permettant d'obtenir le résultat le plus probant est sans aucun doute l'estimateur spectral de Welsh. Les autres courbes permettent tout de même de voir les fréquences les plus importants, mais soit le bruit est très présent (notamment dans l'estimateur simple), soit les pics sont élargis à cause de la résolution spectrale (principalement pour l'estimateur moyenné). □

5.2.1 Interprétations

A. Quel inconvénient majeur l'utilisation d'une fenêtre (d'apodisation en temps) engendre-t-elle ?

réponse ci-dessous

L'utilisation d'une fenêtre, qui correspond donc à un produit entre la fonction du signal et la fonction de la fenêtre, cause l'apparition en fréquentiel de "vagues" puisque le produit en temporel se traduit par une convolution en fréquentiel. Cela a donc pour effet de diminuer la résolution fréquentielle. □

B. Décrire (sans dessin) la forme de la DSPM obtenue.

réponse ci-dessous

On observe 4 pics principaux qui se dinguent du bruit :
- Le plus important est en $f_1 = 0.275$
- Le second est en $f_2 = 0.31$
- Le troisième est en $f_3 = 0.305$
- Le dernier est en $f_4 = 0.115$

□

C. Quelles informations la forme de cette DSPM apporte-t-elle sur le contenu (la nature) du signal ?

réponse ci-dessous

La DSPM renseigne sur les fréquences qui composent le signal. Elle renseigne aussi sur le type de bruit qui l'affecte. □

D. Quelles mesures concernant les caractéristiques du signal peut-on effectuer sur la DSPM ?

réponse ci-dessous

On peut mesurer les principaux pics de fréquence pour ensuite mettre en place un filtre permettant de retirer le bruit. □