Traitement des Signaux Aléatoires
Estimation de densités de probabilité

4 ETI – CPE Lyon

Travaux Pratiques TSA

Noms, Prénoms :
Groupe :
Date :

Objectifs du TP

- Synthèse et filtrage de processus aléatoires
- Estimation empirique de densités de probabilités de différents processus aléatoires
- Filtrage passe-bas de processus non gaussiens.

Consignes :

- Le répertoire de travail sera exclusivement sur le compte d'un des membres du binôme (changer le répertoire courant de Matlab®). Mais pour certains traitements, on fera appel à des fonctions pré-programmées. Les fonctions utiles sont accessibles sur CPe-campus dans le cours `Traitement des signaux aléatoires`, rubrique `Travaux Pratiques`. Récupérer les fichiers `.m`.
- Utiliser la trame de `compte-rendu` fournie en répondant directement aux questions dans les espaces ménagés à cet effet.
- Regrouper dans un fichier annexe (type `word` ou `text`) les Codes Matlab® développés ainsi que les Figures obtenues. **Veiller à associer systématiquement une légende explicite à chaque Figure ou Tableau**.
- **Préparation obligatoire** (une seule par binôme) à rédiger directement sur le `compte-rendu` et à fournir en début de séance

1 Préparation

Il faudra avoir pris connaissance de la totalité de l'énoncé et de la documentation des diverses fonctions Matlab fournie en Annexe.

Pour estimer la densité de probabilité d'un signal aléatoire $\mathbf{x}$, on s'appuie ici sur l'histogramme d'une seule réalisation échantillonnée du signal aléatoire. Soient $(x[n] = x(n \cdot T_s))_{n=1,\dots,N}$, la série temporelle correspondante échantillonnée à la fréquence $F_s = T_S^{-1}$:

$$\widehat{p_{\mathbf{x}}}(x) = \frac{\text{Nbre d'échantillons compris dans l'intervalle } \left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right]}{N\,\Delta x}.$$

Question 1 Quelles propriétés le signal aléatoire $\mathbf{x}$ doit il vérifier : :

- pour que les échantillons $(x[n])_{n=1,\ldots N}$ soient identiquement distribués (i.e. suivent tous la même loi, quelque soit l'instant n)

réponse ci-dessous

☐

- pour que les échantillons $(x[n])_{n=1,\ldots N}$ soient décorrélés ?

réponse ci-dessous

☐

- pour que la décorrélation des échantillons $(x[n])_{n=1,\ldots N}$ entraine également leur indépendance ?

réponse ci-dessous

☐

Question 2 Sans calculs, indiquer quelle est l'influence du choix de Δx sur le biais et sur la variance de l'estimation $\widehat{p_{\mathbf{x}}}(x)$.

réponse ci-dessous

☐

Question 3 Quelles opérations (arithmétiques simples, il ne s'agit pas de filtrage ici !) permettent de synthétiser un processus gaussien de moyenne m_2 et d'écart-type σ_2 à partir d'un processus gaussien stationnaire de moyenne $m_1 \neq m_2$ et d'écart-type $\sigma_1 \neq \sigma_2$?

réponse ci-dessous

☐

Question 4 Le **Kurtosis** est un indice qui permet de mesurer le caractère normal (gaussien) d'une série d'échantillons d'une variable aléatoire. Il est défini par le rapport : $K = \dfrac{\mathbb{E}\left\{\mathbf{x}^4\right\}}{\mathbb{E}^2\left\{\mathbf{x}^2\right\}}$

On rappelle que si $\mathbf{x}$ est gaussien et centré, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)\} &= \mathbb{E}\{x(t_1)x(t_2)\}\,\mathbb{E}\{x(t_3)x(t_4)\} + \mathbb{E}\{x(t_1)x(t_3)\}\,\mathbb{E}\{x(t_2)x(t_4)\}\ldots \\ &\quad + \mathbb{E}\{x(t_1)x(t_4)\}\,\mathbb{E}\{x(t_2)x(t_3)\}\end{aligned}$$

Montrer alors que dans le cas d'un signal aléatoire gaussien, centré et stationnaire, le Kurtosis vaut 3.

réponse ci-dessous

☐

Question 5 Soit $\mathbf{x}(t)$ un bruit gaussien de valeur moyenne m_B et d'écart-type σ_B.
Soit $\mathbf{y}(t)$ un signal carré d'amplitude A, centré, périodique de période T_0, de rapport cyclique égal à 1 et retardé par rapport à l'origine d'un retard τ uniformément distribué entre 0 et T_0.
Donner l'expression de la densité de probabilité de la somme $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$.

réponse ci-dessous

□

Traitement des Signaux Aléatoires
Estimation de densités de probabilité **4 ETI – CPE Lyon**

Travaux Pratiques TSA

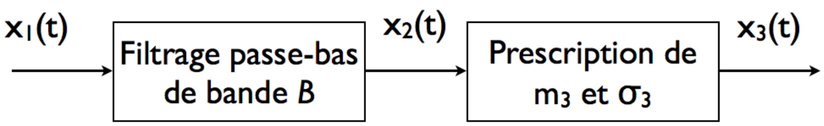
Noms, Prénoms :

Groupe :

Date :

2 Bruit gaussien filtré, échantillonné

On souhaite générer un bruit gaussien $x_3(t)$ blanc dans la bande $[-B, B]$, de moyenne m_3 non nulle et d'écart-type $\sigma_3 > 1$. Pour cela, on applique la procédure décrite dans la préparation (Question 3) et schématisée ci-dessous :



où $x_1(t)$ est un bruit blanc gaussien, centré, d'écart-type $\sigma_1 = 1$.

2.1 Programmation

Programmer deux fonctions Matlab distinctes dont vous reproduirez les codes ci-dessous.

2.1.1 Fonction synthèse des signaux aléatoires

- Paramètres d'entrée :
  - le nombre N d'échantillons à générer
  - la largeur de bande B du filtre passe-bas
  - la moyenne m_3 et l'écart-type σ_3 du bruit $x_3(t)$.
- Traitements à effectuer dans la fonction :
  - génération d'une séquence $x_1(t)$ de bruit gaussien échantillonné (à la fréquence F_s), centré et d'écart-type $\sigma_1 = 1$
  - synthèse d'un filtre de *Butterworth* de type passe-bas, de fréquence de coupure f_c correspondant à la largeur de bande B et d'ordre $m = 8$
  - filtrage du bruit $x_1(t)$ par le filtre passe-bas pour obtenir le bruit filtré $x_2(t)$
  - transformation de $x_2(t)$ pour obtenir $x_3(t)$ de valeur moyenne m_3 et d'écart-type σ_3.
- Variables de sortie :
  - les vecteurs des échantillons de x_1, x_2 et x_3
  - les coefficients de la fonction de transfert du filtre passe-bas (coefficients des polynômes $A(z)$ et $B(z)$).

code ci-dessous

□

2.1.2 Fonction Calcul d'histogramme

- Paramètres d'entrée :
  - le vecteur des N échantillons d'un signal aléatoire $x(t)$
  - paramètre **optionnel** : M le nombre d'intervalles imposés pour le calcul de l'histogramme
- Traitements à effectuer :
  - si le nombre d'intervalles M n'est pas spécifié :
    - appliquer la règle empirique de calcul *optimal* de Δx (vue en TD)
    - calculer le centre de chaque intervalle de l'histogramme correspondant à ce choix de Δx
    - calculer l'histogramme correspondant
  - si le nombre d'intervalles M est spécifié :
    - déterminer la largeur des intervalles Δx correspondant à ce choix de M
    - calculer l'histogramme correspondant
  - déduire de l'histogramme calculé une estimation de la densité de probabilité de $\mathbf{x}$
  - afficher dans la figure et le graphe courants la densité de probabilité estimée
  - labéliser les axes en indiquant la valeur de Δx utilisée (et préciser si celle-ci est *optimale* ou *imposée*). Donner un titre pertinent (distinctif) au graphe.
- Variables de sortie :
  - le vecteur des valeurs de la densité de probabilité estimée
  - le vecteur des centres d'intervalles calculés

code ci-dessous

□

2.2 Expérimentation

2.2.1 Cas général

On supposera que le signal est échantillonné à la fréquence $F_s = 1\,KHz$. Ce choix est il important ? Pourquoi ?

réponse ci-dessous

□

Dans les conditions suivantes :

- $N = 1000$ échantillons de signal
- Filtre passe-bas avec $B = 100\,Hz$ (ordre $m = 8$)
- $m_3 \neq 0$ et $\sigma_3 > 1$ (choix libres que l'on précisera clairement dans le compte-rendu)
- choix empirique *optimal* de la largeur Δx des intervalles,

afficher ci-dessous, sur une même figure partagée en 2×4 **sous-graphes** (*subplots*) :

- sur la première ligne : les séries temporelles $x_1(k.T_s)$, $x_2(k.T_s)$ et $x_3(k.T_s)$, ainsi que le module du gain complexe du filtre passe-bas
- sur la deuxième ligne : sous chacune des 3 séries temporelles, les densités de probabilité estimées auxquelles on superposera les densités théorique correspondantes. **Donner aussi le code utilisé pour calculer et afficher ces d.d.p. théoriques.**

figure ci-dessous

☐

code ci-dessous

☐

Pour chacun des 3 processus, vérifier par la mesure sur les densités estimées et en utilisant des estimateurs empiriques (disponibles sous Matlab) :

a) la conformité entre moyennes mesurées et théoriques

	$\widehat{m_1}$	$\widehat{m_2}$	$\widehat{m_3}$
Décrire une 1ère méthode de mesure de la moyenne	**réponse et mesures ci-dessous** ☐		
Mesure de la moyenne par la méthode 1			
Décrire une 2ème méthode de mesure de la moyenne	**réponse et mesures ci-dessous** ☐		
Mesure de la moyenne par la méthode 2			

b) idem pour les écart-type (avec au moins deux méthodes de mesure distinctes que l'on détaillera)

	$\widehat{\sigma_1}$	$\widehat{\sigma_2}$	$\widehat{\sigma_3}$
Décrire une 1ère méthode de mesure de l'écart-type	**réponse et mesures ci-dessous** □		
Mesure de l'ecart-type par la méthode 1			
Décrire une 2ème méthode de mesure de l'écart-type	**réponse et mesures ci-dessous** □		
Mesure de l'écart-type par la méthode 2			
Décrire une 3ème méthode de mesure de l'écart-type	**réponse et mesures ci-dessous** □		
Mesure de l'écart-type par la méthode 3			
Décrire une 4ème méthode de mesure de l'écart-type	**réponse et mesures ci-dessous** □		
Mesure de l'écart-type par la méthode 4			

Lesquelles de ces méthodes vous paraissent les plus précises ? Pourquoi ?

réponse ci-dessous

□

2.2.2 Influence de N

On ne considère ici que le signal aléatoire $x_1(t)$, le nombre d'intervalles pour le calcul des histogrammes restant constant et égal à $M = 20$.

a) Sur une même figure, afficher dans différents sous-graphes (pour une meilleure lisibilité des courbes, on pourra utiliser la commande `stem.m` en lieu et place de la commande `bar.m`), les densités de probabilité de $x_1(t)$ estimées pour plusieurs valeurs du nombre d'échantillons : pour cela faire varier dans une boucle `for...end`, le nombre N de 2^4 à 2^{11}. Superposer systématiquement les densités théoriques ainsi que les intervalles de précision théoriques $\mathbb{E}\{\widehat{p_{\mathbf{x}}}(x)\} \pm \mathrm{std}(\widehat{p_{\mathbf{x}}}(x))$ calculés en TD. Veiller à commenter précisément chaque figure (légendes, labels,...)
Donner aussi le code Matlab de calcul de ces intervalles de confiance.

figures ci-dessous

□

code ci-dessous

□

b) Qualitativement, expliquez à partir de ces tracés, l'évolution de la variance (ou de l'écart-type) d'estimation.

réponse ci-dessous

□

c) Peut on conclure sur le biais d'estimation à partir de cette seule expérience ? Expliquez.

réponse ci-dessous

□

d) Quelle expérience faudrait il mener pour caractériser empiriquement et précisément le biais et la variance d'estimation ?

réponse ci-dessous

□

2.2.3 Influence de Δx

Ici encore, on ne s'intéresse qu'à $x_1(t)$ et à une de ses réalisations sur $N = 1000$ points.

a) En faisant varier M, le nombre d'intervalles de l'histogramme, sur une plage incluant les 2 situations extrêmes (**que l'on indiquera et justifiera**), calculer et afficher (sur une même figure partagée en sous-graphes) les densités de probabilité estimées. Superposer les densités théoriques ainsi que les intervalles de précision.

réponse ci-dessous

□

b) Dans un dernier sous-graphe de la même figure, représenter la densité de probabilité estimée avec un choix optimal de Δx.

figures ci-dessous

☐

c) Comme pour la question précédente, décrivez qualitativement en l'expliquant, l'évolution de la variance et du biais d'estimation en fonction de Δx.

réponse ci-dessous

☐

2.2.4 Influence de B

On se place dans les conditions suivantes :

- $N = 1000$ échantillons
- $m_3 \neq 0$ et $\sigma_3 > 1$ (garder les mêmes valeurs que celles choisies pour la première expérience)
- choix empirique *optimal* des largeurs d'intervalles Δx
- Filtre de Butterworth passe-bas, d'ordre $m = 8$ et de **bande** $B = 5\,Hz$.

a) Afficher sur une même figure dans différents sous-graphes, le gabarit (gain complexe) du filtre passe-bas correspondant, le processus filtré $x_2(t)$ et la densité de probabilité estimé sur le processus filtré $x_2(t)$. **Superposer la densité théorique**.

figures ci-dessous

☐

b) Le signal $x_2(t)$ est il gaussien ? Justifiez votre réponse (on pourra par exemple calculer le Kurtosis sur la série temporelle $(x_2[n])_{n=1,\ldots N}$).

réponse ci-dessous

☐

c) Pourquoi l'estimation de la densité de probabilité de x_2 est elle aussi différente de la densité gaussienne $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$? En gardant $B = 5\,Hz$, proposer une nouvelle configurations de paramètres pour corriger cet effet. Vérifier la solution proposée, **en affichant la densité de probabilité ainsi estimée**.

réponse ci-dessous

☐

figures ci-dessous

☐

3 Somme d'un signal carré à retard équiparti et d'un bruit gaussien

On veut étudier la densité de probabilité de la somme d'un signal carré à retard équiparti $\mathbf{y}$ et d'un bruit gaussien $\mathbf{x}$ de valeur moyenne m_B et d'écart-type σ_B.

Pour cela, utiliser la fonction Matlab `carbr(moy,ecartype,N)`, où :

- `moy`: moyenne du bruit
- `ecartype`: écart-type du bruit
- `N`: nombre de points de signal à analyser

Le signal carré, de fréquence $\nu_0 = 110\,Hz$, d'amplitude ± 1, a pour retard à l'origine, une variable aléatoire τ distribuée uniformément sur l'intervalle $[0, T_0[$, où $T_0 = 1/\nu_0$ est la période du signal carré.

En quelques mots, expliquer alors, en quoi le signal carré est un signal aléatoire ?

réponse ci-dessous

□

La somme $\mathbf{z}$ des 2 signaux aléatoires est échantillonnée à 100 kHz.
La fonction affiche le mélange signal carré + bruit et la d.d.p. estimée $\widehat{P_{\mathbf{z}}}(z)$.

En choisissant la moyenne du bruit $m_B = 0$, trouver, en la justifiant, la valeur de l'écart-type σ_B correspondant à chacune des 2 situations suivantes :

1) $\mathbb{P}\{z \in [-0.5, 0.5]\} \leq 0.5\%$

réponse ci-dessous

□

2) $p_{\mathbf{z}}(0) = \dfrac{1}{2}\, p_{\mathbf{x}}(0)$

réponse ci-dessous

□

Afficher sur une même figure, les deux densités correspondantes.

figures ci-dessous

□