Практическая работа № 9. Использование непараметрических критериев для проверки однородности

9.1. О содержании и задачах практической работы

В этой практической работе изучим методы проверки гипотез о принадлежности двух выборок однородным генеральным совокупностям. Под однородностью генеральных совокупностей понимают равенство их функций распределения. Исследовать на однородность будем в предположении, что отсутствует информация не только о значениях параметров распределения, но и о само́м виде функциональной зависимости (напомним, что в практикуме № 8 мы сравнивали числовые характеристики распределений в предположении, что генеральные совокупности распределены по нормальному или биномиальному закону).

В практической работе обсуждаются следующие задачи.

1. Имеется n объектов и над каждым из них произвели измерения разными способами (например, разными приборами). Получили две выборки (такие выборки называют связанными). Требуется проверить гипотезу о том, что выборки взяты из одного и того же непрерывного распределения (требование непрерывности является принципиальным).

2. Имеется две независимые выборки. Требуется проверить гипотезу, утверждающую, что выборки получены из однородных генеральных совокупностей и, в частности, имеют равные средние и медианы.

3. Имеется две независимые выборки. Предполагаются, что генеральные совокупности, которым они принадлежат, имеют равные или близкие характеристики положения. Требуется проверить гипотезу, утверждающую, что дисперсии генеральных совокупностей равны.

Для решения перечисленных задач будем использовать методы, не предполагающие знания функционального вида закона распределения генеральной совокупности. Такие методы называются непараметрическими. Название «непараметрические методы» подчеркивает их отличие от классических, параметрических методов, в которых предполагается, что распределение генеральной совокупности известно с точностью до параметров.

Непараметрические методы основаны на структурных свойствах выборки, а не на самих ее числовых значениях. Такой подход приводит к потере части информации, содержащийся в выборке, поэтому в тех случаях, когда возможно использование параметрических методов, мощность непараметрических критериев оказывается меньшей, чем у их параметрических аналогов.

Мы рассмотрим критерии, которые проверяют лишь необходимые условия одинаковости законов распределений – равенство характеристик положения и/или рассеивания (таких, как средние, медианы, дисперсии и др.).

О первой задаче. Для решения будем использовать *критерий знаков*, в основе которого лежит идея о том, что если выполнено предположение об однородности, то в последовательности разностей связанных выборочных значений число положительных и отрицательных слагаемых должно быть примерно одинаковым.

О второй задаче. Для решения будем использовать критерий Уилкоксона – Манна – Уитни (другие названия: критерий Манна – Уитни – Уилкоксона, U-критерий Манна – Уитни), относящийся к ранговым критериям.

О третьей задаче. Для решения будем использовать критерий, также основанный на подсчете рангов. Ранги присваиваются элементам упорядоченной объединенной выборки по определенному правилу, и затем используются для подсчета выборочного значения статистики критерия.

9.2. Математические понятия и утверждения: краткая информация и ссылки на источники

1. Критерий знаков [2, с. 319 – 341];
URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Критерий_знаков.

2. Критерий Уилкоксона-Манна-Уитни [2, с. 343 – 345];
URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/U-критерий_Манна_–_Уитни.

3. Критерий для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух генеральных совокупностей [2, с. 349 – 350].

9.3. Библиотечные инструменты языка программирования Python

Загрузка основных модулей

```
import numpy as np
import scipy.stats as sts
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Средства проверки критерия Уилкоксона – Манна – Уитни модуля scipy.stats

Функция `sts.ranksums(x,y)`

Возвращает наблюдаемое значение статистики Z (см. п. 2 подраздела 9.2) и достигаемый уровень значимости p-значение.

Параметры: `x` и `y` – независимые выборки.

Корректность применения: объем каждой выборки должен быть больше 8.

Важно: функция не работает со связанными рангами (полученными путем усреднения одинаковых рангов).

Функция `sts.mannwhitneyu(x,y, use_continuity=True, alternative=None)`

Возвращает: наблюдаемое значение статистики (см. п. 2 подраздела 9.2) и достигаемый уровень значимости p-значение.

Параметры: `x, y` – выборки; `use_continuity` – признак, определяющий поправку на непрерывность (1/2); `alternative` – вид альтернативы (`None,two-side,less, greater`).

Корректность применения: объем каждой выборки должен быть больше 8.

Важно: функция работает со связанными рангами (учитывает наличие одинаковых рангов), но технически несколько иначе, чем это изложено в [2], через поправку, внесенную в статистику.

9.4. Примеры для совместного обсуждения

В этой практической работе воспользуемся задачами из сборника [2].

Пример 1 [2, 19.395]. Для 10 человек была предложена специальная диета. После двухнедельного питания по этой диете масса их тела изменилась следующим образом:

Масса до диеты, кг	63	80	92	81	70	79	78	66	57	76
Масса после диеты, кг	60	84	87	79	74	71	72	67	57	70

а) Можно ли рекомендовать эту диету для людей, желающих похудеть?

б) Оказывает ли эта диета какое-либо существенное влияние на массу тела?

Принять $\alpha = 0,1$.

План решения. Используем критерий знаков. Решим задачу вручную, прибегая к помощи компьютера разве только для арифметических расчетов. Это поможет понять идею, лежащую в основе критерия.

Пример 2 [2, 19.407]. Двум группам испытуемых предлагалось опознать три начертания цифры 5. Результаты эксперимента (время опознания в секундах) следующие:

1-я группа	25	28	27	29	26	24	28	23	30	25	26	25
2-я группа	18	19	31	32	17	15	41	35	38	13	14	–

Можно ли считать, что дисперсия результатов для первой и второй групп различны? Принять $\alpha = 0,05$.

План решения. Поскольку информация о законе распределения генеральных совокупностей, которым принадлежат выборки, отсутствует, для решения будем использовать непараметрический критерий проверки равенства дисперсий. Однако исходно неясно, можем ли мы им воспользоваться. Условием применения критерия является равенство или близость характеристик положения (т.е. средних или медиан). Поэтому вначале проверим гипотезу о равенстве характеристик положения по критерию Уилкоксона – Манна – Уитни. И только если он подтвердится, перейдем к проверке гипотезы о равенстве дисперсий.

9.5. Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Студентам было предложено написать тест по теме. Разрешалось выполнить тест дважды (учитывался лучший результат, варианты заданий менялись только в части числовых значений). В файлах «Данные 9_1» приведены результаты и время выполнения теста студентами первый и второй раз. Можно ли считать, что опыт выполнения теста улучшил способности учащихся в решении задач? Если да, то на каком уровне значимости?

Указание. Воспользуйтесь критерием знаков. Учтите, что данные реальные и требуют предварительной обработки, поскольку некоторые студенты не воспользовались возможностью вторично выполнить тест. Результаты предварительно описать: найти выборочные характеристики, построить боксплоты.

Задание 2. Преподаватели Иванов и Петров, сидя за чашкой чая, сетовали на то, что студенты год от года учатся все хуже и хуже… Но так ли это? В файле «Данные 9_2» приведены данные успеваемости студентов, изучавших дисциплину «Основы математического анализа» в 2022 и 2023 году. Проанализируйте статистические данные по следующему плану:

1) Визуализируйте выборки (постройте гистограммы и боксплоты), а также найдите выборочные числовые характеристики.
2) Проверьте гипотезу об однородности генеральных совокупностей в части равенства характеристик положения, используя критерий Уилкоксона – Манна – Уитни.