Exercício 1: Probabilidade clássica - moeda balanceada

a) **Em uma jogada de moeda balanceada quantos eventos são possíveis?**

2, cara ou coroa

b) **Jogando 1000 moedas balanceadas, quantos eventos são possíveis?**

2^{1000} eventos possíveis

c) **Nesse caso, qual a probabilidade de cada um dos diferentes eventos?**

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ probabilidade de uma sequência específica no lançamento de 1000 moedas balanceadas

d) **Se a ordem das moedas não importar, quantos eventos existem em que foram obtidas 500 caras e 500 coroas?**

$$p(x,y) = \frac{x!}{(x-y)!y!} = p(1000, 500) = \frac{1000!}{(1000-500)!500!} = \frac{1000!}{(500!)500!} =$$

Exercício 2: Baralho

a) **Quantos ordenamentos possíveis existem no baralho?**

52! combinações

b) **Quantos ordenamentos existem em que as cartas pretas ficam todas na primeira metade e as vermelhas todas na segunda metade?**

26! x 26!

c) **Qual a probabilidade de isso acontecer ao acaso?**

$$\frac{26! \times 26!}{52!}$$

d) **Quantos embaralhamentos diferentes existem em que os quatro ases aparecem em sequência e qual a probabilidade de isso acontecer?**

p= $\frac{\text{49 (posições diferentes para o grupo de 4 ases) x 4!(permutação dos 4 ases no grupo) x48! (permutações no total de cartas)}}{52!}$

$$p = \frac{49 \times 4! \times 48!}{52!} = \frac{49 \times 4! \times 48!}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48!} = \frac{4!}{52 \times 51 \times 50}.$$

Exercício 3: Aniversários

Em uma sala com 30 pessoas, qual a chance de ninguém fazer aniversário no mesmo dia?

a) Combinações possíveis aniversários únicos

$$c = \frac{365!}{(365-30)!} =$$

b) Probabilidade

$$p = \frac{c}{365^{30}} \sim 0.303$$

E qual a chance de pelo menos uma pessoa fazer aniversário no mesmo dia que outra?

P = 1 - p = 1-0.303 = 0.697

Exercício 4: Caixas e moedas

Existem 3 caixas com duas moedas cada. Uma caixa tem duas moedas de ouro, outra tem duas moedas de prata e a última tem uma moeda de ouro e outra de prata.

Se você coloca a mão em uma das caixas e puxa uma moeda de ouro, classicamente, qual a probabilidade de que a outra moeda da mesma caixa seja de ouro?

1) **OO**
2) PP **x**
3) OP

$$\frac{2}{3} = \underline{0.67}$$

Agora Descreva um experimento para de maneira empírica confirmar seu resultado clássico.

- Faria o experimento citado acima 100 vezes
- Eliminaria da conta os casos em que primeira vez saísse uma moeda de prata na primeira retirada
- Contabilizaria das vezes aproveitáveis quantas vezes a moeda de ouro foi retirada na segunda vez e calcularia a probabilidade

Exercício 5: Loteria

Suponha uma loteria como a Mega-Sena, sorteado 6 números de 1 a 60, e que a aposta com 6 números custa 1 real.

$c(60,6) = \frac{60!}{(60-6)!6!} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 50\,063\,860 \quad P = \frac{\mathbf{1}}{50\,063\,860} = 0{,}197 \times 10^{-7}$

Quanto deve custar o jogo com 7, 8, 9 e 10 números para que o valor seja proporcional à sua chance de ganhar?

$c(7,6) = \frac{7!}{(7-6)!6!} = \frac{7 \times 6!}{1! \times 6!} = 7 \quad P = \frac{\mathbf{7}}{50\,063\,860} = 1{,}39 \times 10^{-7}$

$c(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 6!} = 28 \quad P = \frac{\mathbf{28}}{50\,063\,860} = 5{,}53 \times 10^{-7}$

$c(9,6) = \frac{9!}{(9-6)!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84 \quad P = \frac{\mathbf{84}}{50\,063\,860} = 16{,}78 \times 10^{-7}$

$c(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4! \times 6!} = 210 \quad P = \frac{\mathbf{210}}{50\,063\,860} = 41{,}95 \times 10^{-7}$

7 => R$ 7,00 8 => R$ 28,00	9 => R$ 84,00 10 => R$ 210,00

Exercício 6: Valor esperado

Uma pessoa pede para você escolher entre dois envelopes. Um deles tem um certo valor e outro tem o dobro do valor.

Você não sabe quanto são esses valores. Você abre um deles e vê o valor de 1000 reais. A pessoa te dá opção de trocar de envelope.

Qual o valor esperado caso faça a troca? Vale a pena fazer essa troca?

a) 1000
b) 2000
c) 500

Neste caso o proximo envelope possui probabilidade de 0.5 de ser 500 e 0.5 de ser 2000. O valor esperado neste caso seria E= 0.5 x 500 + 0.5 x 2000 = 1250 que é um valor maior do que 1000 atuais que retirou.
Isso apenas significa que se for trocado e o proximo envelope for o de menor valor, o prejuízo será muito menos considerável que o ganho se o envelope trocado for de maior valor

Exercício 7: Amigo secreto

Em um amigo secreto entre 10 pessoas, qual a probabilidade de que um ciclo único seja formado entre os participantes?

As possibilidades de tirar um único número que não o seu proprio podem ser contabilizadas da seguinte maneira: fixando uma pessoa no circulo, e permutando as outras possibilidades de modo que a ultima pessoa permutada retire o nome da pessoa fixada:

(10 - 1)! = 9! Total de combinações possíveis seria 10! Então a probabilidade seria

$$P = \frac{9!}{10 \times 9!} = \frac{1}{10}$$

Com mais pessoas essa chance aumenta ou diminui?

vamos calcular para o caso de 20 pessoas

(20 - 1) = 19!

$$P = \frac{19!}{20 \times 19!} = \frac{1}{20}$$

Ou seja, quanto mais pessoas, menores a chances de fechar 1 circulo único

Em uma linguagem de sua preferência, construa um código que dado um número de pessoas N calcule a probabilidade de que se formem ciclos de um dado tamanho x. Por exemplo, a chance de se formar ciclos de tamanho máximo igual a 9 em um grupo de 10 pessoas.

```
from math import factorial
from itertools import combinations

def probabilidade_de_ciclos(numero_pessoas, tamanho_ciclo):
    if tamanho_ciclo > numero_pessoas:
        return 0  # Não há ciclos de tamanho maior que o número de pessoas

    # Número total de formas de distribuir as pessoas (fatorial do número total)
    total_permutacoes = factorial(numero_pessoas)

    # Número de formas de formar um ciclo único de determinado tamanho e o restante distribuído livremente
    formas_de_formar_ciclo = factorial(tamanho_ciclo - 1)  # Fixamos uma pessoa e permutamos as outras
    pessoas_restantes = numero_pessoas - tamanho_ciclo

    # Número de formas de escolher os participantes do ciclo dentro do grupo
    formas_de_escolher = factorial(numero_pessoas) // (factorial(tamanho_ciclo) * factorial(numero_pessoas - tamanho_ciclo))

    # Multiplicamos pelos modos de organizar o ciclo e ajustamos pelo total de possibilidades
    probabilidade = (formas_de_escolher * formas_de_formar_ciclo * factorial(pessoas_restantes)) / total_permutacoes

    return probabilidade

# Exemplo: Probabilidade de formar ciclos de tamanho máximo 9 em um grupo de 10 pessoas
numero_pessoas = 10
tamanho_ciclo = 9
prob = probabilidade_de_ciclos(numero_pessoas, tamanho_ciclo)
print(f"A probabilidade de formar um ciclo de tamanho {tamanho_ciclo} em um grupo de {numero_pessoas} pessoas é
{prob:.6f}")
```