TD7 STRUCTURES ALGÉBRIQUES POUR L'INFORMATIQUE

EXERCICE 1 . Soit la permutation $\alpha \in S_9$ donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la permutation réciproque α^{-1}.
2. Donner la décomposition de α en produit de cycles de supports disjoints (appelés cycles disjoints).
3. En déduire une nouvelle expression de α^{-1} (en produit de cycles disjoints).

EXERCICE 2 . On considère le groupe symétrique S_n.

1. Rappeler card(S_n).
2. Calculer (34)(45)(23)(12)(56)(23)(45)(34)(23).
3. Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 3 . Soit α un cycle de longueur r.

1. Un exemple. On se place dans S_9 et on choisit $\alpha = (4, 5, 1, 2, 3)$. (et donc $r = 5$) Montrer que 5 est le plus petit entier strictement positif tel que $\alpha^r = id$. Quel est le groupe engendré par α? Combien a–t–il d'éléments?

   On se place dorénavant dans le cas général.
2. Montrer que $\alpha^r = id$.
3. Montrer que r est le plus petit entier strictement positif tel que $\alpha^r = id$.
4. Quel est le sous–groupe engendré par α? Combien a–t–il d'éléments?

EXERCICE 4 . Soit $K = \{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\}$ où f_1, f_2, et f_3 sont les permutations de $E = \{1, 2, 3, 4\}$ définies par

$$f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), f_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), f_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Montrer que K est un sous-groupe de S_4. Donner le sous-groupe engendré par $K' = \{f_1, f_2\}$.

EXERCICE 5 . Écrire tous les éléments de S_3, puis la table de S_3. En déduire tous les sous-groupes de S_3.

EXERCICE 6 . Déterminer les ensembles suivants:

1. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3\}$
2. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(2) = 2\}$
3. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3 \text{ et } \sigma(2) = 2\}$

Ces ensembles sont–ils des sous–groupes de S_4?