Licence d'informatique première année | Année 2018-2019

Logique
Polycopié d'exercices

Sommaire

1 Logique propositionnelle

1.1 Tables de vérité et sémantique

Exercice 1
On considère la formule du calcul propositionnel $F = (p \to q) \wedge (q \to r)$.

1. Donnez la table de vérité de F.
2. Montrez que $F \to (p \to r)$ est une tautologie.

Exercice 2
Construisez les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes.
Quelles formules sont des tautologies ?

1. $(p \vee r) \to (r \vee \neg p)$
2. $(p \to \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$
3. $p \to (p \to q)$
4. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
5. $((p \to q) \vee (r \wedge \neg p)) \wedge \neg(q \wedge r)$
6. $(\neg(p \to q) \vee \neg r) \wedge p$

Exercice 3
On introduit un nouveau connecteur propositionnel NOR (non ou), noté aussi $\downarrow$ pour exprimer la fonction correspondant à l'expression française « ni .. ni ... ».

1. Donnez la table de vérité de $p \downarrow q$.
2. Montrez que l'on peut exprimer le conditionnel (l'implication) à l'aide de la disjonction et de la négation.
3. Montrez que l'on peut exprimer la conjonction à l'aide de la disjonction et de la négation.
4. Montrez que l'on peut exprimer la négation à l'aide de $\downarrow$.
5. Montrez que l'on peut exprimer la disjonction à l'aide de $\downarrow$
6. Montrez que l'on peut exprimer le conditionnel et la conjonction à l 'aide du connecteur $\downarrow$.
7. En déduire que $\{\downarrow\}$ est un ensemble complet de connecteurs. Quel inconvénient présente-t-il ?

Exercice 4
Montrez que les formules suivantes sont logiquement équivalentes deux par deux :

1. $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
2. $p \to q$ et $\neg p \vee q$
   $\neg\neg p$ et p
3. lois de De Morgan :
   $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge \neg q$
   $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$

1.2 Règles de réécriture, FNC et FND

Exercice 5
Soient A, B et C trois formules quelconques.
On considère les règles de réécriture suivantes :

1) $A \to B \rightsquigarrow \neg A \vee B$
2) $\neg\neg A \rightsquigarrow A$
3) Lois de De Morgan
   a) $\neg (A \wedge B) \rightsquigarrow \neg A \vee \neg B$
   b) $\neg (A \vee B) \rightsquigarrow \neg A \wedge \neg B$
4) Distributivité
   a) distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$: $A \vee (B \wedge C) \rightsquigarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$: $A \wedge (B \vee C) \rightsquigarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Soit F une formule. L'algorithme $\mathcal{A}$ suivant permet de trouver une formule G équivalente à F qui soit en FNC :

1. On élimine de F tous les connecteurs autres que $\vee, \wedge, \neg$. Par exemple, il suffit d'utiliser la règle 1 pour éliminer le symbole $\to$.
2. On applique autant que possible les régles 2), 3) *a*) et 3) *b*).
3. On applique autant que possible la règle 4) *a*).

Mettre les formules suivantes sous FNC avec l'algorithme $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} G &= \Big(\neg(p \to q) \vee \neg r\Big) \wedge p \\ H &= \neg(q \vee \neg r) \ \wedge ((p \wedge \neg q) \vee r) \end{aligned}$$

Exercice 6
On considère la formule

$$F = \Big((p \to q) \vee (r \wedge \neg p)\Big) \wedge \neg(q \wedge r).$$

1. En utilisant l'algorithme vu en dans l'exercice précédent, mettez F sous forme normale conjonctive ; à chaque étape, vous indiquerez la règle utilisée (en donnant son numéro).
2. En utilisant l'algorithme vu dans l'exercice précédent, mettez F sous forme normale disjonctive ; à chaque étape, vous indiquerez la règle utilisée (en donnant son numéro).

Exercice 7
En utilisant les règles de réécriture, montrez quelles formules parmi les formules suivantes sont des tautologies.

1. $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$
2. $(\neg p \to (q \wedge r)) \vee (p \to (\neg q \vee r))$
3. $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow ((\neg r \wedge p) \to \neg q)$
4. $(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (p \to r))$
5. $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (b \to c))$

6. $((a \to b) \wedge (b \to \neg a)) \wedge ((\neg a \to b) \wedge (b \to a))$

Exercice 8

On considère la formule

$$F = \Big((p \to q) \to (q \to r)\Big) \to (p \to r).$$

1. En utilisant l'algorithme $\mathcal{A}$ vu dans un exercice précédent, mettez F sous forme normale conjonctive ; à chaque étape on indiquera la ou les règles utilisée(s) (en donnant son numéro).
2. En utilisant l'algorithme $\mathcal{A}$ vu dans un exercice précédent, mettez F sous forme normale disjonctive ; à chaque étape on indiquera la ou les règles utilisée(s) (en donnant son numéro).

Exercice 9

On considère la formule $F = p \to ((\neg q \vee r) \to s)$

En utilisant les règles de réécriture (que l'on rappelera au début de l'exercice), mettre F sous forme normale disjonctive (FND) puis sous forme normale conjonctive (FNC).

1.3 FNC et FND canoniques

Exercice 10

On considère la formule $F = (p \to r) \to (p \wedge (\neg q \vee r))$

1. Donnez la contraposée de F.
2. Construisez sa table de vérité.
3. Donnez sa forme normale disjonctive canonique et sa forme normale conjonctive canonique.
4. F est-elle satisfiable ? Est-ce une tautologie ? Justifiez vos réponses.
5. Quand peut-on dire que deux formules sont logiquement équivalentes ? Trouvez une formule simple logiquement équivalente à F.

Exercice 11

Soit F la formule ayant comme table de vérité

p	q	r	G
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0

Donnez les formes normales disjonctive et conjonctive canoniques de F.

Exercice 12

Soit $F = (p \vee q) \rightarrow (\neg(r \vee p))$ et G ayant comme table de vérité

p	q	r	G
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

1. Donnez les formes normales disjonctives et conjonctives canoniques de F et G.
2. Donnez pour F et G une formule logiquement équivalente la plus simple possible.

Exercice 13

On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

p	q	r	F
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

1. F est-elle satisfiable ? Est-ce une tautologie ? Une antilogie ? (on rappelera ce que cela veut dire).
2. Donnez les FNC et FND canoniques de F.
3. A l'aide de la FND par exemple, donner une formule plus simple de F.
4. On considère la formule H : $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (q \rightarrow (p \vee r)) \wedge (p \rightarrow (\neg q \vee r)) \wedge (r \rightarrow (q \vee \neg p))$. Faire sa table de vérité (sur le même schéma ou en recopiant aussi la colonne de F) Est-ce que $H \leftrightarrow F$ est valide ?

Exercice 14

On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

p	q	r	F
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

1. Rappelez comment on détermine sur la table de vérité si F est valide, si elle est contradictoire, satisfaisable.
2. Donnez les FNC et FND canoniques de F.
3. Construire la table de vérité (en recopiant aussi la colonne de F) de la formule G donnée par :
   $G = \Big(\neg((p \to q) \to r)\Big) \to ((q \vee r) \to p))$
4. Est-ce que $G \to F$ est valide (on justifiera) ?

Exercice 15
On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

a	b	c	F
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

1. Rappelez comment on détermine sur la table de vérité de F si F est valide, contradictoire ou satisfiable.
2. Donnez les FNC et FND canoniques de F.
3. Construire la table de vérité de la formule G donnée par :
   $G = \Big((a \vee (b \vee c)) \to ((a \wedge b) \wedge \neg c)\Big) \vee \neg(c \to (a \vee b))$
4. Est-ce que $G \to F$ est valide ? Justifiez votre réponse.

1.4 Méthode des tableaux

Exercice 16
On considère la formule $G = \Big((r \vee s) \wedge ((r \to p) \wedge (s \to q))\Big) \to (p \vee q)$
Mettez la formule G sous FNN, forme normale négative (les seuls connecteurs logiques sont $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les symboles $\neg$ se trouvent au niveau des littéraux).

En utilisant la méthode des tableaux, montrer que G est une tautologie.

Exercice 17
Soient A et B deux formules du calcul propositionnel. On dit que B est une conséquence logique de A lorsque $(A \to B)$ est une formule valide.
En utilisant la méthodes des tableaux vue en cours, déterminer si $p \vee q$ est une conséquence logique de $(r \vee s) \wedge ((r \to p) \wedge (s \to q))$.

Exercice 18
A l'aide de la méthode des tableaux, montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$
3. $((r \vee s) \wedge (r \to p) \wedge (s \to q)) \to (p \vee q)$
4. $((p \wedge q) \wedge (r \to (\neg p \vee \neg q))) \to (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$
5. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
6. $((p \to q) \wedge (q \to p)) \to ((p \vee q) \to (p \wedge q))$

Exercice 19
On considère la formule :
$G = ((p \wedge q) \wedge (r \to (\neg p \vee \neg q))) \to (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$
Mettez la formule G sous FNN, forme normale négative (les seuls connecteurs logiques sont $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les symboles $\neg$ se trouvent au niveau des littéraux).
En utilisant la méthode des tableaux, montrer que G est une tautologie.

Exercice 20
On considère les formules :
$F = \Big(((p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee (\neg p \wedge s))\Big) \wedge (((\neg s \vee q) \vee r) \wedge \neg q)$ et
$G = ((a \wedge b) \wedge (c \to \neg(a \wedge b))) \to (\neg(\neg a \vee \neg b) \vee c)$

1. Utilisez la méthode des tableaux pour étudier si F est satisfaisable.
2. Est-ce que G est une tautologie ? Vous utiliserez la méthode des tableaux et vous justifierez votre démarche.

1.5 Formalisation du langage naturel, résolution de problèmes

Exercice 21
Les propositions P, Q et R sont définies de la manière suivante :
P : « J'ai soif »
Q : « Mon verre est vide »
R : « Il est trois heures »
Écrivez chacune des propositions suivantes sous forme d'expression logique faisant intervenir P, Q et R.

1. J'ai soif et mon verre n'est pas vide.
2. Il est trois heures et j'ai soif.
3. S'il est trois heures alors j'ai soif.
4. Si j'ai soif alors mon verre est vide.
5. Si je n'ai pas soif, alors mon verre n'est pas vide.

Exercice 22
Théorème de Pythagore :
Si le triangle (A, B, C) est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Donnez la réciproque, la contraposée et la contraposée de la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 23
On considère les propositions P : « Il pleut » et Q : « il y a des nuages ».
Que donnent l'implication $P \rightarrow Q$, sa contraposée, sa réciproque et la contraposée de sa réciproque ?

Exercice 24
Pierre, Marc et Jean sont 3 colocataires. Ce soir on sait que :

1. Si Pierre est rentré alors Jean est allé au cinéma
2. Pierre est rentré ou Marc est à la bibliothèque
3. Si Jean est au cinéma alors Marc est à la bibliothèque ou Pierre est rentré
4. Marc n'est pas à la bibliothèque et Jean est au cinéma.

Peut-on être sûr que Pierre est rentré ?

Exercice 25
Un meurtre a été commis. L'inspecteur Ludo est chargé de l'enquête. Il rencontre plusieurs témoins ou suspects. Il en ressort que

1. Si Jean n'a pas rencontré Pierre c'est que Pierre est le meurtrier ou que Jean ment
2. Si Pierre n'est pas le meurtrier alors le crime a eu lieu après minuit et Jean ne peut pas avoir rencontré Pierre
3. Si le crime a eu lieu après minuit alors Pierre est le meurtrier ou Jean ment

L'inspecteur Ludo pense que Pierre est le coupable. Et vous ?

Exercice 26 A logic of Thrones :

Dans un lointain royaume, le roi Robert est souffrant. Son ami, Ned a découvert le secret gardé par la reine : le fils de la reine, Geoffrey n'est pas le fils légitime de Robert. Le chaos est à son comble dans la capitale et le dénouement est proche.

Nous savons que si Robert ne meurt pas, alors le secret n'est pas révélé par Ned, mais que si Ned est emprisonné alors Ned ne révélera pas le secret. Evidemment, si Robert meurt et Ned révèle le secret alors Geoffrey ne deviendra pas roi. De plus, par une source sûre (Littlefinger), nous savons que si Ned est emprisonné ou que Robert meurt alors Geoffrey sera roi.

Modéliser le problème à partir des quatre affirmations du paragraphe précédent. Peut-on être sûr que le secret ne sera pas révélé par Ned ? Est-il possible que Ned soit emprisonné ? Vous répondrez à ces questions à l'aide de la méthode des tableaux ou d'une table de vérité.

1.6 Divers

Exercice 27
Montrez que la formule Φ est une tautologie :
$\Phi = \neg(a \Leftrightarrow b) \vee ((b \wedge c) \rightarrow c)$

Exercice 28
Etudier les formules suivantes :

1. $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
2. $(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r) \wedge p$

3. $(p \to q) \vee ((r \wedge \neg p) \wedge \neg(q \wedge r))$
4. $((p \to q) \vee (r \wedge \neg p)) \wedge \neg(q \wedge r)$
5. $(p \vee r) \to (r \vee \neg p)$
6. $((p \to q) \wedge (r \to q)) \to ((p \vee r) \to q)$

Exercice 29
On considère la formule F suivante : $((p \to r) \vee (q \to r)) \to (\neg p \vee r)$

1. Donnez la table de vérité de F.
2. F est-elle satisfiable ?
3. Donnez les FNC et FND canoniques de F.
4. Donnez la réciproque de F.
5. Montrez que la réciproque de F est satisfiable à l'aide de la méthode des tableaux vu en cours.
6. Quand peut-on dire que deux formules sont logiquement équivalentes ? F est-elle équivalente à sa réciproque.

Exercice 30
On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

p	q	r	F
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

1. F est-elle satisfiable ? est-ce une tautologie ? une antilogie ? (expliquer ce que cela veut dire).
2. Donnez les FNC et FND de F.
3. On considère la formule H : $((p \vee (q \vee r)) \to ((p \wedge \neg q) \wedge r)) \vee \neg(q \to (p \vee r))$.
   Faire sa table de vérité.
   Est-ce que $\neg H \to F$ est valide ?
4. On considère la formule G : $((p \wedge q) \wedge (r \to (\neg p \vee \neg q))) \to ((\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$
   Mettez la formule G sous FNN, forme normale négative (les seuls connecteurs logiques sont $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les symboles $\neg$ se trouvent au niveau des littéraux).
5. En utilisant la méthode des tableaux, montrer que G est une tautologie (ne pas oublier de rédiger....).

Exercice 31
On considère la formule $(p \to q) \vee ((r \wedge \neg p) \wedge \neg(q \wedge r))$

1. Donnez une FND de cette formule en utilisant des règles de réécriture.

2. Donnez les FND et FNC canoniques de cette formule.
3. A l'aide de la méthode des tableaux, montrer que cette formule n'est pas une tautologie.

Exercice 32
On considère la formule G suivante : $(\neg(p \vee r) \vee q) \wedge \neg(p \to q)$

1. Mettez la formule G sous FNN, forme normale négative, les seuls connecteurs logiques sont $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les symboles $\neg$ se trouvent au niveau des littéraux, c'est-à-dire juste avant les feuilles dans l'arbre syntaxique.
2. En utilisant la méthode des tableaux, montrez que G est insatisfaisable (contradictoire). Justifiez votre réponse.

2 Calcul des prédicats

Exercice 33
Traduisez les énoncés suivants en formules de la logique des prédicats (on donnera à chaque fois l'interprétation des prédicats utilisés par exemple A(x,y) = x aime y).

1. Jean est plus grand que Marie.
2. Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu.
3. Si Jean est un homme, alors il est mortel.
4. Un chat est entré.
5. Au moins deux enfants ne sont pas malades.
6. Tous les éléphants ont une trompe.
7. Tous les hommes n'aiment pas Marie.
8. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.
9. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente.
10. Tous les fermiers apprécient un ministre.

Exercice 34
Donnez des formules de la logique des prédicats exprimant les propositions suivantes :

1. Il existe un nombre plus petit que tous les autres.
2. Il n'existe pas de nombre plus grand que tous les autres.
3. Personne ne connaît personne, mais personne ne connaît tout le monde.
4. Dans toutes les classes il y a un élève qui s'appelle Kevin. Il existe une classe où tous les élèves s'appelle Kevin.

Exercice 35
Donnez des formules de la logique des prédicats pour les propositions suivantes qui s'appliquent à un club de tennis :

1. Chaque membre du club connaît deux membres qui ne se connaissent pas.
2. Un membre a déjà joué contre tous les autres membres.
3. Un membre a battu toutes les personnes avec qui il a joué.

Exercice 36 3-coloriabilité
On considère des zones (par exemple des pays) à colorier sur le plan. On dispose du prédicat Frontiere(x,y) qui vaut vrai lorsque x et y ont une frontière commune.

1. Ecrivez une formule F_1 qui exprime que chaque zone est coloriée en rouge, en bleu ou en jaune. On prendra trois prédicats Rouge(x), Bleu(x) et Jaune(x). Vous préciserez que chaque zone n'a qu'une seule couleur.
2. Ecrivez une formule F_2 qui exprime que deux pays qui ont une frontière commune sont coloriées d'une couleur différente.

Une carte vérifiant F_1 et F_2 pour au moins un coloriage est appelée 3-coloriable.

Exercice 37
Traduisez en logique des prédicats les propositions suivantes :

1. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer.
2. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.
3. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie.
4. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents.
5. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.
6. Tout le monde a lu un livre de logique.

Exercice 38
Traduisez les phrases suivantes dans le langage des prédicats. Utilisez les traductions suivantes pour les prédicats :
$P(x)$: x est plombier
$H(x)$: x est un homme
$R(x)$: x est riche

1. Tous les plombiers sont des hommes.
2. Pierre est riche.
3. Si Pierre est un plombier, Pierre est riche.
4. Tous les hommes sont plombiers ou riches.
5. Au moins un plombier est riche.
6. Au moins deux plombiers ne sont pas riches.
7. Aucun plombier n'est riche.
8. Tous les hommes sont plombiers.
9. Tous les hommes ne sont pas plombiers

Exercice 39
On considère l'énoncé suivante s'appliquant aux personnes d'un village :
Il existe une personne P du village qui coiffe toutes les personnes du village qui ne se coiffent pas elles-mêmes.

1. Formaliser l'énoncé ci-dessus par une formule F de la logique des prédicats, en utilisant le vocabulaire qui contient les symboles de prédicats suivants :
   $P(x)$: x est une personne du village
   $C(x,y)$: x coiffe y

2. Qui coiffe P ? En déduire que F est fausse.

Exercice 40
Pim, Pam et Poum sont dans un bateau et chahutent.

1. Si Pim reste dans le bateau alors Pam tombe à l'eau et Poum se maintient dans le bateau
2. Si Pim tombe à l'eau, il réussira à faire tomber Pam aussi
3. Si Poum reste dans le bateau alors Pam sera à l'eau

Peut-on savoir qui reste dans le bateau ?

Exercice 41
Un crime a été commis et il y a 4 suspects : Legrand, Dupont, Martin et Robert. Les premiers témoignages donnent les informations suivantes :
Legrand est innocent mais au moins un des autres est coupable.
Si Robert est innocent alors Dupont est forcément coupable.
Legrand et Martin ne peuvent être innocents tous les deux.
Si Martin est coupable alors Dupont et Robert sont innocents.

1. Formaliser le problème.
2. Montrez qu'au moins un des témoignages est faux car l'ensemble de ces informations est incompatible.
3. On réalise que c'est le premier témoin qui a donné une fausse information et donc on ne tient pas compte de ce témoignage. Que peut-on en déduire pour Legrand ?

Exercice 42
Trois personnes se préparent à chanter : Patrick, Quentin et Rick.
Si Patrick ne chante pas alors Quentin chantera.
Si Rick chante alors Patrick ou Quentin (l'un des deux au moins) ne chantera pas.
Si Quentin chante alors Patrick et Rick chanteront.

1. Formaliser le problème.
2. Peut-on conclure que Patrick chantera ? (on justifiera le raisonnement).

3 Sommes et produits

Exercice 43
Calculez les sommes ou produits suivants :

- $S_1 = \sum_{k=1}^{4} k^2$
- $S_2 = \sum_{k=0}^{4} 5$
- $S_3 = \sum_{k=0}^{n} 2$
- $P_1 = \prod_{k=5}^{51} \frac{k}{k+1}$

- $P_2 = \prod_{k=19}^{39} \frac{2k+1}{2k-1}$

Exercice 44
Calculez les sommes suivantes :

- $S_1 = \sum_{k=1}^{n}(k+3)$
- $S_2 = \sum_{k=0}^{n}(2k+5)$
- $S_3 = \sum_{k=3}^{n+2} k$
- $S_4 = \sum_{k=2}^{n}(k+1)$
- $S_5 = \sum_{k=n}^{2n}(k+1)$
- $S_6 = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$
- $S_7 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 45
Calculez la somme $\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$

Exercice 46
Calculez la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
Calculez le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

Exercice 47
Calculez la somme $\sum_{k=1}^{n} ln(1-\frac{1}{k^2})$

Exercice 48
En utilisant une somme télescopique, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} kk!$

Exercice 49
Déterminer 3 réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 50

1. Calculez $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$
2. Calculez $(k+1)^3 - k^3$
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$
4. En déduire la valeur des sommes suivantes $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1)$

4 Raisonnement par récurrence

4.1 Formules sur les sommes

Exercice 51
Montrez que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = n$.

Exercice 52
Montrez que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = 2^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Exercice 53
Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Exercice 54
Montrez que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k\ 2^k = (n-1)\ 2^{n+1} + 2.$$

Exercice 55
Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}).$$

Exercice 56
Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Exercice 57
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$$

Exercice 58
Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k+1) + \ldots + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Exercice 59
Montrez que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{1}^{n} k(k+1) = 1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + k*(k+1) + \ldots n*(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

4.2 Suites définies par récurrence

Exercice 60
On définit la suite (u_n) par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 5 - 4u_n$ pour tout entier $n \geq 0$.
Montrez par récurrence que l'on a $u_n = (-4)^{n+1} + 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 61
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout entier $n \geq 0$.
Montrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

Exercice 62
On définit la suite (v_n) par $v_0 = 1$ et $v_n = v_{n-1} + 2n + 1$ pour tout $n \geq 1$.
Montrez par récurrence que l'on a $v_n = (n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 63 On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$
Montrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Exercice 64
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :
$u_1 = 1, u_2 = 1$ et $u_{n+2} = n\,(u_n + u_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrez que l'on a $u_n \leq n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.3 Divers

Exercice 65
Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \leq n!$

Exercice 66
On définit la fonction d'Ackermann de la manière suivante :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f(0,n) = n+1$
si $m > 0$, $f(m,0) = f(m-1,1)$
si $m > 0$ et si $n > 0$, $f(m,n) = f(m-1, f(m,n-1))$
Montrez que : $\forall k \in \mathbb{N}$,
$f(1,k) = k+2$
$f(2,k) = 2k+3$
$f(3,k) = 2^{k+3} - 3$

Exercice 67
Nous allons démontrer par récurrence la propriété $P(n)$ suivante : "Dès qu'il y a une fille dans un groupe de n personnes, alors tout le groupe est composé de filles."
Pour $n = 1$ la propriété est vraie.
Supposons maintenant que $P(n)$ soit vraie. Prenons un groupe G de $n+1$ personnes contenant une fille P_0, formons alors, avec P_0, un groupe de n personnes en retirant une personne P_1. Par hypothèse de récurrence, toutes les personnes du groupe $G_1 = G \setminus \{P_1\}$ sont des filles. Retirons de G, P_2, une personne différente de P_0. On obtient alors un groupe de n personnes contenant au moins une fille et par hypothèse de récurrence toutes les personnes du groupe sont donc des filles. Nous avons montré auparavant que P_2 était une fille, donc le groupe G ne contient que des filles.

Bien entendu la conclusion n'est pas bonne mais où est l'erreur de raisonnement ?

Exercice 68
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :pour tout réel x strictement positif,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Montrez par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

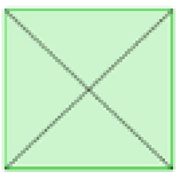
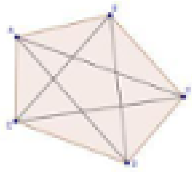
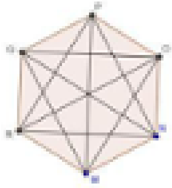
Exercice 69
La célèbre suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1}+f_{n-2}, \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Elle possède de nombreuses propriétés mathématiques.

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{3n} est pair.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{2n} = f_1 + f_3 + ...f_{2n-1}$ et $f_{2n+1} = 1 + f_2 + ...f_{2n}$
3. Montrez que pour tout p et q entiers positifs : $f_{p+q} = f_{p-1}f_q + f_p f_{q+1}$
4. En utilisant cette propriété , montrer que si p divise q alors f_p divise f_q c'est à dire que f_n divise f_{np} En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_{4n} est divisible par 3.
5. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.
6. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
7. Soit φ le nombre d'or. φ est racine de $x^2 - x - 1 = 0$ et vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^{n-1}$.
8. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \sum_{0 \leq k \leq n} C_{n-k}^k$ Que peut-on en déduire sur les diagonales du triangle de Pascal ?

Exercice 70
On veut obtenir une formule pour compter les diagonales d'un polygone convexe à n côtés pour $n \geq 4$.

   On a donc $d_4 = 2$.

On admettra que si d_n est ce nombre de diagonales, alors on a la formule :
$d_{n+1} = d_n + n - 1$
Montrez que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $d_n = \frac{n^2-3n}{2}$

Exercice 71 Soit $P(n)$ la propriété suivante :

$$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon_1 \in \{-1,1\} \dots \exists \varepsilon_m \in \{-1,1\} \quad n = \varepsilon_1 \cdot 1^1 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \dots \varepsilon_m \cdot m^2.$$

1. Montrez que $P(1), P(2), P(3)$ et $P(4)$ sont vraies.
2. Montrez que l'on a pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$(i+1)^2 - (i+2)^2 - (i+3)^3 + (i+4)^4 = 4.$$

3. Déduisez des questions précédentes que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5 Raisonnement par induction

5.1 Induction sur les mots

Exercice 72 Mots de Dyck
Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$. Pour tout mot w de $\mathcal{M}$, nous noterons $l(w)$ la longueur de w, $n_a(w)$ le nombre de a dans w et $n_b(w)$ le nombre de b dans w. Rappelons que le mot vide ε est le mot ne contenant aucune lettre et qu'il vérifie $w\varepsilon = \varepsilon w = w$, pour tout $w \in \mathcal{M}$ et $l(\varepsilon) = 0$.

Nous appellerons préfixe d'un mot w tout mot w' tel qu'il existe un mot w'' vérifiant $w = w'w''$. Nous écrirons $w' \prec w$ lorsque w' est un préfixe de w.

Par exemple les préfixes du mot *aabab* sont ε, a, aa, aab, $aaba$ et $aabab$.

On définit l'ensemble $\mathcal{D}$ avec le schéma d'induction suivant :

i) Le mot vide ε est un mot de $\mathcal{D}$.

ii) Si u et v sont deux mots de $\mathcal{D}$, alors le mot $w = aubv$ est un mot de $\mathcal{D}_2$.

On considère les propriétés suivantes pour un mot w de $\mathcal{M}$:

1. $\mathcal{P}_1(w)$: w finit par un b.
2. $\mathcal{P}_2(w)$: w est de longueur paire.
3. $\mathcal{P}_2(w)$: $n_a(w) = n_b(w)$.
4. $\mathcal{P}_2(w)$: $\forall w' \prec w \; n_b(w') \leq n_a(w')$

Montrez par induction que tout mot $\mathcal{D}$ vérifie les propriétés $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.

Exercice 73 Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des mots obtenus sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ avec le schéma d'induction suivant :

i) $\varepsilon \in \mathcal{D}$ (où ε désigne le mot vide)

ii) Si $u \in \mathcal{D}$ et $v \in \mathcal{D}$ alors $aubv$ appartient aussi à $\mathcal{D}$

1. Donnez les mots de $\mathcal{D}$ de longueur inférieure ou égale à 6.
2. Montrez que tous les mots de $\mathcal{D}$ ont un nombre pair de lettres.
3. Montrez que tous les mots de $\mathcal{D}$ de longueur supérieure ou égale à 1 finissent par b.
4. Montrez que tout mot de $\mathcal{D}$ contient autant de a que de b.

Exercice 74
On construit l'ensemble $\mathcal{F}$ des mots écrits sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ selon le shéma d'induction suivant :

i) le mot vide ε appartient à $\mathcal{F}$

ii) Soient u un mot de $\mathcal{F}$. Alors les mots aua et bub appartiennent à $\mathcal{F}$.

1. Donnez tous les mots de $\mathcal{F}$ de longueur inférieure ou égal à 6.
2. Montrez par induction que tout mot w de $\mathcal{F}$ possède un nombre pair de lettres.
3. Montrez par induction que tout mot w de $\mathcal{F}$ est un palindrome. (On rappelle qu'un palindrome est un mot qui se lit de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche ; le mot vide est un palindrome).

Exercice 75
On veut compter le nombre de mots écrits avec a et b mais sans avoir 2 lettres a consécutives.

1. Donnez un shéma d'induction permettant de construire ces mots.
2. En déduire une formule donnant le nombre de tels mots de longueur n.

Exercice 76
On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ défini par le shéma d'induction suivant :

i) Le mode vide ε appartient à $\mathcal{D}$
ii) Soit W un mot de $\mathcal{D}$. Les mots aWb et bWa appartiennent à $\mathcal{D}$.

1. Donnez les mots de longueur inférieure ou égale à 4.
2. Montrez par induction que tout mot de $\mathcal{D}$ contient autant de a que de b.

Exercice 77 Palindrômes musicaux
Un musicien dispose d'un instrument de musique à 7 notes : $N = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$. Dans tout le problème, la longueur d'un morceau désignera le nombre de notes le composant (toutes les notes ont exactement la même durée) ; n désignera un entier strictement positif (il pourra parfois être utile de séparer les cas n pair et n impair).

1. Combien de morceaux de longueur n peuvent-ils être composés ?
2. On souhaite composer des morceaux pouvant se jouer dans les deux sens exactement de la même manière (palindromes), par exemple : do fa la fa do ou alors sol si si sol.
   (a) Donnez le shéma d'induction des morceaux de musique palindrome créés avec les notes de N.
   (b) Pour n fixé, déterminer le nombre de palindromes de longueur n (on utilisera un raisonnement par induction).
3. On ne veut plus désormais qu'un palindrome comporte deux notes successives identiques.
   Que devient alors le shéma d'induction ?
   Combien y-a-t-il de tels palindromes de longueur n ?

5.2 Inductions sur les formules propositionnelles

Exercice 78
On définit une fonction T qui à toute formule propositionnelle F associe la formule propositionnelle $\tilde{F} = T(F)$ obtenue de la manière suivante :

— chaque occurrence du symbole $\wedge$ est remplacé par le symbole $\vee$.
— chaque occurrence du symbole $\vee$ est remplacé par le symbole $\wedge$.
— chaque occurrence d'une variable propositionnelle est remplacée par sa négation.

Montrez sur l'arbre de représentation que, pour toute formule propositionnelle F, $T(F) \equiv \neg F$.

Exercice 79
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{V} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de variables. On construit inductivement un ensemble de formules $\mathcal{G}$

i) Pour tout $x_i \in \mathcal{V}$, $x_i \in \mathcal{G}$.

ii) Soient A et $B \in \mathcal{G}$. On a alors $A \wedge B \in \mathcal{G}$ et $\neg A \vee \neg B \in \mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{P}(A)$ la propriété : « A possède un nombre pair d'occurrences du symbole $\neg$ $\gg$.

Montrez *par induction* que $\mathcal{P}(A)$ est vraie pour toute formule A de $\mathcal{G}$.

Exercice 80
Soit C un ensemble de connecteurs et $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles.

On notera $\mathcal{F}_C(\mathcal{P})$ l'ensemble de formules du calcul propositionnel que l'on peut construire avec les connecteurs de C. Lorsque $C = \{\rightarrow\}$, l'ensemble des formules obtenu est appelé *logique implicative minimale*, elle est étudiée dans le cadre de la logique intuitionniste.

Les formules de $\mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$ se construisent avec le schéma d'induction suivant :

i) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$.

ii) Soient G et H appartenant à $\in \mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$. $F = G \rightarrow H$ appartient à $\mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$

On s'intéresse maintenant à $\mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$ lorsque $\mathcal{P}$ ne contient qu'une seule variable propositionnelle p. Nous noterons $\top$ la formule prenant toujours la valeur vraie quelque soit la valuation de la variable p. On a ainsi $p \rightarrow p \equiv \top$.

Montrez que pour tout $F \in \mathcal{F}_{\rightarrow}(\mathcal{P})$ on a soit $F \equiv p$, soit $F \equiv \top$.

Exercice 81 Dans l'exercice suivant, on s'intéresse à l'ensemble des formule sans connecteur implication. On rappelle que cet ensemble $\mathcal{F}$ est défini par le schéma d'induction :

i) Toute variable propositionnelle appartient à $\mathcal{F}$

ii) Si F et G sont deux formules de $\mathcal{F}$, alors $F \vee G$, $F \wedge G$ et $\neg F$ le sont aussi.

On souhaite associer un nombre à chaque formule de $\mathcal{F}$. Pour cela, on définit inductivement la fonction f sur les formules par

$$\begin{cases} f(p) = 0 \\ f(\neg A) = 1 + 1/4 f(A) \\ f(A \vee B) = 1/4 f(A) + 1/4 f(B) \\ f(A \wedge B) = 1/4 f(A) + 1/4 f(B) \end{cases}$$

1. Calculez $f(p \vee (\neg(q \wedge \neg r)))$;
2. Montrez que $f(\neg(A \vee B)) > f(\neg A \wedge \neg B)$.
3. Montrez par induction que, pour toute formule F, $f(F) < 2$;

6 Fonctions booléennes

Exercice 82
Soit f_3 la fonction booléenne à 3 variables ayant la forme algébrique normale

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus 1.$$

1. Calculez sa table de vérité.
2. Donnez le poids de Hamming de f_3. Est-elle équilibrée ?

Exercice 83

Soit f_3 la fonction booléenne à 3 variables ayant la forme algébrique normale

$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1.$$

1. Calculez sa table de vérité.
2. On définit deux fonctions à 2 variables

$$\begin{array}{rcl} f_2^0(x_1, x_2) & = & f(x_1, x_2, 0) \\ f_2^1(x_1, x_2) & = & f(x_1, x_2, 1). \end{array}$$

   Montrez que l'on a

$$f_3 = (1 \oplus x_3)f_2^0 \oplus x_3 f_2^1.$$

   (cette décomposition est appelée décomposition de Shannon).
   Donnez la table de vérité de f_2^0 et f_2^1 à partir de celle de f_3.
3. Les quatre fonctions booléennes à 1 variable sont

x_1	$x_1 \oplus 1$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
0	1	0	1
1	0	0	1

   Définissez les quatres fonctions suivantes :
   — $f_1^{00}(x_1) = f(x_1, 0, 0)$
   — $f_1^{01}(x_1) = f(x_1, 0, 1)$
   — $f_1^{10}(x_1) = f(x_1, 1, 0)$
   — $f_1^{11}(x_1) = f(x_1, 1, 1)$
4. Trouvez une méthode pour construire la FAN à partir de ces quatres fonctions.

Exercice 84

1. Donnez la définition du degré algébrique d'une fonction booléenne.
2. Une fonction affine est une fonction booléenne de degré 1. Donnez toutes les fonctions affines à 2 variables.

Exercice 85

1. Rappelez comment on calcule la FAN à partir des mintermes d'une fonction booléenne à n variables f.
2. Soit $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}_2^n$ et M_b le minterme prenant la valeur 1 uniquement pour la valuation b.
   M_b peut s'écrire comme le produit de littéraux suivant $M_b = \prod_{i=1}^n (x_i \oplus b_i \oplus 1)$
   On vérifiera que l'on a bien $M_b(a) = 1$ lorsque $a = b$.
3. En déduire que le degré algébrique de f est égal à n si et seulement si le poids de Hamming de f est impair.

Exercice 86

Soit g_3 la fonction booléenne à 3 variables de table de vérité :

x_1	x_2	x_3	g_3
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

1. Donnez la FND de g_3.
2. En déduire la FAN et le degré algébrique de g_3.
3. Montrez qu'il existe deux fonctions booléennes à deux variables g_2^0 et g_2^1 telles que $g_3 = g_2^0 \oplus x_3\, g_2^1$. (cette décomposition s'appelle la décomposition de Reed-Müller).
4. Peut-on appliquer à g_1 et g_2 la même décomposition ?
5. Donnez un schéma d'induction des fonctions booléennes à n variables basée sur cette décomposition.

Exercice 87
Soit f_n une fonction booléenne à n variables. Son poids de Hamming est le nombre de valuations pour lesquelles elle prend la valeur 1. Nous avons donc

$$w_H(f_n) = \sum_{x \in \mathbb{F}_2^n} f_n(x).$$

1. Montrez qu'il existe deux fonctions booléennes à $n-1$ variables f_{n-1}^0 et f_{n-1}^1 vérifiant
$$f_n = (1 \oplus x_n) f_{n-1}^0 \oplus x_n f_{n-1}^1.$$
2. Montrez que l'on a $w(f_n) = w(f_{n-1}^0) + w(f_{n-1}^1)$.
3. On dit qu'une fonction booléenne f_n est équilibrée lorsqu'elle prend autant de fois la valeur 1 que la valeur 0.
Donnez le poids de Hamming d'une fonction équilibrée.
4. Quels sont les poids de Hamming que peuvent avoir f_{n-1}^0 et f_{n-1}^1 lorsque f_n est équilibrée.

Exercice 88 On considère la fonction booléenne à trois variables g_3 donnée par sa table de vérité :

x_1	x_2	x_3	g_3
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

1. Donnez la FND et la FAN de g_3.
2. Soit f_3 la fonction booléenne à trois variables de FAN $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$. Construisez la table de vérité de f_3.
3. Donnez la table de vérité et la FAN de $h_3 = f_3 \oplus g_3$. Que remarquez-vous ? Quels sont les monômes qui apparaissent dans la FAN ?
4. Donnez le poids de Hamming de f, g et h. Quelle fonction parmi les trois est équilibrée ?

Exercice 89
Soit f la fonction booléenne à 3 variables de table de vérité :

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

1. Donnez la FND de f.
2. Donnez la FAN de f.
3. Soit g la fonction booléenne définie par : $g = x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$
   Donnez la table de vérité de g
4. Soit f une fonction booléenne à n variables. Sa fonction duale notée $\tilde{f}$ est la fonction booléenne à n arguments définie par : $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$
   Soit h la fonction duale de f . Donnez la FAN de h et sa table de vérité. Comparez g et h. Que peut-on en conclure ?

1. Calculez f_2, f_3 et f_4.
2. Montrez que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ un assignement des variables $x_1, \ldots, x_n$, nous avons l'équivalence
   (i) $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$
   (ii) $(a_1, \ldots, a_n)$ contient un nombre pair de 1.
3. Donnez une définition inductive des fonctions booléennes g_n vérifiant l'équivalence pour tout assignement $(a_1, \ldots, a_n)$:
   (i) $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 1$
   (ii) $(a_1, \ldots, a_n)$ contient un nombre impair de 1.

7 Annales 2017-2018

7.1 Interro 1 groupe 1 - 2018

Exercice 90 On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

p	q	r	F
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

1. F est-elle satisfiable ? Est-ce une tautologie ? Une antilogie ? (on expliquera ce que cela veut dire).
2. Donner les FNC et FND canoniques de F.
3. On considère la formule $H : (p \to (q \vee r)) \wedge (q \to (p \vee r)) \wedge (p \to (\neg q \vee r)) \wedge (r \to (q \vee \neg p))$.
   Faire sa table de vérité (sur le même schéma ou en recopiant aussi la colonne de F)
   Est-ce que $H \leftrightarrow F$ est valide ?

Exercice 91

1. Donner les formules de ré-écriture.
2. On appellera G la formule : $((r \to q) \vee (p \wedge \neg r)) \wedge \neg(q \vee r)$
   A l'aide des formules de ré-écriture, mettre la formule G donnée ci-dessus sous forme normale conjonctive et sous forme normale disjonctive.

Exercice 92 Soit g la fonction booléenne définie par : $g = 1 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$

1. Rappeler ce qu'est la FAN. g est-elle en FAN ?
2. g est-elle satisfiable ? (on justifiera).
3. Donner la table de vérité de g
4. Soit f la fonction booléenne sur $\{0, 1\}^3$ de table de vérité :

x_1	x_2	x_3	$f(x)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

   (a) Donnez la FAN de f
   (b) Soit f une fonction booléenne à n arguments. Sa fonction duale notée $\tilde{f}$ est la fonction booléenne à n arguments définie par : $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$
   Montrer que g est la fonction duale de f

7.2 Interro 2 groupe 1 - 2018

Exercice 93
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 94
On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$

Exercice 95
On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$
et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$

Exercice 96
On travaillera avec un les entiers positifs : $\mathbb{N}$.
On notera
Pair(x) : x est pair
Div(a, b) : a divise b.
Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans $\mathbb{N}$.

1. $\forall x \forall y \ (Pair(x) \wedge Pair(y) \rightarrow Pair(x+y))$
2. $\exists x \ \forall y \ x \geq y$
3. $\forall y \ \exists x \ x \geq y$
4. $\forall x \forall y \ \exists z (Div(x,z) \wedge Div(z,y))$

Exercice 97
On a un groupe d'étudiants E et un choix de desserts D. On notera :
A(x, y) : x aime y
P(x,d) : x sait préparer d.
Formaliser les énoncés suivants :

1. Tout les étudiants aiment le chocolat.
2. Certains étudiants n'aiment pas le chocolat.
3. Tout les étudiants aiment au moins un dessert.
4. Il y a un dessert que tous aiment.
5. Un des étudiants aime absolument tous les desserts.
6. Des étudiants n'aiment aucun dessert.
7. Au moins un étudiant sait cuisiner tous les desserts qu'il aime.
8. Certains étudiants ne savent cuisiner aucun des desserts qu'ils aiment et d'autres n'aiment aucun dessert qu'ils savent faire !

7.3 Interro 3 groupe 1 - 2018

Exercice 98
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des mots obtenus de la manière suivante sur l'alphabet a,b :

$\varepsilon \in \mathcal{D}$ (où ε désigne le mot vide)
Si $u \in \mathcal{D}$ alors $aaub$ appartient aussi à $\mathcal{D}$.

1. Montrer comment le schéma d'induction permet d'engendrer le mot $aaaabb$.
2. Montrer que pour tous les mots de $\mathcal{D}$ le nombre de lettres a est égal à deux fois le nombre de lettres b.

Exercice 99
Soit f la fonction booléenne sur $\{0,1\}^3$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus \overline{x_1}x_2x_3$.

1. f est-elle sous FAN ? Dites pourquoi et donnez la FAN de f.
2. Déterminer la table de vérité de f.
3. Soit f une fonction booléenne à n arguments. Sa fonction duale notée $\tilde{f}$ est la fonction booléenne à n arguments définie par : $\tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$.
   Déterminer la table de vérité de h fonction duale de f (on justifiera les calculs).
4. On rappelle que la décomposition de Shannon d'une fonction f à n variables consiste à trouver deux fonctions f_0 et f_1 à n-1 variables telles que : $f_n = (1 \oplus x_n)f_0 \oplus x_nf_1$ Donner les Formes Algébriques Normales de f_0 et f_1 par la méthode de votre choix qu'on explicitera (on pourra notamment lire ces fonctions sur la table).
5. Est ce que les fonctions g, f_1, f_0 sont équilibrées (on justifiera) ?

7.4 Examen session 1 2018

Exercice 100
On considère la formule F : $F = ((r \vee q \vee \neg p) \to (r \wedge q \wedge p)) \vee \neg(\neg q \to (p \vee r))$

Question 1. Ecrire la table de vérité de F.

Question 2. On considère la formule H donnée par sa table de vérité :

p	q	r	H
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

1. H est-elle satisfiable ? est-ce une tautologie ? une antilogie ? (on expliquera ce que cela veut dire).

2. Donnez les FNC et FND canoniques de F.

Question 3. Est-ce que $H \to F$ est valide ? (on justifiera).

Exercice 101 Soient A, B et C trois formules quelconques. On rappelle les règles de réécriture vues en TD :

1) A → B ⇝ ¬ A∨B
2) ¬¬ A ⇝ A
3) Lois de De Morgan
   a) ¬ (A∧B) ⇝ ¬ A∨¬B
   b) ¬ (A∨B) ⇝ ¬ A∧¬ B
4) Distributivité
   a) distributivité de ∨ par rapport à ∧ : A∨(B∧C) ⇝ (A∨B)∧(A∨C)
   b) distributivité de ∧ par rapport à ∨ : A∧(B∨C) ⇝ (A∧B)∨(A∧C)

On considère la formule

$$F = \Big((p \to q) \to (q \to r)\Big) \to (p \to r).$$

1. En utilisant l'algorithme $\mathcal{A}$ vu en TD, mettez F sous forme normale conjonctive ; à chaque étape on indiquera la ou les règles utilisée(s) (en donnant son numéro).
2. En utilisant l'algorithme $\mathcal{A}$ vu en TD, mettez F sous forme normale disjonctive ; à chaque étape on indiquera la ou les règles utilisée(s) (en donnant son numéro).

Exercice 102
On considère les formules suivantes :$F = (p \vee q \vee r) \wedge (q \vee (\neg(p \vee \neg s))) \wedge (\neg s \vee q \vee r) \wedge \neg q$ et $G = ((p \wedge q) \wedge (r \to (\neg p \vee \neg q))) \to (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$.

Question 1. Mettez les formules F et G sous FNN, forme normale négative, les seuls connecteurs logiques sont ∨, ∧ et ¬ et les symboles ¬ se trouvent au niveau des littéraux, c'est-à-dire juste avant les feuilles dans l'arbre syntaxique.

Question 2. En utilisant la méthode des tableaux, montrez que F est satisfiable . Justifiez votre réponse.

Question 3. En utilisant la méthode des tableaux, montrez que G est une tautologie . Justifiez votre réponse.

Exercice 103
On travaille avec un groupe E d'étudiants et un ensemble C de cours. On est dans le cas où les étudiants peuvent choisir librement des cours.
On notera S(e,c) le prédicat : "e suit le cours c".
On demande de formaliser les phrases suivantes à l'aide du prédicat S et des quantificateurs ∃ et ∀.

1. Julien suit tous les cours.
2. Tous les étudiants suivent "applications mobiles".
3. Il y a au moins un cours que personne ne suit.

4. Au moins deux étudiants feront des maths.
5. Il y a deux étudiants qui n'ont aucun cours en commun.

Exercice 104
Soit l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$. On considère $\mathcal{W}$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ construits avec le schéma d'induction suivant

(i) Le mot vide ε appartient à $\mathcal{W}$.

(ii) Soit u et v deux mots de $\mathcal{W}$. Le mot $m = aubbv$ appartient à $\mathcal{W}$.

Question 1. Donnez tous les mots de $\mathcal{W}$ de longueur inférieure ou égale à 9. Vous détaillerez comment vous avez fait pour les construire.

Question 2. Montrez par induction que tous les mots de $\mathcal{W}$ contiennent deux fois plus de b que de a.

Exercice 105
On considère la fonction booléenne à trois variables f_3 donnée par sa table de vérité :

x_1	x_2	x_3	f_3
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	0

Question 1. Donnez sa FND.

Question 2. En utilisant la FND de la question précédente et en développant et en simplifiant, calculez la FAN de de f_3.

Question 3. Donnez le poids de Hamming de f_3. Cette fonction est-elle équilibrée ?

Question 4. On définit la fonction booléenne à deux variables $f_2^1(x_1, x_2) = f_3(x_1, x_2, 1)$. Donnez sa table de vérité et sa FAN.

Exercice 106
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_n & = & 2u_{n-1} + 2^n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

Montrez par récurrence que l'on a $u_n = n2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Remarque u_n est la complexité d'un algorithme de tri appelé tri fusion lorsqu'il effectue le tri d'un tableau contenant 2^n éléments.

7.5 Examen session 2 2018

Exercice 107 On considère la formule F donnée par sa table de vérité :

p	q	r	F
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

1. F est-elle satisfiable ? est-ce une tautologie ? une antilogie ? (on justifiera en expliquant ce que cela veut dire).
2. Donnez les FNC et FND canoniques de F.
3. On considère la formule G : $((\neg r \to q) \wedge (r \to p))$.
   Faire sa table de vérité (sur le même shema ou en recopiant la colonne de F). Est-ce que $G \to \neg F$ est valide ?

Exercice 108 Calcul des prédicats
On considère E un groupe d'étudiants venant faire leurs études en France en ERASMUS et P un ensemble de pays. Pour $e \in E$ et $p \in P$, on définit $H(e,p)$ le prédicat signifiant « e habite dans le pays p ».

Formalisez les phrases suivantes à l'aide du prédicat H et des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

1. Rafael habite en Espagne et Dominic n'habite pas en Allemagne.
2. Deux étudiants de E habitent dans un même pays de P.
3. Tout étudiant de E habite dans un pays de P.
4. Il existe un pays de P dans lequel aucun étudiant de E n'habite.

Exercice 109 Fonction booléenne
On considère la fonction booléenne à trois variables f_3 donnée par sa table de vérité :

x_1	x_2	x_3	f_3
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Question 1. Donnez sa FND.

Question 2. En utilisant la FND de la question précédente et en développant et en simplifiant, calculez la FAN de de f_3.

Question 3. Donnez le poids de Hamming de f_3 et le degré algébrique de f_3.

Question 4. On considère la fonction booléenne à trois variables g_3 définie par $g_3(a_1, a_2, a_3) = f_3(a_1, a_3, a_2)$, pour tout $(a_1, a_2, a_3) \in \{0,1\}^3$.
Donnez la FAN et et la table de vérité de g_3.

Exercice 110 On considère l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. On définit $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}^*$ avec le schéma d'induction suivant :

(i) $c \in \mathcal{N}$.

(ii) Soit u et v deux mots de $\mathcal{N}$. Alors $m_1 = ubv$ et $m_2 = uav$ sont deux mots de $\mathcal{N}$.

Question 1. Quels sont les mots de $\mathcal{N}$ de moins de 6 lettres ?

Question 2. Montrez par induction que tout mot de $\mathcal{N}$ est de longueur impair.

Question 3. Pour tout mot m de $\mathcal{A}^*$, notons $n_a(m)$ (resp. $n_b(m)$ et $n_c(m)$) le nombre d'occurrences de la lettre a (resp. b, c) dans m.

Montrez par induction que $n_c(m) = n_b(m) + n_a(m) + 1$, pour tout mot m de $\mathcal{N}$.

Exercice 111 Trois personnes discutent pour savoir si elles iront à une soirée. Il ressort de leurs discussions les trois propositions suivantes :

— si Alice y va alors Bob n'ira pas à la soirée.

— si Charlie va à la soirée alors Bob ira aussi et Alice n'ira pas.

— Si Bob ou Charlie ne vont pas à la soirée alors Alice n'ira pas non plus.

1. Définissez les variables propositionnelles nécessaires pour formaliser le problème.
2. Ecrivez une formule correspondant à chacune des propositions.
3. Peut-on avoir les trois propositions vraies en même temps ?
4. Peut-on déduire de ces trois propositions qu'Alice ira à la soirée ? Vous justifierez votre réponse.

   Pour répondre aux deux dernières questions, vous pouvez utiliser une table de vérité ou la méthode des tableaux.

Exercice 112

Soient A, B et C trois formules quelconques. On rappelle les règles de réécriture vues en cours :

1) A $\rightarrow$ B $\rightsquigarrow$ $\neg$ A$\vee$B
2) $\neg\neg$ A $\rightsquigarrow$ A
3) Lois de De Morgan
   a) $\neg$ (A$\wedge$B) $\rightsquigarrow$ $\neg$ A$\vee\neg$B
   b) $\neg$ (A$\vee$B) $\rightsquigarrow$ $\neg$ A$\wedge\neg$ B
4) Distributivité
   a) distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$: A$\vee$(B$\wedge$C) $\rightsquigarrow$ (A$\vee$B)$\wedge$(A$\vee$C)
   b) distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$: A$\wedge$(B$\vee$C) $\rightsquigarrow$ (A$\wedge$B)$\vee$(A$\wedge$C)

On considère la formule

$$F = \Big((p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg p)\Big) \wedge \neg(q \wedge r).$$

1. En utilisant l'algorithme vu en TD, mettez F sous forme conjonctive ; à chaque étape, vous indiquerez la règle utilisée (en donnant son numéro).
2. En utilisant l'algorithme vu en TD, mettez F sous forme disjonctive ; à chaque étape, vous indiquerez la règle utilisée (en donnant son numéro).

Exercice 113 On considère la formule G : $((p \wedge q) \wedge (r \rightarrow (\neg p \vee \neg q))) \rightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$
Mettez la formule G sous FNN, forme normale négative (les seuls connecteurs logiques sont $\vee, \wedge$ et $\neg$ et les symboles $\neg$ se trouvent au niveau des littéraux).
En utilisant la méthode des tableaux, montrer que G est une tautologie (ne pas oublier de rédiger....).

Exercice 114
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 3u_n + 2, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Montrez par récurrence que l'on a $u_n = 5 \times 3^n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.