# TD2 structures algébriques pour l'informatique

**Exercice 1**
Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On définit $\mathcal{R}$ par : $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.

**Exercice 2**

1. On considère la partition de $\mathbb{Z}^2$ en la réunion de droites verticales. Déterminer la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{Z}^2$ associée à cette partition.
2. On considère la partition de $\mathbb{Z}^2$ en la réunion de droites horizontales. Déterminer la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{Z}^2$ associée à cette partition.

**Exercice 3**
Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

**Exercice 4**
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément $x$ de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe?

**Exercice 5**
On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x,y)\ \mathcal{R}\ (x',y') \iff \exists a > 0,\ \exists b > 0 \mid x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des éléments $A = (1,0)$, $B = (0,-1)$ et $C = (1,1)$.
3. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

**Exercice 6**
Soit $E$ un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de $E$, la relation suivante :

$$A\ \mathcal{R}\ B \text{ si } A = B \text{ ou } A = \bar{B},$$

où $\bar{B}$ est le complémentaire de $B$ (dans $E$). Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

**Exercice 7**
On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation?

**Exercice 8**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On définit sur $E$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in E$, on note $[x]$ la classe de $x$.
2. Montrer que $\psi : E/\mathcal{R} \to F$ définie par $\psi([x]) = f(x)$ est une application injective. A quelle condition $\psi$ est surjective?
3. En déduire que l'application $\phi : E/\mathcal{R} \to Im\ f$ définie par $\phi([x]) = f(x)$ est bijective.

Exercice 9

On rappelle que deux ensembles sont de même cardinal (on dit encore qu'ils sont *équipotents*) si et seulement si il existe une bijection de l'un dans l'autre. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ désigne l'intervalle réel défini par $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

1. Montrer que les ensembles $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $[0, 1]$ sont de même cardinal.

2. Soit $k$ un réel strictement positif. Montrer que les ensembles $[0, 1]$ et $[0, k]$ sont de même cardinal.

Exercice 10

Un ensemble est *dénombrable* si il a le même cardinal que $\mathbb{N}$. Un ensemble est *au plus dénombrable*, si il est fini ou dénombrable.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

2. On rappelle que l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, définie par $f(n, p) = 2^n(2p + 1)$ est bijective. Montrer que la composée de deux bijections est une bijection. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

3. Soit l'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\{0, 1\}$, noté $\{0, 1\}^*$. On considère l'application $f : \{0, 1\}^* \to \mathbb{N}^2$ définie de la manière suivante. Si $\varepsilon$ est le mot vide $f(\varepsilon) = (0, 0)$ et $\omega \in \{0, 1\}^*$, $\omega \neq \varepsilon$, $f(\omega) = (p, q)$ où $p$ est le nombre de zéros consécutifs à gauche de $\omega$ et $q$ est l'entier dont l'écriture en base deux est $\omega$.

   (a) Quelle est l'image du mot 00101? l'image du mot 00001? l'image du mot 00000? l'image du mot 00?

   (b) Calculer $f^{-1}(\{(2, 3)\})$, $f^{-1}(\{(0, 5)\})$ et $f^{-1}(\{(5, 0)\})$.

   (c) Montrer que $f$ est bijective. En déduire que $\{0, 1\}^*$ est dénombrable.

Exercice 11

1. Montrer que l'ensemble des entiers naturels impairs est dénombrable.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des entiers positifs multiples de $p$, est dénombrable.

3. Soit l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$, si $x$ est pair et $f(x) = -2x - 1$, si $x$ est impair. Montrer que $f$ est bijective. En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice 12

Soit $E$ et $F$ deux ensembles. On admet que si il existe une injection de $E$ dans $F$, alors $|E| \leq |F|$.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $|A| \leq |B|$.

2. Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$(x, y) \ \mathcal{R} \ (x', y') \iff xy' - x'y = 0$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation?

3. Montrer que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}_+|$.

4. Montrer que $|\mathbb{Q}_+| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

5. En déduire que $|\mathbb{Q}_+|$ est dénombrable.