# TD7 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1 .

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (1 9)(2 8)(3 7)(4 6).

3. (1 9)(2 8)(3 7)(4 6)

Exercice 2 .

1. $\text{card}(S_n) = n!$.

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $$(1\ 3\ 5\ 2\ 4) \qquad (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 6\ 4) \qquad (1\ 6)(3\ 5\ 8\ 4\ 7)$$

Exercice 3 . Soit $\alpha$ un cycle de longueur $r$.

1. $$\alpha = (4\ 5\ 1\ 2\ 3) \quad \alpha^2 = (4\ 1\ 3\ 5\ 2) \quad \alpha^3 = (4\ 2\ 5\ 3\ 1) \quad \alpha^4 = (4\ 3\ 2\ 1\ 5) \quad \alpha^5 = id.$$

$$\langle \alpha \rangle = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, id\} \quad \text{et} \quad ordre(\alpha) = 5$$

2. Découle de la définition d'un cycle $\alpha = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_r)$ de longueur $r$:

$$\alpha(i_1) = i_2 \quad \alpha^2(i_1) = \alpha(\alpha(i_1)) = i_3 \quad \ldots \quad \alpha^{r-1}(i_1) = i_r \text{ et } \alpha^r(i_1) = \alpha(\alpha^{r-1}(i_1)) = \alpha(i_r) = i_1$$

Plus généralement, pour $1 \leq j \leq r$, en notant $a \mod b$ le reste de la division de $a$ par $b$, on a :

$$\alpha(i_j) = i_{j+1} \quad \alpha^k(i_j) = i_{j+(k \mod r)} \quad \text{et on a: } \alpha^r(i_j) = i_j.$$

3. Pour $1 \leq k \leq r-1$, on a $k \mod r = k$. On a en particulier $\alpha^k(i_1) = i_{1+(k \mod r)} \in \{i_2, \ldots i_r\}$, et $\alpha^k(i_1) \neq i_1$, donc $\alpha^k \neq id$.

4. $$\langle \alpha \rangle = \{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{r-1}, id\} \quad \text{et} \quad ordre(\alpha) = r$$

Exercice 4 .

$K$ est bien non vide. Faire la table de multiplication de de $K$ et vérifier que $K$ est stable:

| | $id$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $id$ | $id$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
| $f_1$ | $f_1$ | $id$ | $f_3$ | $f_2$ |
| $f_2$ | $f_2$ | $f_3$ | $id$ | $f_1$ |
| $f_3$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ | $id$ |

.

On peut vérifier l'existence d'un élément symétrique pour chaque élément de $K$ à l'aide de la table ou observer que comme $K$ est fini, sa stabilité entraîne l'existence d'un élément symétrique pour tout élément de $K$: Tout élément $x$ de $K$ est alors d'ordre fini, disons $r$, et on a $x^r = x\ x^{r-1} = x\ x^{r-1} = 1_K = \mathrm{Id}$. Donc $x^{-1} = x^{r-1}$ qui, par la stabilité de $K$, est dans $K$.

On pourra remarquer que les élément différents de $id$, c'est à dire $f_1, f_2$ et $f_3$ sont d'ordre 2 (on a donc $f_i^{-1} = f_i$).

$\langle K' \rangle = K$, car $f_2 f_1 = f_3$, donc $\{\mathrm{Id}, f_1, f_2, f_3\} \subset \langle K' \rangle$ et on sait que $K \leq S_4$.

Exercice 5 . Fait dans les notes de cours

Exercice 6 .

1.
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

Ce n'est pas un sous-groupe (il ne contient pas l'identité)

2.
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\right\}$$

C'est un sous-groupe isomorphe à $S_3$: dans l'écriture des permutations précédentes si on supprime les deuxièmes colonnes, puis on renomme systématiquement les 1, 3, 4 par des 1, 2, 3, on retrouve exactement $S_3$. La table de multiplication des six éléments précédents a, à un renommage près, exactement la même forme que la table de multiplication de $S_3$.

3.
$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

Ce n'est pas un sous-groupe (il ne contient pas l'identité)