Algorithmique et structures de données

CM 4 Piles et files

Plan du CM 4

Plan du CM 4

Utilisation des piles et des files

Les piles et les files sont des objets temporaires utilisés dans de nombreux programmes.

Mémorisation et restitution

- les données sont mémorisées
- elles sont restituées dans un certain ordre

Ordre

- les piles utilisent l'ordre LIFO (dernier entré, premier sortie)
- les files utilisent l'ordre FIFO (premier entré, premier sortie)

Objet $\neq$ structure de données

Nous n'avons pas besoin de connaître la structure de données pour utiliser une pile ou une file.

Représentation d'une pile

Les piles utilisent l'ordre LIFO (dernier entré, premier sortie)

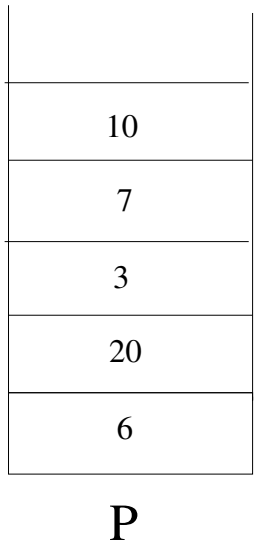
Rôle de la représentation

- la représentation permet de simuler le fonctionnement de la pile
- elle ne dépend pas de la structure de données choisie

Exemple d'application – Pile de dossiers

- le dernier dossier est posé en haut de la pile
- le dossier en bas de la pile est le premier dossier qui a été posé

Exemple de pile



Accessibilité

- 10 est la première valeur que l'on peut récupérer
- 7 est la seconde valeur que l'on peut récupérer
- 6 est la dernière valeur que l'on peut récupérer

Représentation d'une file

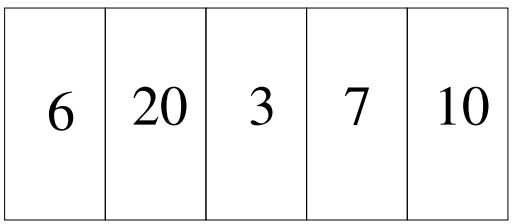
Les files ou files d'attente utilisent l'ordre FIFO (premier entré, premier sortie)

Rôle de la représentation

- la représentation permet de simuler le fonctionnement de la file
- elle ne dépend pas de la structure de données choisie

Exemple – Attente à un guichet

- à gauche la personne la plus proche du guichet
- à droite la dernière personne arrivée



- 10 est la dernière valeur rentrée et la dernière que l'on peut récupérer
- 6 est la première valeur rentrée et la première que l'on peut récupérer

Plan du CM 4

Fonctions sur les piles et des files

Fonctions essentielles

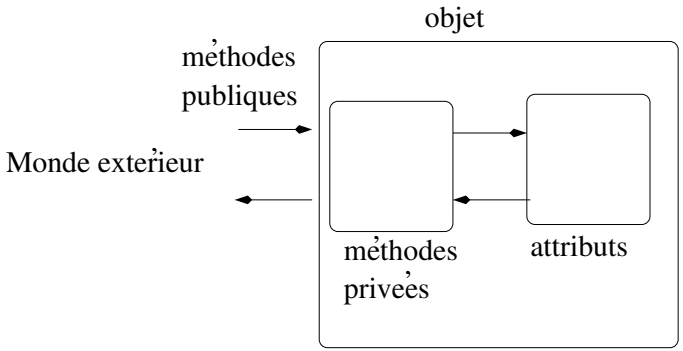
- on se limite aux fonctions strictement nécessaires
- ces fonctions sont utilisées pour tous les programmes utilisant des piles ou des files

Fonctions d'interface

- les fonctions (au sens mathématique ou spécification) ne dépendent pas de la structure de données choisie.
- l'implémentation des fonctions n'a pas à être connue de l'utilisateur

Analogie avec la programmation orientée objet

Interface entre l'objet et le mode extérieur



Méthodes privées et publiques

- les méthodes privées ne sont accessibles que par l'objet
- les méthodes pupliques sont accessibles dans le monde extérieur.
- elles permettent l'échange entre l'objet et le monde extérieur

Analogie

- les files et les piles sont les objets
- les structures de données et les procédures liées à ces structures de données remplacent les attributs et les méthodes privées
- les fonctions des piles et des files forment l'interface entre l'objet et le monde extérieur

Fonctions pour la pile – Interface

Comme notre langage algorihmique est typé, on supposera que toutes les données sont d'un seul type, ici des entiers.

Signature des fonctions pour une pile d'entiers

- initPile() : pile
  → retourne une pile vide.
- pileVide(p : pile) : booléen
  → teste si la pile p est vide ou non.
- sommet(p : pile) : entier
  → retourne l'élément placé au sommet de la pile p
  (retourne un message d'erreur si la pile est vide).
- empiler(p : pile, x : entier) : pile
  → retourne la pile p avec l'élément x ajouté au sommet.
- dépiler(p : pile) : pile
  → retourne la pile p (supposée non vide au départ)
  après avoir supprimé l'élément placé au sommet.

Parfois les fonctions *sommet* et *dépiler* sont réalisées simultanément

Fonctions pour la file – Interface

Comme notre langage algorihmique est typé, on supposera que toutes les données sont d'un seul type, ici des entiers.

Signature des fonctions pour une file d'entiers

- initFile() : file
  → retourne une file vide.
- fileVide(f : file) : booléen
  → teste si la file f est vide ou non.
- tête(f : file) : entier
  → retourne l'élément placé en tête de la file f
  (retourne un message d'erreur si la file est vide).
- enfiler(f : file, x : entier) : file
  → retourne la file *f* avec l'élément x ajouté en fin de file.
- défiler(f : file) : file
  → retourne la file *f* (supposée non vide au départ)
  après avoir supprimé l'élément placé en tête.

Parfois les fonctions *tête* et *défiler* sont réalisées simultanément

Plan du CM 4

Implémentation d'une pile avec un tableau

Nombre d'éléments

- La pile P a une capacité maximale *maxPile* qui est une constante
- *P*[0] contient *n* le nombre d'éléments de la pile
- les élements sont placés des positions 1 à *n*

initPile

```
initPile() : tableau d'entiers
   P[maxPile] : tableau d'entiers
   P[0] = 0
   retourner P
```

pileVide

```
pileVide(P : tableau d'entiers) : booléen
   retourner P[0] = 0
```

Implémentation d'une pile avec un tableau

sommet

```
sommet(P : tableau d'entiers) : entier
   retourner P[P[0]]
```

- ici si la pile ne contient pas d'élément, on retourne la valeur 0, ce qui n'est pas correct
- pour gérer l'erreur, il faut utiliser d'abord la fonction *pileVide*

Implémentation d'une pile avec un tableau

empiler

```
empiler(P : tableau d'entiers, x : entier) : tableau d'entiers
   si P[P[0]] < maxPile - 1
      P[0] = P[0] + 1
      P[P[0]] = x
   retourner P
```

- si la pile est pleine, on ne fait rien
- en programmation, on peut aussi transmettre une exception

dépiler

```
dépiler(P : tableau d'entiers) : tableau d'entiers
   P[0] = P[0] - 1
```

- on ne dépile que si la pile n'est pas vide
- il faut d'abord utiliser la fonction pileVide

Implémentation d'une pile avec un tableau

Complexité des fonctions

Toutes les procédures s'effectuent en temps constant (le nombre d'instructions ne dépend pas du nombre d'éléments dans le tableau.

Bilan

C'est un bon choix de structure de données.

Implémentation d'une pile avec une liste chaînée

Choix effectués

- le sommet de la pile est la valeur du premier nœud
- pour empiler, il faut donc ajouter un nœud au début de la liste chaînée
- pour dépiler, il faut supprimer le premier nœud
- pas de problème de taille maximale avec une liste chaînée

initPile

```
type pile = pointeur sur noeud
initPile() : pile
   retourner None
```

pileVide

```
pileVide(P : pile) : booléen
   retourner P = None
```

Implémentation d'une pile avec une liste chaînée

sommet

```
sommet(P : pile) : entier
   retourner P->valeur
```

- ici si la pile ne contient pas d'élément, nous aurons une erreur
- pour gérer l'erreur, il faut d'abord utiliser la fonction *pileVide* pour tester si la pile est vide
- si la pile est vide alors cette procédure n'est appelée

Implémentation d'une pile avec une liste chaînée

empiler

```
empiler(P : pile, x : entier) : pile
   tmp : pointeur sur noeud
   tmp = Nouveau(noeud) ; tmp->valeur = x ; tmp->suivant = P
   retourner tmp
```

- il s'agit d'un ajout en début de liste chaînée

dépiler

```
dépiler(P : pile) : pile
   tmp : pointeur sur noeud
   tmp = P->suivant
   désallouer P
   retourner tmp
```

- on ne dépile que si la pile n'est pas vide
- il faut d'abord tester si la pile est vide
- si la pile est vide alors cette procédure n'est appelée

Implémentation d'une pile avec une liste chaînée

Complexité des fonctions

Toutes les procédures s'effectuent en temps constant (le nombre d'instructions ne dépend pas du nombre d'éléments dans le tableau.

Bilan

C'est un bon choix de structure de données.

Plan du CM 4

Implémentation d'une file avec un tableau

Nombre d'éléments

- La file F a une capacité maximale *maxFile* qui est une constante.
- *F*[0] contient le nombre d'éléments de la file.

initFile

```
initFile() : tableau d'entiers
   F[maxFile] : tableau d'entiers
   F[0] = 0
   retourner F
```

fileVide

```
FileVide(F : tableau d'entiers) : booléen
   retourner F[0] = 0
```

Implémentation d'une file avec un tableau

tête

```
tete(F : tableau d'entiers) : entier
   retourner F[1]
```

- si la file ne contient pas d'élément, on retourne une valeur erronnée
- pour gérer l'erreur, il faut d'abord utiliser la fonction *fileVide* pour tester que la file est vide
- si la pile est vide alors cette procédure n'est appelée

Implémentation d'une file avec un tableau

enfiler

```
enfiler(F : tableau d'entiers, x : entier) : tableau d'entiers
   si F[F[0]] < maxPile - 1
      F[0] = F[0] + 1
      F[F[0]] = x
   retourner F
```

- si la file est pleine, on ne fait rien
- en programmation, on peut aussi transmettre une exception

défiler

```
défiler(F : tableau d'entiers) : tableau d'entiers
   pour i allant de 0 à F[0]-1 faire
      F[i] = F[i+1]
   F[0] = F[0] - 1
```

- on ne défile que si la file n'est pas vide
- la méthode consiste à supprimer le premier élément du tableau et à décaler tous les autres éléments d'un pas vers la gauche

Implémentation d'une file avec un tableau

Complexité des fonctions

- on choisit comme coût pour défiler le nombre de décalages
- le coût est égal au nombre d'éléments de la file.
- toutes les autres fonctions se font en temps constant

Bilan

Cette structure de données ne semble pas bien adaptée aux files.

Implémentation d'une file avec une liste chaînée

Choix effectués

- la tête de la file est la valeur du premier nœud
- pour enfiler, il faut ajouter un nœud à la fin de la liste chaînée
- pour défiler, il faut supprimer le premier nœud

initFile

```
type file = pointeur sur noeud
initFile() : file
   retourner None
```

fileVide

```
fileVide(F : file) : booléen
   retourner F = None
```

Implémentation d'une file avec une liste chaînée

tête

```
tete(F : file) : entier
   retourner F->valeur
```

- si la file ne contient pas d'élément, nous aurons une erreur
- pour gérer l'erreur, il faut d'abord utiliser la fonction *pileVide* pour tester si la file est vide
- si la file est vide alors cette procédure n'est appelée

Implémentation d'une file avec une liste chaînée

enfiler

```
enfiler(F : File, x : entier) : file
   tmp1, tmp2 : pointeur sur noeud
   tmp1 = F
   tmp2 = Nouveau(noeud) ; tmp2->valeur = x ; tmp2->suivant = None
   si fileVide(F) alors retourner tmp2
   tant que tmp1->suivant <> None faire
      tmp1 = tmp1->suivant
   tmp1->suivant = tmp2
   retourner F
```

- la méthode utilisée est l'insertion en fin dans une liste chaînée

Implémentation d'une file avec une liste chaînée

défiler

```
défiler(F : file) : File
   tmp : pointeur sur noeud
   tmp = P->suivant
   désallouer P
   retourner tmp
```

- on ne défile que si la file n'est pas vide
- il faut d'abord tester si la file est vide
- si la file est vide alors cette procédure n'est appelée

Implémentation d'une file avec une liste chaînée

Complexité des fonctions

- on choisit comme coût pour enfiler le nombre de nœuds visités
- le coût est égal au nombre d'éléments de la file.
- toutes les autres fonctions se font en temps constant

Bilan

Comme pour le tableau, cette structure de données ne semble pas bien adaptée aux files.

Implémentation d'une file avec d'autres structures

Autres structures de données

On montre que toutes les fonctions peuvent être implémentées en temps constant avec les deux structures de données suivantes.

Liste avec deux pointeurs

On utilise une liste avec un pointeur au début et un pointeur à la fin.

Liste circulaire

On utilise une liste circulaire avec un pointeur sur le dernier nœud

Voir CM 3 et TD 4

Plan du CM 4

Exemple 1 – bon parenthésage

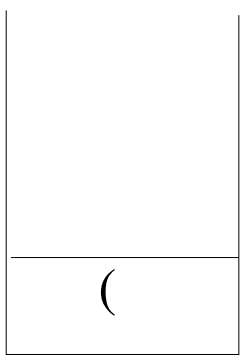
Algorithme

- on parcourt une expression caractère par caractère.
- si on lit le caractère (, on empile un).
- si on lit le caractère), on dépile un).
- si on lit un autre caractère on ne fait rien.
- si on ne peut pas dépiler, l'expression est mal parenthésée.
  (plus de parenthèses fermantes que de parenthèse ouvrantes)
- si à la fin la pile n'est pas vide, l'expression est mal parenthésée.
  (plus de parenthèses ouvrantes que de parenthèse fermantes)

Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

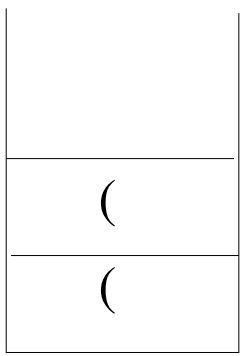
expression = ((2+5)*(4–2)))



Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

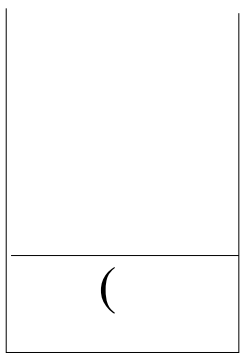
expression = ((2+5)*(4–2)))



Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

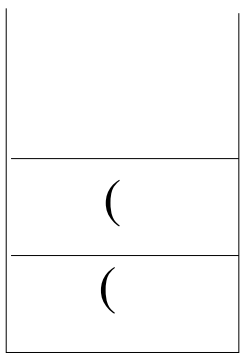
expression = ((2+5)*(4–2)))



Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

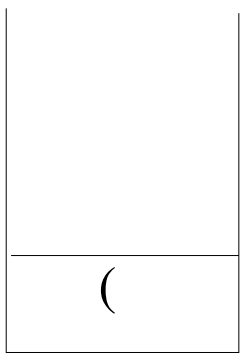
expression = ((2+5)*(4–2)))



Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

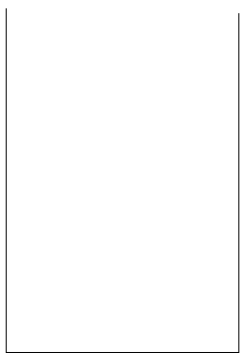
expression = ((2+5)*(4–2)))



Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

expression = ((2+5)*(4–2)))

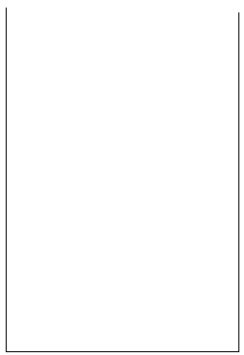


Exemple 1 – bon parenthésage

Exécution de l'algorithme sur un exemple

expression = ((2+5)*(4–2)))

erreur la pile est vide



L'algorithme se finit sur une erreur

Exemple 1 – bon parenthésage

Procédure bienParenthese

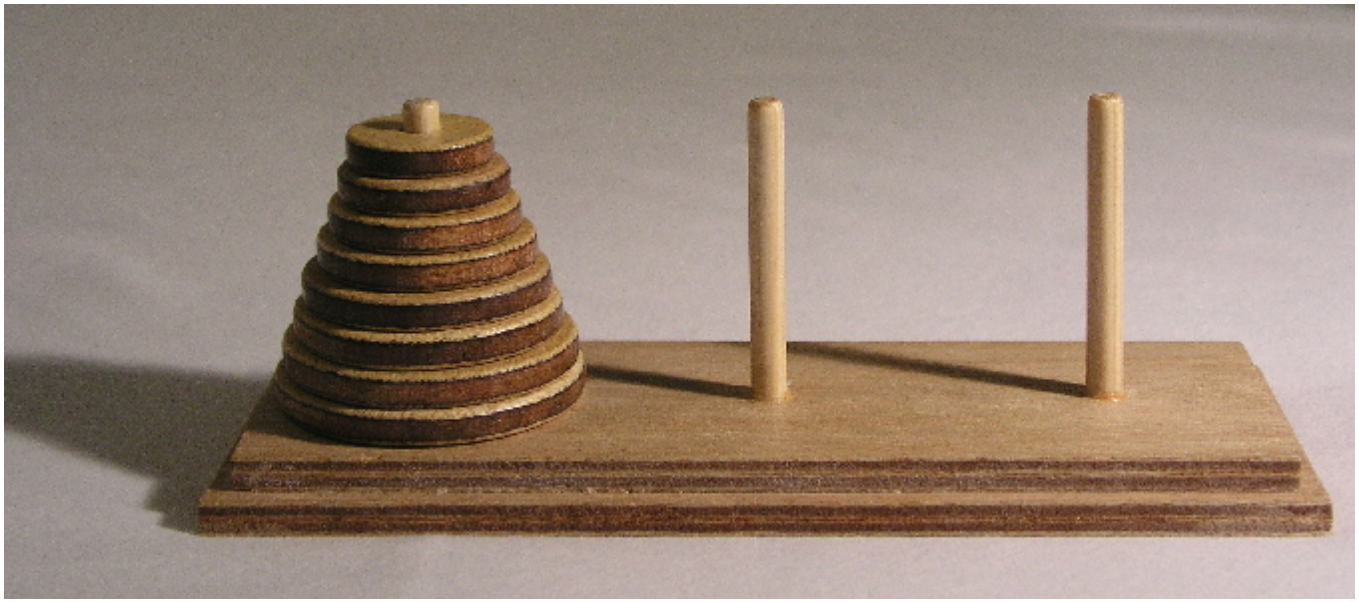
```
bienParenthese(C : chaîne de caractères) : booléen
   P : pile ; P = initPile()
   L : entier ; L = longueur(C)
   i = 0
   tant que i < L faire
      si C[i] = '(' alors
           P = empiler(P,'(')
      si C[i] = ')' alors
         si pileVide(P) alors retourner Faux
         sinon P = dépiler(P)
      i = i + 1
   retourner pileVide(P)
```

Remarque

Nous pouvons nous passer d'une pile avec un seul type de parenthésage.
On remplace la pile par un compteur.

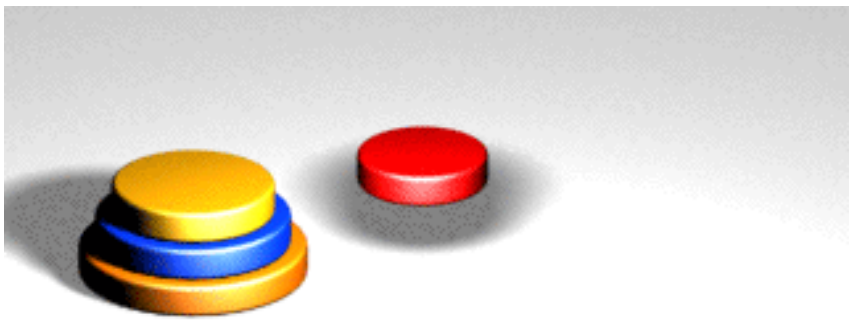
Exemple 2 – tours d'Hanoï

Tour avec 8 disques

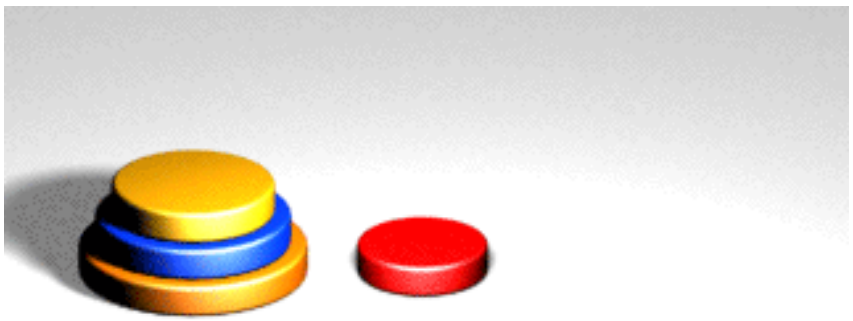


Exemple 2 – tours d'Hanoï

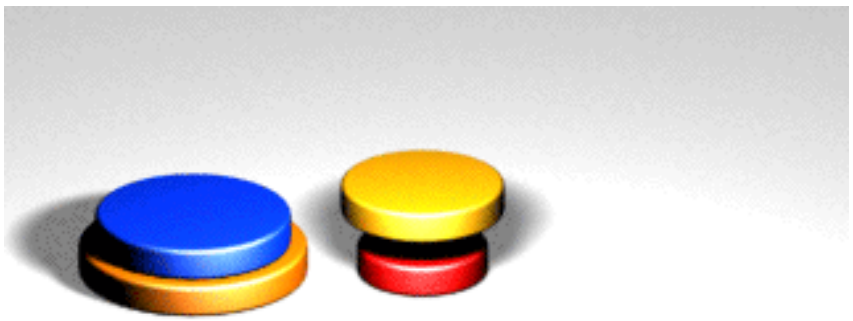
Exemple 2 – tours d'Hanoï



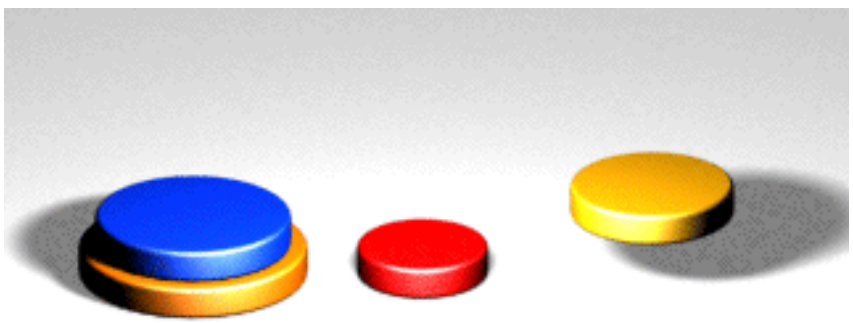
Exemple 2 – tours d'Hanoï



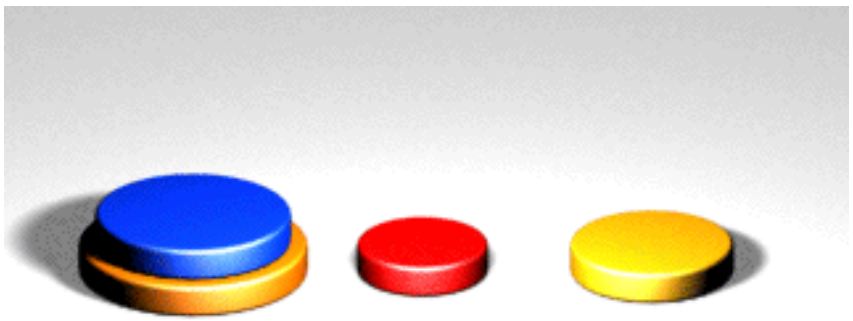
Exemple 2 – tours d'Hanoï



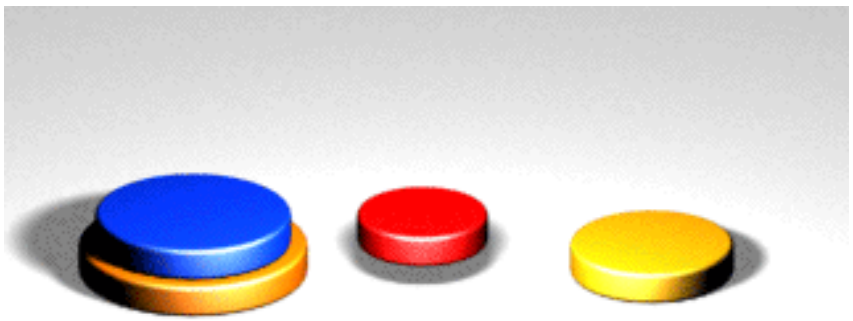
Exemple 2 – tours d'Hanoï



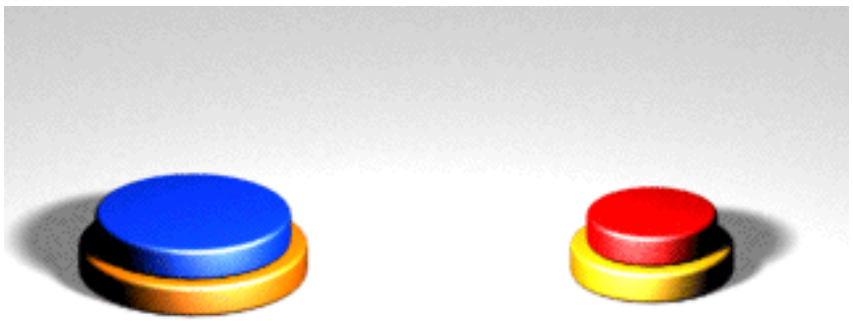
Exemple 2 – tours d'Hanoï



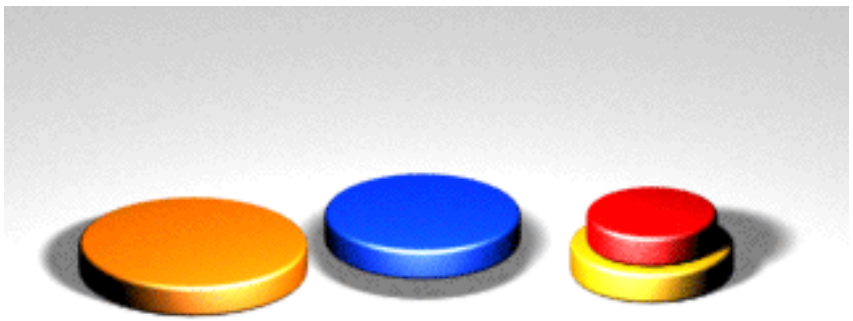
Exemple 2 – tours d'Hanoï



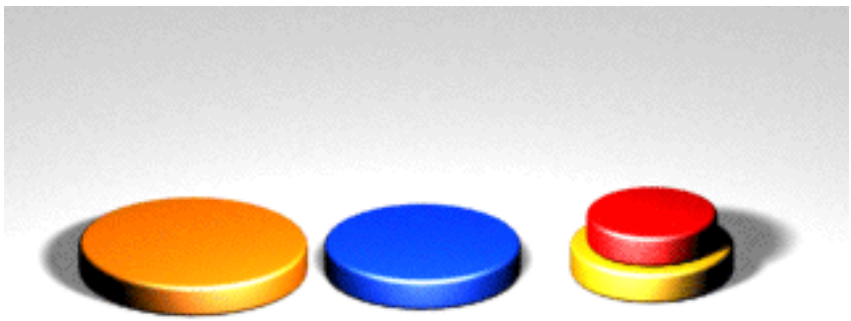
Exemple 2 – tours d'Hanoï



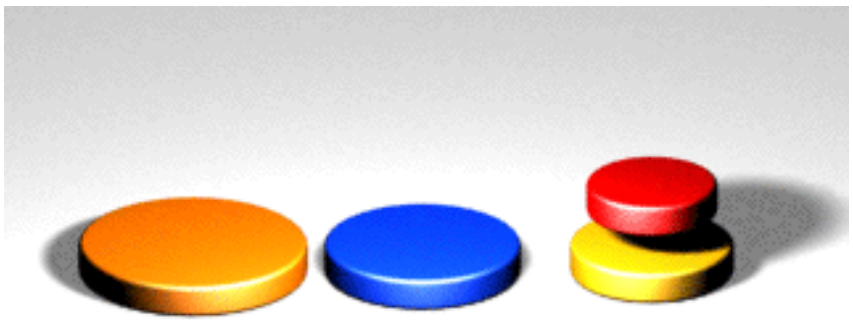
Exemple 2 – tours d'Hanoï



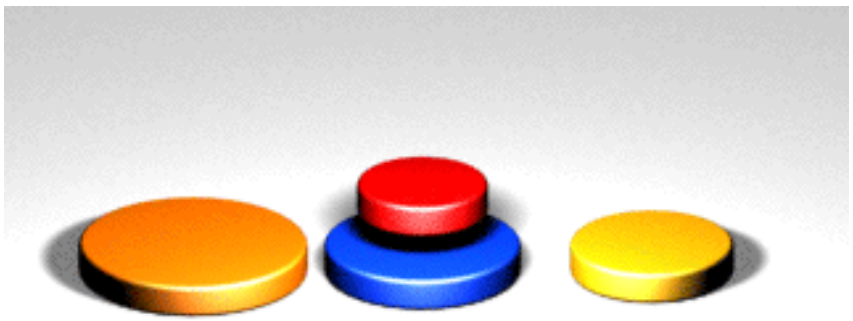
Exemple 2 – tours d'Hanoï



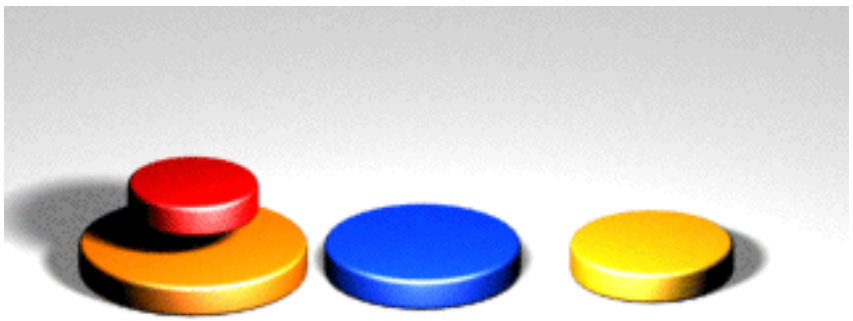
Exemple 2 – tours d'Hanoï



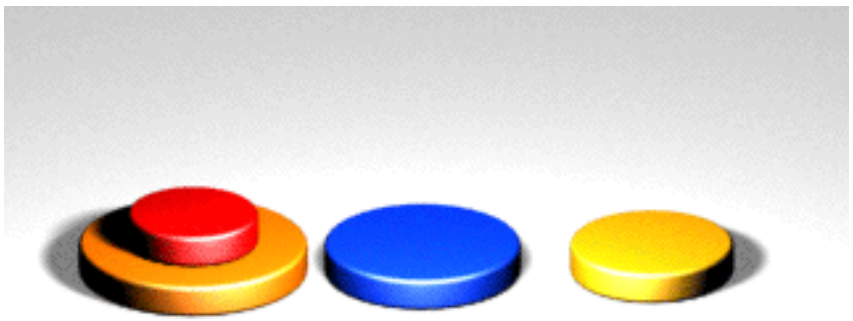
Exemple 2 – tours d'Hanoï



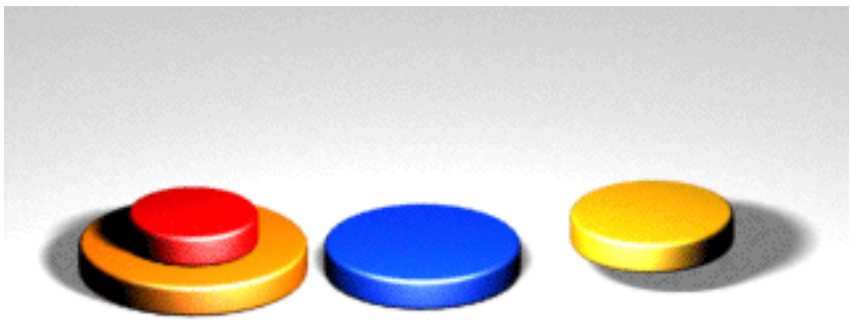
Exemple 2 – tours d'Hanoï



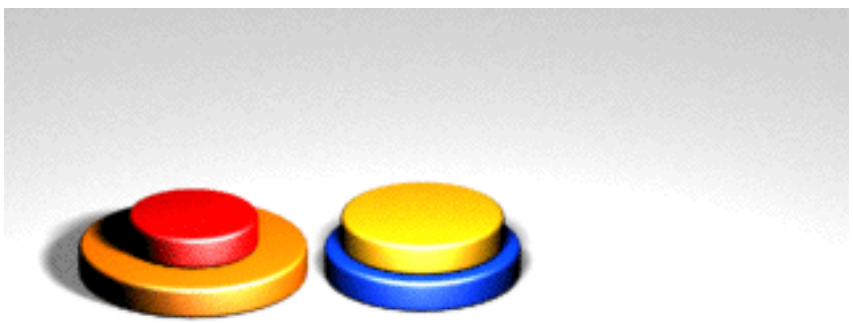
Exemple 2 – tours d'Hanoï



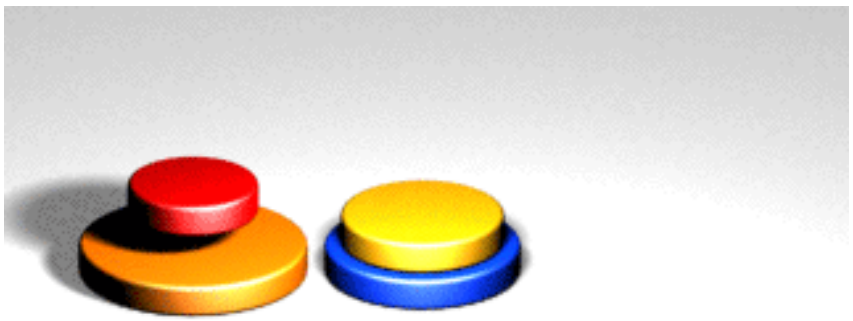
Exemple 2 – tours d'Hanoï



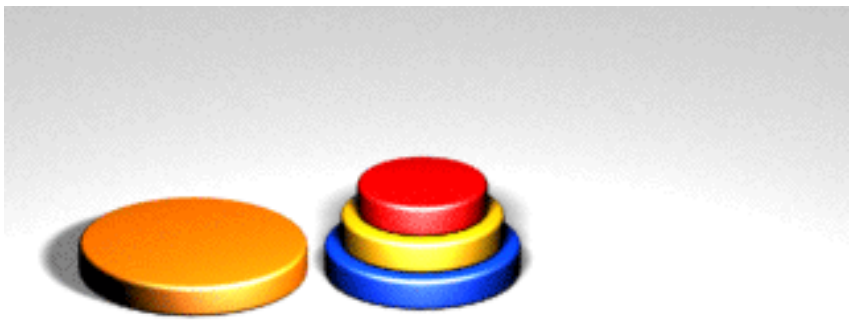
Exemple 2 – tours d'Hanoï



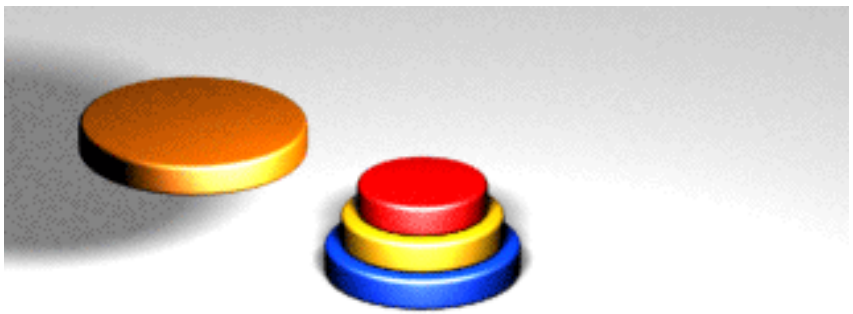
Exemple 2 – tours d'Hanoï



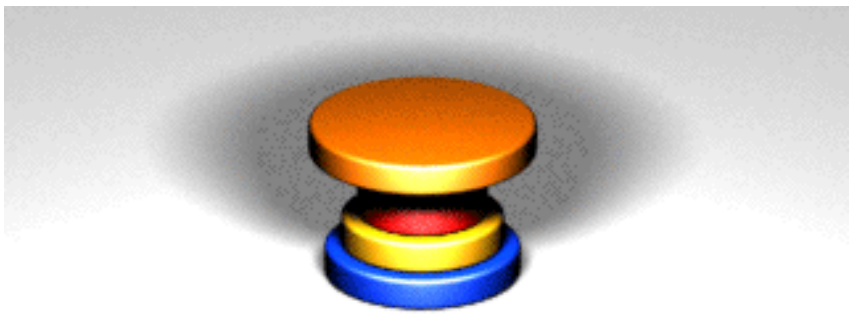
Exemple 2 – tours d'Hanoï



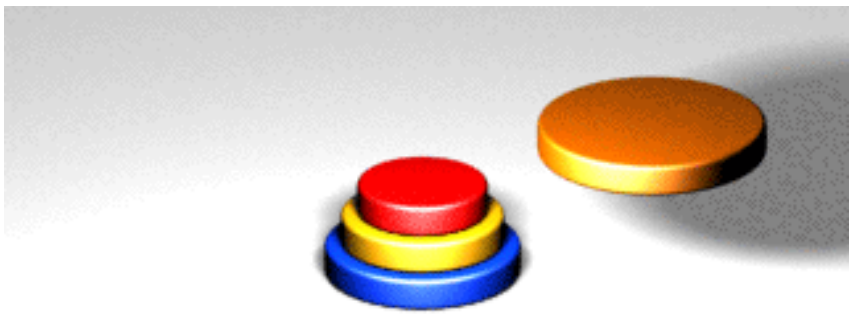
Exemple 2 – tours d'Hanoï



Exemple 2 – tours d'Hanoï

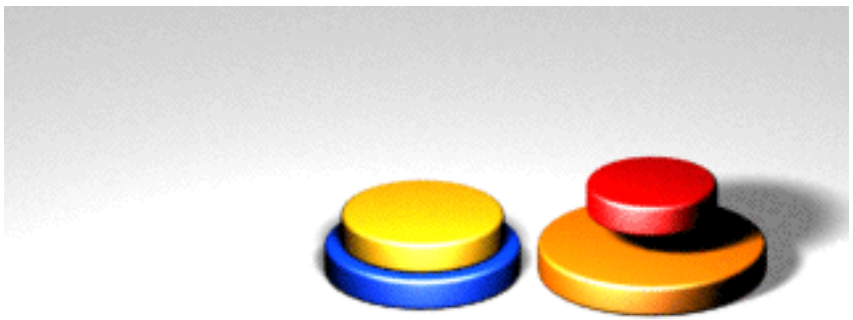


Exemple 2 – tours d'Hanoï

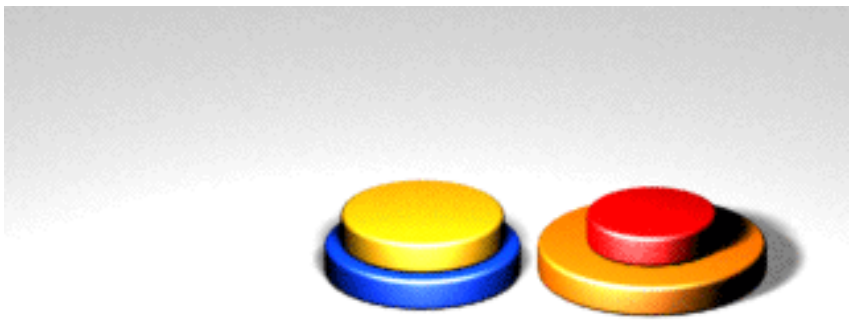


Exemple 2 – tours d'Hanoï

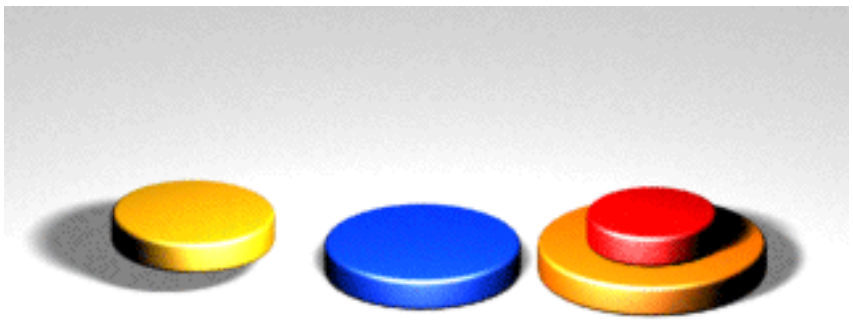
Exemple 2 – tours d'Hanoï



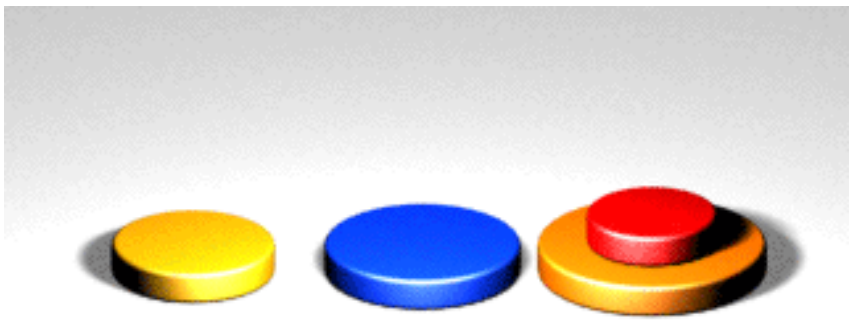
Exemple 2 – tours d'Hanoï



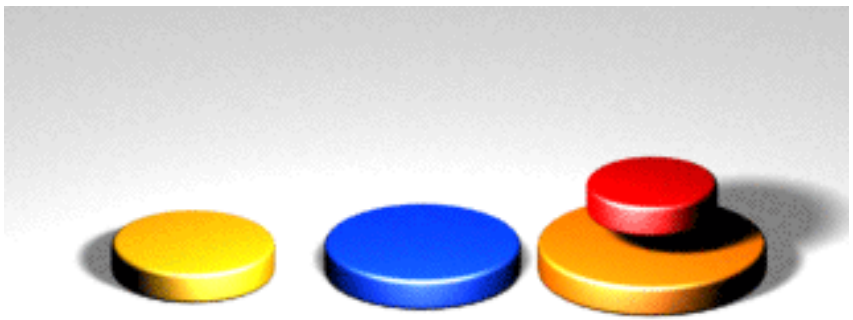
Exemple 2 – tours d'Hanoï



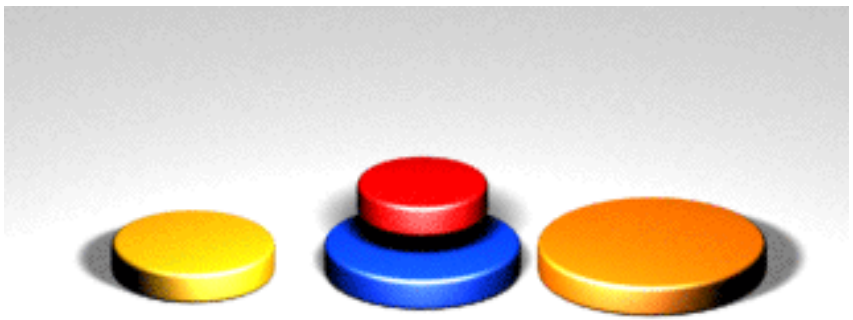
Exemple 2 – tours d'Hanoï



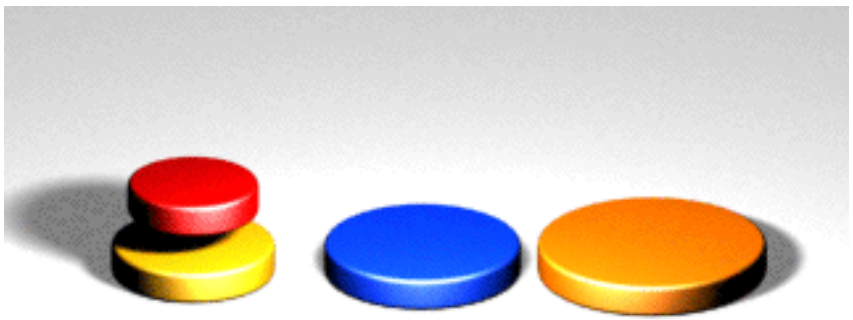
Exemple 2 – tours d'Hanoï



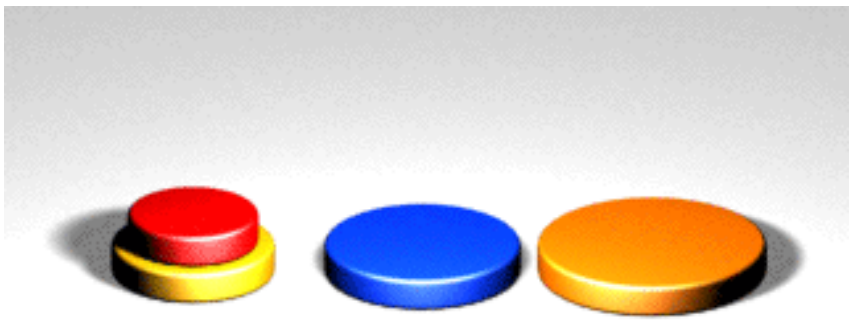
Exemple 2 – tours d'Hanoï



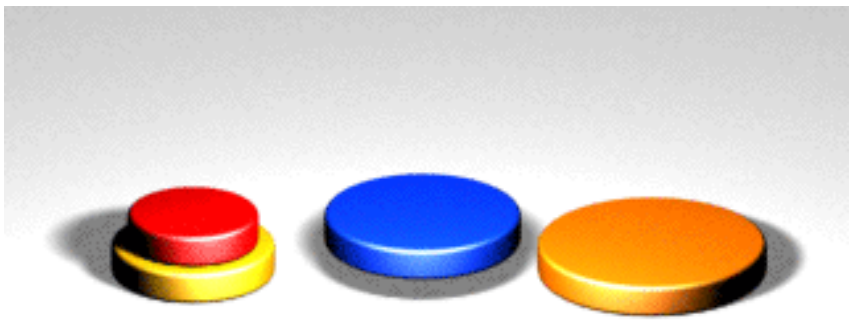
Exemple 2 – tours d'Hanoï



Exemple 2 – tours d'Hanoï

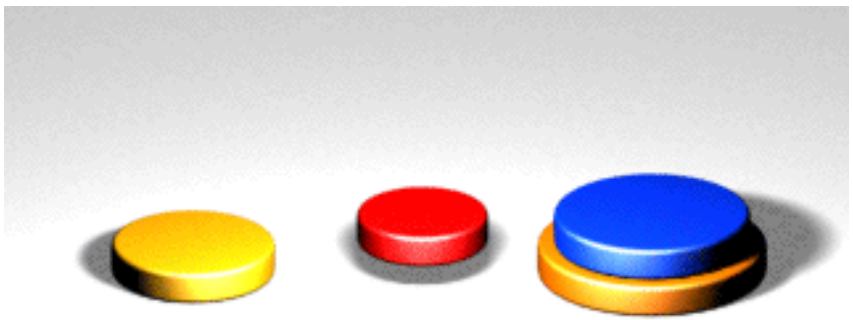


Exemple 2 – tours d'Hanoï

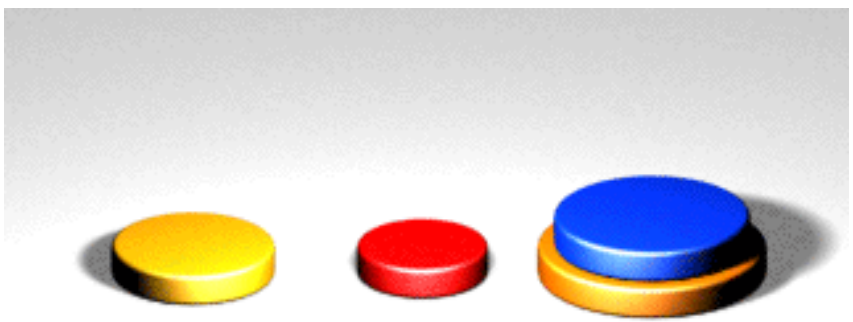


Exemple 2 – tours d'Hanoï

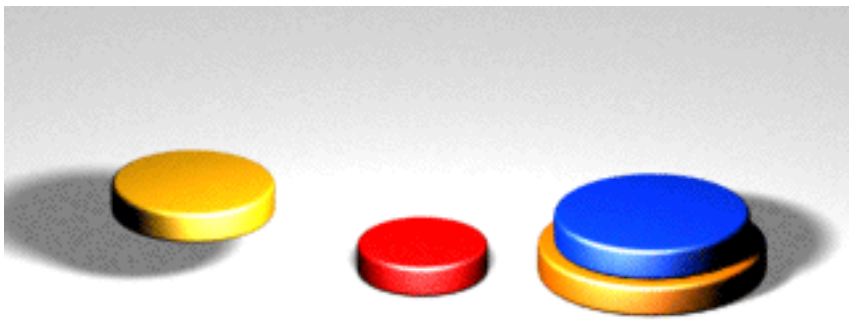
Exemple 2 – tours d'Hanoï



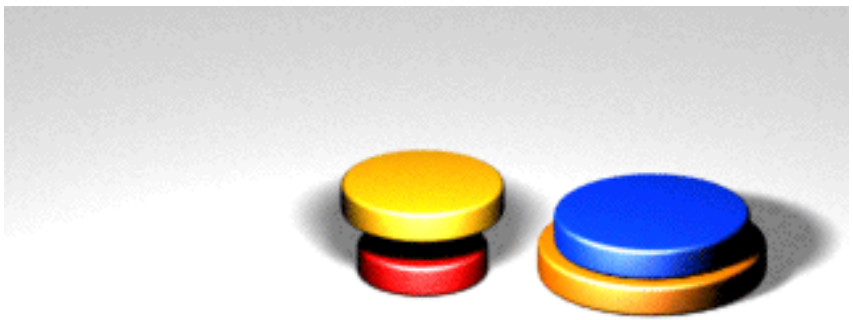
Exemple 2 – tours d'Hanoï



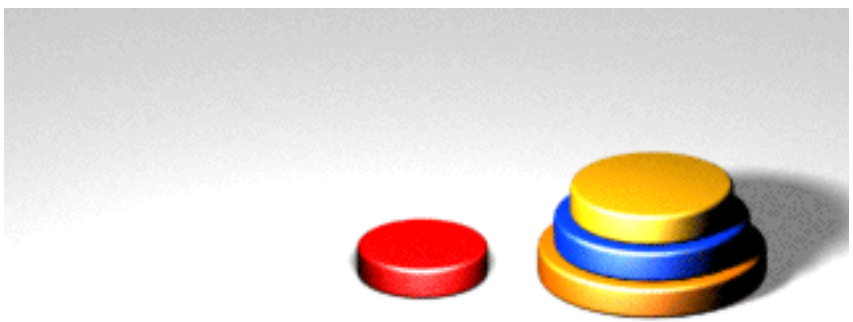
Exemple 2 – tours d'Hanoï



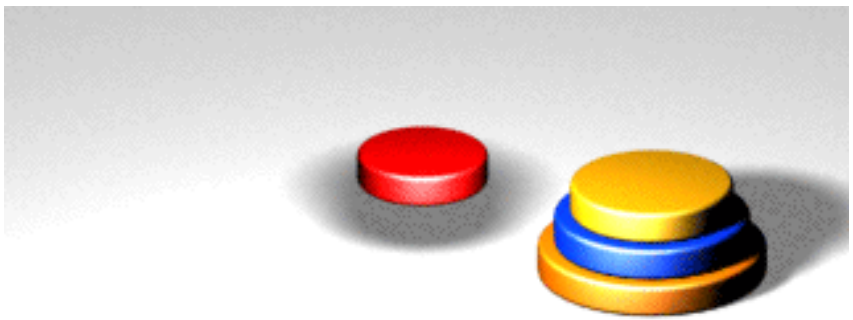
Exemple 2 – tours d'Hanoï



Exemple 2 – tours d'Hanoï



Exemple 2 – tours d'Hanoï



Exemple 2 – tours d'Hanoï

Exemple 2 – tours d'Hanoï

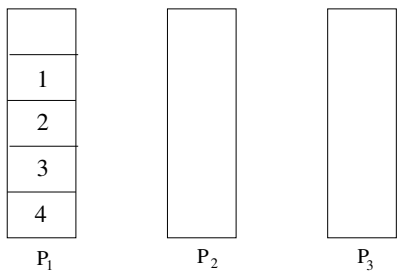
Exemple 2 – tours d'Hanoï

Formalisation du problème

- trois piles P_1, P_2 et P_3
- n disques de taille $1, \ldots, n$
- les trois piles sont empilées par ordre décroissant

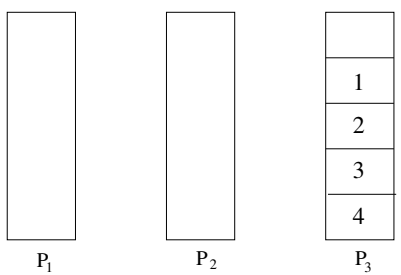
Début

P_1 contient les n disques.



Début

P_3 contient les n disques.



Exemple 2 – tours d'Hanoï

Déplacement autorisé

- on fixe deux tours de Hanoï, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$
- P_i est non vide
- P_j est vide ou $sommet(P_i) < sommet(P_j)$
- on déplace $sommet(P_i)$ vers P_j

Exemple 2 – tours d'Hanoï

Codage d'un déplacement

On suppose ici que les tests pour savoir si le déplacement et possible est effectué avant l'appel de la procédure.

```
deplacementTours(P : tableau de piles, i,j : entier):tableau de piles
   d : entier
   d = sommet(P[i])
   depiler(P[i])
   empiler(P[j])
   retourner P
```

Exemple 2 – tours d'Hanoï

Meilleure solution pour $n = 4$, $15 = 2^4 - 1$ déplacements.

```
étape  1      P = deplacement(P,1,2)
étape  2      P = deplacement(P,1,3)
étape  3      P = deplacement(P,2,3)
étape  4      P = deplacement(P,1,2)
étape  5      P = deplacement(P,3,1)
étape  6      P = deplacement(P,3,2)
étape  7      P = deplacement(P,1,2)
étape  8      P = deplacement(P,1,3)
étape  9      P = deplacement(P,2,3)
étape 10      P = deplacement(P,2,1)
étape 11      P = deplacement(P,3,1)
étape 12      P = deplacement(P,2,3)
étape 13      P = deplacement(P,1,2)
étape 14      P = deplacement(P,1,3)
étape 15      P = deplacement(P,2,3)
```

Pour n coups

Le nombre de déplacement vaut $2^n - 1$ déplacements.

Méthodes pour trouver la solution

Elles peuvent être récursives ou itératives.