# 1 Correction du DM1

Exercice 1 Session2 2018-2019

Soit $A$ un arbre binaire, on rappelle la définition inductive de $h(A)$, la hauteur de $A$ :

(i) Si $A$ est l'arbre vide, $h(A) = -1$.

(ii) Si $A = (\cdot, B, C)$ où $B$ est le sous-arbre gauche et $C$ est le sous-arbre droit, alors $h(A) = 1 + \max(h(B), h(C))$.

1. Redonnez le schéma d'induction des arbres complets.
   **Solution** Schéma d'induction de $\mathcal{C}$, l'ensemble des arbres complets.
   i) L'arbre racine appartient à $\mathcal{C}$.
   ii) Soit $C \in \mathcal{C}$ alors l'arbre binaire $A = (\cdot, C, C) \in \mathcal{C}$.
2. On attribue une valeur à chacun des nœuds des arbres complets de la manière suivante :
   (i) Si $A$ est l'arbre racine $\cdot$, alors la racine prend la valeur 1.
   (ii) Soit $A = (\cdot, B, C)$. Tous les nœuds de $A$ différents de la racine conservent les valeurs de $B$ ou $C$. La racine de $A$ prend comme valeur la somme de la valeur de la racine de $B$ et de celle de $C$.
3. Donnez les valeurs de nœuds de l'arbre complet de hauteur 3.

```
          8
        /   \
      4       4
     / \     / \
    2   2   2   2
   / \ / \ / \ / \
  1   1 1 1 1 1 1   1
```

4. Montrez par induction que tout arbre complet $A$ a une racine de valeur $2^{h(A)}$.
   **Solution** Pour tout $A$ de $\mathcal{C}$, notons $V(A)$ la valeur prise par la racine.
   On définit sur $\mathcal{C}$ la propriété $\mathcal{P}$ : $V(A) = 2^{h(A)}$.
   Montrons par induction $\forall A \in \mathcal{C}\ \mathcal{P}(A)$.
   i) Soit $A$ l'arbre racine. Par définition, $V(A) = 1$ et comme $h(A) = 0$, nous avons bien $V(A) = 2^{h(A)}$, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
   ii) Soit $C \in \mathcal{C}$. Supposons $\mathcal{P}(C)$ vraie.
   Nous avons donc $V(C) = 2^{h(C)}$.
   Par définition, $V(A) = 2V(C) = 2^{h(C)+1}$.
   Comme $h(A) = h(C) + 1$, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
   
   Nous avons montré par induction $\forall A \in \mathcal{C}\ \mathcal{P}(A)$.

Remarque : le schéma d'induction possède comme base l'arbre racine car nous n'avons pas précisé quelle valeur retourner pour l'arbre vide. Pour un autre exercice, nous pouvons définir le schéma d'induction :

i) L'arbre vide appartient à $\mathcal{C}$.

ii) Soit $C \in \mathcal{C}$ alors l'arbre binaire $A = (\cdot, C, C) \in \mathcal{C}$.