TD9 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1 . Soit $\alpha \in S_n$. On désigne par $\text{sgn}(\alpha)$, la signature de α, i.e. par définition $(-1)^{n-t}$, où t est le nombre de cycles dans la décomposition complète de α en produit de cycles disjoints.

1. Montrer que $\text{sgn}(\alpha^{-1}) = \text{sgn}(\alpha)$.

2. Soit $\sigma \in S_n$ et $1 \leq j \leq n$. On suppose que j est un élément invariant de σ, i.e. $\sigma(j) = j$. On définit alors $\sigma' \in S_{n-1}$ en identifiant $\{1, 2, \dots, n-1\}$ avec $\{1, 2, \dots, n\}\backslash\{j\}$, et en posant pour tout $i \neq j$, $\sigma'(i) = \sigma(i)$. Montrer que $\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma)$.

Exercice 2 . Montrer que la signature d'un cycle de longueur r est 1 si et seulement si r est impair.

Exercice 3 . Soit $f : \{0, 1, 2, \dots, 10\} \to \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ une application définie par

$$f(n) = \text{ le reste de la division de } 4n^2 - 3n^7 \text{ par } 11.$$

1. Montrer (vérifier) que f est une permutation.

2. Calculer la signature de f.

3. Calculer l'inverse de f .

Exercice 4 .

1. Soit α est un cycle de longueur r et $1 < k < r$. α^k est-il toujours un cycle de longueur r?

2. Soit α est un cycle de longueur impaire. Montrer alors que α^2 est un cycle.

Exercice 5 .

1. Soit $\alpha \in S_n$. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, i est invariant par α si et seulement si i est invariant par α^{-1}.

2. Soit α et β deux éléments de S_n. Montrer que si α et β sont de supports disjoints et que $\alpha\beta = id$ alors $\alpha = \beta = id$.

Exercice 6 . Déterminer les ensembles suivants:

1. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3\}$

2. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(2) = 2\}$

3. $\{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3 \text{ et } \sigma(2) = 2\}$

Ces ensembles sont–ils des sous–groupes de S_4?

Exercice 7 .

1. Soit α et β deux éléments de S_n. On pose $\alpha \sim \beta$ si il existe $\gamma \in S_n$ tel que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur S_n. Lorsque $\alpha \sim \beta$, on dit que α et β sont conjugués.

2. Soit $\gamma = (1, 3, 4, 5)(2, 3, 4)(1, 4, 5, 3, 6)$ et $\beta = (1456)(238)$. Calculer $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$.

3. Soit $\alpha = (1, 3, 4, 5, 7, 6, 2)$ et $\beta = (4, 2, 5, 1, 7, 6, 3)$. α et β sont–ils conjugués?

4. Soit $\alpha = (1, 3, 4, 7, 6, 2)$ et $\beta = (4, 2, 5, 1)(7, 6, 3)$. α et β sont–ils conjugués?