Correction du DM4

Licence d'informatique deuxième année

2019-2020

Exercice 69 : On souhaite proposer un jeu de paris avec une pièce de monnaie.

1. On effectue l'expérience aléatoire suivante : on jette une pièce de monnaie trois fois de suite. Donnez l'espace de probabilité. Combien a-t-on d'évènements possibles ?
   Réponses : Dans cet exercice, on adopte les abréviations P pour Pile et F pour face.
   - L'espace de probabilité est $\Omega = \{P, F\}^3$, donc

     $$\Omega = \{(P;P;P),(P;P;F),(P;F;P),(P;F;F),(F;P;P),(F;P;F),(F;F;P),(F;F;F)\}$$

     La première composante correspond au résultat du premier jet. La deuxième composante correspond au résultat du second jet. La troisième composante correspond au résultat du dernier jet.

   - On rappelle qu'un évènement correspond à un sous-ensemble de Ω. Donc le nombre des évènements possibles est $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\text{card}(\Omega)} = 2^{2^3} = 2^8$.

   Remarques :
   - Il ne faut pas confondre **évènement élémentaire** et **évènement** tout court. Un évènement n'est pas toujours un évènement élémentaire...

2. On suppose avoir la distribution uniforme sur cet espace de probabilité. Redonnez la définition de la distribution uniforme. On considère E_1 l'évènement $\ll$Les trois jets de la pièce ont donné la même valeur $\gg$ et E_2 l'évènement $\ll$ Le premier jet de la pièce donne pile et le second donne face $\gg$? Montrez que E_1 et E_2 ont tous les deux une probabilité 1/4 et que E_1 et E_2 sont incompatibles.
   Réponses :
   - Soit Ω un espace de probabilité fini. Une distribution de probabilité P sur Ω est dite **uniforme** si pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$. Dans ce cas, la probabilité sur Ω est donnée par : Pour tout $A \subset \Omega$, $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.
   - La probabilité est de distribution uniforme, donc pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{8}$.
     En regardant les éléments de Ω, on obtient que $E_1 = \{(P;P;P),(F;F;F)\}$ et que $E_2 = \{(P;F;P),(P;F;F)\}$.
     -On a $P(E_1) = \frac{\text{card}(E_1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ et $P(E_2) = \frac{\text{card}(E_2)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. D'où $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{4}$.
     -On a $E_1 \cap E_2 = (\{(P;P;P),(F;F;F)\}) \cap (\{(P;F;P),(P;F;F)\}) = \emptyset$, donc E_1 et E_2 sont incompatibles.

   Remarques : Soient A et B deux évènements.
   - Il ne faut pas confondre le fait que A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) et le fait que A et B sont indépendants ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$).

— Aussi, $P(A \cap B) = 0$ (ou encore $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$) n'équivaut pas au fait que $A \cap B = \emptyset$ (ou encore A et B sont incompatibles).

— L'énoncé précise bien que sur Ω, la probabilité est de **distribution uniforme**. Ainsi, il est inutile de supposer que la pièce n'est pas truquée (c'est-à-dire que la pile et la face ont la même probabilité 1/2 d'apparaître) et que les jets sont indépendants, ce que certains étudiants ont fait.

3. Soit r le résultat de l'expérience aléatoire. On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 10 si r appartient à E_1, -5 si r appartient à E_2 et -1 si r n'appartient ni à E_1 ni à E_2. Calculer l'espérance de X. On suppose que X correspond au gain du jeu, est-ce que le jeu est équitable ?

   Réponses : On a $X(\Omega) = \{-5, -1, 10\}$. On a les probabilités suivantes :

   — $P(X = 10) = P(X^{-1}(\{10\})) = P(E_1) = \frac{1}{4}$ par la question 2.

   — $P(X = -5) = P(X^{-1}(\{-5\})) = P(E_2) = \frac{1}{4}$ par la question 2.

   — $P(X = -1) = P(X^{-1}(\{-5\})) = P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - (P(E_1) + P(E_2)) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ car $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ vu que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ par la question 2.
   L'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = -5 \times P(X = -5) - 1 \times P(X = -1) + 10 \times P(X = 10)$$

   donc $E(X) = -5 \times \frac{1}{4} - 1 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi $E(X) = \frac{3}{4}$.

   -Comme $E(X) = \frac{3}{4} \neq 0$, donc le jeu n'est pas équitable.