Chapitre 2

Représentation des fonctions logiques

Exercice: Eclairage intérieur automobile

La lumière intérieure (L) d'un véhicule s'éclaire si une des deux portes avants est ouverte (capteurs **a** et **b** à coupure de circuit) ou si l'interrupteur du plafonnier (**c**) est appuyé.

1) Décrire le fonctionnement par une table de vérité.
2) Déterminer l'équation logique.
3) Etablir le schéma logique, à l'aide de portes logiques.

3 variables d'entrées : a,b,c

1 variable de sortie : L

a	b	c	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$L = \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\right)+\left(\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\right)+\left(\bar{a}\cdot b\cdot c\right)+\ldots$$
$$\left(a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\left(a\cdot\bar{b}\cdot c\right)+\left(a\cdot b\cdot\bar{c}\right)+\left(a\cdot b\cdot c\right)$$

$$\bar{L} = \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right) \Rightarrow L = \overline{\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}$$
$$L = \left(a + b + c\right)$$

Chapitre 2 : Représentation des fonctions logiques

Il existe plusieurs formes possibles pour représenter un système logique :

1] La table ou tableau de vérité : déjà vu.

2] L'équation logique

Toute fonction logique (Booléenne) peut s'écrire sous deux formes standards :

La première forme : somme de mintermes

$$f1 = \underbrace{\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}}_{\text{minterme}} + a.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c} + \ldots + a.b.c \qquad \sum \prod$$

La deuxième forme : produit de maxtermes

$$f2 = \underbrace{(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}_{\text{maxterme}} \times (a + \bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + b + \bar{c}) \times \ldots \times (a + b + c) \qquad \prod \sum$$

Remarque : la première forme est la plus utilisée car elle est plus "parlante".

3] Représentation décimale des fonctions logiques : conversion en décimale des combinaisons des variables d'entrée

	MSB		LSB	
	a	b	c	L
000 = 0	0	0	0	0
001 = 1	0	0	1	0
010 = 2	0	1	0	0
011 = 3	0	1	1	0
100 = 4	1	0	0	1
101 = 5	1	0	1	1
110 = 6	1	1	0	1
111 = 7	1	1	1	1

$$L = \sum (4,5,6,7)$$

4] Le diagramme de Karnaugh :

C'est une forme particulière du tableau de vérité. Pour une fonction logique de "n" variables, il est constitué d'un tableau divisé en "2^n" cases. Pour chaque case, les variables d'entrées ont une valeur déterminée (combinaison qui spécifie la case) et la valeur indiquée dans cette case est celle de la variable de sortie.

Exemple : Fonction ET (AND) à deux entrées a et b : on obtient $2^2 = 4$ cases

b \ a	0	1
0	0	0
1	0	1

$\rightarrow S = a.b$

Deux cases sont voisines l'une de l'autre si et seulement si elles sont associées à deux états d'entrée dont le code est adjacent. Il est donc possible d'éliminer une variable.

Exemples :

b \ a	0	1
0	0	1
1	0	1

Impliquants de la fonction S

$$S = a \cdot b + a \cdot \overline{b}$$

$$S = a$$

Impliquant premier

b \ a	0	1
0	0	0
1	1	1

$$S = a \cdot b + \overline{a} \cdot b$$

$$= b$$

Chapitre 2 : Représentation des fonctions logiques

Tableau à trois variables :

Pour respecter le codage adjacent, on utilise le binaire réfléchi (adjacent cyclique).

	b=0	b=1		b=0
	a=0		a=1	
c \ ab	**00**	**01**	**11**	**10**
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Tableau à quatre variables : c d a b

$\bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d$

$b\bar{c}d$

$\boxed{bd}$

bcd

$\bar{a}bcd + abcd$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}c\bar{d}$

$a\bar{b}\bar{d}$

$\boxed{\bar{b}\bar{d}}$

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$

$\bar{a}\bar{b}\bar{d}$

Ch 2 : Représentation des fonctions logiques

Pour une fonction à n variables, une case d'un tableau de Karnaugh possède n cases voisines (ou adjacentes) qui correspondent chacune à la variation de l'une des n variables d'entrée. Il est donc difficile de représenter des tableaux à plus de 4 ou 5 variables.

Tableau à 5 variables : e c d a b

$\bar{a}b\bar{c}d$

e est le MSB

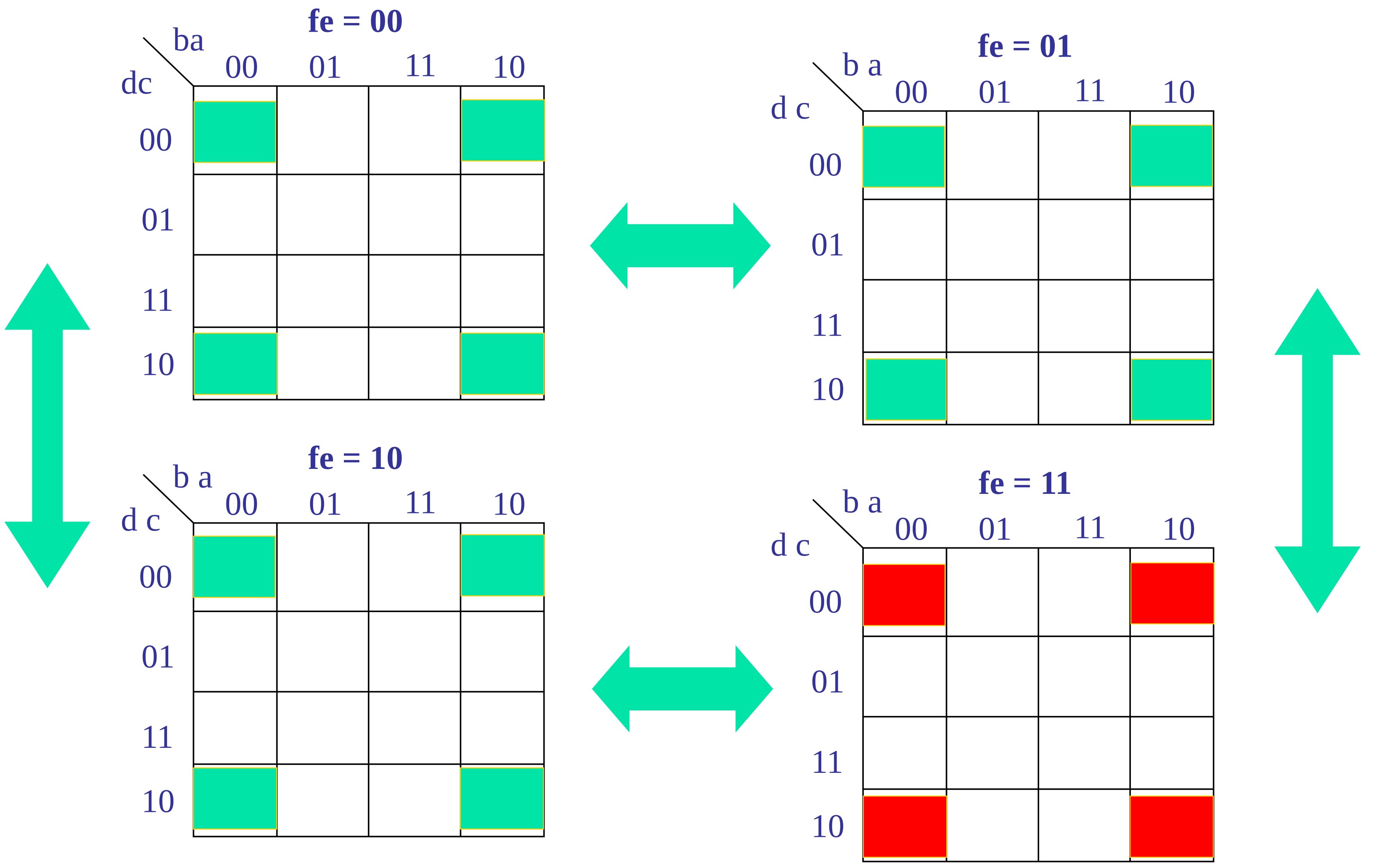
e = 0

cd \ a b	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

e = 1

cd \ a b	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

Tableau à 6 variables : f e d c b a



Extraction de la forme minimale d'une fonction logique avec un tableau de Karnaugh :

1. Remplissage du tableau de Karnaugh

2. Recherche des impliquants premiers : on commence par déterminer les groupements de 1 les plus grands possibles (impliquants premiers).

3. Sélectionner, parmi tous les impliquants premiers, tous ceux qui couvrent au moins une case 1 qu'ils sont les seuls à couvrir (impliquants premiers essentiels).

Exemple n°1 : Z(c,b,a) = $\sum(3,5,7)$

ba / c	**00**	**01**	**11**	**10**
0	0 (0)	0 (1)	1 (3)	0 (2)
1	0 (4)	1 (5)	1 (7)	0 (6)

ba

ac

$$Z = ac + ba$$

Exemple n°2 : Z(d,c,b,a)

$$Z = a\,b\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}\,c + \overline{b}\,a\,\overline{d}\,c + a\,b\,\overline{d}\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,c\,d + \overline{b}\,a\,c\,d + \overline{b}\,a\,d\,\overline{c} + a\,b\,d\,\overline{c}$$

dc \ ba	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	0	0
10	0	1	1	0

$\overline{b}.c$

$\overline{b}.a.d$

$a.b.\overline{d}$

$a.\overline{d}.c$

$a.d.\overline{c}$

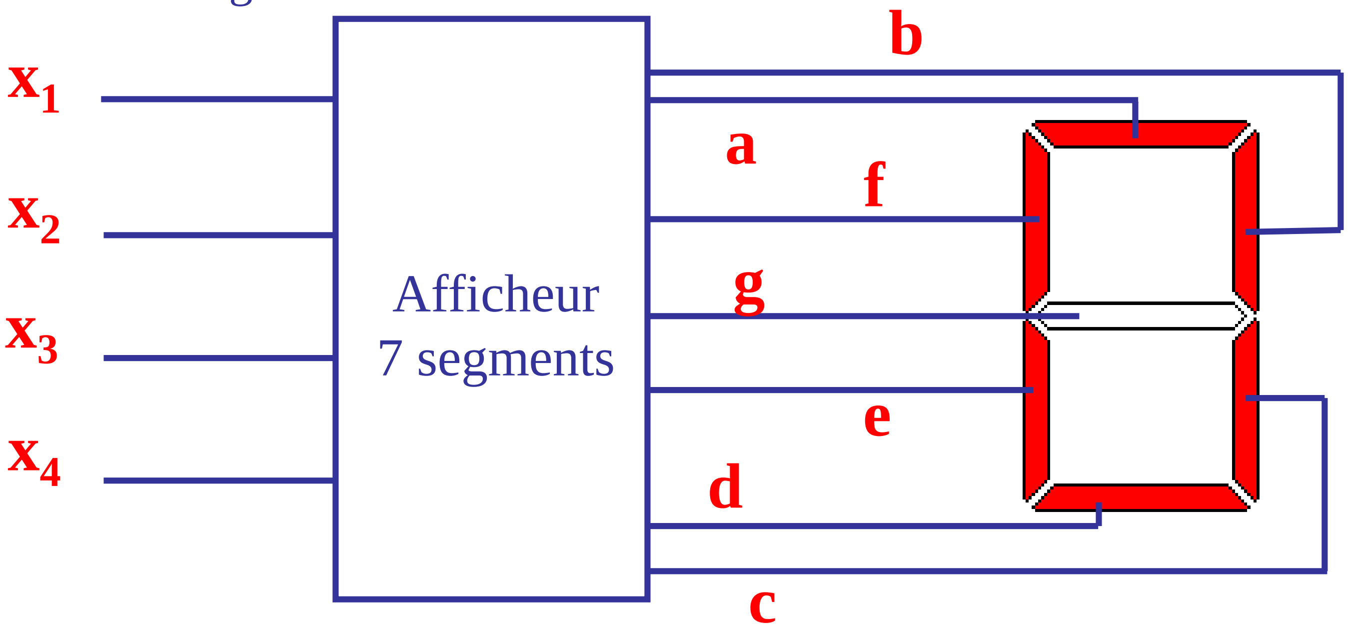
$a.b.\overline{c}$

Forme minimale : $Z(d,c,b,a) = \overline{b}.c + a.b.\overline{d} + a.d.\overline{c}$

Chapitre 2 : fonctions incomplètement spécifiées

Si pour diverses raisons (technologiques, physiques,…), k valeurs sont non spécifiées, la méthode de simplification se trouve modifiée :

Cas de l'afficheur 7 segments



La sortie a est égale à 1, le segment horizontal le plus haut, commandé par cette variable s'allume (même chose pour b,c,d,e,f,g). Ce système comporte 4 entrées (x_1,x_2,x_3,x_4) et 7 sorties (a,b,c,d,e,f,g,h).

Chapitre 2 : fonctions incomplètement spécifiées

Table de vérité :

	x_4	x_3	x_2	x_1	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
11	1	0	1	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
12	1	1	0	0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
13	1	1	0	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
14	1	1	1	0	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ
15	1	1	1	1	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ	Φ

Si pour diverses raisons (technologiques, physiques,…), k valeurs sont non spécifiées, la méthode de simplification se trouve modifiée :

- Recherche des impliquants premiers : on commence par déterminer les groupements de 1 ou de conditions indéfinies les plus grands possibles (impliquants premiers).
- Sélectionner, parmi tous les impliquants premiers, tous ceux qui couvrent au moins une case qu'ils sont les seuls à couvrir (impliquants premiers essentiels).

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11	Φ	Φ	Φ	Φ
10	1	1	Φ	Φ

$x_3\overline{x_2}$

$\overline{x_3}x_2$

$x_2\overline{x_1}$

x_4

$g = x_4 + \overline{x_3}x_2 + x_3\overline{x_2} + x_2\overline{x_1}$

Les cas indéfini minimise le coût

6 opérateurs

$$\overline{x_4}x_3\overline{x_2}$$

$$\overline{x_4}\,\overline{x_3}x_2$$

$$\overline{x_4}x_2\overline{x_1}$$

$$x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2}$$

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$g = x_4\overline{x_3}\,\overline{x_2} + \overline{x_4}x_3\overline{x_2} + \overline{x_4}\,\overline{x_3}x_2 + \overline{x_4}x_2\overline{x_1}$$

11 opérateurs

Définir tous les cas minimise les risques