Programmation linéaire

Sécurité et aide à la décision

CM 02

Abdelkader Ouali
abdelkader.ouali@unicaen.fr

Université de Caen Normandie, 14032 Caen, France.

2020

Rappel

Rappel

Un PL comporte 3 éléments :

- Les variables : les inconnus du problème
- Les contraintes : ce qui caractérise une solution
- La fonction objectif : ce qu'on veut minimiser/maximiser

Rappel : Modélisation

- Les expressions des contraintes et de la fonction objectif sont linéaires
- Les variables doivent être multipliées par des constantes et non **pas** par d'autres variables

Rappel : Modélisation

Types d'un PL :

- **PL** : les variables sont réelles
- **PLNE** : les variables sont entières
- **PL 0/1** : les variables sont binaires
- **MILP** : certaines variables sont réelles et d'autre sont entières (ou binaire)

PL 0/1

- Les variables ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1
- Utilisé dans des problèmes de décision

Exemple :

- Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

PL 0/1

- Les variables ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1
- Utilisé dans des problèmes de décision

Exemple :

- Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

- Les variables désigne l'affection d'une couleur à un nœud
- 2 couleurs * 3 nœuds = 6 variables booléennes
- A1, A2, B1, B2, C1, C2

PL 0/1

Affecter les couleurs :

- $A1 + A2 = 1$
- $B1 + B2 = 1$
- $C1 + C2 = 1$

➠

Minimiser les couleurs :

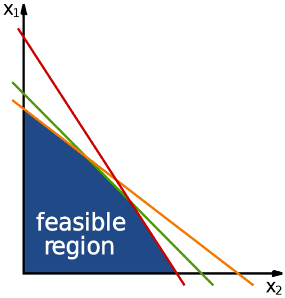
- $A1 + B1 - arc11 \leq 1$
- $A2 + B2 - arc12 \leq 1$
- $B1 + C1 - arc21 \leq 1$
- $B2 + C2 - arc22 \leq 1$

Fonction objectif :

➠ min : $arc11 + arc12 + arc21 + arc22$

Rappel : résolution graphique

- S'utilise pour résoudre un problème à 2 variables (ou 3)
- Techniquement applicable à 4+
- Chaque **axe** représente une **variable**
- Les contraintes **délimitent** la zone de **solutions**
- La solution optimale, si elle existe, est un des **sommets** du polygone

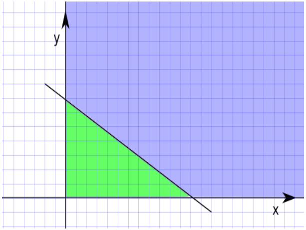


Rappel : résolution graphique

Inégalités :

- $x_1 + 2x_2 \leq 12$
- $x_1, x_2 \geq 0$

- $x + 2y = 12$
- $2y = 12 - x$
- $y = 6 - 0.5x$



- Si on a un $\leq$ alors les solutions sont sous la droite
- Si $\geq$ au-dessus

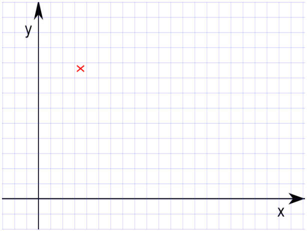
Équations :

- c1 : $y = 12 - x$
- c2 : $y = 5 + x$

- $5 + x = 12 - x$
- $2x = 12 - 5$
- $2x = 7$
- $\mathbf{x = 3.5}$

- $y = 5 + x$
- $y = 5 + 3.5$
- $\mathbf{y = 8.5}$

- solution $= (3.5,\ 8.5)$



Simplexe

Simplexe

- Algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire
- PL en nombres réels
- Se découpe en 3 étapes :
  1. mise en forme standard
  2. initialisation d'une solution base
  3. progression

Forme standard

- Variables à droite, constante positive à gauche
- Variables **d'écart** pour les contraintes de type $\leq$
- Variables **d'excédent** pour les contraintes de type $\geq$
- $x = x^- - x^+$ avec $x^-, x^+ \geq 0$ si x est non restreinte
- PL sous forme **standard**, toutes les variables **sont** ≥ 0, toutes les contraintes sont des **égalités**

$$\begin{aligned} \text{Ex} : Max\, Z &= 1000\,x_1 + 1200\,x_2 \\ s.c.\ 10\,x_1 + 5x_2 &\leq 200 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ x_1 &\leq 34 \\ x_2 &\leq 14 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex} : Max\, Z &= 1000\,x_1 + 1200\,x_2 \\ s.c.\ 10\,x_1 + 5x_2 + e_1 &= 200 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 &= 60 \\ x_1 + e_3 &= 34 \\ x_2 + e_4 &= 14 \\ x_1, x_2, e\_1, e\_2, e\_3, e\_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Initialisation

- Trouve une solution de base réalisable
- ou bien détecte l'infaisabilité
- On exprime les variables **de base** (initialement les variables d'écart) en fonction des variables **hors base**
- Une solution de **base réalisable** est obtenue en annulant les variables hors base

Progression

- On passe d'un sommet à un sommet voisin
- Tout en **augmentant** la valeur de la fonction objectif
- Ou on détecte une fonction objectif **non majorée**
- On exprime la nouvelle variable de base en fonction des variables hors base

Variables entrantes

- La variable ayant le **plus grand coefficient positif**
- Si toutes les variables sont ≤ 0 alors on ne peut plus augmenter, on a atteint la solution **optimale**

Variables sortantes

- Première variable qui s'annule quand on augmente la variable entrante
- La plus **petite** des variables, non nulle

Exemple

Exemple

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

forme canonique

$$\max F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

forme standard

Exemple

- **Dictionnaire** : On exprime les variables de base e_1, e_2, e_3 en fonction des variables hors-base x_1, x_2.

$e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2$
$e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2$
$e_3 = 20 - 2x_1 - x_2$
$F = 6x_1 + 4x_2$

- *Solution de base réalisable initiale* :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ e_1 = 81,\ e_2 = 55,\ e_3 = 20 \text{ avec } F = 0.$$

- *Variable entrante* x_e : $\max\limits_{>0}\{6,\ 4\} = 6 \Rightarrow \boxed{x_e = x_1}$.

- *Variable sortante* x_s : on maintient les contraintes $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $e_3 \geq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \min_{>0}\{\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{20}{2}\} = 10 \Rightarrow \boxed{x_s = e_3}.$$

- *Nouvelle Solution de base réalisable* :

$$\boxed{x_1 = 10}, x_2 = 0,\ e_1 = 51,\ e_2 = 15,\ \boxed{e_3 = 0} \text{ avec } F = 60.$$

Exemple

$$\begin{array}{l} x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 81 - 3(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 5x_2 \\ \hline F = 6(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) + 4x_2 \end{array}$$

ce qui donne le dictionnaire :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2 = 15 - 3x_2 + 2e_3 \\ \hline F = 60 + x_2 - 3e_3 \end{array}}$$

Variable entrante x_e : $\max\limits_{>0}\{1, \ -3\} = 1 \Rightarrow \boxed{x_e = x_2}$.

Variable sortante x_s : on maintient $x_1 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_2 = \min_{>0}\{\frac{10}{1/2}, \frac{51}{15/2}, \frac{15}{3}\} = 5 \Rightarrow \boxed{x_s = e_2}.$$

Nouvelle Solution de base réalisable (étape 2) :

$$x_1 = \frac{15}{2}, \ \boxed{x_2 = 5}, e_1 = \frac{27}{2}, \ \boxed{e_2 = 0}, e_3 = 0 \text{ avec } F = 65.$$

Outils en ligne

https://www.zweigmedia.com/simplex/simplex.php

Tableau 1:

	x	y	s1	s2	s3	p	
s1	3	9	1	0	0	0	81
s2	4	5	0	1	0	0	55
s3	2	1	0	0	1	0	20
p	−6	−4	0	0	0	1	0

Tableau 2:

	x	y	s1	s2	s3	p	
s1	0	7.5	1	0	−1.5	0	51
s2	0	3	0	1	−2	0	15
x	1	0.5	0	0	0.5	0	10
p	0	−1	0	0	3	1	60

Tableau 3:

	x	y	s1	s2	s3	p	
s1	0	0	1	−2.5	3.5	0	13.5
y	0	1	0	0.333333	−0.666667	0	5
x	1	0	0	−0.166667	0.833333	0	7.5
p	0	0	0	0.333333	2.33333	1	65

Complexité

Méthode du simplexe : on explore seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ on réduit le nombre de solution de base à explorer.

Complexité = nombre d'itération dans le simplexe (phase2).

- On peut construire des exemples avec une complexité **exponentielle** en $\mathcal{O}(2^n)$ itérations (Klee-Minty, 1972).
- Mais dans la pratique la complexité du simplexe croît peu avec le nombre n de variables. En pratique, le nombre d'itérations est proportionnel au nombre m de contraintes (de m à $3m$ itérations).

Autre méthodes

- La méthode de l'ellipsoïde
- Les méthodes affines
- Les méthodes de point intérieurs

Séparation et évaluation
Branch and Bound

- Utilisée pour résoudre des PLNE, PL 0/1 et MILP
- Un sous ensemble de variable dont les valeurs sont entières

- Une solution **n'est pas forcément un sommet** du polyèdre !
  - parcourir toutes les solutions de l'espace de recherche
  - **explosion combinatoire**

- **Principe** :
  - Résoudre la relaxation
    ➥ **toutes les variables** sont définies dans $\mathbb{R}$
  - Si une **variable entière** reçoit une **valeur réelle**
    ➠ créer deux nœuds où **les valeurs** de la variable dans chaque nœud est **la partie entière (-/+) de la valeur réelle**
    (e.g. . . . ,**3**, **3.7**, **4**,. . .)
  - Dans chaque nœuds
    ➠ évaluer la **borne inférieure** pour éviter d'explorer inutilement certaines branches.

Séparation et évaluation
Branch and Bound