Correction du DM2

Exercice 1 Session2 2018-2019

1. Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B. Donner la définition de $\ll f$ est injective $\gg$ et de $\ll f$ est surjective $\gg$.
2. On considère les fonctions f , g et h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & (x-y,xy) \\ g(x,y) & = & (x,0) \\ h(x,y) & = & (2x+y,x-y) \end{array}$$

   — Est-ce que f et g sont injectives ? surjectives ?

   — Montrer que h est une fonction bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer son application réciproque h^{-1}.

Solution

— f est injective si et seulement si tout élément b de B a **au plus** un antécédent par f
f est surjective si et seulement si tout élément b de B a **au moins** un antécédent par f.
f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

— On remarque que $f(1,1)=(0,1)=f(-1,-1)$
$(0,1)$ possède au moins deux antécédents donc f n'est pas injective et donc f n'est pas bijective.
Si on cherche des antécédents par f du couple (0,-1) , on doit chercher (x,y) tels que $x-y=0$ et $xy=-1$.
On obtient donc $x=y$ et $x^2=-1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc (0,-1) n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.

— On remarque que $g(1,0)=g(1,1)=(1,0)$ donc g n'est pas injective. g n'est donc pas non plus bijective.
Par ailleurs $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(x,0)$ donc le couple $(1,1)$ ne peut pas avoir d'antécédent et donc g n'est pas surjective.

— Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Cherchons les antécédents de (a,b) c'est à dire les couples (x,y) tels que $h(x,y)=(a,b)$. On a $(a,b)=(2x+y,x-y)$ ce qui est équivalent à $a=2x+y$ et $b=x-y$
En additionnant les deux égalités on obtient $x=(a+b)/3$ puis $y=(a-2b)/3$

On en déduit que tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ possède exactement un antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par h qui est $((a+b)/3,(a-2b)/3)$.
Donc h est bijective et $h^{-1}(a,b)=((a+b)/3,(a-2b)/3)$.

Exercice 2 Session2 2018-2019
Soient E un ensemble et A,B, C , D des sous-ensembles de E tous non vides.
On considère les ensembles $F=(A\cap B)\times(C\cap D)$ et $G=(A\times C)\cap(B\times D)$.

1. Donnez les ensembles F et G lorsque $E=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,2,3\}$ et $D=\{1,3,4\}$.
2. Montrez que l'on a toujours $F\subset G$.
3. A-t-on aussi $G\subset F$?

Solution

— On a $F = (A \cap B) \times (C \cap D) = \{1\} \times \{1,3\} = \{(1,1),(1,3)\}$
et $G = (A \times C) \cap (B \times D) = \{((1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \cap \{(1,1)(1,3),(1,4),(3,1),(3,3),(3,4)\} = \{(1,1),(1,3)\}$

— Soit $(x,y) \in F$. Donc $(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ Alors $x \in (A \cap B)$ et $y \in (C \cap D)$ alors $x \in A$ et $x \in B$ et $y \in C$ et $y \in D$.
Donc $(x,y) \in A \times C$ et $(x,y) \in B \times D$
Donc $(x,y) \in A \times C \cap B \times D$
Donc $(x,y) \in G$.

On a donc $F \subset G$.

— L'inclusion inverse est aussi vraie.
Soit $(x,y) \in G$ Alors $(x,y) \in A \times C \cap B \times D$
Donc $(x,y) \in A \times C$ et $(x,y) \in B \times D$
Donc $x \in A$ et $y \in C$ et $x \in B$ et $y \in D$. Alors $x \in (A \cap B)$ et $y \in (C \cap D)$
Donc $(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ Donc $(x,y) \in F$
On a donc aussi $G \subset F$ donc $F = G$.
Remarque : on aurait pu montrer l'égalité en une seule fois en travaillant avec des équivalences.
Par ailleurs, si on remplace $\cap$ par $\cup$, l'égalité n'est pas vérifiée dans tous les cas.