Correction du DM3

Exercice 1 (Session2 : 2018-2019)
Un site internet veut générer automatiquement un mot de passe lorsqu'une personne crée un compte. Ces mots de passe doivent comporter 10 caractères pris parmi les 26 minuscules de l'alphabet, les 10 chiffres de 0 à 9 et les quatre symboles $\$, @, +$ et $*$.
Avant de choisir et de paramétrer le générateur, un responsable se pose des questions sur le nombre de mots de passe différents que l'on obtiendra selon les contraintes imposées au générateur.
Vous devez impérativement expliquer comment vous obtenez chacun des résultats pour chacune des questions suivantes.

1. Combien de possibilités a-t-on pour chaque caractère du mot de passe ?
   En déduire le nombre de mots de passe possibles.

   Il y a 26 *lettres,* 10 *chiffres et* 4 *symboles. Donc* 40 *caractères au total. Il s'agit de faire* 10 *choix successifs d'un caractère, avec* 40 *possibilités pour le premier choix,* 40 *possibilités pour le deuxième,* $\dots$*,* 40 *possibilités pour le dernier. Alors il y a en tout* $\mathbf{40^{10}}$ **mots de passe**.

2. Combien de mots de passe qui ne contiennent pas de symbole ?

   Si on enlève les 4 *symboles, il reste seulement* 36 *possibilités pour choisir chaque caractère. Avec le principe de choix successifs, on a* $\mathbf{36^{10}}$ **mots de passe qui ne contiennent pas de symbole**.

3. Combien y-a-t-il de mots comportant des caractères tous différents ?

   Un mot de passe de 10 *caractères tous différents conrrespond à un arrangement de* 10 *caractères parmi* 40*. Il y a donc* $\boldsymbol{A_{40}^{10} = \frac{40!}{30!}}$ **mots de passe.** *On peut aussi utiliser le principe de choix successifs. Ici on fait les choix successifs de* 10 *caractères avec* 40 *possibilités pour le premier choix,* 39 *possibilités pour le deuxième,* $\dots$*,* 31 *possibilités pour le dernier. Alors il y a en tout* $\mathbf{40 \times 39 \times \dots \times 31}$ **mots.**

4. Combien de mots comportent au moins un caractère égal à @ ?

   Le nombre de mots de passe comportant au moins un caractère égal à @ est égal au nombre total des mots de passe possibles moins le nombre de mots de passe ne comportant **aucun @**.
   Il y a 39^{10} *mots de passe sans le caractère @ (on fait* 10 *choix successifs d'un caractère, avec* 39 *possibilités pour le premier choix,* 39 *possibilités pour le deuxième,* $\dots$*,* 39 *possibilités pour le dernier). Alors on a* $\mathbf{40^{10} - 39^{10}}$ **mots de passe qui comportent au moins un caractère égal à @.**

5. Combien de mots ont au plus 2 caractères qui sont des chiffres ?Détaillez les étapes nécessaires pour répondre à cette question.

   Soit A *"l'ensemble de mots de passe avec au plus* 2 *caractères qui sont des chiffres". On cherche card*(A)*. On note* A_2 *"l'ensemble de mots de passe avec exactement* 2 *caractères* *chiffres", A_1 "l'ensemble de mots de passe avec exactement 1 caractère chiffre", A_0 "l'ensemble de mots de passe sans le caractère chiffre". Alors*

$$card(A) = card(A_0) + card(A_1) + card(A_2).$$

• **card($\mathbf{A}_0$)** : *(que des lettres et des symboles)*

Il s'agit de faire 10 choix successifs de caractères avec 30 possibilités pour chaque caractère. Donc $card(A_0) = 30^{10}$

• **card($\mathbf{A}_1$)** : *On fait* 10 *choix successifs de caractères avec* 10 *possibilités pour choisir le chiffre,* 30 *possibilités pour choisir chacun des* 9 *caractères restants. Comme il y a* 10 *façons différentes pour placer le chiffre choisi, on a* $card(A_1) = 10 \times 10 \times 30^9$.

• **card($\mathbf{A}_2$)** : *On fait* 10 *choix successifs de caractères avec* 10 *possibilités pour choisir le premier chiffre,* 10 *possibilités pour choisir le deuxième chiffre,* 30 *possibilités pour choisir chacun des* 8 *caractères restants. Comme il y a* C_{10}^2 *façons différentes pour placer les 2 chiffres choisis, on a* $card(A_2) = 10^2 \times 30^8 \times C_{10}^2$. *On en déduit que*

$$\boldsymbol{card(A) = card(A_0) + card(A_1) + card(A_2) = 30^{10} + 10^2 \times 30^9 + 10^2 \times 30^8 \times C_{10}^2}.$$

6. Le générateur a sélectionné les caractères suivants : @@@*ooabcde*.
(a) Combien de mots de passe peut-on former avec ces 10 caractères ?
<u>Première méthode :</u>

Il y a C_{10}^3 façons pour placer les 3 "@" ensuite C_7^2 façons pour placer les 2 "o". Il reste 5 lettres différentes à permuter avec 5! possibilités. Alors on a $\boldsymbol{C_{10}^3 \times C_7^2 \times 5!}$ **mots de passe avec les caractères séléctionnés.**

<u>Deuxième méthode :</u>

On a 10 caractères sélectionnés dont 3 "@" et 2 "o". Le nombre de mots de passe est le nombre de permutations des 10 caractères donc 10!. *Mais il y a* 3! *façons de placer les 3 "@" pour chaque mot. Alors chaque mot est obtenu* 3! *fois. De plus, il y a* 2! *façons de placer les 2 "o" pour chaque mot et donc chaque mot est obtenu* 2! *fois. On en déduit qu'il y a* $\boldsymbol{\frac{10!}{3!\,2!}}$ **mots de passe différents**. .

(b) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, calculez le nombre de mots de passe ne comportant ni le bloc @@@ ni le bloc *oo*.

Soit A "l'ensemble de mots de passe contenant le bloc @@@" et

B "l'ensemble de mots de passe contenant le bloc *oo*".
On cherche $card(\overline{A \cup B})$. D'aprés le le principe d'inclusion-exclusion, on a

$$card(\overline{A \cup B}) = \underbrace{C_{10}^3 \times C_7^2 \times 5!}_{\textit{Tous les mots de passes}} - card(A) - card(B) + card(A \cap B).$$

• $\boldsymbol{card(A) = 8 \times C_7^2 \times 5!}$ car il y a 8 façons pour placer le bloc "@@@" et C_2^7 façons pour placer les 2 "o" et enfin 5 ! permutrations pour les 5 lettres restantes

(toutes différentes).
• $\boldsymbol{card(B) = 9 \times C_8^3 \times 5!}$ car il y a 9 façons pour placer le bloc "oo" et C_8^3 façons pour placer les 2 "o" et enfin 5 ! permutations pour les 5 lettres restantes (toutes différentes).
• $\boldsymbol{card(A \cap B) = 7!}$ car il s'agit d'une permutration de 7 caractéres différents (le bloc "@@@", le bloc "oo", a, b, c, d, e).
Donc le nombre de mots de passe ne comportant ni le bloc @@@ ni le bloc oo est égal à :

$$\boldsymbol{C_{10}^3 \times C_7^2 \times 5! - 8 \times C_7^2 \times 5! - 9 \times C_8^3 \times 5! + 7!.}$$

Exercice 2 Raisonnement sur le temps en intelligence artificielle
L'un des raisonnements les plus naturels concerne le temps. En intelligence artificielle, les tâches, les activités de la vie de tous les jours sont représentées par des intervalles. Ainsi exprimer ≪ avant l'examen, j'ai révisé ≫se modélise par ≪ R est avant E ≫avec R l'intervalle de temps de révision, E celui de l'examen et ≪ est avant ≫une relation entre intervalles.

Dans cet exercice, nous utilisons la notation suivante : si I est un intervalle de temps, nous noterons d_I le début de I et f_I la fin de I, c'est-à-dire $I = [d_I, f_I]$. Nous considérerons les trois relations suivantes sur les intervalles de temps :

1. ≪ A est avant B ≫
$$A \ \Re_1 \ B \text{ lorsque } f_A \leq d_B.$$
2. Relation ≪ A est durant B ≫
$$A \ \Re_2 \ B \text{ lorsque } d_B < d_A \text{ et } f_A < f_B.$$
3. Relation ≪ A commence au même moment que B ≫
$$A \ \Re_3 \ B \text{ lorsque } d_A = d_B \text{ et } f_A \neq f_B.$$

1. Pour ces trois relations binaires, quelles sont les propriétés vérifiées parmi les suivantes : réflexivité, irréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité ?

• <u>**La relation $\Re_1$:**</u>
— Réflexivité : si $A = [1, 2]$, alors $d_A = 1 < 2 = f_A$. Donc $A \not\Re_1 A$. Alors $\Re_1$ **n'est pas réflexive.**
— Irréflexivité : pour tout $A = [d_A, f_A]$,
$$\neg(A\Re_1 A) \Leftrightarrow \neg(f_A \leq d_A) = d_A < f_A,$$
qui n'est pas toujours vrai comme le cas d'un intevalle A réduit à un point. Donc $\Re_1$ **n'est pas irréflexive.**
— Symétrie : si $A = [1, 3]$ et $B = [3, 5]$ alors $A\Re_1 B$ mais $B\not\Re_1 A$. Donc $\Re_1$ **n'est pas symétrique.**
— Antisymétrie : Soient $A = [d_A, f_A]$ et $B = [d_B, f_B]$ tels que $A\Re_1 B$ et $B\Re_1 A$. Alors ($f_A \leq d_B$ et $f_B \leq d_A$). Comme par définition de l'intervalle, ($d_A \leq f_A$) et ($d_B \leq f_B$), on déduit que $d_A = d_B = f_A = f_B$. Donc $A = B$ (intervalle réduit à un point dans ce cas). Alors $\Re_1$ **est antisymétrique.**

— Transitivité : Soient $A = [d_A, f_A]$, $B = [d_B, f_B]$ et $C = [d_C, f_C]$ tels que $A\Re_1 B$ et $B\Re_1 C$. Alors par définition on a ($f_A \leq d_B$ et $f_B \leq d_C$), ce qui implique que $f_A \leq d_C$. On en déduit que $A\Re_1 C$. Donc $\Re_1$ **est transitive.**

- **La relation $\Re_2$:**

— Réflexivité : soit $A = [d_A, f_A]$. Alors $A\Re_2 A \Leftrightarrow (d_A < d_A$ et $f_A < f_A)$ (impossible) donc $\Re_2$ **n'est pas réflexive.**

— Irréflexivité : pour tout $A = [d_A, f_A]$, $\neg(A\Re_2 A)$ est vraie car $\neg(d_A < d_A$ et $f_A < f_A) = (d_A \geq d_A$ ou $f_A \geq f_A)$. Donc $\Re_2$ **est irréflexive.**

— Symétrie : si $A = [3, 4]$ et $B = [2, 5]$ alors $A\Re_2 B$ mais $B\not\Re_2 A$. Donc $\Re_2$ **n'est pas symétrique.**

— Antisymétrie : Soient $A = [d_A, f_A]$ et $B = [d_B, f_B]$. L'antisymétrie n'est pas en défaut puisque les inégalités ($d_B < d_A$ et $d_A < d_B$), ($f_A < f_B$ et $f_B < f_A$) ne peuvent avoir lieu conjointement. Donc $\Re_2$ **est antisymétrique.**

— Transitivité : Soient $A = [d_A, f_A]$, $B = [d_B, f_B]$ et $C = [d_C, f_C]$ tels que $A\Re_2 B$ et $B\Re_2 C$. Alors ona :

$$\begin{aligned}
(A \;\Re_2 B) \wedge B \;\Re_2\; C) &\iff (d_B < d_A \text{ et } f_A < f_B) \wedge (d_C < d_B \text{ et } f_B < f_C)\\
&\iff (d_C < d_B \text{ et } d_B < d_A) \wedge (f_A < f_B \text{ et } f_B < f_C)\\
&\implies (d_C < d_A \text{ et } f_A < f_C)\\
&\implies A\Re_2 C.
\end{aligned}$$

Alors $\Re_2$ **est transitive.**

- **La relation $\Re_3$:**

— Réflexivité : soit $A = [d_A, f_A]$. Alors $A\Re_3 A \Leftrightarrow (d_A = d_A$ et $f_A \neq f_A$ (impossible)). Donc $\Re_3$ **n'est pas réflexive.**

— Irréflexivité : pour tout $A = [d_A, f_A]$, $\neg(A\Re_3 A)$ est vraie car $\neg(d_A = d_A$ et $f_A \neq f_A)$ $= (d_A \neq d_A$ ou $f_A = f_A)$. Donc $\Re_3$ **est irréflexive.**

— Symétrie : Soient $A = [d_A, f_A]$ et $B = [d_B, f_B]$ tels que $A\Re_3 B$. Alors ($d_A = d_B$ et $f_A \neq f_B$) ce qui implique que $B\Re_3 A$. Donc $\Re_3$ **est symétrique**.

— Antisymétrie : si $A = [1, 3]$ et $B = [1, 4]$ alors $A\Re_3 B$ et $B\Re_3 A$ mais pourtant $A \neq B$. Donc $\Re_3$ **n'est pas antisymétrique.**

— Transitivité : Soient $A = [0, 1]$, $B = [0, 3]$ et $C = [0, 1]$. Alors $A\Re_3 B$ et $B\Re_3 C$ mais $A\not\Re_3 C$. Donc $\Re_3$ **n'est pas transitive.**

2. En déduire lesquelles sont des relations d'équivalence et des relations d'ordre (en précisant le cas échéant si l'ordre large ou stricte, partielle ou totale).

   — La relations $\Re_1$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni réflexive ni symétrique. Elle n'est ni une relation d'ordre partiel strict ni une relation d'ordre partiel large car elle n'est ni réflexive ni irréflexive.

— La relation $\Re_2$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni réflexive ni symétrique. Elle est une relation d'ordre partiel strict car elle est irréflexive et transitive (donc antisymétrique). L'ordre est partiel car par exemple $[1,3]$ et $[2,4]$ ne sont pas comparables.

— La relation $\Re_3$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est ni réflexive ni transitive. Elle n'est pas non plus une relation d'ordre car elle n'est ni irréflexive ni transitive.

3. Montrez que l'on a
$$(A \ \Re_1 B \wedge C \ \Re_2 \ B) \implies A \ \Re_1 C.$$

On suppose que $(A \ \Re_1 B \wedge C \ \Re_2 \ B)$ *et on montre que* $A \ \Re_1 C$.
Par définition des relations $\Re_1$ *et* $\Re_2$*, on a :*

$$\begin{aligned}
(A \ \Re_1 B) \wedge C \ \Re_2 \ B \quad & \iff \quad (f_A \leq d_B) \text{ et } (d_B < d_C \text{ et } f_C < f_B) \\
& \implies \quad f_A \leq d_B < d_C \\
& \implies \quad f_A < d_C \\
& \implies \quad f_A \leq d_C \\
& \implies \quad A \Re_1 C
\end{aligned}$$