TD8 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1

1. On rappelle qu'une transposition est un cycle de longueur 2. On considère l'algorithme de tri bulle, travaillant sur une séquence de n éléments , $(t_j)_{1\leq j\leq n}$:

   Pour i allant de 1 à $n-1$,

   Pour j allant de 1 à $n-i$,

   Si $t_j > t_{j+1}$ alors échanger t_j et t_{j+1}.

   Faire exécuter l'algorithme sur la séquence d'entrée $4, 5, 1, 2, 3$. Remarquer que pendant l'exécution de l'algorithme, à chaque fois que la séquence est modifiée, la transformation appliquée à la séquence est une **transposition**.

2. Justifier brièvement que lorsque l'algorithme précédent est lancé sur un arrangement de $\{1, \ldots, n\}$, il termine toujours et à la fin, la séquence $(t_j)_{1\leq j\leq n}$ sera toujours la séquence totalement ordonnée $1, 2, \ldots n$.

3. En déduire que toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ se décompose en produit de transpositions. Donner la décomposition en transpositions de la permutation suivante, fournie par l'algorithme de tri bulle.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Quel est le sous–groupe de S_n engendré par les transpositions $((j, j+1))_{1\leq j<n}$.

5. On considère l'algorithme de tri sélection , travaillant sur une séquence de n éléments , $(t_j)_{1\leq j\leq n}$:

   Pour i allant de 1 à $n-1$,

   $indice = 1$

   Pour j allant de 2 à $n-i+1$,

   Si $t_j > t_{indice}$ alors $indice = j$.

   échanger t_{indice} et t_{n-i+1}.

6. Montrer que l'algorithme précédent, lancé sur un arrangement de $\{1, \ldots, n\}$, termine toujours et à la fin, la séquence $(t_j)_{1\leq j\leq n}$ sera ici aussi la séquence totalement ordonnée $1, 2, \ldots n$.

7. Donner la décomposition en produit de transpositions de la permutation
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   par l'algorithme de tri séléction.

8. En déduire que la décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'est pas unique.

Exercice 2 . Montrer que les sous-groupes engendrés par les sous-ensembles suivants sont S_n. (On dit que S_n est engendré par les ensembles suivants.)

1. les transpositions de type $(1, i)$, pour $2 \leq i \leq n$: $(1, 2), (1, 3), \ldots (1, n)$ (preuve vue en cours)
2. les transpositions de type $(i, i+1)$, pour $1 \leq i \leq n-1$: $(1, 2), (2, 3), \ldots (n-1, n)$
3. les deux cycles $(1, 2)$ et $(1, 2, \ldots, n)$.