TD9 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1 .

Remarque: sgn(α) est aussi noté $\varepsilon(\alpha)$. C'est le cas, dans le cours sur ecampus.

1. On sait que dans tout groupe $(G,.)$, si $c_1,\dots c_k \in G$, alors $(c_1c_2\dots c_{k-1}c_k)^{-1} = c_k^{-1}c_{k-1}^{-1}\dots c_2^{-1}c_1^{-1}$ et si $\alpha \in S_n$ est un cycle $c = (i_1\ i_2\ \dots\ i_{r-1}\ i_r)$, alors $c^{-1} = (i_r\ i_{r-1}\ \dots\ i_2\ i_1)$. Enfin, on sait que la décomposition complète d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints est unique. Si la décomposition complète de α en cycles à supports disjoints est $\alpha = c_1c_2\dots c_{t-1}c_t$ alors la décomposition complète de α^{-1} s'obtient aisément à partir de celle de α :

   $$\alpha^{-1} = c_t^{-1}c_{t-1}^{-1}\dots c_2^{-1}c_1^{-1}.$$

   Il n'est d'ailleurs pas nécessaire ici d'inverser l'ordre des facteurs dans le produit, car les cycles à supports disjoints commutent.

   Les permutations α et α^{-1} ont donc exactement le même nombre de cycles dans leurs décompositions complètes et donc la même signature.

2. Le nombre t' de cycles dans la décomposition complète de σ' est $t-1$, où t est le nombre de cycles dans la décomposition complète de σ. Par ailleurs, $\sigma' \in S_{n-1}$. On a donc:
   $\mathrm{sgn}(\sigma') = (-1)^{(n-1)-t'} = (-1)^{(n-1)-(t-1)} = (-1)^{n-t} = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Exercice 2 . On note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ. Soit $\sigma \in S_n$ un cycle de longueur $r \leq n$. La décomposition complète de σ a exactement $n-r+1$ cycles (un cycle de longueur r et exactement $n-r$ cycles de longueur 1). Donc,

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-(n-r+1)} = (-1)^{r-1}.$$

Pour que la signature de σ soit égale à 1, il faut et il suffit que $r-1$ soit pair, ou encore r impair.

Exercice 3 .

1. On calcule les images de $0,1,2,\dots,10$ par f et on vérifie que chaque élément de $\{0,1,2,\dots,10\}$ a exactement un antécédent. f est la permutation donnée par la table:

   $$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & 5 & 3 & 10 & 2 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. On calcule la décomposition complète de f en cycles de supports disjoints:

   $$f = (0)\ (1)\ (2\ 6\ 10\ 7)\ (3\ 9\ 4\ 5)\ (8).$$

   On obtient donc $\varepsilon(f) = (-1)^{11-5} = (-1)^6 = 1$.

3. $$f^{-1} = (0)\ (1)\ (7\ 10\ 6\ 2)\ (5\ 4\ 9\ 3)\ (8) = (7\ 10\ 6\ 2)\ (5\ 4\ 9\ 3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 9 & 4 & 2 & 10 & 8 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 .

1. Non, on sait (cf. TD7) que l'ordre d'un cycle de longueur r est r. Par ailleurs, si x est un élément d'ordre r d'un groupe G, $\mathrm{ordre}(x^k) = ppcm(r,k)/k$. Si r et k ne sont pas premiers entre eux, alors $ppcm(r,k) < rk$ et $\mathrm{ordre}(x^k) = ppcm(r,k)/k < r$. Donc si α est un cycle de longueur r et r et k ne sont pas premiers entre eux, α^k n'est pas un cycle de longueur r (sinon, il devrait être d'ordre r).

2. Soit r l'ordre de $\alpha = (i_1 \ \dots \ i_r)$. On a $\alpha^2(i_1) = i_3$, $\alpha^2(i_3) = i_5$, $\dots \alpha^2(i_{r-2}) = i_r$, $\alpha^2(i_r) = (i_2)$, $\alpha^2(i_2) = i_4$, $\dots$, $\alpha^2(i_{r-3}) = i_{r-1}$, et enfin $\alpha^2(i_{r-1}) = i_1$. Ainsi lorsque l'on calcule les images successives de i_1 par α^2, on parcourt d'abord successivement tous les i d'indices impairs, puis tous les i d'indices pairs avant de retomber sur i_1, au bout de la r-ième itération exactement. Donc dans la décomposition de α^2 en cycles de rapports disjoints, il y au moins un cycle de longueur r.

   Par ailleurs, les éléments invariants par α, le sont aussi par α^2. On en déduit que α^2 est bien un cycle de longueur r.

Exercice 5 .

1. Par définition de α^{-1}, on a : $\alpha(i) = j \iff \alpha^{-1}(j) = i$, d'où le résultat.

2. Supposons par l'absurde, que le support de β contient un élement i. On a alors $\beta(i) = j \neq i$ et j serait aussi dans le support de β (sinon $\beta(j) = j$ serait en contradiction avec $\beta(i) = j$, $i \neq j$ et l'injectivité de β)

   Comme α et β sont de supports disjoints, j n'est pas dans le support de α et on a $\alpha(\beta(i)) = \alpha(j) = j$. Mais $\alpha\beta = id$ implique alors que $i = j$, ce qui contredit $i \neq j$.

   On en déduit que le support de β est vide, ou encore $\beta = id$, et par la suite $\alpha\beta = \alpha = id$.

Exercice 6 . Exercice déjà corrigé dnas le TD précédent.

Exercice 7 .

1. On a $\alpha \sim \alpha$, car $\alpha = id \ \alpha \ id^{-1}$, donc $\sim$ est réflexive.

   Si $\alpha \sim \beta$, alors il existe $\gamma \in S_n$ tel que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$. On a donc $\beta = \gamma^{-1}\alpha\gamma = \gamma^{-1}\alpha(\gamma^{-1})^{-1}$. Il existe donc $\gamma' = \gamma^{-1}$ tel que $\beta = \gamma'\beta\gamma'^{-1}$, donc $\beta \sim \alpha$ et $\sim$ est bien symétrique.

   Si $\alpha \sim \beta$ et $\beta \sim \delta$, il exitse $\gamma, \gamma' \in S_n$, tels que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$ et $\beta = \gamma'\delta\gamma'^{-1}$. On a alors $\alpha = \gamma\gamma'\delta\gamma'^{-1}\gamma^{-1} = \gamma\gamma'\delta(\gamma\gamma')^{-1}$. Il existe donc $\gamma'' = \gamma\gamma'$ tel que $\alpha = \gamma''\delta\gamma''^{-1}$, donc $\alpha \sim \delta$ et $\sim$ est bien transitive.

2. $\alpha = (2\ 1\ 5\ 3)\ (4\ 6\ 8)$.

3. oui $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$, avec par exemple $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Non, α et β sont conjuguées si et seulement si leurs décompositions en cycles disjoints ont le même nombre de cycles de longueur r, pour tout $r \geq 1$, ce qui n'est pas le cas ici.