Université de Caen — Année 2019 – 2020
UFR des Sciences

Licence Informatique deuxième année
Mathématiques discrètes
Contrôle continu- 24 octobre 2019
Durée 1 heure
Aucun document autorisé.
Calculatrices, ordinateurs , tablettes et téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants et peuvent être faits dans un ordre quelconque. Attention à bien soigner la rédaction des exercices, le barème tient compte de cette rédaction !

Exercice 1 Ensembles
Soient E un ensemble et A, B, C , D des sous-ensembles de E tous non vides.

1. Montrer que :
   $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (C \cup D)$?

2. Construire un contre-exemple pour montrer que l'on n'a pas toujours l'inclusion inverse
   $(A \cup B) \times (C \cup D) \subset (A \times C) \cup (B \times D)$

Exercice 2 Injection, surjection, bijection

Soit f une application d'un ensemble A dans un B.

1. Quand dit-on que f est une application injective ? surjective ? bijective ?
2. On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & (x + y^2,\, y^2) \end{array}$$

   Montrer que f n'est pas injective. Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
3. On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(x, y) \quad = \quad (2x + y, x - 2y)$$

   Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer son application réciproque g^{-1}

Exercice 3 Induction
On rappelle le schéma d'induction pour calculer la hauteur d'un arbre binaire :
i) L'arbre vide $\emptyset$ vérifie $h(\emptyset) = -1$
ii) Soient B et C deux arbres binaires et $A = (\bullet, B, C)$.

$$h(A) = sup(h(B), h(C)) + 1.$$

On définit inductivement un poids aux arbres binaires avec le schéma d'induction suivant :

i) L'arbre vide $\emptyset$ vérifie $M(\emptyset) = 0$

ii) Soient B et C deux arbres binaires et $A = (\bullet, B, C)$.

$$M(A) = 2sup(M(B), M(C)) + 1.$$

Montrez par induction que tout arbre binaire A vérifie

$$M(A) = 2^{h(A)+1} - 1.$$

Exercice 4 Relations

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \text{ lorsque } x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer sa classe d'équivalence.

Exercice 5 Combinatoire

1. Le mot JACQUES contient 4 consonnes (J,C,Q,S) et 3 voyelles (A,U,E).
   (a) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot JACQUES ?
   (b) Combien y-a-t-il d'anagrammes commençant et finissant par une consonne ?
   (c) Combien y-a-t-il d'anagrammes commençant et finissant par une voyelle ?
   (d) Combien y-a-t-il d'anagrammes commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
   (e) Combien y-a-t-il d'anagrammes ne contenant pas le mot EAU ?
2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot CHIRAC ? et "JACQUES CHIRAC" ? (on comptera l'espace comme une lettre.