Correction du CC du 24 octobre

Exercice 1 Ensembles

1. Soit $(x, y) \in F = (A \times C) \cup (B \times D)$.
   Alors $(x, y) \in (A \times C)$ ou $(x, y) \in B \times D$
   Donc ($x \in A$ et $y \in C$) ou ($x \in B$ et $y \in D$)
   Donc ($x \in A$ ou $x \in B$) et ($y \in B$ ou $y \in D$)
   Donc ($x \in A \cup B$) et ($y \in B \cup D$)
   Donc $(x, y) \in (A \cup B) \times (B \cup D)$

   On a donc $(A \times C) \cup (B \times D) \subset (A \cup B) \times (B \cup D)$.

2. L'inclusion inverse n'est pas vraie.
   Si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$ et $C = \{3\}$ et $D = \{4\}$
   Soit $A \times C = \{(1, 3)\}$ et $B \times D = \{(2, 4)\}$ donc $(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1, 3), (2, 4)\}$ Par ailleurs $A \cup B = \{1, 2\}$ et $C \cup D = \{3, 4\}$ donc $(A \cup B) \times (C \cup D) = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (1, 4)\}$
   L'inclusion inverse n'est donc pas vérifiée car par exemple $2, 3)$ appartient à $(A \cup B) \times (C \cup D)$ pas à $(A \times C) \cup (B \times D)$

remarques :

— *$A \times C$ est un ensemble de couples prendre $x \in A \times C$ ne peut avoir de sens que si ensuite vous prenez $x = (a, b)$.*

— *si vous faites un raisonnement par équivalences vous démontrez l'égalité entre les deux ensembles .... alors qu'on vous dit à la question 2 qu'il n'y a pas égalité ! soyez logique !*

— *pour la deuxième question, on vous demande un contre exemple. Faites simple (voir ci-dessus) et clair. Il est totalement improductif de faire des grandes phrases qui ne veulent rien dire et de conclure donc je l'ai démontré !*

— *ne confondez pas $\cup$ et $\cap$.... l'un correspond au "ou" l'autre à "et"....*

Exercice 2 Fonctions

1. définitions :
   Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. f est injective si et seulement si tout élément b de B a **au plus** un antécédent par f dans E
   f est surjective si et seulement si tout élément b de B a **au moins** un antécédent par f dans E.
   f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.
2. Etude de f : On remarque que $f(1, 1) = (2, 1) = f(1, -1)$
   $(2, 1)$ possède au moins deux antécédents donc f n'est pas injective et donc f n'est pas bijective.
   Si on cherche des antécédents par f du couple (0,-1) , on doit chercher (x, y) tels que $x + y^2 = 0$ et $y^2 = -1$.
   Or $y^2 = -1$ est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc (0,-1) n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.
3. Etude de g : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons les antécédents de (a, b) c'est à dire les couples (x, y) tels que $g(x, y) = (a, b)$. On a $(a, b) = (2x + y, x - 2y)$ ce qui est équivalent à :
   $a = 2x + y$ (E1)
   et $b = x - 2y$ (E2)
   Avec 2(E1)+(E2) on obtient $x = (2a + b)/5$
   Avec (E1)-2(E2) on obtient $y = (a - 2b)/5$

On en déduit que tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ possède exactement un antécédent dans $\mathbb{R}^2$ par g qui est $((2a + b)/5, (a - 2b)/5)$.
Donc g est bijective et $g^{-1}(a, b) = ((2a + b)/5, (a - 2b)/5)$.

remarques :

— *Il faut apprendre les définitions qui sont précises si on veut qu'elles aient un sens....*

— *cela n'a pas de sens de dire que f a ou possède des antécédents, la notion d'antécédent ne peut concerner que les éléments de l'ensemble d'arrivée ; ce n'est pas une bonne idée de parler des antécédents des images.....*

— *deux éléments différents qui ont la même image suffisent pour montrer qu'une application n'est pas injective. Un élément de l'ensemble d'arrivée qui n'a pas d'antécédent suffit à montrer que l'application n'est pas surjective.*

— *Par contre le fait que sur un exemple un élément particulier ait un antécédent ne prouve que le fait que cet élément a un antécédent. Pour montrer qu'un fonction est injective ou surjective, il faut montrer la propriété pour TOUS les éléments de l'ensemble d'arrivée.*

— *Quand vous voulez montrer qu'une application est bijective et qu'on vous demande l'application réciproque le plus simple est de chercher directement les antécédents (voir corrigé).*

Exercice 3 Induction
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des arbres binaires. Si A est un arbre binaire, soit $\mathcal{P}(A)$ la propriété :
$M(A) = 2^{h(A)+1} - 1$
Montrons par induction que $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

i) Soit A l'arbre vide. Par définition, $M(A) = 0$
Comme $h(A) = -1$,nous avons $2^{h(A)+1} - 1 = 2^0 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

ii) Soit $B, C \in \mathcal{A}$. Supposons $\mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(C)$ vraies.
Montrons que si $A = (., B, C)$ alors $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
Nous avons $M(B) = 2^{h(B)+1} - 1$ et $M(C) = 2^{h(C)+1} - 1$ puisque $\mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(A)$ sont vraies .
Par définition, $M(A) = 2sup(M(B), M(C)) + 1$ donc
$M(A) = 2sup(2^{h(B)+1} - 1, 2^{h(C)+1} - 1) + 1 = 2 * 2^{sup(h(B),h(C))+1} - 1 = 2 * 2^{h(A)} - 1 = 2^{h(A)+1} - 1$
Donc $\mathcal{P}(A)$ est vrai

Nous avons montré par induction $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(A)$ donc $\forall A \in \mathcal{A}$, $M(A) = 2^{h(A)+1} - 1$

remarques :

— *Vous devez annoncer la propriété que vous voulez démontrer. Le mieux est de poser $P(A)$.....(voir corrigé).*

— *n'utilisez pas la formule pour la démontrer !*

— *Vous devez absolument faire apparaître l'hypothèse d'induction....*

— *N'oubliez pas de conclure...*

Exercice 4 Relations

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \text{ lorsque } x^2 - y^2 = x - y.$$

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

— Réflexivité : $\mathcal{R}$ est une relation réflexive ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x^2 = x - x = 0$ donc $x\mathcal{R}x$. Alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

— Symétrie : $\mathcal{R}$ est symétrique ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}y$ alors $x^2 - y^2 = x - y$. Donc $y^2 - x^2 = y - x$ et $\mathcal{R}$ est symétrique.

— Transitivité : $\mathcal{R}$ est transitive ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z\ ) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors

$$x^2 - y^2 = x - y \quad \text{et} \quad y^2 - z^2 = y - z.$$

Donc par addition, $x^2 - z^2 = x - z$ et $\mathcal{R}$ est bien transitive.
$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ la classe d'équivalence de x.

$$\begin{array}{rcl} [x] & = & \{y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y\} \\ & = & \{y \in \mathbb{R}, \quad x^2 - y^2 = x - y\} \\ & = & \{y \in \mathbb{R}, (x-y)(x+y) = x - y\} \\ & = & \{y \in \mathbb{R}, (x-y)(x+y-1) = 0\} \\ & = & \{x, 1-x\} \end{array}$$

La classe d'équivalence de x comporte deux éléments : lui même et $1 - x$ sauf si $x = 1/2$ où il n'y a que $1/2$ dans la classe.

remarques :

— *Il n'est pas utile de parler d'irréfléxivité ou d'antisymétrie*

— *Attention pour la symétrie : ce n'est pas* $x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}x$ *mais* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

— *Comme d'habitude il faut faire des démonstrations.Il ne suffit pas par exemple de dire :* $\mathcal{R}$ *est transitive ssi* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z\ ) \Rightarrow x\mathcal{R}z$. *donc la relation est transitive.*

Exercice 5 Combinatoire

1. Le mot JACQUES contient 4 consonnes (J,C,Q,S) et 3 voyelles (A,U,E).
   (a) Il y a 7 lettres différentes dans le mot JACQUES. Donc on a 7! anagrammes de ce mot.
   (b) Pour les anagrammes commençant et finissant par une consonne, il faut choisir les deux consonnes parmi les quatre que contient ce mot. L'ordre ici est important car un mot commençant par J et finissant par Q n'est pas identique à un mot commençant par Q et finissant par J. Il y a donc A_4^2 choix possibles. Une fois ce choix effectué, il reste 5! façons de permuter les 5 autres lettres. Alors on a $A_4^2 \times 5!$ anagrammes du mot JACQUES commençant et finissant par une consonne.
   (c) Avec le même raisonnement, on trouve $A_3^2 \times 5!$ du mot JACQUES commençant et finissant par une voyelle.
   (d) Pour les mots commençant par une consonne et finissant par une voyelle, il faut choisir le couple (consonne,voyelle). Comme on a 4 consonnes et 3 voyelles, alors on 4×3 choix. Ensuite, une fois ce choix effectué, il y aura 5! façons de permuter les 5 autres lettres. Donc au total, on a $4 \times 3 \times 5!$ anagrammes du mot JACQUES commençant par une consonne et finissant par une voyelle.

(e) Le nombre d'anagrammes ne contenant pas le mot EAU est égal au nombre de tous les anagrammes moins ceux qui comporte le mot "EAU". On peut considérer "EAU" comme un bloc à poisitionner avec les 4 autres lettres donc 5! possibilités. Donc, on a $7! - 5!$ anagrammes ne contenant pas le mot "EAU".

2. Anagrammes du mot CHIRAC :

   Première méthode : Il s'agit d'une permutation des 6 lettres de ce mot. Il y en a donc, a priori, 6!. Mais on a deux lettres identiques (2 C), alors au sein des 6! anagrammes, sont comptées deux fois les mots où se permutent les deux lettres C. Pour éviter de compter ces anagrammes deux fois, on doit diviser 6! par le nombre de permutations possibles des deux lettres C, soit 2!. Le nombre d'anagrammes du mot CHIRAC est donc égal à $\frac{6!}{2!}$.

   Deuxième méthode :

   Pour positionner les 2 C, il faut choisir 2 places parmi 6, donc on a C_6^2 choix possibles. Ensuite, placer les 4 lettres restantes (toutes différentes) revient à faire une permutation de 4 lettres, donc 4!. Alors, on a $C_6^2 \times 4! = \frac{6!}{2!}$ anagrammes du mot CHIRAC.

   Anagrammes du mot JACQUES CHIRAC :
   Si on compte l'espace, on a 14 caractères. On a 2 A et 3 C. Pour placer les 2 A, il faut choisir 2 places parmi 14. Donc, on a C_{14}^2 choix possibles. Ensuite, pour positionner les 3 C, il faut choisir 3 places parmi 12. Donc, on a C_{12}^3 choix possibles. Enfin, placer les 9 lettres restantes (toutes différentes) revient à faire une permutation de 9 lettres, donc 9!. Alors, on a $C_{14}^2 \times C_{12}^3 \times 9!$ du mot JACQUES CHIRAC.

remarques :

— *Il était indispensable d'expliquer comment on trouve les résultats que vous donnez. Avoir 7! comme unique réponse n'avance à RIEN.*

— *Il faut être précis : JACQUES a 7! anagrammes car le mot comporte 7 lettres différentes (par exemple)*