

1 Correction du DM1

Exercice 1 Session2 2018-2019

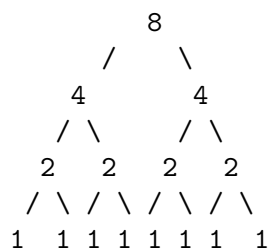
Soit A un arbre binaire, on rappelle la définition inductive de $h(A)$, la hauteur de A :

- (i) Si A est l'arbre vide, $h(A) = -1$.
- (ii) Si $A = (\cdot, B, C)$ où B est le sous-arbre gauche et C est le sous-arbre droit, alors $h(A) = 1 + \max(h(B), h(C))$.

1. Redonnez le schéma d'induction des arbres complets.

Solution Schéma d'induction de \mathcal{C} , l'ensemble des arbres complets.

- i) L'arbre racine appartient à \mathcal{C} .
 - ii) Soit $C \in \mathcal{C}$ alors l'arbre binaire $A = (\cdot, C, C) \in \mathcal{C}$.
2. On attribue une valeur à chacun des nœuds des arbres complets de la manière suivante :
- (i) Si A est l'arbre racine \cdot , alors la racine prend la valeur 1.
 - (ii) Soit $A = (\cdot, B, C)$. Tous les nœuds de A différents de la racine conservent les valeurs de B ou C . La racine de A prend comme valeur la somme de la valeur de la racine de B et de celle de C .
3. Donnez les valeurs de nœuds de l'arbre complet de hauteur 3.



4. Montrez par induction que tout arbre complet A a une racine de valeur $2^{h(A)}$.

Solution Pour tout A de \mathcal{C} , notons $V(A)$ la valeur prise par la racine.

On définit sur \mathcal{C} la propriété $\mathcal{P} : V(A) = 2^{h(A)}$.

Montrons par induction $\forall A \in \mathcal{C} \mathcal{P}(A)$.

- i) Soit A l'arbre racine. Par définition, $V(A) = 1$ et comme $h(A) = 0$, nous avons bien $V(A) = 2^{h(A)}$, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.
- ii) Soit $C \in \mathcal{C}$. Supposons $\mathcal{P}(C)$ vraie.
 Nous avons donc $V(C) = 2^{h(C)}$.
 Par définition, $V(A) = 2V(C) = 2^{h(C)+1}$.
 Comme $h(A) = h(C) + 1$, $\mathcal{P}(A)$ est vraie.

Nous avons montré par induction $\forall A \in \mathcal{C} \mathcal{P}(A)$.

Remarque : le schéma d'induction possède comme base l'arbre racine car nous n'avons pas précisé quelle valeur retourner pour l'arbre vide. Pour un autre exercice, nous pouvons définir le schéma d'induction :

- i) L'arbre vide appartient à \mathcal{C} .
- ii) Soit $C \in \mathcal{C}$ alors l'arbre binaire $A = (\cdot, C, C) \in \mathcal{C}$.