TD1 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1 - Exemples d'image directe et d'image réciproque

Soit $f : \{a, b, \dots z\} \to \{97, 98, \dots 122\}$, qui à un caractère associe le code ASCII du caractère, et soit $A = \{c, \dots, h\}$ et $B = \{100, \dots 110\}$. Déterminer

1. l'image directe de A par f;
2. l'image réciproque de B par f.

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: www.LookupTables.com

Exercice 2 - Exemples d'image directe et d'image réciproque

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Déterminer
   (a) l'image directe de $A = \{-2, 3\}$ par f;
   (b) l'image de f.
   (c) l'image réciproque de $A = \{4, 9\}$ par f;
   (d) l'image réciproque de $\mathbb{R}_-$ par f;
   (e) l'image directe de $[-1, 4]$ par f;
   (f) l'image réciproque de $[-1, 4]$ par f.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer selon la valeur de a, l'image réciproque $f^{-1}(\{a\})$.
3. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

Exercice 3 - Exemples d'image directe et d'image réciproque

$M_2(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients entiers. Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 & y-3 \\ z+1 & t \end{pmatrix}$, et soit A l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients entiers positifs. Déterminer

1. l'image directe de A par f;
2. l'image réciproque de A par f.

Exercice 4 - Ensembles et images réciproques

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de F.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 5 - Injections, surjections, bijections : quelques exemples

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. la fonction qui associe à une voiture sa plaque d'immatriculation ;
2. la fonction qui associe à une carte réseau son adresse MAC (= identifiant physique stocké dans la carte réseau conçu pour être unique au monde).

Exercice 6 - Injections, surjections, bijections : sur un téléphone

Soit C l'ensemble des caractères composé de lettres (A, B, ..., Z), de chiffres (0, 1, 2, ..., 9), du dièse (#) et de l'étoile ($*$). On définit f comme la fonction qui associe à un élément de C une touche de téléphone selon le clavier suivant :

Par exemple, $f(A)$ est la touche en haut au milieu.

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. la fonction f ;
2. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint aux lettres A, B, $\ldots$, Z ;
3. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint aux chiffres 0, 1, $\ldots$, 9 ;
4. la fonction f dont l'ensemble de départ est restreint au dièse, à l'étoile et aux chiffres 0, 1, $\ldots$, 9.

Exercice 7 - Des exemples plus mathématiques

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Exercice 8 - Encore des exemples

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1.$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1.$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y).$

Exercice 9 - Injective ou surjective

L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, xy)$ est-elle injective? surjective?

Exercice 10 - Caractérisations

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$ la composée.

1. On suppose h injective. Montrer que f est injective.
2. On suppose h surjective. Montrer que g est surjective.
3. On suppose h injective et f surjective. Montrer que g est injective.
4. On suppose h surjective et g injective. Montrer que f est surjective.

Exercice 11 - Caractérisations

Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Exercice 12 - Composition et injectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

Les applications f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles bijectives?

Exercice 13 - Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 14 - Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n, p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 15 - Un exemple avec de l'arithmétique

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective?

Exercice 16 - Image directe de l'image réciproque... et vice-versa!

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Démontrer que

1. $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. f est injective ssi $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.
3. $\forall B \subset F,\ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
4. $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$.
5. f est surjective ssi $\forall B \subset F\ f(f^{-1}(B)) = B$.
6. f est bijective ssi $\forall A \subset E\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E et $\overline{f(A)}$ désigne le complémentaire de $f(A)$ dans F).

Exercice 17 - Intersection d'images et d'images réciproques

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence :

$$f(A) \cap B = \varnothing \iff A \cap f^{-1}(B) = \varnothing.$$

Exercice 18 - Fonction définie sur l'ensemble des parties

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E. On définit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Exercice 19 - Fonctions et fonctions d'ensemble

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. On définit deux applications $f^\sharp$ et $f_\sharp$ par :

$$\begin{array}{ll} f^\sharp : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), & f^\sharp(A) = f(A) \\ f_\sharp : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), & f_\sharp(A) = f^{-1}(A). \end{array}$$

Démontrer que

1. $f^\sharp$ est injective si et seulement si f est injective.

2. $f_\sharp$ est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 20 - Fonctions et fonctions d'ensemble

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n; n \geq 1\}$ dans $\{1/n; n \geq 2\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
   (Indication: Séparer $[0,1]$ en 2 parties : les réels qui s'écrivent $1/n$, et les autres. Pour les premiers, prendre l'application précédente. Pour les seconds, appliquer l'identité!)
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.