Chapitre 1

Systèmes Logiques

Systèmes Logiques :

CM : 9h
TD : 10h (lundi & jeudi)
TP : 6h (lundi & jeudi après les TD)

Note : CC et TP
Pas document
Pas de calculette

Chapitre 1 : Généralités

Les systèmes numériques souvent appelés **digitaux** ou **discrets**, connaissent un grand développement et se trouvent dans tous les systèmes véhiculant des informations :

- systèmes d'acquisition et de mesure (capteurs, oscilloscopes numériques...)
- commande de système (commande numérique ....)
- traitement des informations (micro-ordinateur....)

Contrairement aux systèmes dits continus, chacune des variables d'entrée ou de sortie est binaire. Elle ne peut donc présenter que deux états que l'on distingue en appelant arbitrairement l'un "état haut " , "niveau actif " , " 1 " et l'autre "état bas " , "niveau inactif " , " 0 ".

L'objet du cours des systèmes logiques est d'étudier la constitution et les propriétés de systèmes physiques de commande permettant d'obtenir une relation donnée entre un ensemble de départ constitué de **variables de commandes** ou **entrées** du système et un ensemble d'arrivée constitué par les **variables de sortie** du système.

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Eléments de réalisation d'une fonction logique :

On peut associer ainsi à un grand nombre de phénomènes physique un état logique (porte ouverte/fermée; voyant éclairé/éteint;...). On associe généralement à l'état logique 1 la situation actionné du composant (logique positive) mais il est possible de considérer l'inverse pour des questions technologiques (logique négative)

Différents types d'éléments logiques :

Electrique : Interrupteur, Lampe

Pneumatique : cellule, Vérin

Hydraulique : Vanne, Vérin

Chapitre 1 : Généralités

• Georges BOOLE, philosophe et mathématicien anglais, publia en 1854 un essai sur les raisonnements logiques portant sur les propositions auxquelles les seules réponses possibles sont oui ou non. L'ensemble des opérations découlant de ces propositions forme une structure mathématique, donc une algèbre, appelée " algèbre de BOOLE ".

• 1938 : Utilisation de l'algèbre de BOOLE pour l'étude des circuits électriques : Shannon.

• $XX^{ème}$ siècle : Développement de l'électronique digitale à 2 niveaux, ce qui donne un grand intérêt à cette algèbre.

L'algèbre de BOOLE couvre toutes les algèbres à deux éléments, elle permet de représenter toutes les fonctions de :

$$\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

- Rappel Mathématique :

* est appelée <u>loi de composition interne</u> de l'ensemble E si a tout couple d'éléments $(a,b) \in E$ elle fait correspondre un élément $(d) \in E$ tel que $d = a * b$

La loi est associative si

$$(a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c$$

La loi est commutative si

$$(a*b) = (b*a)$$

On appelle $e \in E$ élément neutre de la loi interne '*' de E si $\forall x \in E$
Nous pouvons écrire : $e * x = x * e = x$

On appelle $g \in E$ élément absorbant de la loi interne '*' de E si $\forall x \in E$
Nous pouvons écrire : $g * x = x * g = g$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

On appelle algèbre de Boole, une structure algébrique à 2 lois de composition interne (ou opérateur) appelées

Disjonction notée : $\vee, +, \cup, ou$

Conjonction notée : $\wedge, \times, \cdot, \cap, et$

sur un ensemble comprenant au moins 2 éléments notés 0 et 1 et vérifiant les axiomes suivants :

- Les opérateurs de disjonction et de conjonction sont associatifs et commutatifs et admettent chacun un élément neutre, respectivement 0 et 1.
- Les opérateurs $\vee$ et $\wedge$ sont distributifs l'un par rapport à l'autre, c'est à dire que pour tous a, b et c :

$$c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$$

$$c \vee (a \wedge b) = (c \vee a) \wedge (c \vee b)$$

- Tout élément « a » admet un complément unique $\overline{a}$ (non, ‘) pour les deux lois de composition interne on a :

$$a \vee \overline{a} = 1$$

$$a \wedge \overline{a} = 0$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Définitions :

Un système logique est dit combinatoire, lorsque la ou les sorties ne dépendent que de la combinaison de ses entrées.

***Variable logique* :** grandeur représentée par un identificateur (lettre ou nom) qui peut prendre les seules valeurs 0 ou 1 .

Fonction logique de n variables binaires : groupe de variables reliées par des opérateurs logiques.

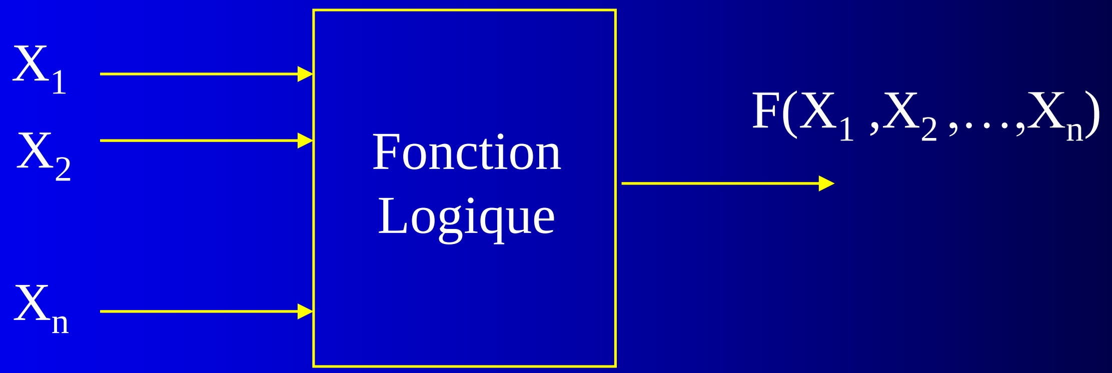


Table de vérité : tableau regroupant toutes les combinaisons de valeurs (0 ou 1) que peuvent prendre les variables binaires $X_1, X_2 .. X_n$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Définitions :

• ***Équivalence*** : 2 fonctions (expressions) logiques sont équivalentes si et seulement si elles ont la même valeur pour toutes les combinaisons possibles des variables d'entrée. L'équivalence de F_1 et F_2 s'écrit :

$$F_1 = F_2$$

Il est possible de vérifier l'égalité de deux fonctions en comparant tous les cas possibles (**méthode d'induction**) :

Démonstration d'un élément neutre pour la disjonction et la conjonction

Pour a = 0 :	a + 0 = 0 + 0 = 0 = a	a x 1 = 0 x 1 = 0 = a
Pour a = 1 :	a + 0 = 1 + 0 = 1 = a	a x 1 = 1 x 1 = 1 = a
	0 élément neutre pour +	1 élément neutre pour x

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction logique d'ordre 1 :

a → [Fonction Logique] → Z = F(a)

Il y a quatre opérations possibles que l'on peut résumer dans la table de vérité suivante :

a	z_0
0	0
1	0

Fonction
Contradiction
(constante)

a	z_1
0	0
1	1

Fonction
OUI

a	z_2
0	1
1	0

Fonction
NON

a	z_3
0	1
1	1

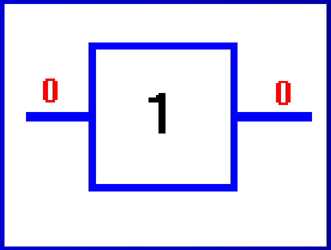
Fonction
Tautologie
(constante)

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Logigramme :

Un logigramme est la représentation graphique utilisant des éléments normalisés d'une fonction logique.

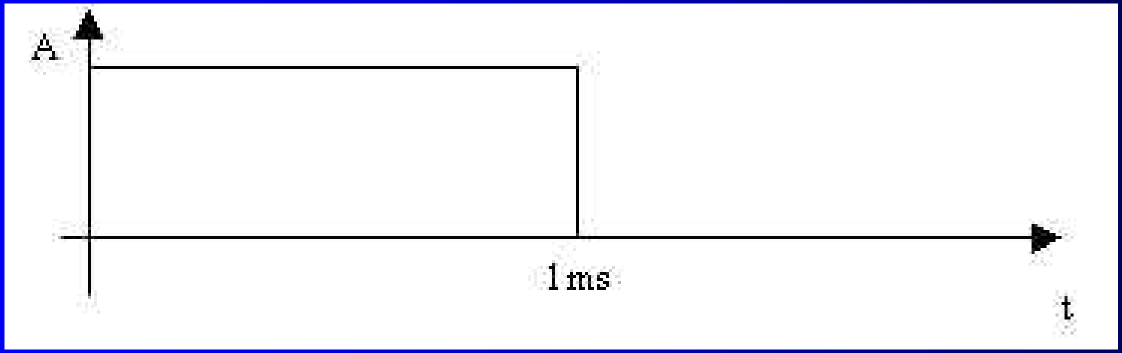
Exemple : La porte OUI



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

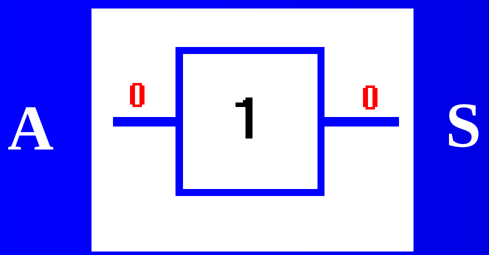
Chronogrammes :

Les chronogrammes sont des graphiques représentants l'évolution des différentes entrées/sorties d'un système en fonction du temps.
Exemple : Si on considère une entrée logique A à l'état haut pendant 1 ms qui ensuite passe à l'état bas on obtient le chronogramme suivant :



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction OUI :

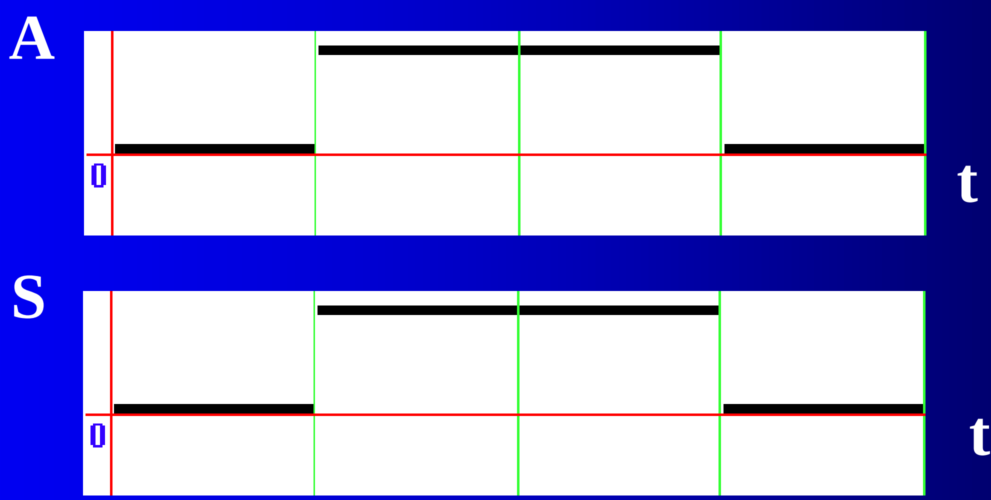


Logigramme

A	S
0	0
1	1

Table de vérité

Chronogramme



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction OUI :

Cet opérateur recopie l'état de la variable d'entrée en sortie. $z = a$

Norme
IEEE/ANSI
91-1984

Représentation IEEE

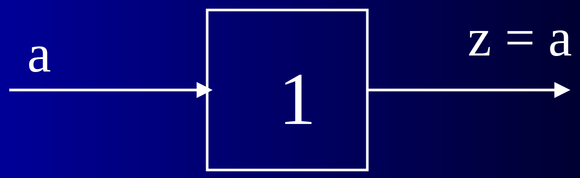
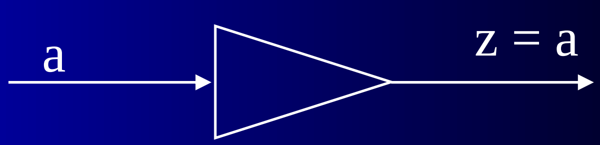


Table de vérité

a	z
0	0
1	1

Représentation MIL



Norme Américaine
Électricité

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction NON (inverseur) :

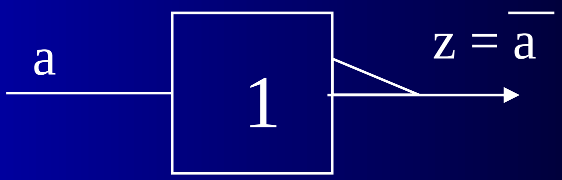
Cet opérateur complémente l'état de la variable d'entrée.

$$z = \overline{a}$$

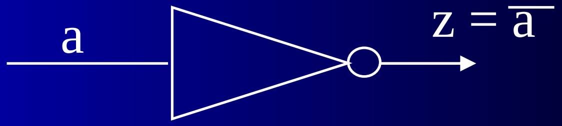
Table de vérité

a	z
0	1
1	0

Représentation IEEE



Représentation MIL



Propriétés du complément :

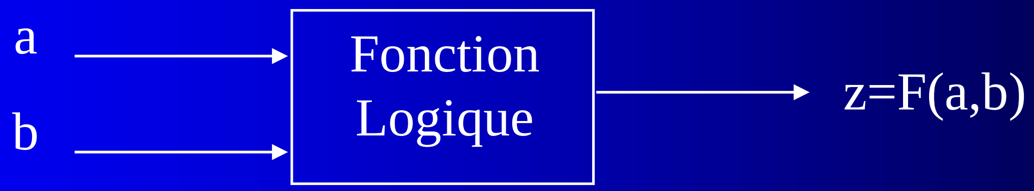
$$\overline{1} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{0} = 1$$

$$\overline{\overline{a}} = a \quad : \text{involution}$$

Unicité du complément : une expression n'admet qu'un seul complément.

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction logique d’ordre 2 :



On dénombre quatre états d'entrée et 16 (2^4) fonctions possibles. On va s'intéresser uniquement à cinq d'entre elles :

a	b	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}	z_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction produit logique ou fonction ET (AND) :

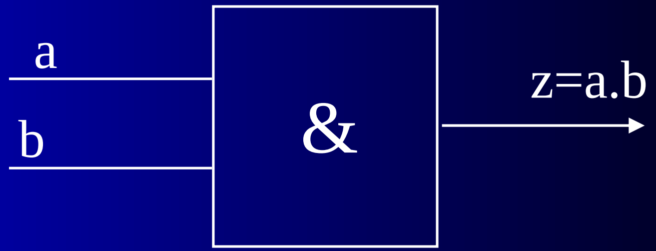
L'opérateur ET (produit logique) se représente par l'opérateur produit. Il affecte la variable de sortie à l'état haut lorsque toutes les entrées sont à l'état haut.

<u>Table de vérité</u>

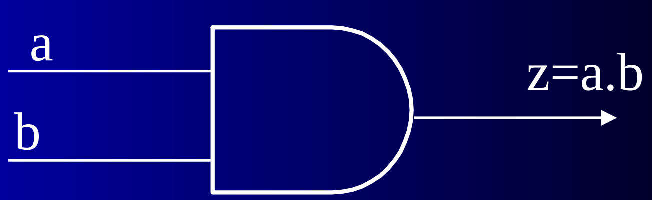
$$z = a \cdot b$$

a	b	z
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

<u>Représentation IEEE</u>



<u>Représentation MIL</u>



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction somme logique ou fonction OU (OR):

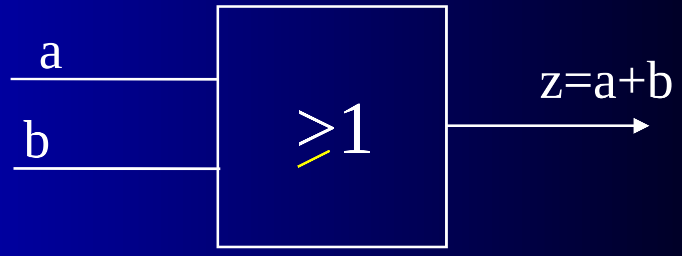
L'opérateur OU (somme logique) se représente par l'opérateur somme. Il affecte la variable de sortie à l'état haut lorsque l'une des entrées est à l'état haut.

<u>Table de vérité</u>

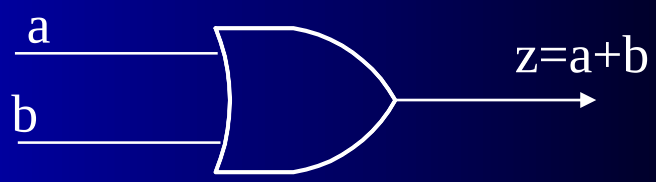
$$z = a + b$$

a	b	z
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

<u>Représentation IEEE</u>



<u>Représentation MIL</u>



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Propriétés	ET	OU
IDEMPOTENCE	A . A = A	A + A = A
COMMUTATIVITE	A . B = B . A	A + B = B + A
ASSOCIATIVITE	(A . B) . C = A . B . C	(A+B)+C = A + C + B
DISTRIBUTIVITE OU par rapport au ET ET par rapport au OU	A + (B.C) = (A+B)(A+C) A . (B+C) = A . B + A . C	
ELEMENT NEUTRE	A .1 = A	A+0 = A
ELEMENT ABSORBANT	A . 0 = 0	A+1 = 1
COMPLEMENT	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction NON ET (NAND) :

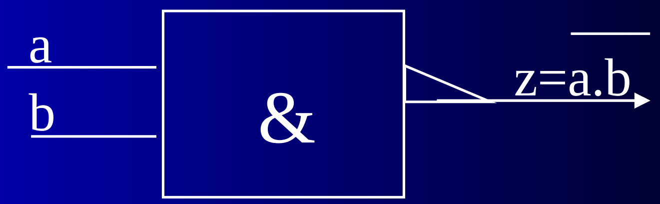
L'opérateur NAND se représente par l'opérateur $\uparrow$. Son expression est :

$$z = a \uparrow b = \overline{a \cdot b}$$

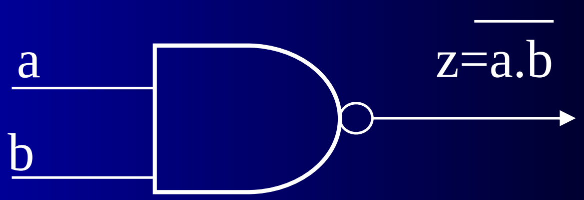
Table de vérité

a	b	z
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Représentation IEEE



Représentation MIL



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction NON OU (NOR) :

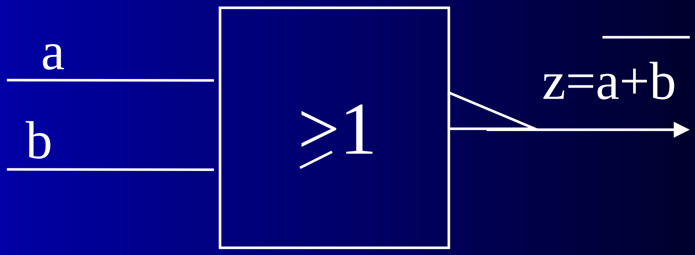
L'opérateur NOR se représente par l'opérateur $\downarrow$. Son expression est :

$$z = a \downarrow b = \overline{a + b}$$

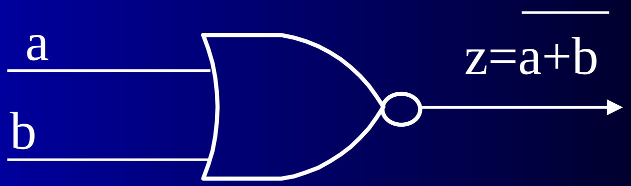
<u>Table de vérité</u>

a	b	z
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

<u>Représentation IEEE</u>



<u>Représentation MIL</u>



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Propriétés	NON ET	NON OU
COMMUTATIVITE	$\overline{A.B} = \overline{B \cdot A}$	$\overline{A + B} = \overline{B + A}$
LOIS DE DE MORGAN	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
INVERSION	$\overline{A \cdot A} = \overline{A}$	$\overline{A + A} = \overline{A}$
ELEMENT NEUTRE	$\overline{A \cdot 1} = \overline{A}$	$\overline{A + 0} = \overline{A}$

Ces opérateurs ne sont pas associatifs , pas distributifs!!!

Ces deux opérateurs sont des opérateurs complets : Il est possible de simuler n'importe quelle fonction logique avec l'un deux.

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Systèmes d’opérateurs, complétude et minimalité :

Définition :

Un système d’opérateur sur {0,1} est dit complet si il permet de représenter n’importe quelle fonction booléenne.

Un système d’opérateur complet est dit minimal si l’on ne peut en extraire un sous-système qui soit lui-même complet.

On démontre qu’un système d’opérateur est complet s’il est possible de reconstruire les opérateurs OU, ET et $\overline{\quad}$ avec celui-ci.

Exercice : démonter que l’opérateur NAND et NOR sont des opérateurs complets. En déduire les systèmes d’opérateurs complets minimaux sous-jacents. Le système OU, ET, $\overline{\quad}$, est-il minimal ?

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction Anti-coïncidence, OU exclusif (XOR) :

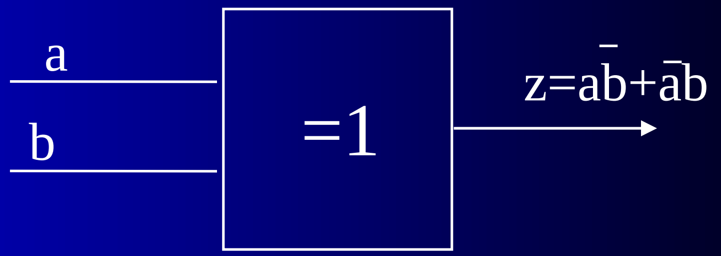
L'opérateur XOR se représente par l'opérateur $\oplus$. Son expression est :

Table de vérité

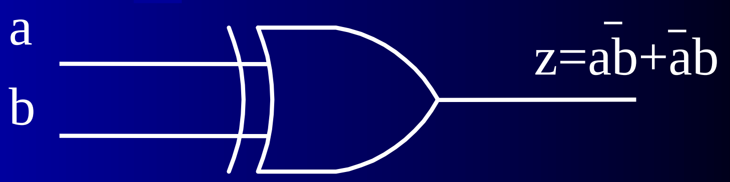
$$z = a \oplus b = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$$

a	b	z
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

Représentation IEEE



Représentation MIL



Cet opérateur est commutatif et associatif, son élément neutre est 0

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Fonction NI exclusif (coïncidence) : commutatif son élément neutre est 1

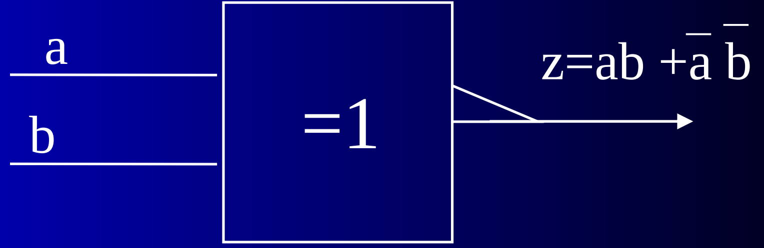
Cet opérateur se représente par l'opérateur $\overline{\oplus}$, on l'appelle aussi fonction coïncidence.

Son expression est : $z = \overline{a \oplus b} = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$

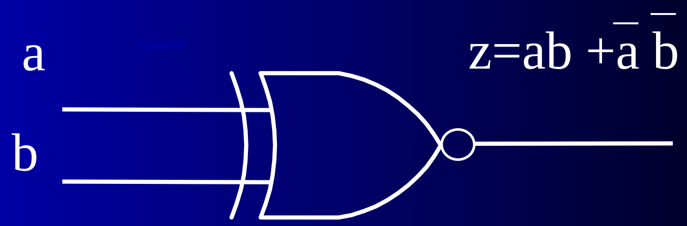
Table de vérité

a	b	z
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Représentation IEEE



Représentation MIL



Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Redondance :

Une variable ou plus généralement une somme ou un produit de variables appartenant à une expression logique T_1 est redondant si lorsque celui-ci est supprimé, l'expression logique T_2 obtenue est équivalente à T_1.

Exemple :

$$T_1 = a + ab \quad \text{et} \quad T_2 = a$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Démonstrations de certaines propriétés à connaître :

Idempotence : $a + a = a \Rightarrow a\,1 + a\,1 \Rightarrow a\,(1 + 1) \Rightarrow a\,(1) \Rightarrow a$

Relations d'absorption : $a + ab = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a$

$$a \cdot (a + b) = a \cdot a + (a \cdot b) = a + a \cdot b = a$$

$$a + \bar{a}b = (a + \bar{a}) \cdot (a + b) = (1) \cdot (a + b) = (a + b)$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot \bar{b}) = a \cdot (b + \bar{b}) = a$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Théorèmes du Consensus : $(a+b)\cdot(\overline{a}+c)\cdot(b+c) = (a+b)\cdot(\overline{a}+c)$

$$\boxed{\begin{array}{c}(F(\ldots)+b)\cdot(\overline{F(\ldots)}+c)\cdot(b+c)\\ =\\ (F(\ldots)+b)\cdot(\overline{F(\ldots)}+c)\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}F(\ldots)\,c+\overline{F(\ldots)}\,b+c\,b\\ =\\ F(\ldots)\,c+\overline{F(\ldots)}\,b\end{array}}$$

$$ac + b\overline{c} + ab = ac + b\overline{c}$$

Exemple :

$$F_1 = fea + hgfedcb + hg\overline{a} = fea + hg\overline{a} \qquad F_2 = \overline{a}cde + \overline{de} + c$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Utilisation des propriétés du complément (unicité) :

$$F_1 + F_2 = 1 \text{ et } F_1 \cdot F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = \overline{F_2}$$

(1) **(2)**

Démonstration du théorème de De Morgan : $\overline{a+b} = \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$

$$\begin{aligned}
(a+b)+\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right) &= \left((a+b)+\overline{a}\right)\cdot\left((a+b)+\overline{b}\right)\\
&= \left(a+b+\overline{a}\right)\cdot\left(a+b+\overline{b}\right)\\
&= (1+b)\cdot(a+1)\\
&= 1
\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right) &= \left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\cdot a + \left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\cdot b\\
&= \left(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot a\right)+\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot b\right)\\
&= \left(0\cdot\overline{b}\right)+\left(\overline{a}\cdot 0\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

(2)

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow (a+b) \text{ est le complément de } \overline{a}\cdot\overline{b}$$

$$\Leftrightarrow \overline{a+b} = \left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

D’une manière générale les propriétés de De Morgan introduise la règle du complément

<u>Règle du complément</u> :

L’expression T du complément de T s’obtient en interchangeant dans T les opérateurs ET en OU et en remplaçant chaque variable par son complément. (sans oublier de placer ou supprimer les parenthèses afin de conserver la hiérarchie des opérations)

$$T = a\overline{b} + c\left(\overline{d} + b\right)$$

$$\overline{T} = \overline{a\overline{b} + c\left(\overline{d} + b\right)} = \overline{a\overline{b}} \cdot \overline{c\left(\overline{d} + b\right)} = \left(\overline{a} + b\right)\cdot\left(\overline{c} + \overline{\left(\overline{d} + b\right)}\right)$$

$$\overline{T} = \left(\overline{a} + b\right)\cdot\left(\overline{c} + d\,\overline{b}\right)$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Extension des lois de De Morgan à n variables :

Le complément d'une somme de variables logiques est égal au produit des compléments de ces variables :

$$\overline{a + b + c + \ldots + n} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \;\ldots\; \bar{n}$$

Le complément d'un produit de variables logiques est égal à la somme des compléments de ces variables :

$$\overline{a \,.\, b \,.\, c \;.\;.\;.\; n} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots + \bar{n}$$

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Notion sur la dualité :

Si l'on regarde les différents tableaux de propriétés, on remarque celles-ci vont par paire. Il suffit d'interchanger les opérateurs ET en OU et de remplacer chaque constante par son complément (ex : élément neutre). Il ne faut pas oublier de placer ou supprimer les parenthèses afin de conserver la hiérarchie des opérations.

$$T = a\left(\bar{b} + d\right) + bc$$

$$\Downarrow$$

$$dual(T) = \left(a + \bar{b}d\right) \cdot \left(b + c\right)$$

Règle du dual :

Si deux équations sont duales, il suffit de démontrer l'une pour que l'autre soit aussi vraie

Chapitre 1 : Algèbre de Boole

Exemple :

$$F_1 = fea + hgfedcb + hg\bar{a}$$

$$F_1 = hg\bar{a} + fea + hgfe + hgfedcb$$

$$F_1 = hg\bar{a} + fea + hgfe \cdot (1 + dcb)$$

$$F_1 = hg\bar{a} + fea + hgfe$$

$$F_1 = hg\bar{a} + fea$$

$$F_2 = a\bar{c}de + \overline{de} + c$$

$$F_2 = \bar{c}ade + c + \bar{d} + \bar{e}$$

$$F_2 = \bar{c}ade + c + ade + \bar{d} + \bar{e}$$

$$F_2 = c + ade + \bar{d} + \bar{e}$$

$$F_2 = c + ade + \bar{e} + ad + \bar{d}$$

$$F_2 = c + \bar{e} + ad + \bar{d} + a$$

$$F_2 = c + \bar{e} + \bar{d} + a$$