Programmation linéaire

Sécurité et aide à la décision

CM 01

Abdelkader Ouali

abdelkader.ouali@unicaen.fr

Université de Caen Normandie, 14032 Caen, France.

2020

Objectifs du cours

- Introduction à la programmation linéaire
- Donner les outils de résolution
- Présentation d'un solveur

Modalités de contrôle

- Examen à la fin de la matière
- N'est qu'une des notes de la matière

Processus de prise de décision

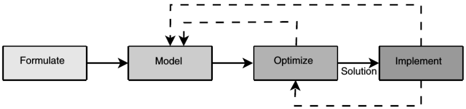


Figure: Schéma de résolution d'un problème réel.

- **Formulation :** un problème de décision est identifié, et une première déclaration du problème est faite.
- **Modélisation :** un modèle mathématique abstrait est construit pour le problème.
- **Optimisation :** une méthode de résolution génère une $\ll$bonne$\gg$ solution au problème.
- **Implémentation :** la solution obtenue est testée pratiquement par le décideur, et est mise en œuvre si elle est acceptable.

Programmation linéaire

Programmation linéaire

- Aussi appeler optimisation linéaire
- Constitué de contraintes linéaires et d'une fonction objectif
- Cherche le résultat optimal d'un modèle

Exemple de programme linéaire

- Un fermier possède deux produits pour nourrir ses bêtes
- Le produit A coûte 1,5E et donne 50g de protéine et 140g de glucide par kg
- Le produit B coûte 0,85E et donne 70g de protéine et 20g de glucide par kg
- Chaque bête requiert 255g de protéines et 220g de glucides par jour
- Quelle proportion de produits doit-il donner pour minimiser ses dépenses ?

Exemple de programme linéaire

- alim_A ≥ 0
- alim_B ≥ 0

- 50 alim_A + 70 alim_B ≥ 255
- 140 alim_A + 20 alim_B ≥ 220

- min : 1.5 alim_A + 0.85 alim_B

Exemple de programme linéaire

- alim_A = 0
- alim_B = 11
- Cout = 9.35

- alim_A = 5.1
- alim_B = 0
- Cout = 7.65

- alim_A = 1.1705 kg
- alim_B = 2.8068 kg
- Cout = 4.1415 €

Variables

- Quantité que l'on ne connaît pas et dont on veut/cherche la valeur
- Les inconnues dans un PL
- Variable intermédiaire/supplémentaire
  ➥ $(\mathbf{A}= x + y + z) \wedge (\mathbf{A}< 2x)$

Contraintes linéaires

- Que veut-on dire par linéaire ?
- Une variable ne peut être multipliée que par un facteur constant, pas une autre variable
- 4 * Variable : linéaire
- Var1 * Var2 : non linéaire

Contraintes de borne

- "On ne peut pas vendre plus de 100 produits ce mois-ci"
- "On doit envoyer au moins 20 tonnes"

Contraintes de borne

- "On ne peut pas vendre plus de 100 produits ce mois-ci"
- "On doit envoyer au moins 20 tonnes"
- produit ≤ 100
- quantite ≥ 20

Contraintes de flot

- "J'ai 1000 litres et 3 clients C1, C2 et C3 à fournir"
- "J'achète mes disques depuis S1, S2 et S3. Il me faut 5000 disques"

Contraintes de flot

- "J'ai 1000 litres et 3 clients C1, C2 et C3 à fournir"
- "J'achète mes disques depuis S1, S2 et S3. Il me faut 5000 disques"
- $C1 + C2 + C3 \leq 1000$
- $S1 + S2 + S3 \geq 5000$

Contraintes de ressources

- "Je ne peux avoir que 10000 connecteurs, chaque PC pro que je fais a besoin de 8 connecteurs, et chaque PC familial a besoin de 5 connecteurs"

Contraintes de ressources

- "Je ne peux avoir que 10000 connecteurs, chaque PC pro que je fais a besoin de 8 connecteurs, et chaque PC familial a besoin de 5 connecteurs"
- $8 \text{ pro} + 5 \text{ familial} \geq 10000$

Contraintes de balance

- "L'eau rentre par E1, E2 et E3. Elle doit ressortir par S1 et S2."

Contraintes de balance

- "L'eau rentre par E1, E2 et E3. Elle doit ressortir par S1 et S2."
- $E1 + E2 + E3 = S1 + S2$
- $E1 + E2 + E3 - S1 - S2 = 0$

Contraintes dures/souples

- Si le problème requiert que la contrainte soit satisfaite, ces contraintes sont dites dures
- Dans certains problèmes, certaines contraintes sont préférées, mais pas nécessaires. Ces contraintes sont dites souples
- Par exemple dans la planification sous préférences, ou un certain nombre de contraintes peuvent être autorisées à être violées, et la qualité de la solution dépend du nombre de contraintes satisfaites

Fonction objectif

- N'est pas une contrainte, mais consiste en une expression linéaire
- Est souvent un coût (quand on minimise) ou un profit (quand on maximise)
- La plupart des solveurs minimisent par défaut
- Il peut ne pas y avoir de fonction objectif, le solveur doit donc juste ressortir une solution **réalisable**, ou répondre si le problème possède (au moins) une solution, mais ces problèmes sont assez rare !

Satisfaisabilité

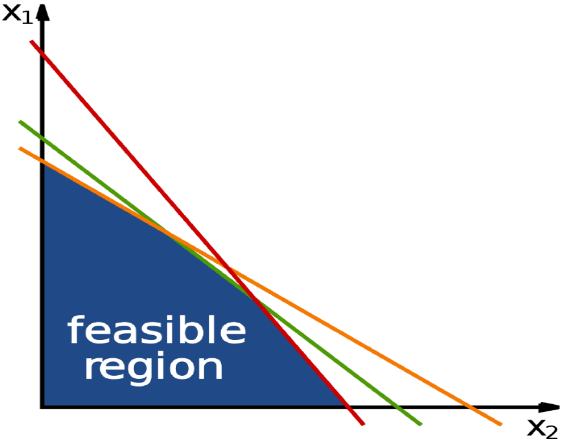
- Un problème est satisfiable s'il existe au moins une solution
- Si deux contraintes sont inconsistantes, alors le problème n'est pas satisfiable
- Par exemple les contraintes $x \geq 2$ et $x \leq 1$

Solution optimale

- La solution optimale est la solution avec la plus petite/grande valeur pour la fonction objectif
- Il n'existe pas forcement de solution optimale même si le problème est satisfiable
- Par exemple $x \geq 0$ avec max : x, il est toujours possible d'augmenter la valeur de la solution

Résolution

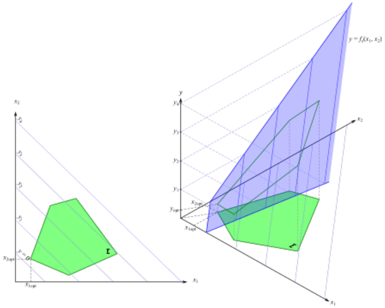
Résolution graphique



- Avec 2 variables on peut facilement avoir une visualisation
- Mais s'applique quelque soit le nombre de variables

Forme graphique des contraintes

- 2 variables : forme des demi-droites
- 3 variables : forme des demi-plans
- L'équation linéaire forme directement l'équation de la demi-droite



Solutions

- L'ensemble des demi-droites forment un polygone convexe, qui représente l'ensemble des solutions réalisables
- La solution optimale est l'un des sommets du polygone
- Sauf si le polygone n'est pas fermé dans le sens de la minimisation/maximisation

Outils en ligne : `https://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html`

Exemple

Solutions

- Une usine propose deux produits P1 vendu 12€ et P2 vendu 8€
- Chaque pièce est traitée successivement dans 3 ateliers
- Le nombre d'heures-machines par pièce est : P1 (A=3,B=5,C=2), P2(A=1,B=3,C=3)
- Pour éviter le chômage technique, l'atelier A doit fournir 1200 heures-machines, l'atelier B 3000 heures-machines et l'atelier C 1800 heures-machines
- Trouver une production permettant d'éviter le chômage technique telle que la production soit équilibrée à 10% près, tout en maximisant les profits

Choix de variables

- Le nombre de produits P1 réalisés
- Le nombre de produits P2 réalisés

Choix des contraintes

- L'atelier A fourni 1200 heures-machines : $3P1 + 1P2 \geq 1200$
- L'atelier B fourni 3000 heures-machines : $5P1 + 3P2 \geq 3000$
- L'atelier C fourni 1800 heures-machines : $2P1 + 3P2 \geq 1800$
- La production est équilibrée :
  ➠ $1.1\ P1 - P2 \geq 0$, et $-P1 + 1.1\ P2 \geq 0$

Choix de la fonction objective

- On veut maximiser les profits
- max : $12P1 + 8P2$

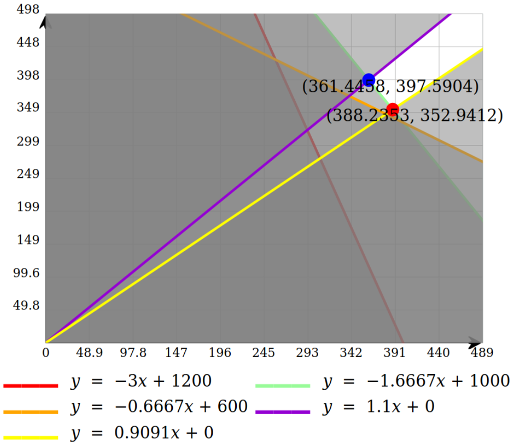
Le programme linéaire

- max : $12P1 + 8P2$

- $3P1 + 1P2 \geq 1200$
- $5P1 + 3P2 \geq 3000$
- $2P1 + 3P2 \geq 1800$

- $1.1P1 - P2 \geq 0$
- $-1P1 + 1.1P2 \geq 0$

Le programme linéaire



- (361.4458, 397.5904) de valeur 7518.0723
- (388.2353, 352.9412) de valeur 7482.3529
- La région des solutions n'est pas bornée, il y a pas de solution optimale

Utilisation de la PL

- De nombreux problèmes en recherche opérationnelle peuvent être exprimé comme des programmes linéaires
- Planification
- Production
- Transport
- etc.

Programmation linéaire en nombres entiers PLNE

PLNE

- Tous les problèmes ne peuvent pas être modélisés comme des problèmes linéaires
- Notamment lorsque les solutions ne peuvent être prises que parmi un ensemble de valeurs
- Programmation Linéaire en Nombre Entier, aussi appelé IP (Integer Programming) ou ILP

MILP

- On parle de MILP (Mixed integer linear programming) quand certaines variables sont contraintes aux entiers, et que d'autres variables sont réelles

Exemple d'un PLNE

- $max : y$
- $-x + y \leq 1$
- $3x + 2y \leq 12$
- $2x + 3y \leq 12$
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $x \in \mathbb{Z}$
- $y \in \mathbb{Z}$

Exemple d'un PLNE

- Les solutions entières sont (1, 2) et (2, 2) toute deux avec une valeur de fonction objectif égale à 2
- La solution réelle aurait été (1.8, 2.8), son arrondi (2, 3) n'est pas une solution

Méthode de résolution

- On ne peut pas résoudre en réel et prendre l'arrondi, car ce n'est pas garanti d'être une solution
- Branch-and-bound, qui divise le problème en plusieurs sous problèmes
- Via heuristique, la PLNE étant NP-difficile : recuit simulé, hill-climbing ...

PL 0/1

Méthode de résolution

- Les variables ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1
- Utilisée dans des problèmes de décision

Exemple :

- Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Méthode de résolution

- Les variables ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1
- Utilisée dans des problèmes de décision

Exemple :

- Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).
- Les variables désigne l'affection d'un couleur à un nœud
- 2 couleurs * 3 nœuds = 6 variables booléennes
- A1, A2, B1, B2, C1, C2

Contraintes de l'exemple

Affecter les couleurs :

- $A1 + A2 = 1$
- $B1 + B2 = 1$ ➠
- $C1 + C2 = 1$

Minimiser les couleurs :

- $A1 + B1$ - $arc11 \leq 1$
- $A2 + B2$ - $arc12 \leq 1$
- $B1 + C1$ - $arc21 \leq 1$
- $B2 + C2$ - $arc22 \leq 1$

Fonction objectif :

➠ min : $arc11 + arc12 + arc21 + arc22$