Algorithmique et structures de données

CM 8 – Arbre binaire de recherche

Plan du CM 6

Plan du CM 9

Manipulation de données

Manipulation de données

On souhaite stocker des données et pouvoir les récupérer.
Les fonctions principales sont

- la recherche : on souhaite récupérer une donnée stockée
- l'insertion : on souhaite ajouter une nouvelle donnée
- la suppression : on souhaite supprimer une donnée

Une solution : les structures linéaires

Les structures linéaires telles que les tableaux et les listes chaînées permettent ces opérations, mais elles ne sont pas efficaces

voir le CM 9 et le TD 9 sur les complexités

Recherche d'un élément dans un tableau – Rappels

Tableau non trié

- on recherche un élément dans un tableau contenant n éléments.
- la recherche s'effectue en moyenne en $n/2$ instructions.
- la recherche s'effectue dans le pire des cas en n instructions.

Tableau trié

- On effectue une recherche dichotomique.
- Complexité en moyenne et dans le pire des cas en $\Theta(\log n)$.

Recherche d'un élément dans une liste chaînée – Rappels

Liste chaînée

- on recherche un élément dans une liste contenant n nœuds.
- la recherche s'effectue en moyenne en $n/2$ instructions.
- la recherche s'effectue dans le pire des cas en n instructions.

Liste chaînée triée

- si la liste est triée, la complexité ne change pas,
- sauf dans le cas où l'élément n'appartient pas à la liste
  $\rightarrow$ on interrompe la recherche, lorsque l'on arrive sur un nœud de valeur supérieure à celle recherchée
- on peut également améliorer les complexités en mettant plusieurs pointeurs sur la liste.
- les skip lists permettent de se déplacer par niveau avec des racourcis pour aller d'un niveau à un autre.
- il existe d'autres structures de données intermédiaires entre listes chaînées et arbre binaire de recherche.

Insertion et suppression dans un tableau – rappels

Tableau non trié

- l'insertion et la suppression s'effectue en moyenne en $n/2$ instructions.
- l'insertion et la suppression s'effectue dans le pire des cas en n instructions.

Tableau trié

Pour le calcul de la complexité, nous devons considérer (au moins) deux types d'instuctions

1. la consultation de la valeur d'une case
2. le décalage d'un élément du tableau

On obtient les résultats suivants :

1. on peut diminuer le nombre de consultations
2. on ne peut pas diminuer le nombre de décalage

Insertion et suppression dans une liste chaînée – rappels

Liste chaînée non trié

- l'insertion et la suppression s'effectue en moyenne en $n/2$ instructions.
- l'insertion et la suppression s'effectue dans le pire des cas en n instructions.

Liste chaînée triée

- mêmes complexités qu'avec une liste chaînée non trié.
- on peut améliorer les complexités en mettant plusieurs pointeurs sur la liste.
- amélioration pour les autres structures de données

Notre objectif

Effectuer les trois opérations suivantes

- recherche
- suppression
- insertion

avec une complexité en $O(\log n)$ en moyenne et si possible aussi dans le pire des cas.

Possible avec des arbres

- la profondeur de la plupart des feuilles doit être en $O(\log n)$
(pour la complexité en moyenne)
- mieux : h –la hauteur de l'arbre– doit être en $\Theta(\log n)$
(pour la complexité dans le pire des cas)

Plan du CM 9

Arbre binaire de recherche

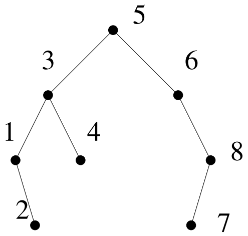
On suppose que toutes les valeurs de l'arbre sont différents

Définition – condition C1

Soit A un arbre binaire, A est un arbre binaire de recherche lorsque, pour tout $B = (x, B_G, B_d)$ sous-arbre de A, où x est la valeur du nœud, B_G est le sous-arbre gauche et B_D, le sous-arbre droit :

- tout nœud de B_G à une valeur inférieure à x
- tout nœud de B_D à une valeur supérieure à x

Exemple



Arbre binaire de recherche

On suppose que toutes les valeurs de l'arbre sont différents

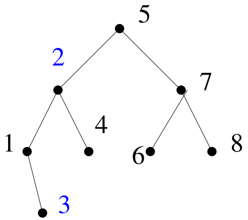
Condition locale

La condition suivante ne suffit pas

pour tout $B = (x, B_G, B_d)$ sous-arbre de A, où x est la valeur du nœud, B_G est le sous-arbre gauche et B_D, le sous-arbre droit

- si B_G est non vide, y la valeur de sa racine vérifie $y < x$
- si B_D est non vide, z la valeur de sa racine vérifie $z > x$

Exemple



Arbre binaire de recherche

On suppose que certaines valeurs peuvent apparaître plusieurs fois

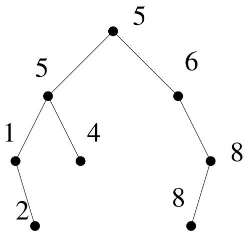
Nous sommes obligés de changer un peu la définition.

Définition – condition C1Bis

Soit A un arbre binaire, A est un arbre binaire de recherche lorsque, pour tout $B = (x, B_G, B_d)$ sous-arbre de A,

- tout nœud de B_G à une valeur inférieure ou égale à x
- tout nœud de B_D à une valeur supérieure à x

Exemple



Type ABR

Un ABR est un arbre binaire

Même structure de données qu'un arbre binaire quelconque.

```
structure noeud{
     valeur : entier
     gauche : pointeur sur noeud
     droit : pointeur sur noeud
}
type ABR = pointeur sur noeud
```

Tout arbre binaire n'est pas un ABR

Ce sont les méthodes d'insertion et de suppression qui permettent de maintenir la condition C1.

Plan du CM 9

Recherche d'un élément x dans un ABR

On retourne un pointeur sur un nœud de valeur x.

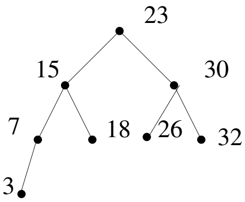
Méthode

On parcourt les nœuds de la manière suivante

1. si le nœud vaut None, alors x n'apparaît pas dans l'ABR, on retourne None
2. si la valeur du nœud vaut x, on retourne un pointeur sur ce nœud
3. si la valeur du nœud est plus grande que x, on va vers le sous-arbre gauche
4. si la valeur du nœud est plus petite que x, on va vers le sous-arbre droit

Exemple

Recherchez 7 et 28



Recherche d'un élément x dans un ABR

On retourne un pointeur sur un nœud de valeur x.

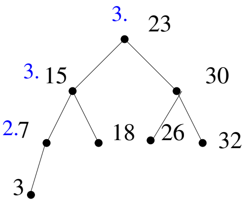
Méthode

On parcourt les nœuds de la manière suivante

1. si le nœud vaut None, alors x n'apparaît pas dans l'ABR, on retourne None
2. si la valeur du nœud vaut x, on retourne un pointeur sur ce nœud
3. si la valeur du nœud est plus grande que x, on va vers le sous-arbre gauche
4. si la valeur du nœud est plus petite que x, on va vers le sous-arbre droit

Exemple

Recherche de la valeur 7



Recherche d'un élément x dans un ABR

On retourne un pointeur sur un nœud de valeur x.

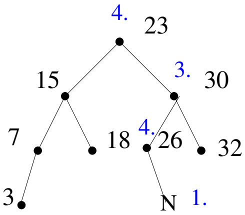
Méthode

On parcourt les nœuds de la manière suivante

1. si le nœud vaut None, alors x n'apparaît pas dans l'ABR, on retourne None
2. si la valeur du nœud vaut x, on retourne un pointeur sur ce nœud
3. si la valeur du nœud est plus grande que x, on va vers le sous-arbre gauche
4. si la valeur du nœud est plus petite que x, on va vers le sous-arbre droit

Exemple

Recherche de la valeur 28



Recherche d'un élément x dans un ABR

On retourne un pointeur sur un nœud de valeur x.

Méthode

1. si le nœud vaut None, alors x n'apparaît pas dans l'ABR, on retourne None
2. si la valeur du nœud vaut x, on retourne un pointeur sur ce nœud
3. si la valeur du nœud est plus grande que x, on va vers le sous-arbre gauche
4. si la valeur du nœud est plus petite que x, on va vers le sous-arbre droit

Algorithme récursif

```
rechercheABRrec(A : ABR, x : entier) : ABR
   si A = None alors                                      1.
      retourner None
   si A->valeur = x alors                                 2.
      retourner A
   si A->valeur > x alors                                 3.
        retourner rechercheABRrec(A->gauche)
   retourner rechercheABRrec(A->droit)                    4.
```

Recherche d'un élément x dans un ABR

On retourne un pointeur sur un nœud de valeur x.

Méthode

1. si le nœud vaut None, alors x n'apparaît pas dans l'ABR, on retourne None
2. si la valeur du nœud vaut x, on retourne un pointeur sur ce nœud
3. si la valeur du nœud est plus grande que x, on va vers le sous-arbre gauche
4. si la valeur du nœud est plus petite que x, on va vers le sous-arbre droit

Algorithme itératif

La condition d'arrêt regroupe les conditions 1. et 2.

```
rechercheABRit(A : ABR, x : entier) : ABR
   tant que A <> None et A->valeur <> x faire
      si A->valeur > x alors
          A = A->gauche
      sinon A = A->droit
   retourner A
```

Complexité de la recherche

Branche = chemin de la racine jusqu’à une feuille

Parcours d’une branche

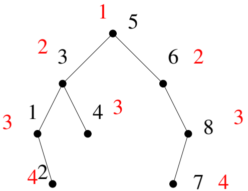
L’algorithme de recherche (récursif ou itératif) effectue le parcours d’une branche

- complètement dans le cas où x apparaît dans une feuille ou qu’il n’apparaît pas à l’ABR
- partiellement dans les autres cas

Complexité

On suppose que le coût est le nombre de comparaisons.
Le coût est donc au plus de h, où h est la hauteur de l’arbre.

Exemple



Plan du CM 9

Insertion sur les feuilles

Insertion

On souhaite ajouter un nœud contenant la valeur x.

Si x est déjà présent, on ne fait rien.

Méthode

On se déplace sur une branche (comme pour la recherche) et on effectue l'insertion en fin de branche.

Algorithme récursif

```
insererABRrec(A : ABR, x : entier) : ABR
   si A = None alors
      A=Nouveau(noeud),A->val=x, A->gauche=None, A->droit=None
   sinon
      si A->valeur > x alors
         A->gauche = insererABRrec(A->gauche, x)
      sinon
         si A->droit < x alors
            A->droit =  insererABRrec(A->droit, x)
      #si A->valeur = x on ne fait rien
   retourner A
```

Insertion sur les feuilles

Algorithme itératif (voir TD)

On peut effectuer le déplacement sur une branche de manière itérative.
Pour cela, on utilise l'instruction

```
tmp = tmp->gauche
```

```
ou
```

```
tmp = tmp->droit
```

où tmp est un pointeur qui parcourt les nœuds d'une branche

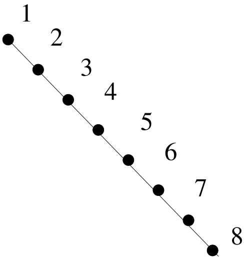
Ordre de l'insertion

Forme de l'arbre

- on souhaite se rapprocher d'un arbre complet
- l'ordre d'insertion des nœuds est très important

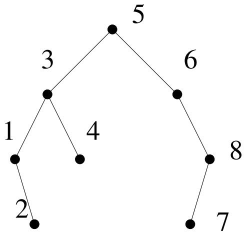
Exemples

1 2 3 4 5 6 7 8

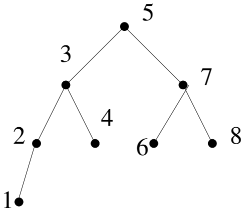


arbre dégénéré
Mauvais

5 3 4 6 1 8 2 7



5 7 3 4 6 2 8 1



arbre parfait
Bon

Ordre de l'insertion

Forme de l'arbre en moyenne

- on tire aléatoirement des permutations sur $\{1, \ldots, n\}$ afin d'obtenir un ABR à n nœuds
- on regarde la hauteur moyenne des ABR que l'on obtient

Complexité de la recherche d'un élément

Dépend de la profondeur

- la recherche d'un élément correspond à parcourir une branche jusqu'à trouver l'élément ou arriver à None
- le coût de la recherche dépend donc de la profondeur du nœud contenant la valeur (lorsqu'elle apparaît dans l'ABR)
- les nœuds proches de la racine nécessitent un coût faible
- les nœuds proches des feuilles nécessitent un coût plus fort

Complexité de la recherche d'un élément

- insertion sur les feuilles
  - → avec l'insertion sur les feuilles, les dernières valeurs insérées sont de grande profondeur
  - → le coût de la recherche est plus élevé pour les dernières valeurs insérées

- insertion à la racine
  - → avec l'insertion à la racine racine, les dernières valeurs insérées sont de petite profondeur
  - → le coût de la recherche est plus faible pour les dernières valeurs insérées

Obsolescence – Effet de mode

Souvent nous avons

- les dernières valeurs insérées sont plus souvent recherchées
- les premières valeurs insérées sont moins souvent recherchées

Dans ce cas, l'insertion à la racine est plus pertinente.

Plan du CM 9

Suppression du maximum

Le maximum (la valeur maximum) correspond au nœud le plus à droite.

Suppression du maximum – algorithme récursif

On retourne l'ABR sans le nœud contenant le maximum et la valeur du maximum aussi.
On définit pour cela la structure suivante

```
structure arbreMaxi {
   A : ABR
   m : entier
}

supprimerMaxrec(A : ABR) : arbreMaxi
   AM : arbreMaxi ; maxi : entier
   si A->droit = None alors
        maxi = A->valeur
        tmp : ABR ; tmp = A
        A = A->gauche
        désallouer tmp
   sinon
         AM = supprimerMaxrec(A->droit)
         A->droit = AM.A
         maxi = AM.m
   AM.A = A ; AM.m = maxi
   retourner AM
```

Suppression d'un nœud quelconque

Objectif

On souhaite supprimer le nœud N de valeur x. On suppose ici que l'arbre contient un tel nœud.

Cas possibles

- si N est une feuille
  $\rightarrow$ sa suppression ne nécessite pas de réorganisation.
- si N n'a qu'un seul enfant
  $\rightarrow$ on peut le remplacer par cet enfant.
- si N a deux enfants
  $\rightarrow$ on peut le remplacer par le nœud maximum de son enfant gauche.
  On utilise pour cela la procédure *supprimerMaxrec*.

Suppression d'un nœud quelconque

Procédure récursive

```
supprimerABR(A : ABR, x : entier) : ABR
si A = None alors retourner None
si A->valeur > x alors
   A->gauche = supprimerABR(A->gauche, x)
sinon si A->valeur < x alors
   A->droit = supprimerABR(A->droit, x)
   sinon #A->valeur = x
         tmp : ABR
         si A->gauche = None alors
            tmp = A ; A = A->droit
            désallouer tmp
          sinon
               si A->droit = None alors
                  tmp = A
                  A = A->gauche
                  désallouer tmp
                sinon
                    A->gauche, A->valeur = supprimerMaxrec(A->gauche)
retourner A
```

Valeurs d'un ABR présents dans un intervalle

Problème

On veut afficher tous les valeurs x telles que $a \leq x \leq b$.

Méthode naïve

On parcourt tous les nœuds et on affiche la valeur si elle est dans l'intervalle.
Méthode valable pour tous les arbres binaires.

```
afficheIntervalle(A:ABR,a:entier,b:entier)
   si A <> None alors
      si A->valeur >= a et A->valeur <= b:
          afficher A->valeur
      afficheIntervalle(A->gauche,a,b)
      afficheIntervalle(A->droit,a,b)
```

Meilleure solution

- nous devons tenir compte de l'ordre des valeurs d'un ABR
- il faut effectuer deux appels récursifs que si c'est nécessaire