TD 5 structures algébriques pour l'informatique

Exercice 1

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. On dit qu'un sous-groupe H de G est un sous-groupe *distingué* de G et on note $H \triangleleft G$ si et seulement si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$.

1. Soit $H \leq G$. Montrer que $f(H) \leq G'$. En déduire que $f(G) \leq G'$.
2. Soit $H' \leq G'$. Montrer que $f^{-1}(H') \leq G$.
3. On suppose que $H \triangleleft G$. Montrer que $f(H) \triangleleft f(G)$.
4. On suppose que $H' \triangleleft G'$. Montrer que $f^{-1}(H') \triangleleft G$.
5. Montrer que $\{1_{G'}\} \triangleleft G'$.
6. En déduire que $ker f \triangleleft G$.

Exercice 2

On considère G le groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de la multiplication des matrices. On définit l'application det : $G \to \mathbb{R}^*$, qui à une matrice associe son déterminant.

1. Vérifier que det est un morphisme de $(G, \circ)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
2. Déterminer ker det.
3. En déduire que det n'est pas injective.

Exercice 3

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\exp(x) = e^x$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.
   (On admet les relations usuelles vérifiées par la fonction exponentielle)
2. Déterminer $ker f$.
3. En déduire que f est un morphisme injectif.
4. Déterminer $Im f$. f est-elle un morphisme surjectif?
5. Déterminer un sous-groupe H de $(\mathbb{R}^*, \times)$, tel que l'application $g : \mathbb{R} \to H$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(H, \times)$.

Exercice 4

Soit G un groupe et $Aut(G)$ le groupe des automorphismes de G. Soit $g \in G$.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G, muni de $\circ$ (composition des applications) est un groupe. (On rappelle que $\circ$ est une opération binaire associative sur l'ensemble des applications de G dans G)
2. Soit $g \in G$. Montrer que la fonction $\gamma_g : G \to G$, définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ est un automorphisme de G, appelé un automorphisme intérieur:
$$\forall g \in G, \quad \gamma_g \in Aut(G).$$
3. Montrer que l'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe de $Aut(G)$. Il sera noté $Int(G)$ dans la suite.

4. Montrer que la fonction Γ définie par $\Gamma : G \to Aut(G)$, avec $g \mapsto \gamma_g$ est un morphisme de groupe.

5. On appelle le centre de G et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tout autre élément de G:
$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz, \forall g \in G\}.$$
En utilisant la dernière question de l'exercice 1, montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.