Исследование рядов на сходимость (ИДЗ №2)

Михайлов Петр
Вариант 4

30 мая 2025 г.

Задание 1: Исследовать ряды на сходимость

Для знакопеременных рядов исследовать абсолютную и условную сходимость.

Ряд а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^{10} \cdot \frac{1}{(n+1)^5}$$

Асимптотическое поведение: Можно исследовать асимптотику общего члена a_n при $n \to \infty$. Заметим, что $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^n\, n!}{(2n-1)!!} = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}/4^n} \sim \sqrt{\pi n} \quad (n \to \infty)$. Следовательно, $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^{10} \sim (\sqrt{\pi n})^{10} = \pi^5\, n^5$, и общий член $a_n \sim \frac{\pi^5\, n^5}{(n+1)^5} \;\longrightarrow\; \pi^5 \neq 0$. По признаку необходимого условия сходимости ряд расходится.

Ряд б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{n^2} - \sin \frac{\pi\alpha}{n^2} \right)^{1/8}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Возможный подход к решению: Это ряд с неотрицательными членами (при $\alpha \neq 0$ и достаточно больших n, т.к. $\operatorname{tg} x - \sin x > 0$ для малых $x > 0$).

1. **Случай $\alpha = 0$:** Если $\alpha = 0$, то все члены ряда равны нулю, и ряд сходится (сумма равна 0).

2. **Случай $\alpha \neq 0$:** При $x \to 0$, $\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$.
   Значит для большого n
   $\tan \frac{\pi\alpha}{n^2} - \sin \frac{\pi\alpha}{n^2} \sim \frac{1}{2} \frac{(\pi\alpha)^3}{n^6}$, и $a_n \sim \left(\frac{1}{2}(\pi\alpha)^3 n^{-6}\right)^{1/8} = C\, n^{-3/4}$.
   Но $\sum n^{-3/4}$ расходится ($p = \frac{3}{4} \leq 1$). Следовательно исходный ряд тоже расходится.

Ряд в)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\sin n \cos(1/n)}{n^2 - n + 1}$$

Заметим: Это знакопеременный ряд из-за множителя $\sin n$.

1. **Абсолютная сходимость:** Исследуем ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n+2)\sin n \cos(1/n)}{n^2 - n + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)|\sin n| \cos(1/n)}{n^2 - n + 1}$$

   При $n \to \infty$, $\cos(1/n) \to \cos(0) = 1$. Знаменатель $n^2 - n + 1 \sim n^2$. Числитель $(n+2)|\sin n| \sim n|\sin n|$. Таким образом, общий член ряда модулей $|a_n| \sim \frac{n|\sin n|}{n^2} = \frac{|\sin n|}{n}$. Ряд $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ расходится. Это можно показать, например, используя неравенство $|\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1-\cos(2n)}{2}$. $\sum \frac{1-\cos(2n)}{2n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$. Первый ряд расходится (гармонический), второй сходится (по признаку Дирихле). Значит, $\sum \sin^2 n/n$ расходится. Поскольку $|a_n| \sim \frac{|\sin n|}{n}$, то по предельному признаку сравнения ряд $\sum |a_n|$ расходится. Абсолютной сходимости нет.

2. **Условная сходимость:** Применим признак Дирихле. Пусть $u_n = \sin n$ и $v_n = \frac{(n+2)\cos(1/n)}{n^2-n+1}$. а) Частичные суммы $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \sin k$ ограничены. (Это известный факт, $|\sum_{k=1}^n \sin kx| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$). б) Последовательность v_n должна монотонно стремиться к нулю. $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cos(1/n)}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+2/n)\cos(1/n)}{n^2(1-1/n+1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+2/n)\cos(1/n)}{(1-1/n+1/n^2)} = 0 \cdot 1 = 0$. Монотонность v_n достаточна очевидна. Основной вклад дает $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, которая монотонно убывает. Условия Дирихле выполнены, ряд сходится условно.

3. **Итог:** ряд условно сходится.

Ряд г)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4\left(\frac{2n}{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

1. **Асимптотика общего члена:** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n} = 2$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \cos^4\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \cos^4(2)$. Это константа, не равная нулю (если $2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). Знаменатель: $\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+4/n^2} + n\sqrt{1+1/n^2} \sim n(1)+n(1) = 2n$ при $n \to \infty$. Таким образом, общий член $a_n \sim \frac{\cos^4(2)}{2n}$.

2. **Признак сравнения (предельный):** Сравним с гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n}$, который расходится. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\cos^4\left(\frac{2n}{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cos^4(2)}{2n} = \frac{\cos^4(2)}{2}$. Поскольку $\cos(2) \neq 0$, то $\cos^4(2) > 0$. Предел конечен и положителен. Следовательно, ряд расходится по предельному признаку сравнения.

Ряд д)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$$

Заметим: Это ряд с положительными членами. Вид общего члена $a_n = (f(n))^{g(n)}$ подсказывает использование признака Коши (радикального) в предельной форме.

1. **Признак Коши (радикальный):** Найдем предел $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. $\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}\right)^{1/n} = \left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{\frac{n^3+1}{n}} = \left(1-\frac{1}{n^2+4}\right)^{n^2+1/n}$. Для вычисления этого предела используем тот факт, что $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x = e^k$. Перепишем: $\left(1-\frac{1}{n^2+4}\right)^{n^2+1/n} = \left[\left(1-\frac{1}{n^2+4}\right)^{n^2+4}\right]^{\frac{n^2+1/n}{n^2+4}}$. Внутренняя часть в квадратных скобках: $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+4}\right)^{n^2+4} = e^{-1}$. Показатель степени: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1/n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+1/n^3)}{n^2(1+4/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n^3}{1+4/n^2} = \frac{1}{1} = 1$. Таким образом, $L = (e^{-1})^1 = e^{-1}$.

2. **Вывод:** Поскольку $L = e^{-1} \approx 1/2.718 < 1$, ряд сходится по признаку Коши.

Ряд e)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_n^{n+1}\frac{dx}{\ln^2 x}$$

Возможный подход к решению: Это знакочередующийся ряд вида $\sum(-1)^{n+1}b_n$, где $b_n = \int_n^{n+1}\frac{dx}{\ln^2 x}$.

1. **Проблема с первым членом b_1 (при $n = 1$):** $b_1 = \int_1^2 \frac{dx}{\ln^2 x}$. Этот интеграл является несобственным в точке $x = 1$, так как $\ln x \to 0$ при $x \to 1^+$. Для $x \to 1^+$, $\ln x \sim (x-1)$. Тогда $\frac{1}{\ln^2 x} \sim \frac{1}{(x-1)^2}$. Интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 = -\frac{1}{2-1} - \left(-\frac{1}{1+\epsilon-1}\right) = -1 + \frac{1}{\epsilon}$. При $\epsilon \to 0^+$, интеграл расходится. Поскольку первый член b_1 бесконечен, ряд не может сходиться в его классическом понимании. Сумма не определена. **Ряд расходится.**

2. **Если бы ряд начинался с $n = 2$ (или если есть оговорка, что $x > 1$ строго для знаменателя):** Предположим, мы исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$. Для $n \geq 2$, $b_n = \int_n^{n+1}\frac{dx}{\ln^2 x} > 0$. Применяем признак Лейбница: а) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$: Функция $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$ убывает для $x > 1$. Значит, $\frac{1}{\ln^2(n+1)} \cdot ((n+1)-n) \leq b_n \leq \frac{1}{\ln^2 n} \cdot ((n+1)-n)$. $\frac{1}{\ln^2(n+1)} \leq b_n \leq \frac{1}{\ln^2 n}$. По теореме о двух милиционерах, так как $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. б) b_n монотонно убывает (для $n \geq 2$): Рассмотрим $f(t) = \int_t^{t+1}\frac{dx}{\ln^2 x}$. Тогда $f'(t) = \frac{1}{\ln^2(t+1)} - \frac{1}{\ln^2 t}$. Поскольку $\ln x$ возрастающая функция для $x > 0$, то $\ln(t+1) > \ln t$. Для $t \geq 2$, $\ln t > \ln 2 > 0$. Тогда $\ln^2(t+1) > \ln^2 t$. Следовательно, $\frac{1}{\ln^2(t+1)} < \frac{1}{\ln^2 t}$, поэтому $f'(t) < 0$. Значит, $b_n = f(n)$ является монотонно убывающей последовательностью для $n \geq 2$. Условия признака Лейбница выполнены (для $n \geq 2$), такой ряд бы сходился.

3. **Абсолютная сходимость (для ряда, начинающегося с $n = 2$):** Исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{\ln^2 x} = \int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln^2 x}$ (по свойству аддитивности интеграла). Сравним подынтегральную функцию с $\frac{1}{x}$. Известно, что $\ln x < x^{\epsilon}$ для любого $\epsilon > 0$ при достаточно больших x. Возьмем $\epsilon = 1/2$. Тогда $\ln x < \sqrt{x}$ для больших x. Значит, $\ln^2 x < x$. Следовательно, $\frac{1}{\ln^2 x} > \frac{1}{x}$ для достаточно больших x. Поскольку интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, то по признаку сравнения для несобственных интегралов, $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\ln^2 x}$ также расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ расходится, то есть абсолютной сходимости

нет. Таким образом, если бы ряд начинался с $n \geq 2$, он бы сходился условно.

Итог для e)*: Поскольку ряд в условии начинается с $n = 1$, и первый член b_1 расходится (бесконечен), **исходный ряд расходится**, но если $n = 2$, то ряд **сходится условно**

Задание 2: Найти области абсолютной и условной сходимости функционального ряда

Дан функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^x n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Обозначим общий член ряда $u_n(x) = \frac{\ln^x n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

1. Область определения членов ряда

Рассмотрим член ряда $u_n(x)$:

- Для $n = 1$: $u_1(x) = \frac{\ln^x 1}{\sqrt[3]{1^3+1}} = \frac{0^x}{\sqrt[3]{2}}$.
  - Если $x > 0$, то $0^x = 0$, следовательно $u_1(x) = 0$.
  - Если $x = 0$, то 0^0 является неопределенностью. Для ее разрешения возьмем $0^0 = 1$. Тогда считаем, что $u_1(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
  - Если $x < 0$ (например, $x = -2$), то 0^x (например, $0^{-2} = 1/0^2$) не определено из-за деления на ноль.

  Таким образом, для того чтобы первый член ряда $u_1(x)$ был определен, необходимо, чтобы $x \geq 0$.

- Для $n \geq 2$: $\ln n > \ln 1 = 0$. Следовательно, $\ln n$ является положительным числом. Тогда $(\ln n)^x = e^{x \ln(\ln n)}$ всегда определено, вещественно и положительно для любого вещественного x. Знаменатель $\sqrt[3]{n^3+1}$ также всегда положителен для $n \geq 1$. Следовательно, для $n \geq 2$, члены ряда $u_n(x)$ положительны для любого x.

Из анализа первого члена $u_1(x)$ следует, что для того, чтобы **все члены ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ были определены, необходимо $x \in [0, \infty)$. Это и будет областью определения ряда, в которой мы будем исследовать сходимость.

2. Исследование сходимости в области определения $x \in [0, \infty)$

Поскольку для $n \geq 2$ члены $u_n(x)$ положительны, а $u_1(x)$ (если определен) неотрицателен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является рядом с неотрицательными членами в своей области определения. Для таких рядов понятие условной сходимости не применимо; сходимость эквивалентна абсолютной сходимости.

Случай 1: $x = 0$ Если $x = 0$, то ряд принимает вид (с учетом $0^0 = 1$ для $n = 1$, и $(\ln n)^0 = 1$ для $n \geq 2$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Общий член $u_n(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$. При $n \to \infty$:

$$u_n(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3(1+1/n^3)}} = \frac{1}{n\sqrt[3]{1+1/n^3}} \sim \frac{1}{n}$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится, то по предельному признаку сравнения исходный ряд при $x = 0$ также **расходится**.

Случай 2: $x > 0$ Если $x > 0$, то $u_1(x) = \frac{0^x}{\sqrt[3]{2}} = 0$. Ряд становится $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{\sqrt[3]{n^3+1}}$. Члены этого ряда положительны. При $n \to \infty$:

$$u_n(x) = \frac{(\ln n)^x}{\sqrt[3]{n^3+1}} = \frac{(\ln n)^x}{n\sqrt[3]{1+1/n^3}} \sim \frac{(\ln n)^x}{n}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{n}$. Это ряд вида $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ с $p = 1$ и $q = -x$. Такой ряд с $p = 1$ сходится тогда и только тогда, когда $q > 1$. В нашем случае $q = -x$. Для сходимости необходимо $-x > 1$, что эквивалентно $x < -1$. Однако мы рассматриваем случай $x > 0$. Условие $x < -1$ не выполняется для $x > 0$. Поскольку $x > 0 \implies -x < 0 \implies -x \leq 1$, то ряд $\sum \frac{(\ln n)^x}{n}$ расходится. Следовательно, по предельному признаку сравнения, исходный ряд при $x > 0$ также **расходится**.

3. Выводы для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^x n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ определен для $x \in [0, \infty)$.

- При $x = 0$ ряд расходится.
- При $x > 0$ ряд расходится.

Таким образом, данный функциональный ряд расходится для всех значений x из своей области определения.

- **Область сходимости:** $\emptyset$ (пустое множество).
- **Область абсолютной сходимости:** $\emptyset$ (так как для рядов с неотрицательными членами сходимость и абсолютная сходимость эквивалентны).
- **Область условной сходимости:** $\emptyset$.

4. Замечание (если бы ряд начинался с $n = 2$)

Если бы рассматривался ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{\sqrt[3]{n^3+1}}$, то его члены $u_n(x)$ были бы определены и положительны для всех вещественных x и $n \geq 2$. В этом случае сходимость (которая была бы абсолютной) определялась бы поведением ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{n}$. Этот ряд сходится, если $x < -1$, и расходится, если $x \geq -1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^x}{\sqrt[3]{n^3+1}}$ сходился бы абсолютно при $x \in (-\infty, -1)$ и расходился бы при $x \in [-1, \infty)$. Области условной сходимости не было бы.

Задание 3: Найти предел функциональной последовательности и исследовать равномерную сходимость

Дана функциональная последовательность $f_n(x) = \sin(n^2 e^{-nx})$. Нужно найти предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ и выяснить, будет ли сходимость равномерной на множествах: а) $E_1 = (0, +\infty)$; б) $E_2 = [1, +\infty)$.

1. Нахождение поточечного предела $f(x)$

Рассмотрим аргумент синуса: $A_n(x) = n^2 e^{-nx} = \frac{n^2}{(e^x)^n}$. Для любого фиксированного $x > 0$, имеем $e^x > 1$. Поскольку показательная функция $(e^x)^n$ растет быстрее любой степенной функции n^k (в данном случае n^2), то

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(e^x)^n} = 0 \quad \text{для } x > 0.$$

Тогда поточечный предел последовательности $f_n(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin(n^2 e^{-nx}) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-nx}\right) = \sin(0) = 0.$$

Итак, предельная функция $f(x) = 0$ для всех $x \in (0, +\infty)$.

2. Исследование равномерной сходимости на $E_1 = (0, +\infty)$

Сходимость $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E_1 означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_1} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

В нашем случае это эквивалентно

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |\sin(n^2e^{-nx}) - 0| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |\sin(n^2e^{-nx})| = 0.$$

Рассмотрим $A_n(x) = n^2e^{-nx}$. Попытаемся найти $x_n \in (0, +\infty)$ такое, что $A_n(x_n)$ принимает значение, при котором синус равен 1 (например, $\pi/2$). Пусть $n^2e^{-nx_n} = \frac{\pi}{2}$. $e^{-nx_n} = \frac{\pi}{2n^2}$ $-nx_n = \ln\left(\frac{\pi}{2n^2}\right)$ $x_n = -\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\pi}{2n^2}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2n^2}{\pi}\right)$. Для достаточно больших n (например, $2n^2/\pi > 1$, что верно для $n \geq 2$), $x_n > 0$, так что $x_n \in E_1$. Например, при $n \geq 2$, $\ln(2n^2/\pi) > \ln(8/\pi) > \ln(2.5) > 0$. При $n \to \infty$, $x_n = \frac{2\ln n + \ln(2/\pi)}{n} \to 0$. Для такой последовательности x_n:

$$f_n(x_n) = \sin\left(n^2e^{-nx_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Тогда

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,+\infty)} |\sin(n^2e^{-nx})| \geq |f_n(x_n)| = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq 1 \neq 0.$$

Таким образом, сходимость **не является равномерной** на множестве $E_1 = (0, +\infty)$.

3. Исследование равномерной сходимости на $E_2 = [1, +\infty)$

Проверяем условие $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} |\sin(n^2e^{-nx})| = 0$. Пусть $g_n(x) = n^2e^{-nx}$ для $x \in [1, +\infty)$. Найдем производную $g_n(x)$ по x:

$$g_n'(x) = n^2(-n)e^{-nx} = -n^3e^{-nx}.$$

Поскольку $n \geq 1$ и $x \geq 1$, то $e^{-nx} > 0$, следовательно $g_n'(x) < 0$. Это означает, что функция $g_n(x)$ является убывающей по x на $[1, +\infty)$. Так как $g_n(x) \geq 0$ (поскольку $n^2 > 0$ и $e^{-nx} > 0$), максимальное значение $g_n(x)$ на $[1, +\infty)$ достигается в точке $x = 1$:

$$\sup_{x \in [1, +\infty)} g_n(x) = g_n(1) = n^2 e^{-n \cdot 1} = \frac{n^2}{e^n}.$$

При $n \to \infty$, $\frac{n^2}{e^n} \to 0$. Поскольку $g_n(x)$ положительна и убывает на $[1, +\infty)$, то для всех $x \in [1, +\infty)$ имеем $0 \leq g_n(x) \leq \frac{n^2}{e^n}$. Для достаточно больших n, значение $\frac{n^2}{e^n}$ будет малым (в частности, меньше $\pi/2$). Например, при $n = 1$, $1/e \approx 0.36 < \pi/2$. При $n = 2$, $4/e^2 \approx 4/7.38 \approx 0.54 < \pi/2$. При $n = 3$, $9/e^3 \approx 9/20 \approx 0.45 < \pi/2$. В общем, $\frac{n^2}{e^n} \to 0$, так что найдется N такое, что для всех $n \geq N$, $0 \leq \frac{n^2}{e^n} < \frac{\pi}{2}$. Для таких n, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{n^2}{e^n} < \frac{\pi}{2}$ для всех $x \in [1, +\infty)$. На интервале $[0, \pi/2)$, функция $\sin(y)$ является неотрицательной и возрастающей. Следовательно,

$$\sup_{x \in [1, +\infty)} |\sin(g_n(x))| = \sup_{x \in [1, +\infty)} \sin(g_n(x)) = \sin\left(\sup_{x \in [1, +\infty)} g_n(x)\right) = \sin\left(\frac{n^2}{e^n}\right).$$

Теперь найдем предел этого выражения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{n^2}{e^n}\right).$$

Так как $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$, и функция $\sin(y)$ непрерывна в точке $y = 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{n^2}{e^n}\right) = \sin(0) = 0.$$

Поскольку $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [1, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$, сходимость **является равномерной** на множестве $E_2 = [1, +\infty)$.

Выводы по Заданию 3

- Поточечный предел функциональной последовательности $f_n(x) = \sin(n^2 e^{-nx})$ на $(0, +\infty)$ есть $f(x) = 0$.
- Сходимость **не является равномерной** на $E_1 = (0, +\infty)$.
- Сходимость **является равномерной** на $E_2 = [1, +\infty)$.

Задание 4: Исследовать равномерную сходимость ряда на данных множествах

Ряд а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x - 1)\cos nx}{\sqrt{n^2 + nx}}, \quad E = [0, \pi]$$

Обозначим $u_n(x) = \frac{(e^x-1)\cos nx}{\sqrt{n^2+nx}}$.

1. **Случай** $x = 0$**:** $u_n(0) = \frac{(e^0-1)\cos(0)}{\sqrt{n^2+0}} = \frac{(1-1)\cdot 1}{n} = 0$. Ряд $\sum 0 = 0$ сходится.

2. **Случай** $x \in (0, \pi]$**:** Используем признак Дирихле для равномерной сходимости. Пусть $a_n(x) = \cos(nx)$ и $b_n(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{n^2+nx}}$.

   - Частичные суммы ряда $\sum a_n(x) = \sum \cos(nx)$: $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \cos(kx)$. Для $x \in (0, \pi]$, $|\sin(x/2)| > 0$. $|S_N(x)| = \left|\frac{\cos((N+1)x/2)\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}$. Эта оценка не является равномерно ограниченной на $(0, \pi]$, так как $\sin(x/2) \to 0$ при $x \to 0^+$. Однако для оценки остатка ряда $R_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} b_n(x) a_n(x)$, по следствию из преобразования Абеля (или признаку Дирихле для остатка): если $b_n(x)$ монотонно стремится к 0 (по n), то $|R_k(x)| \le 2b_k(x)\sup_m |\sum_{j=k}^{m} a_j(x)|$. Более точная оценка для остатка ряда Дирихле: $|R_k(x)| \le b_k(x) \cdot \sup_{N \ge k} \left|\sum_{j=k}^{N} \cos(jx)\right|$. Либо $|R_k(x)| \le C \cdot b_k(x)$ при определенных условиях.

   Рассмотрим оценку остатка ряда $R_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} u_n(x)$. Для $x \in (0, \pi]$, последовательность $v_n(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{n^2+nx}}$ монотонно (по n) стремится к 0. $\left|\sum_{j=k}^{m} \cos(jx)\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ для $x \in (0, \pi]$. По признаку Дирихле (в форме для остатков рядов или используя суммирование по частям Абеля): $|R_k(x)| = \left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^x-1}{\sqrt{n^2+nx}} \cos(nx)\right| \le \frac{e^x-1}{\sqrt{k^2+kx}} \cdot \frac{C}{|\sin(x/2)|}$ (где C обычно 1 или 2). Возьмем $C = 2$ для безопасности оценки (часто $\sup_N |\sum \cos(nx)| \le 1/|\sin(x/2)|$, а $b_k(x)$ – первый член). Тогда $|R_k(x)| \le \frac{2(e^x-1)}{|\sin(x/2)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+kx}}$. Функция $h(x) = \frac{e^x-1}{\sin(x/2)}$ непрерывна на $(0, \pi]$. $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x/2} = 2$. $h(\pi) = \frac{e^\pi-1}{\sin(\pi/2)} = e^\pi - 1$. Следовательно, $h(x)$ ограничена на $(0, \pi]$, пусть $M_0 = \sup_{x\in(0,\pi]} |h(x)|$. M_0 существует и конечна. Тогда для $x \in (0, \pi]$: $|R_k(x)| \le M_0 \cdot$

$\frac{1}{\sqrt{k^2+kx}} \le \frac{M_0}{\sqrt{k^2}} = \frac{M_0}{k}$. Для $x = 0$, $R_k(0) = \sum_{n=k}^{\infty} 0 = 0$. Следовательно, $\sup_{x\in[0,\pi]} |R_k(x)| \le \frac{M_0}{k}$. Поскольку $\lim_{k\to\infty} \frac{M_0}{k} = 0$, ряд сходится **равномерно** на $E = [0, \pi]$.

Ряд б)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/(nx))}{1 + (\ln nx)^2}$$

Исследовать на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$. Обозначим $u_n(x) = \frac{\sin(1/(nx))}{1+(\ln nx)^2}$. Заметим, что $nx > 0$ на обоих множествах.

[I.]**Исследование на $E_1 = (0, 1)$:** Рассмотрим необходимое условие равномерной сходимости: $u_n(x) \rightrightarrows 0$ на E_1. Это означает $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} |u_n(x)| = 0$. Выберем последовательность точек $x_n = 1/n$. Для $n > 1$, $x_n = 1/n \in (0, 1)$. Тогда $nx_n = n \cdot (1/n) = 1$. $u_n(x_n) = u_n(1/n) = \frac{\sin(1/(n\cdot 1/n))}{1+(\ln(n\cdot 1/n))^2} = \frac{\sin(1)}{1+(\ln 1)^2} = \frac{\sin(1)}{1+0} = \sin(1)$. Поскольку $\sin(1) \ne 0$, то

$$\sup_{x\in(0,1)} |u_n(x)| \ge |u_n(1/n)| = \sin(1) \quad \text{для } n > 1.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,1)} |u_n(x)| \ge \sin(1) \ne 0$. Необходимое условие равномерной сходимости не выполнено. Таким образом, ряд **не сходится равномерно** на $E_1 = (0, 1)$. (Заметим, что ряд сходится поточечно на $(0, 1)$, так как для фиксированного $x \in (0, 1)$, $nx \to \infty$, $1/(nx) \to 0$, $\sin(1/(nx)) \sim 1/(nx)$, $\ln(nx) \to \infty$, и $u_n(x) \sim \frac{1}{nx(\ln nx)^2}$. Ряд $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ сходится.)

[II.]**Исследование на $E_2 = (1, +\infty)$:** Используем признак Вейерштрасса (М-тест). $|u_n(x)| = \left|\frac{\sin(1/(nx))}{1+(\ln nx)^2}\right|$. Поскольку $x \in (1, +\infty)$ и $n \ge 1$, то $nx \ge 1\cdot 1 = 1$. Следовательно, $0 < 1/(nx) \le 1$. Используем неравенство $|\sin y| \le |y|$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Так как $1/(nx) > 0$, имеем $|\sin(1/(nx))| \le 1/(nx)$. Тогда

$$|u_n(x)| \le \frac{1/(nx)}{1 + (\ln nx)^2}.$$

Обозначим $t = nx$. Поскольку $x \in (1, +\infty)$ и $n \ge 1$, то $t \in (n, +\infty)$ для $n \ge 1$. (Если $n = 1$, $t \in (1, +\infty)$. Если $n = 2$, $t \in (2, +\infty)$, и т.д.) Рассмотрим функцию $g(t) = \frac{1/t}{1+(\ln t)^2} = \frac{1}{t(1+(\ln t)^2)}$ для $t > 0$. Найдем ее производную: $g'(t) = -\frac{1+(\ln t)^2+t(2\ln t\cdot 1/t)}{(t(1+(\ln t)^2))^2} = -\frac{1+2\ln t+(\ln t)^2}{(t(1+(\ln t)^2))^2} = -\frac{(1+\ln t)^2}{(t(1+(\ln t)^2))^2}$. Для $t \ge 1$, $\ln t \ge 0$, поэтому $1 + \ln t > 0$. Следовательно, $g'(t) < 0$ для

$t \geq 1$ (кроме случая $1 + \ln t = 0 \implies t = 1/e$, который не в $t \geq 1$). Таким образом, $g(t)$ убывает на $[1, +\infty)$. Следовательно, для $t \in (n, +\infty)$ (где $n \geq 1$),

$$\sup_{t \in (n,+\infty)} g(t) = \lim_{t \to n^+} g(t) = g(n) = \frac{1}{n(1 + (\ln n)^2)}.$$

Обозначим $M_n = \frac{1}{n(1+(\ln n)^2)}$. Для $n = 1$, $M_1 = \frac{1}{1(1+(\ln 1)^2)} = \frac{1}{1(1+0)} = 1$. Для $n \geq 2$, $M_n = \frac{1}{n(1+(\ln n)^2)}$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+(\ln n)^2)}$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+(\ln n)^2)}$ сходится по интегральному признаку. Сравним с интегралом $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(1+(\ln x)^2)}$. Пусть $u = \ln x$, $du = dx/x$. $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\ln 2)$. Интеграл сходится. Более строго, $1 + (\ln x)^2 \geq (\ln x)^2$, поэтому $\frac{1}{x(1+(\ln x)^2)} \leq \frac{1}{x(\ln x)^2}$. Интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ сходится (как показано в предыдущих мыслях, $\int \frac{du}{u^2}$ сходится). Поскольку ряд $\sum M_n$ сходится, по признаку Вейерштрасса, исходный ряд $\sum u_n(x)$ сходится **равномерно** на $E_2 = (1, +\infty)$.

Задание 5: Найти сумму функционального ряда и указать множество сходимости

Дан функциональный ряд:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$$

1. Определение области сходимости

Член $n = 0$ данного ряда равен $\frac{(-1)^0 \cdot 0^3 \cdot x^0}{(0+1)!} = 0$. Таким образом, суммирование можно эффективно начинать с $n = 1$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$$

Для определения радиуса сходимости R используем признак Даламбера для ряда из модулей. Пусть $u_n(x) = \frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$. Рассмотрим $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3 x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^n n^3 x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3 x}{(n+2)n^3} \right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)} = |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{1}{n+2} = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \frac{1}{n+2}$$

$$= |x| \cdot (1)^3 \cdot 0 = 0.$$

Поскольку предел равен 0 для любого x, ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, радиус сходимости $R = \infty$, и множество сходимости ряда есть $(-\infty, \infty)$.

2. Нахождение суммы ряда

Для нахождения суммы ряда $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3 x^n}{(n+1)!}$ воспользуемся методом дифференцирования известного ряда. Рассмотрим вспомогательную функцию $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Как было показано ранее, $H(z) = \frac{e^z-1}{z}$ для $z \neq 0$, и $H(0) = 1$. Нам нужно найти сумму $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(-x)^n}{(n+1)!}$. Пусть $z = -x$. Тогда $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 z^n}{(n+1)!}$. Эта сумма получается применением оператора $\theta = z\frac{d}{dz}$ три раза к функции $H(z)$: $S(x) = \left[\theta^3 H(z)\right]_{z=-x}$.

Обозначим $H_0(z) = H(z) = \frac{e^z-1}{z}$.

1. $H_1(z) = \theta H_0(z) = zH_0'(z)$.
   $H_0'(z) = \frac{ze^z-(e^z-1)\cdot 1}{z^2} = \frac{ze^z-e^z+1}{z^2}$.
   $H_1(z) = z\left(\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}\right) = \frac{ze^z-e^z+1}{z} = e^z - \frac{e^z-1}{z}$.

2. $H_2(z) = \theta H_1(z) = zH_1'(z)$.
   $H_1'(z) = \frac{d}{dz}\left(e^z - \frac{e^z-1}{z}\right) = e^z - \left(\frac{ze^z-(e^z-1)}{z^2}\right) = e^z - \frac{ze^z-e^z+1}{z^2}$.
   $H_2(z) = z\left(e^z - \frac{ze^z-e^z+1}{z^2}\right) = ze^z - \frac{ze^z-e^z+1}{z} = ze^z - \left(e^z - \frac{e^z-1}{z}\right)$
   $H_2(z) = (z-1)e^z + \frac{e^z-1}{z}$.

3. $H_3(z) = \theta H_2(z) = zH_2'(z)$.
   $H_2'(z) = \frac{d}{dz}\left((z-1)e^z + \frac{e^z-1}{z}\right)$
   $H_2'(z) = (1 \cdot e^z + (z-1)e^z) + \left(\frac{ze^z-(e^z-1)}{z^2}\right)$
   $H_2'(z) = e^z + ze^z - e^z + \frac{ze^z-e^z+1}{z^2} = ze^z + \frac{ze^z-e^z+1}{z^2}$.
   $H_3(z) = z\left(ze^z + \frac{ze^z-e^z+1}{z^2}\right) = z^2e^z + \frac{ze^z-e^z+1}{z}$
   $H_3(z) = z^2e^z + e^z - \frac{e^z-1}{z} = (z^2+1)e^z - \frac{e^z-1}{z}$.

Теперь подставляем $z = -x$ в выражение для $H_3(z)$: $S(x) = H_3(-x) = ((-x)^2+1)e^{-x} - \frac{e^{-x}-1}{-x}$ $S(x) = (x^2+1)e^{-x} + \frac{e^{-x}-1}{x}$ $S(x) = (x^2+1)e^{-x} - \frac{1-e^{-x}}{x}$. Эта формула справедлива для $x \neq 0$. Если $x = 0$, то $S(0) = 0$, как мы установили в начале (так как член при $n = 0$ равен нулю, и для $n \geq 1$ множитель $x^n = 0$). Проверим предел полученной функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} S(x) = \lim_{x\to 0}\left[(x^2+1)e^{-x} - \frac{1-e^{-x}}{x}\right]$$

Первый член: $\lim_{x\to 0}(x^2+1)e^{-x} = (0^2+1)e^0 = 1$. Второй член (используя правило Лопиталя или известный предел $\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$): $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(-e^{-x})}{1} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$. Сумма пределов: $1-1 = 0$. Это совпадает со значением $S(0) = 0$.

3. Итоговая сумма ряда

Сумма данного функционального ряда:

$$S(x) = \begin{cases} (x^2+1)e^{-x} - \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{если } x \neq 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

Множество сходимости ряда: $(-\infty, \infty)$.

Задание V (6): Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$

Дана функция $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$, которую необходимо разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Также требуется построить графики функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье. Предполагаем, что α – вещественный параметр.

1. Анализ функции и выбор вида ряда Фурье

Функция $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ (гиперболический косинус) является четной, так как $f(-x) = \mathrm{ch}(-\alpha x) = \mathrm{ch}(\alpha x) = f(x)$. Для четной функции, разложенной в ряд Фурье на симметричном интервале $[-\pi, \pi]$, все коэффициенты при синусах (b_n) равны нулю. Таким образом, ряд Фурье будет содержать только косинусы (и свободный член):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \in_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (n \geq 1)$$

$$b_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

2. Вычисление коэффициентов Фурье

Коэффициент a_0

Предположим сначала, что $\alpha \neq 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch}(\alpha x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sh}(\alpha x)}{\alpha}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi\alpha}(\operatorname{sh}(\alpha\pi) - \operatorname{sh}(0)) = \frac{2\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi\alpha}$$

Таким образом, $\frac{a_0}{2} = \frac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi\alpha}$.

Коэффициенты a_n (для $n \geq 1$)

Предположим $\alpha \neq 0$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch}(\alpha x)\cos(nx)dx$$

Для вычисления интеграла $I = \int \operatorname{ch}(\alpha x)\cos(nx)dx$, можно использовать метод интегрирования по частям дважды или выразить $\operatorname{ch}(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}$. Используя стандартную формулу $\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))$, получаем:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \operatorname{ch}(\alpha x)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{\alpha x}\cos(nx)dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-\alpha x}\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+n^2}(\alpha\cos(nx) + n\sin(nx))\right]_0^\pi \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+n^2}(-\alpha\cos(nx) + n\sin(nx))\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2(\alpha^2+n^2)}\left[(e^{\alpha\pi}\alpha(-1)^n - \alpha) + (e^{-\alpha\pi}(-\alpha)(-1)^n - (-\alpha))\right] \\
&= \frac{1}{2(\alpha^2+n^2)}\left[\alpha(-1)^n e^{\alpha\pi} - \alpha - \alpha(-1)^n e^{-\alpha\pi} + \alpha\right] \\
&= \frac{\alpha(-1)^n}{2(\alpha^2+n^2)}(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}) = \frac{\alpha(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\operatorname{sh}(\alpha\pi)
\end{aligned}$$

Тогда,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha(-1)^n\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha^2+n^2} = \frac{2\alpha(-1)^n\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)} \quad (n \geq 1, \alpha \neq 0)$$

Случай $\alpha = 0$

Если $\alpha = 0$, то $f(x) = \mathrm{ch}(0) = 1$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = \frac{2}{\pi}[\pi - 0] = 2. \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{2} = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}(0-0) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Ряд Фурье для $f(x) = 1$ есть просто 1. Заметим, что формулы для a_0 и a_n, полученные для $\alpha \neq 0$, стремятся к этим значениям при $\alpha \to 0$: $\lim_{\alpha\to 0}\frac{a_0}{2} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\pi}{\pi\alpha} = 1$. $\lim_{\alpha\to 0} a_n = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha(-1)^n\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha(-1)^n(\alpha\pi)}{\pi(n^2)} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha^2(-1)^n}{n^2} = 0$ для $n \geq 1$.

3. Ряд Фурье

Для $\alpha \neq 0$, ряд Фурье функции $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ на $[-\pi, \pi]$:

$$\mathrm{ch}(\alpha x) = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n\,\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+n^2)}\cos(nx)$$

Этот ряд можно также записать в виде:

$$\mathrm{ch}(\alpha x) = \frac{\mathrm{sh}(\alpha\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nx)\right]$$

Для $\alpha = 0$, ряд Фурье есть $f(x) = 1$.

4. Сходимость ряда и сумма ряда Фурье

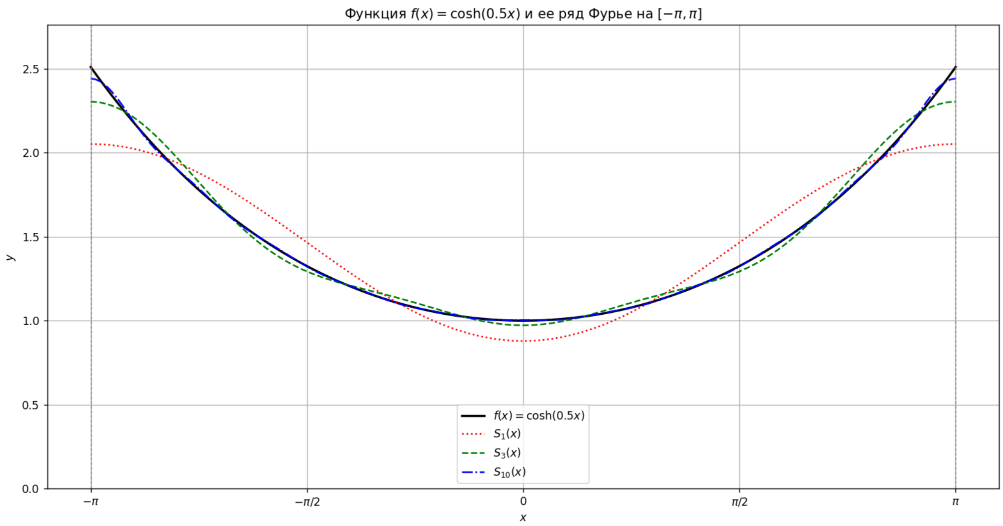
Функция $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ является непрерывной на $[-\pi, \pi]$. Ее 2π-периодическое продолжение также является непрерывным, так как $f(-\pi) = \mathrm{ch}(-\alpha\pi) = \mathrm{ch}(\alpha\pi) = f(\pi)$. Согласно теореме Дирихле, ряд Фурье сходится к $f(x)$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и к ее 2π-периодическому продолжению для $x \notin [-\pi, \pi]$. Таким образом, сумма ряда Фурье $S(x)$ равна $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

5. Построение графиков

- **График функции** $f(x) = \mathrm{ch}(\alpha x)$: Для построения конкретного графика нужно выбрать значение α. Например, если $\alpha = 1$, $f(x) =$

$\mathrm{ch}(x)$. Это четная функция, симметричная относительно оси Oy. При $x = 0$, $f(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$. Это точка минимума на $[-\pi, \pi]$. Функция возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$. Значения на концах отрезка: $f(\pi) = f(-\pi) = \mathrm{ch}(\alpha\pi)$. График напоминает параболу, но растет быстрее (экспоненциально).

- **График суммы ряда Фурье** $S(x)$: Как указано выше, $S(x) = f(x)$ для $x \in [-\pi, \pi]$. Таким образом, на этом отрезке график суммы ряда Фурье совпадает с графиком самой функции $f(x)$. Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ график $S(x)$ представляет собой 2π-периодическое повторение графика $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$. Для визуализации сходимости можно построить график частичной суммы ряда Фурье $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx)$ для нескольких значений N. При увеличении N график $S_N(x)$ будет все точнее приближать $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$.



Задание VI (7): Ряд Фурье в комплексной форме для графически заданной функции

Дана функция $f(t)$, заданная графически. Требуется построить для нее ряд Фурье в комплексной форме и изобразить график суммы построенного ряда.

1. Аналитическое представление функции

Из графика видно, что функция $f(t)$ на отрезке $[0, 4]$ определяется следующим образом:

- На отрезке $t \in [0, 2]$: функция представляет собой прямую линию, проходящую через точки $(0, 2)$ и $(2, 0)$. Уравнение этой прямой: $f(t) = 2 - t$.

- На отрезке $t \in (2, 4]$: функция равна нулю, $f(t) = 0$.

Будем считать, что функция является периодической с периодом $T = 4$. Тогда основная угловая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Для удобства вычислений определим функцию на одном периоде, например, $t \in [0, 4)$:

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t, & \text{если } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{если } 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

2. Вычисление комплексных коэффициентов Фурье c_k

Комплексные коэффициенты Фурье c_k определяются формулой:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^4 f(t) e^{-ik(\pi/2)t} dt$$

Поскольку $f(t) = 0$ для $t \in [2, 4)$, интеграл упрощается:

$$c_k = \frac{1}{4} \int_0^2 (2 - t) e^{-ik(\pi/2)t} dt$$

Вычисление c_0 (при $k = 0$):

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 (2-t) dt = \frac{1}{4} \left[2t - \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left((4 - \frac{4}{2}) - (0 - 0) \right) = \frac{1}{4}(4-2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Вычисление c_k (при $k \neq 0$): Интегрируем по частям $I = \int (2 - t) e^{-ik(\pi/2)t} dt$. Пусть $u = 2 - t \Rightarrow du = -dt$. Пусть $dv = e^{-ik(\pi/2)t} dt \Rightarrow v =$

$\frac{e^{-ik(\pi/2)t}}{-ik(\pi/2)} = \frac{2i}{k\pi}e^{-ik(\pi/2)t}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2-t)e^{-ik(\pi/2)t}dt &= \left[(2-t)\frac{2i}{k\pi}e^{-ik(\pi/2)t}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2i}{k\pi}e^{-ik(\pi/2)t}(-dt) \\
&= \left(0-(2)\frac{2i}{k\pi}e^0\right) + \frac{2i}{k\pi}\int_0^2 e^{-ik(\pi/2)t}dt \\
&= -\frac{4i}{k\pi} + \frac{2i}{k\pi}\left[\frac{e^{-ik(\pi/2)t}}{-ik(\pi/2)}\right]_0^2 \\
&= -\frac{4i}{k\pi} + \frac{2i}{k\pi}\left(\frac{2i}{k\pi}e^{-ik(\pi/2)t}\right)_0^2 \\
&= -\frac{4i}{k\pi} + \left(\frac{2i}{k\pi}\right)^2\left[e^{-ik\pi} - e^0\right] \\
&= -\frac{4i}{k\pi} + \frac{4i^2}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1) \\
&= -\frac{4i}{k\pi} - \frac{4}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

Тогда,

$$c_k = \frac{1}{4}\left(-\frac{4i}{k\pi} - \frac{4}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1)\right) = -\frac{i}{k\pi} - \frac{1}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1) \quad \text{для } k \neq 0$$

Это можно переписать как:

$$c_k = \frac{1}{(k\pi)^2}(1-(-1)^k) - \frac{i}{k\pi} \quad \text{для } k \neq 0$$

Рассмотрим случаи для k:

- Если $k \neq 0$ и k четное ($k = 2m, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$): $1-(-1)^k = 1-1 = 0$. Тогда $c_k = -\frac{i}{k\pi}$.
- Если k нечетное ($k = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$): $1-(-1)^k = 1-(-1) = 2$. Тогда $c_k = \frac{2}{(k\pi)^2} - \frac{i}{k\pi}$.

3. Комплексный ряд Фурье

Ряд Фурье в комплексной форме для $f(t)$ есть:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(\pi/2)t}$$

Подставляя найденные коэффициенты:

$$S(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^k}{(k\pi)^2} - \frac{i}{k\pi} \right) e^{ik(\pi/2)t}$$

4. График суммы построенного ряда $S(t)$

Функция $f(t)$, определенная на $[0,4)$, имеет разрыв при переходе от $t = 4-\epsilon$ к $t=0$ (из-за периодичности). $f_p(0^-) = \lim_{t\to 4^-} f(t) = 0$. $f_p(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = 2$. Согласно теореме Дирихле, в точках разрыва $t_d = 4n$ (где $n \in \mathbb{Z}$) ряд Фурье сходится к среднему арифметическому левого и правого пределов:

$$S(4n) = \frac{f_p((4n)^-) + f_p((4n)^+)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

В точках непрерывности $S(t) = f_p(t)$, где $f_p(t)$ - периодическое продолжение $f(t)$. На интервале $t \in (0,2)$, $f_p(t) = 2-t$. На интервале $t \in (2,4)$, $f_p(t) = 0$. В точке $t=2$, $f_p(2^-) = 0$ и $f_p(2^+) = 0$, так что $S(2) = 0$.

График суммы ряда $S(t)$ будет $T = 4$ периодическим и состоит из следующих частей на одном периоде, например, $t \in [0,4]$:

- Точка $(0,1)$.
- Для $t \in (0,2]$: $S(t) = 2-t$. Это отрезок прямой, идущий от точки $(0,2)$ (не включая ее) до точки $(2,0)$ (включая ее).
- Для $t \in (2,4)$: $S(t) = 0$. Это отрезок прямой, идущий от точки $(2,0)$ (не включая ее, но значение $S(2) = 0$) до точки $(4,0)$ (не включая ее).

График будет выглядеть как последовательность "зубьев пилы где каждый зуб начинается с значения $y = 2$ (но $S(4n) = 1$), линейно спадает до $y = 0$ на протяжении 2 единиц времени, затем остается на $y = 0$ еще 2 единицы времени. В точках $t = 0, \pm 4, \pm 8, \ldots$ значение суммы ряда равно 1.

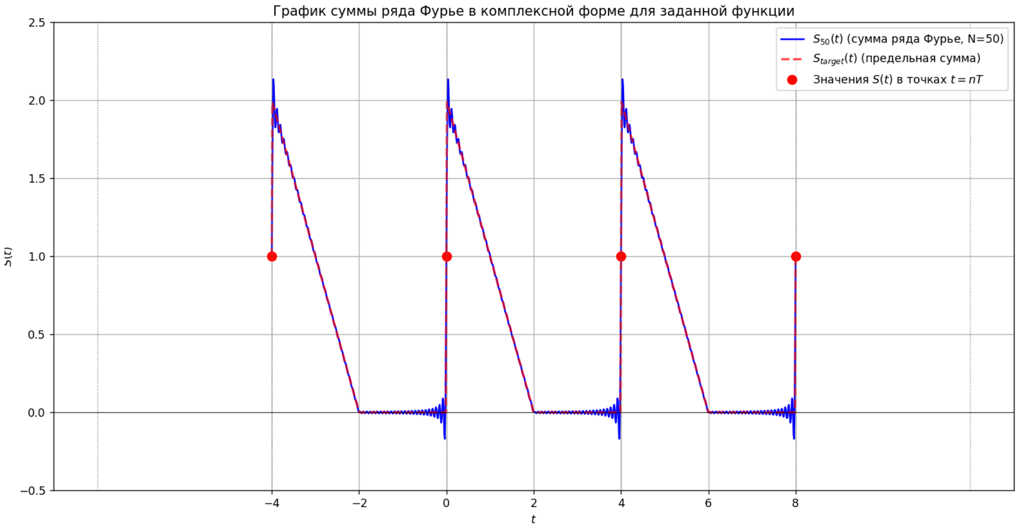


График суммы ряда Фурье в комплексной форме для заданной функции
$S_{50}(t)$ (сумма ряда Фурье, N=50)
$S_{target}(t)$ (предельная сумма)
Значения $S(t)$ в точках $t = nT$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
S(t)
−4
−2
0
2
4
6
8
t