Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Факультет ПИиКТ

Дисциплина: Математический анализ

Лабораторная работа №1
Приближенное решение уравнения $f(x) = 0$ методом деления пополам (метод бисекций)

Вариант 1

Выполнил: Михайлов Петр Сергеевич
Группа: Мат Ан Прод 11.4
Преподаватель: доцент, кандидат технических наук
Холодова Светлана Евгеньевна

Санкт-Петербург 2024г.

Содержание

Задание

Используя программу BISECT, найти корень уравнения $f(x) = 0$ с точностью ε.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения $f(x) = 0$ (т. е. найти отрезок $[a, b]$, на котором функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано – Коши).
2. Составить подпрограмму-функцию вычисления $f(x) = 0$.
3. Составить головную программу, содержащую обращение к подпрограмме BISECT и печать результатов.
4. Провести вычисления по программе.

Нахождение отрезка $[a, b]$

Исследуем данную функцию $f(x) = \arccos(x^2) - x$, чтобы сделать её график и определить отрезок $[a, b]$, на котором функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано – Коши).

Нахождение области определения и значения функции

Начнем с области определения. В область определения функции входят точки, которые удовлетворяют условию существования $\arccos(x^2)$, то есть одновременно удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} x^2 \geq -1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Тогда, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. Заметим, что $f(0) = \frac{\pi}{2},\ f(-1) = 1,\ f(1) = -1$.

Про четность, нечетность и периодичность

Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодичной.

Нахождение первой производной и промежутков возрастания и убывания функции, а также экстремумов

Вычислим первую производную рассматриваемой функции:

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} - 1.$$

Решая уравнение $f'(x) = 0$, методом интервалов легко получить, что f возрастает при

$$x \in \left[-1, -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}\right]$$

и убывает при

$$x \in \left[-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}, 1\right].$$

В точке $x = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}}$ функция имеет строгий локальный максимум, причем $f\left(-\sqrt{-2 + \sqrt{5}}\right) \approx f(-0.48587) \approx 1.81835$.

Нахождение второй производной и промежутков выпуклости функции, а также точек перегиба

Вычислим вторую производную рассматриваемой функции:

$$f''(x) = -\frac{2x^4 + 2}{\sqrt{1 - x^4}(1 - x^4)}.$$

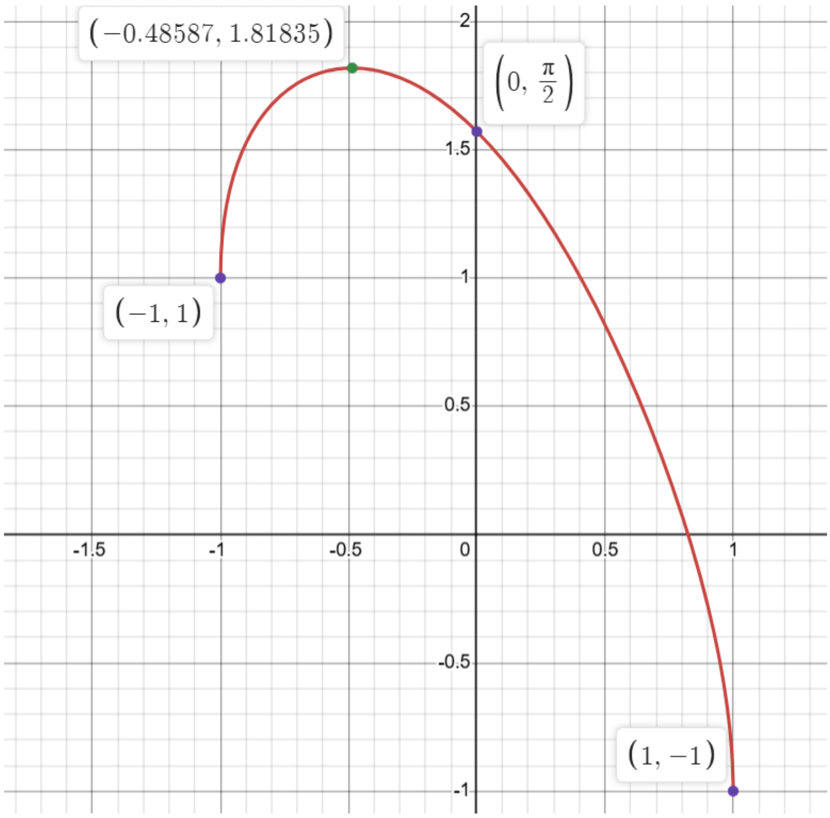
Решая уравнение $f''(x) = 0$, получим, что $f''(x) < 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$, а значит у функции нет точек перегиба, а сама она является выпуклой вверх на всей $D(f)$.

Нахождение асимптот графика функции

Функция не имеет наклонных и вертикальных асимптот, так как при $x \to \infty$ предел $f(x)$ не определен и ни при каких x функция не стремится к бесконечности.

Построение графика

Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции, см. рисунок.



Определение искомого отрезка

Исходя из графика $f(0.5) > 0$, можно принять отрезок $[a, b]$, как отрезок $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Для того чтобы найти корень с 15-ю верными знаками после запятой, полагаем

$$\varepsilon = 0.0000000000000005 = 5 * 10^{-16}.$$

Составление подпрограммы-функции вычисления $f(x)$

Составим подпрограмму-функцию вычисления $f(x)$ на языке программирования Python. Исходный код программы function.py:

```python
from numpy import arccos  # Используем библиотеку math для импорта функции arccos


def func(x):
    y = arccos(x**2) - x  # Исходная функция, для которой ищем корень
    return y
```

Составление подпрограммы BISECT

Составим подпрограмму-функцию BISECT, которая на языке программирования Python с помощью метода бисекций, находит корень функции, по-другому, решает уравнение вида $f(x) = 0$. Исходный код программы BISECT.py:

```python
from numpy import sign  # используем библиотеку numpy для импорта функции sign

def bisect(a, b, eps, f):
    """
    Программа BISECT предназначена для решения уравнения f(x) = 0 методом бисекции.
    a - левый конец интервала [a, b]
    b - правый конец интервала [a, b]
    eps - погрешность
    f - имя подпрограммы-функции, вычисляющей f(x)
    x0 - результат
    k - количество итераций
    """
    k = 0  # счетчик числа итераций
    s = 1
    an = a  # текущее значения концов
    bn = b  # отрезка, содержащего корень
    r = f(a)  # вычисление значения f(a)

    while True:  # бесконечный цикл
        x0 = 0.5 * (an + bn)  # длина отрезка пополам
        y = f(x0)  # значение f(x) в середине

        # В цикле достигнута точность, вычисления заканчиваются, возращаем результат
        if abs(y) < eps or (bn - an) / 2.0 < eps:
            return x0, k

        k += 1  # увеличиваем число итераций
        s = sign(y) * sign(r)  # знак величины f(a) * f(x0)

        if s >= 0:
            an = x0  # если f(an) * f(bn) >= 0, то an = x0
            r = y    # обновляем значение r
        else:
            bn = x0  # если f(an) * f(bn) < 0, то bn = x0
```

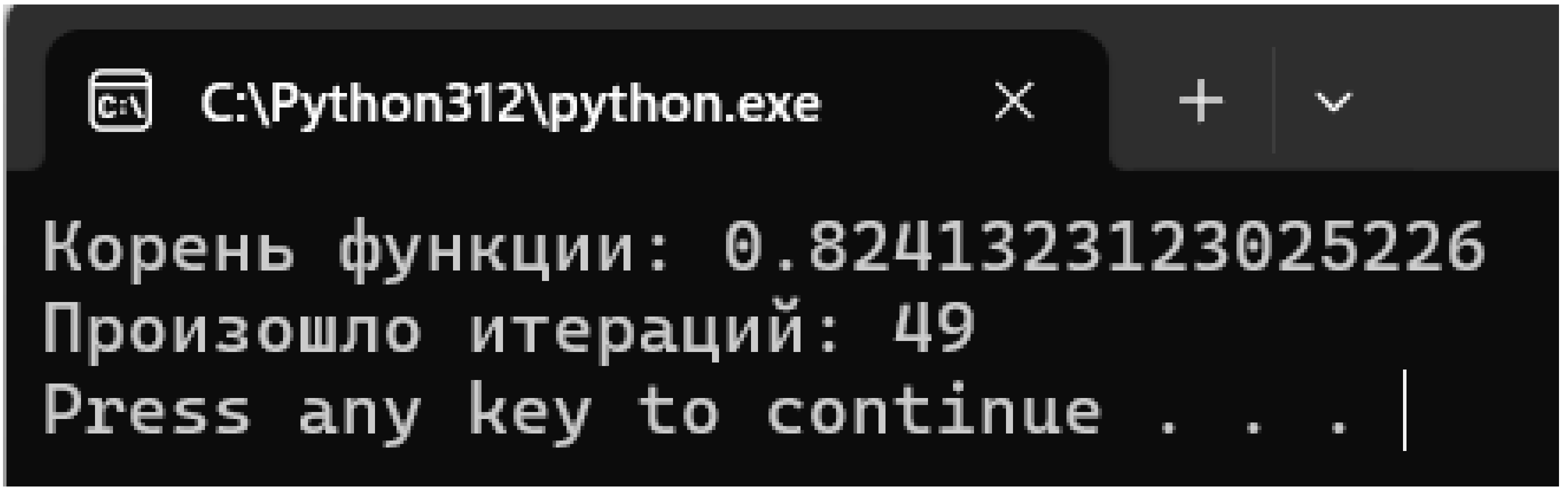
Составление головной программы

Составим программу, которая на языке программирования Python, содержит в себе обращение к исходной функции и подпрограмме BISEC и данные, полученные в ходе выполнения работы. Исходный код программы main.py:

```python
from BISECT import bisect
from function import func


# Задаем параметры для метода бисекций
a = 0.5
b = 1.0
eps = 5 * 10**(-16)

# Находим корень функции с помощью метода бисекций
root, k = bisect(a, b, eps, func)

# Выводим результат
print("Корень функции:", root)
print("Произошло итераций:", k)
```

Результат выполнения программы

Результатом всей программы будет вывод корня функции с 15-ю верными знаками после запятой, а также количество итераций, которое потребовалась программе для выполнения данной задачи. Вывод main.py:



Заключение

В результате выполнения лабораторной работы, я познакомился с методом бисекций, научился реализовывать этот метод с помощью языка программирования Python.

Литература

1) Математический анализ [Электронный ресурс]: Конспект лекций по математическому анализу на платформе Notion. – Режим доступа: https://clck.ru/3FC9Hk (дата обращения: 12.12.2024).
2) Т.В. Родина, Е.С. Трифанова Курс лекций по математическому анализу - I (для напр. «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. –183с. – Режим доступа: https://books.ifmo.ru/file/pdf/649.pdf (дата обращения: 12.12.2024).
3) Т.В. Родина, Е.С.Трифанова Задачи и упражнения по математическому анализу I (для спец. «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. –208с. – Режим доступа: https://books.ifmo.ru/file/pdf/835.pdf (дата обращения 12.12.2024).

Приложение

1) Ссылка на репозиторий GitHub, содержащий исходные коды всех составленных программ:

   https://clck.ru/3FCJPP

2) Для сравнения прилагаю корень функции, найденный с помощью калькулятора:

$$x \approx 0.8241323123025224229609567857719911081427\ldots$$

   Синим выделены первые 15 цифр после запятой.