Useful tips for Probability & Statistics

Tae Geun Kim

2019-12-27

순열과 조합

기본적인 연산 정리

연산	최빈 유형	함수	공 나누기
순열	줄 세우기	일대일 대응	
조합	분할, 분배	$x_i < x_j \to f(x_i) < f(x_j)$	
중복순열	함수, 투표	모든 함수의 개수	다른 색 공을 다른 바구니에 나눠줌
중복조합	정수해의 개수, 나눠주기	$x_i < x_j \to f(x_i) \leq f(x_j)$	같은 색 공을 다른 바구니에 나눠줌
자연수 분할	나눠주기		같은 색 공을 똑같은 바구니에 나눠줌
집합 분할	나눠주기		다른 색 공을 똑같은 바구니에 나눠줌

1. 공식 증명

자주 나오는 문제

- ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$
- ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$
- ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
- ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$
- $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$

해설

- 우변으로부터 $n\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$

- 우변으로부터 $\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \cdot \dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$ 인데, $(n-r)! = (n-r-1)! \cdot (n-r)$ 임을 이용하여 통분하면,
  $\dfrac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{(n-r)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-r)!} = {}_nP_r$
- ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = {}_nC_{n-r}$
- $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{(n-r)(n-1)! + r(n-1)!}{r!(n-r)!} = \dfrac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$
- $r\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$

2. 숫자만들기

자주 나오는 문제

- $0, 1, 2, 3, 4$ 의 다섯 개의 숫자 중에서 서로 다른 네 개의 숫자를 택하여 네 자릿수를 만들 수 있는 방법의 수를 구하여라.
- 7개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에서 서로 다른 5개의 숫자를 택하여 다섯 자릿수를 만들 때, 4의 배수는 몇 개인가?
- $1, 2, 3, 4, 5$ 의 다섯 개의 숫자에서 서로 다른 세 개의 숫자를 택하여 세 자리 정수를 만들 때, 그 합을 구하여라.
- $1, 2, 3$ 을 써서 여섯 자리의 정수를 만들 때, 같은 숫자를 네 번 까지만 쓸 수 있도록 한다면 몇 가지 만들 수 있는가?
- $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 1과 2만을 중복하여 사용할 수 있다고 할 때, 이들 숫자를 써서 만들 수 있는 5자리의 정수는 몇 개인가?

해설

- 빈 자리를 놓고 앞에서부터 가능한 경우의 수는 $4, 4, 3, 2$ 이므로 다 곱하면 96이다.
- 4의 배수는 뒤에서 2자리가 4의 배수이면 되므로 일단 다음과 같이 12개를 찾을 수 있다.

  $$04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60, 64$$

  이때, 뒤의 2자리 수에 0 의 포함 여부가 앞의 3자리 결정에 영향을 미치므로 0의 포함 유무에 따라 경우를 나눈다. 0 을 포함하는 4의 배수는 총 4개이며 포함하지 않는 4의 배수는 8개이

다. 0을 포함할 때는 앞의 3자리에 어떤 수가 들어오든 관계없으므로, ${}_5P_3$ 이 되고, 0을 포함하지 않는 경우에는 앞의 3자리에 들어올 수 있는 경우의 수가 $4 \times 4 \times 3$ 이므로, 전체 값은 ${}_5P_3 \times 4 + 4 \times 4 \times 3 \times 8 = 624$.

- 모든 가능한 경우의 수에서의 각 숫자의 출현 빈도는 똑같다. 이때, 총합을 구하려면 각 자릿수의 합을 구하여 합하는 것이 쉽다.
  - 1의 자릿수: $(1+2+3+4+5) \times {}_4P_2$
  - 10의 자릿수: $(1+2+3+4+5) \times 10 \times {}_4P_2$
  - 100의 자릿수: $(1+2+3+4+5) \times 100 \times {}_4P_2$

  모두 합하면 19980이 된다.

- 전체에서 5번 쓴 경우와 6번 쓴 경우를 빼는 것이 편하다.
  - 6번: ${}_3C_1 = 3$ (3개의 숫자 중 어떤 것을 쓸 지만 따지면 되므로)
  - 5번: ${}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot \dfrac{6!}{5!}$ (5개 쓸 숫자, 나머지 1개, 정렬)
  - 전체: 3^6

  따라서 답은 $3^6 - 36 - 3 = 690$.

- $3, 4, 5$가 몇 개 포함하는지의 경우로 나눠서 세는 것이 편하다.
  - $3, 4, 5$가 들어있지 않은 경우: 2^5
  - $3, 4, 5$가 하나 있는 경우: ${}_3C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot 2^4$
  - $3, 4, 5$가 두 개 있는 경우: ${}_3C_2 \cdot 2^3 \cdot \dfrac{5!}{3!}$
  - $3, 4, 5$가 모두 있는 경우: $2^2 \cdot \dfrac{5!}{2!}$

  따라서 모두 더하면 992.

3. 함수

자주 나오는 문제

- 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에서 A 로의 함수 중 다음 세 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.
  1. 함수 f 는 일대일 대응
  2. $f(1) = 8$
  3. $k \geq 2$ 이면 $f(k) \leq k$

- 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 정의된 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하여라.

  임의의 $x \in X$ 에 대하여 $x + f(x)$ 는 홀수이다.

- 집합