Function

For First-year Highschool Students

Tae Geun Kim

2018-07-24

Basic Concepts of Function (함수의 기본 개념들)

Notation (표기법)

- 집합기호
  - $\mathbb{N}$: 자연수집합
  - $\mathbb{Z}$: 정수집합
  - $\mathbb{Q}$: 유리수집합
  - $\mathbb{R}$: 실수집합
- 논리기호
  - $\forall$: 모든 ~ 에 대하여
  - $\exists$: 존재한다.

Definition (정의)

함수란 두 집합간의 대응관계를 나타낸 것으로 $f : X \to Y$ 라 할 때, 다음 두 조건을 만족한다.

1. X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)$가 존재한다.
2. X의 원소 x에 대하여 단 하나의 $f(x)$만이 존재한다.

이 때, 집합 X를 함수 f의 정의역(domain)이라고 부르며 Y를 함수 f의 공역(range)이라 한다. 또한, $f(X)$를 치역(image)이라고 부르는데 치역의 정의는 다음과 같다.

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

Examples

1. 함수 $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$ 가 $f(x) = x^2 - 4$로 정의되었을 때, 함수 f의 치역은 $\{-3, 0, 5\}$이다.
2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 $f(x) = x^2$으로 정의되었을 때, 함수 f의 치역 $f(\mathbb{R})$은 $\{y | y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$이다.
3. 가우스 함수 $f(x) = [x]$의 치역은 $\mathbb{Z}$이다.

Important Functions (중요 함수들)

1. 함수 $f : X \to Y$에 대해 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$을 만족하는 함수를 일대일 함수라고 한다. 또는 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$를 만족하는 함수라고 정의하기도 한다. (참을 증명할 때는 후자, 반례를 보일 때는 전자를 사용하면 된다.)
2. 함수 $f : X \to Y$가 일대일 함수이고 $f(X) = Y$이면 함수 f를 일대일 대응이라고 한다.
3. 함수 $f : X \to X$가 $f(x) = x$를 만족하면 그 함수를 항등함수라고 한다.
4. 함수 $f : X \to Y$가 $f(x) = c$를 만족하는 함수를 상수함수라고 부른다.

Examples

Q1. 함수 $f(x) = x^3$이 일대일 대응임을 보여라.

A1. $f(x_1) = f(x_2)$라 가정하자. 그렇다면 $x_1^3 = x_2^3$이 되는데 좌변으로 이항한 후 인수분해 공식을 사용하면 $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$이 된다. 이때, 뒤의 식은 판별식이 0보다 작기 때문에 근을 가지지 못한다. 따라서 $x_1 = x_2$이다. 또한, f의 치역과 공역이 모두 실수 전체로 같으므로 함수 f는 일대일 대응이다.

Q2. 함수 $f(x) = x^2$이 일대일 함수가 아님을 보여라.

A2. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$에 대해 $x_1 \neq x_2$이지만, $f(x_1) = 1 = f(x_2)$이므로 함수 f는 일대일 함수가 아니다.

Problems

1. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$와 $f : X \to X$에 대한 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하시오.
    1) $f(x) = x + 1$은 함수이다.
    2) $f(x) = 4 - x$는 일대일 대응인 함수이다.
    3) $f(x) = 0 \cdot x$는 함수이다.
    4) $f(x) = |3 - x|$는 일대일 대응이다.
    5) 일대일 대응인 함수 f는 100개 이상이다.

2. 항등함수가 일대일 대응임을 증명하여라.

3. $f(x) = [x]$가 일대일 대응이 되게 만드려면 정의역과 공역을 어떻게 구성해야 할 지 서술하시오.

Composit Function (합성함수)

Definition

집합 X, Y, Z에 대해, 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$가 존재한다고 할 때, 함수 $g \circ f: X \to Z$를 f와 g의 합성함수라고 부르고 다음과 같이 정의한다.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \ \forall x \in X$$

Examples

1. 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$에 대하여 $(f \circ g)(x) = (2x+1)^2$ 이고 $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$ 이다.
2. 함수 $f(x) = -2x + 1$이고, 함수 g가 다음과 같이 정의되었다고 한다.

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ x^2 - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이때, $(f \circ g)(x)$ 와 $(g \circ f)(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2(x+1)+1 & (x < 1) \\ -2(x^2-1)+1 & (x \geq 1) \end{cases} \tag{1}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2x+1+1 & (f(x) < 1) \\ (-2x+1)^2 - 1 & (f(x) \geq 1) \end{cases} \tag{2}$$

이를 정리하면 답은 다음과 같다.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2x-1 & (x < 1) \\ -2x^2+3 & (x \geq 1) \end{cases} \tag{3}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2x+2 & (x > 0) \\ 4x^2-4x & (x \leq 0) \end{cases} \tag{4}$$

Problems

1. 함수 $f : X \to Y$와 $g : Y \to Z$가 모두 일대일 함수일 때, $g \circ f$도 일대일 함수 임을 증명하시오.

2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$와 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 각각 $f(x) = x^2 + 2,\ \ g(x) = 2x - 1$로 정의되었을 때, 함수 $f \circ g$와 $g \circ f$를 구하여라.

3. [인하대학교 2015 논술] 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 다음과 같을 때, 함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프를 그리시오.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & (x < 0) \\ 2x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

Inverse Function (역함수)

Definition

함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때, 다음 조건을 만족하는 함수 $f^{-1} : Y \to X$를 f의 역함수라고 한다.

$$f(x) = y\text{와 } f^{-1}(y) = x\text{는 서로에게 필요충분조건이다.}$$

실제로 많은 문제에서는 위의 조건보다 다음 조건을 선호한다.

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)))$$

Method (방법)

역함수를 구할 때는 보통 역함수가 원래 함수의 직선 $y = x$에 대한 대칭임을 사용한다. (즉, x와 y를 서로 바꾼다.)

Examples

1. 함수 $f(x) = 2x - 1$의 역함수는 $x = 2y - 1$이므로 $y = \dfrac{x+1}{2}$. 즉, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ 이다.
2. 함수 $f(x) = x^2$은 원래 일대일 대응이 아니므로 역함수를 가지지 못하지만, 정의역을 $\{x|x \geq 0\}$으로 제한하면 일대일 대응이므로 역함수를 가지게 된다. 이때의 역함수는 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$이다.
3. 합성함수 $g \circ f$의 역함수는 $f^{-1} \circ g^{-1}$이다. (대입해보면 자명하다.)

Problems

1. 일대일 대응 함수 f의 역함수 f^{-1} 역시 일대일 대응임을 보이시오.

2. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 다음과 같이 정의되었을 때, 이 함수가 역함수를 가지는지 서술하고 역함수를 가진다면 그래프를 그리시오.

$$f(x) = \begin{cases} -|x-1| & (x < 1) \\ \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} & (x \geq 1) \end{cases}$$