
Function

For First-year Highschool Students

Tae Geun Kim

2018-07-24

Basic Concepts of Function (함수의 기본 개념들)

Notation (표기법)

- 집합기호
 - \mathbb{N} : 자연수집합
 - \mathbb{Z} : 정수집합
 - \mathbb{Q} : 유리수집합
 - \mathbb{R} : 실수집합
- 논리기호
 - \forall : 모든 ~에 대하여
 - \exists : 존재한다.

Definition (정의)

함수란 두 집합간의 대응관계를 나타낸 것으로 $f: X \rightarrow Y$ 라 할 때, 다음 두 조건을 만족한다.

1. X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x)$ 가 존재한다.
2. X 의 원소 x 에 대하여 단 하나의 $f(x)$ 만이 존재한다.

이 때, 집합 X 를 함수 f 의 정의역(domain)이라고 부르며 Y 를 함수 f 의 공역(range)이라 한다. 또한, $f(X)$ 를 치역(image)이라고 부르는데 치역의 정의는 다음과 같다.

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

Examples

1. 함수 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ 가 $f(x) = x^2 - 4$ 로 정의되었을 때, 함수 f 의 치역은 $\{-3, 0, 5\}$ 이다.
2. 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 $f(x) = x^2$ 으로 정의되었을 때, 함수 f 의 치역 $f(\mathbb{R})$ 은 $\{y | y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ 이다.
3. 가우스 함수 $f(x) = [x]$ 의 치역은 \mathbb{Z} 이다.

Important Functions (중요 함수들)

1. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대해 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 일대일 함수라고 한다. 또는 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 를 만족하는 함수라고 정의하기도 한다. (참을 증명할 때는 후자, 반례를 보일 때는 전자를 사용하면 된다.)
2. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일 함수이고 $f(X) = Y$ 이면 함수 f 를 일대일 대응이라고 한다.
3. 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 $f(x) = x$ 를 만족하면 그 함수를 항등함수라고 한다.
4. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = c$ 를 만족하는 함수를 상수함수라고 부른다.

Examples

Q1. 함수 $f(x) = x^3$ 이 일대일 대응임을 보여라.

A1. $f(x_1) = f(x_2)$ 라 가정하자. 그렇다면 $x_1^3 = x_2^3$ 이 되는데 좌변으로 이항한 후 인수분해 공식을 사용하면 $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$ 이 된다. 이때, 뒤의 식은 판별식이 0보다 작기 때문에 근을 가지지 못한다. 따라서 $x_1 = x_2$ 이다. 또한, f 의 치역과 공역이 모두 실수 전체로 같으므로 함수 f 는 일대일 대응이다.

Q2. 함수 $f(x) = x^2$ 이 일대일 함수가 아님을 보여라.

A2. $x_1 = 1, x_2 = -1$ 에 대해 $x_1 \neq x_2$ 이지만, $f(x_1) = 1 = f(x_2)$ 이므로 함수 f 는 일대일 함수가 아니다.

Problems

1. $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 와 $f : X \rightarrow X$ 에 대한 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하시오.

- 1) $f(x) = x + 1$ 은 함수이다.
- 2) $f(x) = 4 - x$ 는 일대일 대응인 함수이다.
- 3) $f(x) = 0 \cdot x$ 는 함수이다.
- 4) $f(x) = |3 - x|$ 는 일대일 대응이다.
- 5) 일대일 대응인 함수 f 는 100개 이상이다.

2. 항등함수가 일대일 대응임을 증명하여라.

3. $f(x) = [x]$ 가 일대일 대응이 되게 만드려면 정의역과 공역을 어떻게 구성해야 할 지 서술하시오.

Composit Function (합성함수)

Definition

집합 X, Y, Z 에 대해, 함수 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ 가 존재한다고 할 때, 함수 $g \circ f : X \rightarrow Z$ 를 f 와 g 의 합성함수라고 부르고 다음과 같이 정의한다.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$$

Examples

1. 함수 $f(x) = x^2, g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$ 이고 $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$ 이다.
2. 함수 $f(x) = -2x + 1$ 이고, 함수 g 가 다음과 같이 정의되었다고 한다.

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & (x < 1) \\ x^2 - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이때, $(f \circ g)(x)$ 와 $(g \circ f)(x)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2(x + 1) + 1 & (x < 1) \\ -2(x^2 - 1) + 1 & (x \geq 1) \end{cases} \quad (1)$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 1 & (f(x) < 1) \\ (-2x + 1)^2 - 1 & (f(x) \geq 1) \end{cases} \quad (2)$$

이를 정리하면 답은 다음과 같다.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -2x - 1 & (x < 1) \\ -2x^2 + 3 & (x \geq 1) \end{cases} \quad (3)$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (x > 0) \\ 4x^2 - 4x & (x \leq 0) \end{cases} \quad (4)$$

Problems

1. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 와 $g : Y \rightarrow Z$ 가 모두 일대일 함수일 때, $g \circ f$ 도 일대일 함수임을 증명하시오.
2. 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 와 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 각각 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 2x - 1$ 로 정의되었을 때, 함수 $f \circ g$ 와 $g \circ f$ 를 구하여라.
3. [인하대학교 2015 논술] 함수 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 다음과 같을 때, 함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프를 그리시오.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & (x < 0) \\ 2x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$