

---

# **Function**

For First-year Highschool Students

Tae Geun Kim

2018-07-24

## Basic Concepts of Function (함수의 기본 개념들)

### Notation (표기법)

- $\mathbb{N}$ : 자연수집합
- $\mathbb{Z}$ : 정수집합
- $\mathbb{Q}$ : 유리수집합
- $\mathbb{R}$ : 실수집합

### Definition (정의)

함수란 두 집합간의 대응관계를 나타낸 것으로  $f: X \rightarrow Y$  라 할 때, 다음 두 조건을 만족한다.

1.  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x)$ 가 존재한다.
2.  $X$ 의 원소  $x$ 에 대하여 단 하나의  $f(x)$ 만이 존재한다.

이 때, 집합  $X$ 를 함수  $f$ 의 정의역(domain)이라고 부르며  $Y$ 를 함수  $f$ 의 공역(range)이라 한다. 또한,  $f(X)$ 를 치역(image)이라고 부르는데 치역의 정의는 다음과 같다.

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

### Examples

1. 함수  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ 가  $f(x) = x^2 - 4$ 로 정의되었을 때, 함수  $f$ 의 치역은  $\{-3, 0, 5\}$ 이다.
2. 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이  $f(x) = x^2$ 으로 정의되었을 때, 함수  $f$ 의 치역  $f(\mathbb{R})$ 은  $\{y | y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ 이다.
3. 가우스 함수  $f(x) = [x]$ 의 치역은  $\mathbb{Z}$ 이다.

### Important Functions (중요 함수들)

1. 함수  $f: X \rightarrow Y$ 에 대해  $x_1 \neq x_2$  이면  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 을 만족하는 함수를 일대일 함수라고 한다. 또는  $f(x_1) = f(x_2)$  이면  $x_1 = x_2$ 를 만족하는 함수라고 정의하기도 한다. (참을 증명할 때는 후자, 반례를 보일 때는 전자를 사용하면 된다.)
2. 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일 함수이고  $f(X) = Y$ 이면 함수  $f$ 를 일대일 대응이라고 한다.
3. 함수  $f: X \rightarrow X$ 가  $f(x) = x$ 를 만족하면 그 함수를 항등함수라고 한다.
4. 함수  $f: X \rightarrow Y$ 가  $f(x) = c$ 를 만족하는 함수를 상수함수라고 부른다.

**Examples**

Q1. 함수  $f(x) = x^3$ 이 일대일 대응임을 보여라.

A1.  $f(x_1) = f(x_2)$ 라 가정하자. 그렇다면  $x_1^3 = x_2^3$ 이 되는데 좌변으로 이항한 후 인수분해 공식을 사용하면  $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$ 이 된다. 이때, 뒤의 식은 판별식이 0보다 작기 때문에 근을 가지지 못한다. 따라서  $x_1 = x_2$ 이다. 또한,  $f$ 의 치역과 공역이 모두 실수 전체로 같으므로 함수  $f$ 는 일대일 대응이다.

Q2. 함수  $f(x) = x^2$ 이 일대일 함수가 아님을 보여라.

A2.  $x_1 = 1, x_2 = -1$ 에 대해  $x_1 \neq x_2$ 이지만,  $f(x_1) = 1 = f(x_2)$ 이므로 함수  $f$ 는 일대일 함수가 아니다.

**Problems**

1.  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 와  $f : X \rightarrow X$ 에 대한 다음 명제들의 참, 거짓을 판별하시오.

- 1)  $f(x) = x + 1$ 은 함수이다.
- 2)  $f(x) = 4 - x$ 는 일대일 대응인 함수이다.
- 3)  $f(x) = 0 \cdot x$ 는 함수이다.
- 4)  $f(x) = |3 - x|$ 는 일대일 대응이다.
- 5) 일대일 대응인 함수  $f$ 는 100개 이상이다.

2. 항등함수가 일대일 대응임을 증명하여라.

3.  $f(x) = [x]$ 가 일대일 대응이 되게 만드려면 정의역과 공역을 어떻게 구성해야 할 지 서술하시오.

## **Composit Function** (합성함수)

### **Definition**