DEPARMENT OF PHYSICS, YONSEI UNIVERSITY

Advanced Mathematics 2

Axect

July 24, 2016

1 BASIC NOTATION

- $\mathbb{N}$: Natural number (자연수), $\mathbb{Z}$: Integer (정수), $\mathbb{Q}$: Rational number (유리수), $\mathbb{R}$: Real number (실수), $\mathbb{C}$: Complex number (복소수)
- $\forall$: For any (모든)   ex) $\forall x \in \mathbb{N},\ x > 0$
- $\exists$: Exist (존재하다)   ex) $\exists x \in \mathbb{N}\ such\ that\ x > 10$
- $\nexists$: Not exist (존재하지 않는)   ex) $\nexists x \in \mathbb{N}\ such\ that\ x \leq 0$
- $\exists!$: Uniquely exist (하나만 존재)   ex) $\exists! x \in \mathbb{N}\ such\ that\ x \leq 1$
- $\alpha,\ \beta,\ \gamma$: Alpha, Beta, Gamma (다 알겠죠?)
- ϕ : Phi (파이)– 집합에서는 공집합으로 쓰임. (π (=Pi) 와는 다름)
- θ : Theta (세타) – 보통 각도로 많이 쓰임.
- ω : Omega (오메가) – $x^3 = \pm 1$ 의 허근이나 각도의 변화율을 나타낼 때 쓰임.
- Σ : Sigma (시그마) – 시그마의 대문자. 수학에서 수열의 합을 의미함.
- **Definition** : 정의 – 받아들여야 하는 수학적 사실.
- **Theorem** : 정리 – 정의로부터 도출가능한 명제.
- **Corollary** : 따름정리 – 정리로부터 즉시 도출되는 명제.

2 SET THEORY

2.1 BASIS OF SET

A set is a gathering together into a whole of definite, distinct objects of our perception or of our thought—which are called elements of the set. - Georg Cantor.

집합이란, 수학적으로 정의될 수 있는 서로 다른 것들의 모임이다. 이때, 집합을 구성하는 요소들을 원소라고 부른다. 이때, 원소는 숫자, alphabet, 한글, 사람, 동물 등등 수학적으로 정의가능한 것이기만 하면 된다. 집합을 표현할 때는 두 가지 방법이 있다.

1. 원소나열법 : $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$
2. 조건제시법 : $A = \{x|p(x) = True\}$

즉, 원소와 집합의 관계를 제대로 정의하면 다음과 같다.

Definition 2.1. $A = \{x|p(x) = True\}$ 인 집합 A에 대하여 원소 a는 $a \in A$ 라고 쓰며 $p(a) = True$를 만족한다. 즉,

$$a \in A \Leftrightarrow p(a) = True$$

좀 더 쉽게 이해하기 위하여 예를 들어보자.

Example 2.2. *다음 집합 A를 조건제시법으로 나타내어라.*

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$$

: A의 원소들의 조건 $p(x)$ 는 10이하의 자연수이면 된다. 따라서 다음과 같이 적으면 된다.
$A = \{x|x \le 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

Example 2.3. $B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le 4,\ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}$ *의 원소의 개수는 몇 개 인지 구하시오.*

: B의 조건 $p((x, y))$가 나타내는 범위는 중심이 $(0,0)$이고 반지름이 2인 원의 내부이다. 이때, $x, y \in \mathbb{Z}$이므로 13개이다. (자세한 설명은 생략함.)

−SUBSET (부분집합) 부분집합의 정의는 다음과 같다.

Definition 2.4. 두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B에 들어갈 때 $A \subset B$ 라고 쓰며 A는 B의 부분집합이라고 부른다. 즉,

$$\forall x \in A,\ x \in B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$$

Theorem 2.5. *두 집합 A, B에 대하여 다음의 두 명제는 같은 명제이다.*

$$\exists x \in A \text{ such that } x \notin B \quad \Leftrightarrow \quad A \not\subset B$$

Corollary 2.6. *공집합 ϕ는 모든 집합의 부분집합이다.*

Proof: 우리가 증명하려는 것은 임의의 집합 A에 대하여 $\phi \subset A$이다. $\phi \not\subset A$라고 가정해보자. 2.5에 따르면 $\exists x \in \phi$ *such that* $x \notin A$ 이어야 하지만, 공집합에는 아무런 원소가 없다. 즉, 모순이다. 따라서 모든 집합에는 부분집합으로 ϕ가 존재한다. □

Theorem 2.7. *두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$이면 $A = B$이다.*

Example 2.8. $A = \{x | ax^2 + bx + c \geq 0, p(a,b,c) = True\}$*에 대하여 집합 $A = \mathbb{R}$이려면 $p(a,b,c)$를 구하시오.*

: $A = \mathbb{R}$ 은 $\mathbb{R} \subset A$ 의 의미를 내포하므로 모든 실수에 대하여 조건이 만족하여야 한다. 주어진 이차부등식이 모든 실수에 대하여 만족하려면, $a > 0,\ b^2 - 4ac \leq 0$이어야 한다.

Definition 2.9. *집합 A에 대하여 A의 원소의 개수를 $n(A)$라고 정의한다.*

Theorem 2.10.
1. *$n(\phi) = 0$*
2. *$A \subset B$이면, $n(A) \leq n(B)$이다.*

Theorem 2.11. *$n(A) = n$인 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n이다.*

Proof: A의 부분집합은 A의 각각의 원소들을 포함할 수도 있고 포함하지 않을 수도 있다. 즉, 하나의 원소에 대하여 포함하거나 포함하지 않는 2가지의 선택지가 있는데, 원소가 총 n개 있으므로 총 부분집합의 개수는 2^n이 된다. □

Corollary 2.12. *원소가 n개인 집합 A에 대하여 m개의 특정 원소를 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-m}이다.*

Proof: Do It Yourself. □

Example 2.13. *다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.*

$$n(A) = n(B) \Rightarrow A = B$$

: 원소 수가 같다고 안에 있는 원소종류가 같은 것은 아니므로 위 명제는 거짓이다.

Example 2.14. *집합 $S = \{1, 2, 3\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \subset B \subset S$를 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하여라.*

: $n(A) = 0,\ 1,\ 2,\ 3$일 때로 나누어 풀어보면 쉽다. 답은 27