

Proyecto Final

Instrumentación Virtual Primavera 2020

Sistema de seguimiento solar con Arduino

Teoría y Cálculo de la Geometría Solar

Modelo Geométrico de la Posición Solar

Hoy en día, como resultado del acelerado desarrollo industrial y socioeconómico, uno de los problemas de mayor trascendencia, y que ha afectado a las economías nacionales, es la problemática que presentan los energéticos. La limitación de los recursos petrolíferos - principal fuente de hidrocarburos - y su encarecimiento, permiten prever la posibilidad de que países en vías de desarrollo y con reservas de hidrocarburos, puedan ascender a niveles de vida más altos. Lamentablemente, ni siquiera la estimación más optimista de reservas adicionales de combustibles puede o debe justificar su consumo acelerado.

También es importante destacar que actualmente se están desarrollando mecanismos de aprovechamiento de energía solar; tales como, celdas solares, celdas fotovoltaicas, calentadores solares, etc. Normalmente estos sistemas operan fijos en relación con el plano de la superficie, razón por la cual se obtiene desaprovechamiento de la energía solar, de aquí nace el interés por el desarrollo de sistemas de seguimiento solar para maximizar la recepción de la energía solar.

1.1 Geometría solar

Para abordar el estudio del movimiento solar en relación con la posición de la tierra, primero se revisarán algunos conceptos y cálculos relacionados con la geometría solar, esto proporcionará una idea más clara en cuanto a la trayectoria que sigue el sol a lo largo de cada día del año.

Cada día, el sol, para un observador situado en la Tierra, sigue una trayectoria circular a través del firmamento alcanzando su punto más alto al mediodía. Por otra parte, esta trayectoria circular aparente se mueve hacia puntos más altos en el firmamento a medida que el invierno se acaba y llega el verano; estos desplazamientos se pueden observar en el esquema de la Figura 1.1. En este esquema, durante el verano, el amanecer acontece más temprano, y el atardecer, más tarde.

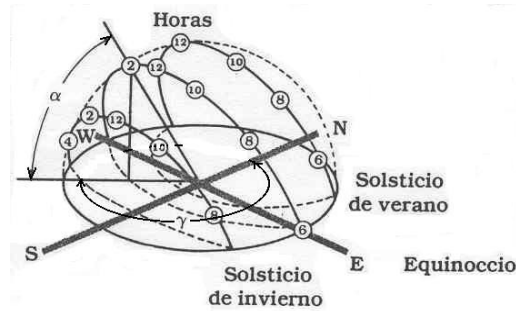


Figura 1.1 Movimiento aparente del sol.

Obviamente la posición del Sol en la bóveda celeste depende del lugar en que se encuentre el observador. Así, por ejemplo, al medio día de marzo 21 y Septiembre 23, en los equinoccios de primavera y otoño, el Sol se encuentra directamente sobre el ecuador.

1.2 Latitud φ y Longitud L

De la misma manera que, para determinar la posición de un punto cualquiera sobre un plano se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas; para localizar con exactitud cualquier punto de la superficie terrestre, se emplea el sistema de coordenadas geométricas expresadas mediante una pareja de números denominados latitud y longitud, los cuales expresan mediciones angulares sobre la superficie de una esfera.

La Tierra tiene forma de esfera y como tal, lo mismo que los ángulos o los círculos, sus dimensiones se pueden medir en grados; así, representada la tierra como mapa, la Tierra se divide en 360° . La ventaja que tiene emplear expresiones angulares, es que, el ángulo formado por dos rectas es independiente de la longitud de estas. Por ejemplo, en navegación astronómica no importa la distancia a que se encuentren los astros de referencia, importa el ángulo que forman respecto al lugar de observación.

Cualquier lugar de la tierra puede ser situado exactamente por la intersección de dos coordenadas que representan la latitud y la longitud de ese lugar, indicando cada número la cantidad de grados Norte o Sur desde el ecuador (latitud) y Este u Oeste desde el meridiano 0° (longitud). Así pues, latitud y longitud son expresiones angulares, indicadas en grados, minutos y segundos; cada grado (indicado por el símbolo $^\circ$) se divide en 60 minutos (indicados por el símbolo ' comilla simple) y cada minuto en 60 segundos (simbolizados por " comilla doble).

La regla seguida para especificar estas coordenadas es: indicar primero la latitud y luego la longitud; esto es por comodidad, pues no puede haber confusión debido a que las latitudes solo pueden ser Norte o Sur (N o S) y las longitudes Este u Oeste (E u O).

En la Figura 1.2 se muestra dos esquemas representativos de los ángulos de latitud φ y longitud L .

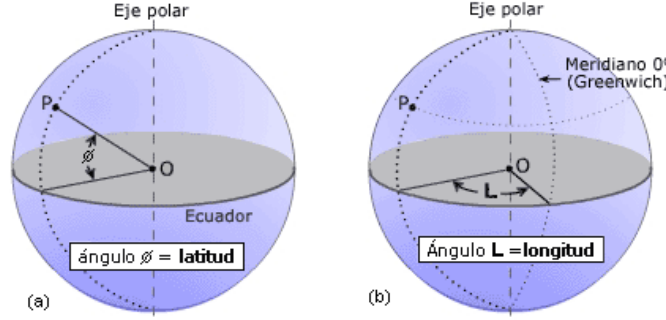


Figura 1.2 (a) Latitud φ , (b) longitud L .

1.3 Ángulo de declinación δ

La declinación define la posición angular del Sol al mediodía solar, es decir, en el momento en que el Sol está más alto en el firmamento con respecto al plano ecuatorial; en la Figura 1.3 se muestra un ejemplo de ángulo de declinación solar hacia el norte.

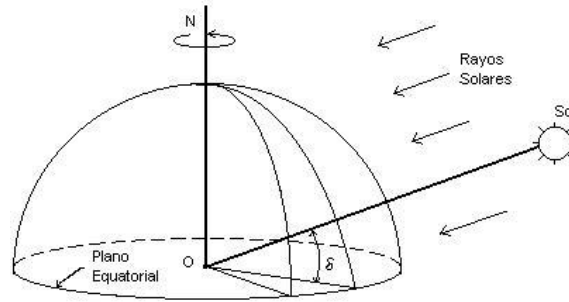


Figura 1.3 Ejemplo de declinación solar δ hacia el norte.

En otras palabras, la declinación es un índice del alejamiento que experimenta el Sol hacia el Norte o hacia el Sur del ecuador. Este parámetro, depende del día del año y puede calcularse con la expresión (1.1):

$$\delta = 23.45 \sin \left(360 \cdot \frac{284 + n}{365} \right), \quad (1.1)$$

donde n es el día del año. La Figura 1.4 muestra el cambio de la declinación a través de los distintos meses del año. La Tabla 1-1 indica los valores correspondientes.

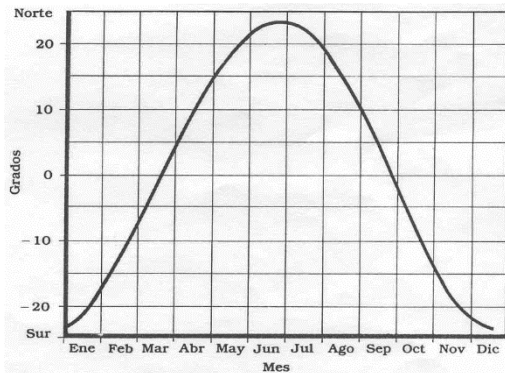


Figura 1.4 Ángulos de la declinación a través del año; **Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Tabla 1-1 Ángulos de declinación δ diaria del sol.

| Día | Ene | Feb | Mar | Abr | May | Jun | Jul | Ago | Sep | Oct | Nov | Dic |
|-----|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 01 | -23°05' | -17°24' | -07°37' | 04°30' | 15°03' | 22°02' | 23°07' | 18°02' | 08°19' | -03°09' | -14°24' | -21°47' |
| 02 | -23°00' | -17°07' | -07°14' | 04°54' | 15°21' | 22°10' | 23°03' | 17°47' | 07°57' | -03°32' | -14°43' | -21°56' |
| 03 | -22°55' | -16°50' | -06°51' | 05°17' | 15°39' | 22°18' | 22°58' | 17°32' | 07°35' | -03°55' | -15°02' | -22°05' |
| 04 | -22°49' | -16°33' | -06°28' | 05°40' | 15°56' | 22°25' | 22°53' | 17°16' | 07°13' | -04°19' | -15°21' | -22°14' |
| 05 | -22°43' | -16°15' | -06°05' | 06°02' | 16°14' | 22°32' | 22°48' | 17°00' | 06°51' | -04°42' | -15°39' | -22°21' |
| 06 | -22°37' | -15°57' | -05°42' | 06°25' | 16°31' | 22°39' | 22°42' | 16°44' | 06°29' | -05°05' | -15°57' | -22°29' |
| 07 | -22°30' | -15°38' | -05°19' | 06°48' | 16°47' | 22°45' | 22°36' | 16°27' | 06°06' | -05°28' | -16°15' | -22°36' |
| 08 | -22°23' | -15°20' | -04°55' | 07°10' | 17°04' | 22°50' | 22°29' | 16°10' | 05°44' | -05°51' | -16°33' | -22°42' |
| 09 | -22°15' | -15°01' | -04°32' | 07°33' | 17°20' | 22°55' | 22°22' | 15°53' | 05°21' | -06°14' | -16°50' | -22°49' |
| 10 | -22°07' | -14°42' | -04°08' | 07°55' | 17°36' | 23°00' | 22°15' | 15°36' | 04°59' | -06°36' | -17°07' | -22°54' |
| 11 | -21°58' | -14°22' | -03°45' | 08°17' | 17°51' | 23°05' | 22°07' | 15°18' | 04°36' | -06°59' | -17°24' | -22°59' |
| 12 | -21°49' | -14°03' | -03°21' | 08°39' | 18°07' | 23°06' | 21°59' | 15°00' | 04°13' | -07°22' | -17°40' | -23°04' |
| 13 | -21°39' | -13°43' | -02°58' | 09°01' | 18°22' | 23°12' | 21°51' | 14°42' | 03°50' | -07°44' | -17°56' | -23°09' |
| 14 | -21°29' | -13°23' | -02°34' | 09°22' | 18°36' | 23°16' | 21°42' | 14°24' | 03°27' | -08°07' | -18°12' | -23°12' |
| 15 | -21°19' | -13°03' | -02°10' | 09°44' | 18°51' | 23°18' | 21°32' | 14°05' | 03°04' | -08°29' | -18°28' | -23°16' |
| 16 | -21°08' | -12°42' | -01°47' | 10°05' | 19°05' | 23°21' | 21°23' | 13°46' | 02°41' | -08°51' | -18°43' | -23°19' |
| 17 | -20°57' | -12°22' | -01°23' | 10°27' | 19°18' | 23°23' | 21°13' | 13°27' | 02°18' | -09°13' | -18°58' | -23°21' |
| 18 | -20°45' | -12°01' | -00°59' | 10°48' | 19°32' | 23°24' | 21°03' | 13°08' | 01°54' | -09°35' | -19°12' | -23°23' |
| 19 | -20°33' | -11°40' | -00°35' | 11°08' | 19°45' | 23°25' | 20°52' | 12°48' | 01°31' | -09°57' | -19°26' | -23°25' |
| 20 | -20°21' | -11°18' | -00°12' | 11°29' | 19°58' | 23°26' | 20°41' | 12°29' | 01°08' | -10°18' | -19°40' | -23°26' |
| 21 | -20°08' | -10°57' | 00°12' | 11°50' | 20°10' | 23°26' | 20°29' | 12°09' | 00°45' | -10°40' | -19°54' | -23°26' |
| 22 | -19°55' | -10°35' | 00°36' | 12°10' | 20°22' | 23°26' | 20°18' | 11°49' | 00°21' | -11°01' | -20°07' | -23°26' |
| 23 | -19°42' | -10°13' | 00°59' | 12°30' | 20°34' | 23°26' | 20°06' | 11°29' | -00°02' | -11°22' | -20°19' | -23°26' |
| 24 | -19°28' | -09°52' | 01°23' | 12°50' | 20°45' | 23°25' | 19°53' | 11°08' | -00°26' | -11°43' | -20°32' | -23°25' |
| 25 | -19°13' | -09°29' | 01°47' | 13°10' | 20°56' | 23°24' | 19°41' | 10°48' | -00°49' | -12°04' | -20°44' | -23°24' |
| 26 | -18°59' | -09°07' | 02°10' | 13°29' | 21°07' | 23°22' | 19°27' | 10°27' | -01°12' | -12°25' | -20°55' | -23°22' |
| 27 | -18°44' | -08°45' | 02°34' | 13°48' | 21°17' | 23°20' | 19°14' | 10°06' | -01°36' | -12°45' | -21°07' | -23°20' |
| 28 | -18°29' | -08°22' | 02°57' | 14°07' | 21°27' | 23°17' | 19°00' | 09°45' | -01°59' | -13°05' | -21°17' | -23°17' |
| 29 | -18°13' | -08°00' | 03°21' | 14°26' | 21°36' | 23°14' | 18°46' | 09°24' | -02°22' | -13°25' | -21°28' | -23°14' |
| 30 | -17°57' | — | 03°44' | 14°45' | 21°45' | 23°11' | 18°32' | 09°02' | -02°46' | -13°45' | -21°38' | -23°10' |
| 31 | 17°41' | — | 04°07' | — | 21°54' | — | 18°17' | 08°41' | — | -14°05' | — | -23°06' |

1.4 Posición solar en relación a la tierra

La órbita de la tierra alrededor del Sol es elíptica, el eje de rotación de la tierra (eje polar) está siempre inclinado un ángulo de 23.45° , en relación con el eje elíptico, el cual es normal al plano elíptico. Mientras la tierra hace su rotación diaria y revolución anual, el sol también rota aproximadamente una vez en su propio eje cada mes terrestre; véase Figura 1.5(a).

Capítulo 1. Modelo Geométrico de la Posición Solar

Los círculos Ártico y Antártico y los Trópicos de Cáncer y Capricornio en relación al Sol en las cuatro estaciones se muestran gráficamente en la Figura 1.5(b). En el solsticio invernal (aproximadamente el 21 de diciembre), el polo Norte está inclinado 23.5° fuera del Sol; de esta manera todos los puntos sobre la superficie de la tierra al norte del círculo polar ártico están en completa oscuridad, considerando que todos los puntos al Sur del Círculo polar Antártico reciben continuamente la luz del Sol. En el solsticio de verano (aproximadamente el 21 de junio). En los equinoccios de primavera y otoño (aproximadamente el 21 de marzo y el 21 de septiembre, respectivamente), el polo Norte y Sur son equidistantes del sol; así todos los puntos en la superficie de la tierra tienen 12 horas de luz del día y 12 horas de oscuridad.

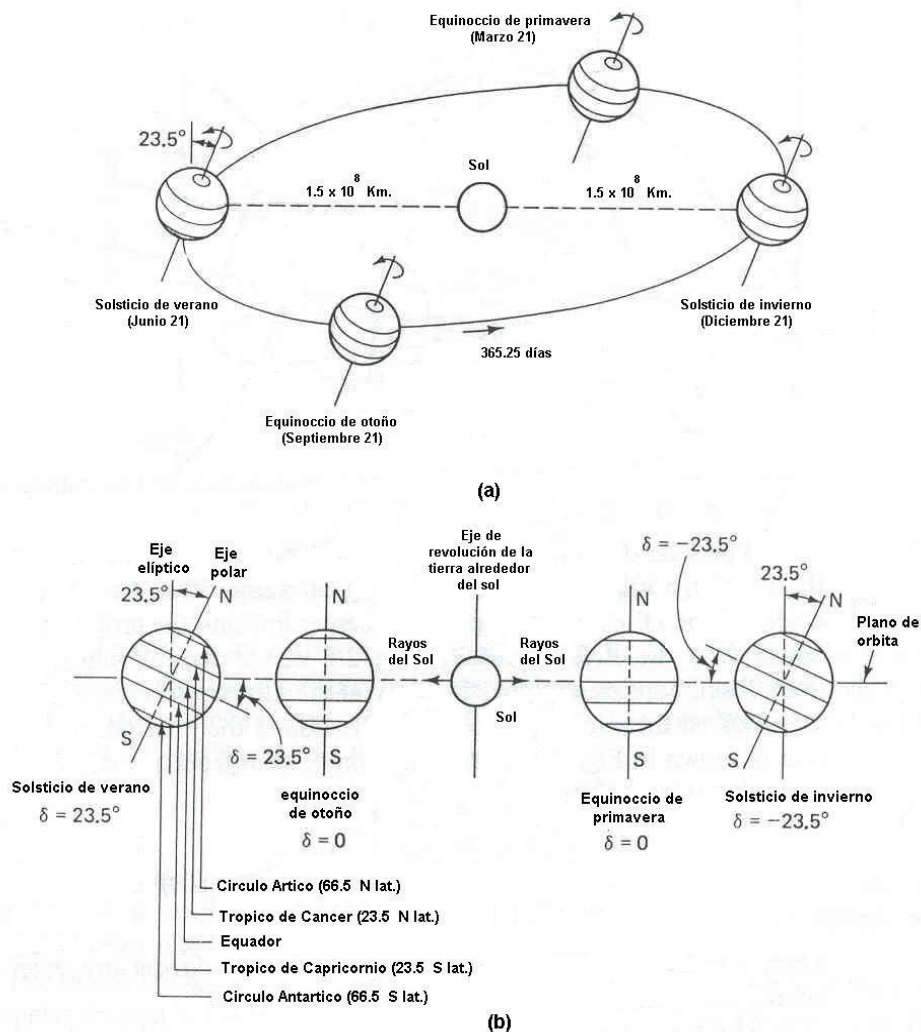


Figura 1.5 Relaciones geométricas Sol - Tierra. (a) Movimiento de la tierra alrededor del sol; (b) Localización de los círculos ártico, antártico y los trópicos.

1.5 Ecuación del tiempo

Un parámetro importante que tiene que ser considerado en este análisis es la hora solar la cual difiere de la hora oficial que indica un reloj exacto. Ambos están relacionados entre sí por la expresión:

$$\text{Hora Solar} = \text{Hora Oficial} + E + 4 (L_{\text{ref}} - L_{\text{loc}}) \quad (1.2)$$

Donde E es la ecuación del tiempo mostrada en la Figura 1.6, en minutos; L_{ref} es la longitud del meridiano de referencia horaria oficial para la zona en cuestión, y L_{loc} es la longitud del meridiano del lugar, en grados oeste. La Tabla 1-2 muestra algunos valores de E para distintos días en el año.

Una forma de poder evaluar el valor de la ecuación del tiempo E, en minutos, es mediante la ecuación empírica (1.3); además, con esta expresión se puede generar una aproximación de la gráfica de la Figura 1.6 y de los valores indicados por la Tabla 1-2.

$$\text{Ecuación de tiempo} = 9.87 \sin(2B) - 7.53 \cos B - 1.5 \sin B \quad (1.3)$$

donde: $B = \frac{360}{364}(n - 81)$ y

$$n = \text{Día del año } (1 \leq n \leq 365)$$

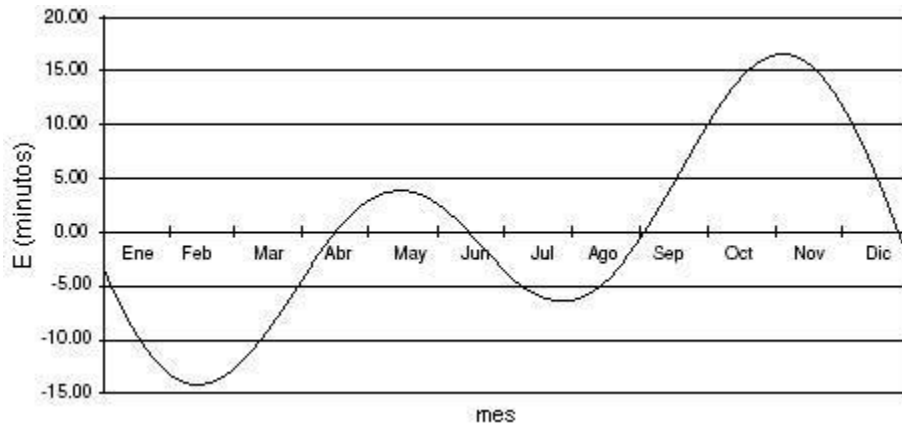


Figura 1.6 Ecuación del tiempo.

Capítulo 1. Modelo Geométrico de la Posición Solar

Tabla 1-2 Valores de E para distintos días del año.

| Fecha | | Corrección de tiempo | | Fecha | | Corrección de tiempo | |
|---------|----|----------------------|-----|------------|----|----------------------|-----|
| | | min | seg | | | min | seg |
| Enero | 1 | -3 | 22 | Julio | 1 | -3 | 23 |
| | 8 | -4 | 04 | | 8 | -4 | 33 |
| | 15 | -9 | 12 | | 15 | -5 | 28 |
| | 22 | -11 | 28 | | 22 | -6 | 02 |
| Febrero | 29 | -13 | 07 | Agosto | 29 | -6 | 11 |
| | 1 | -13 | 38 | | 1 | -6 | 07 |
| | 8 | -14 | 23 | | 8 | -5 | 37 |
| | 15 | -14 | 27 | | 15 | -4 | 38 |
| Marzo | 22 | -13 | 54 | Septiembre | 22 | -3 | 12 |
| | 1 | -12 | 47 | | 29 | -1 | 21 |
| | 8 | -11 | 12 | | 1 | -0 | 27 |
| | 15 | -9 | 16 | | 8 | +2 | 07 |
| Abril | 22 | -7 | 07 | Octubre | 15 | +4 | 20 |
| | 29 | -4 | 53 | | 22 | +6 | 54 |
| | 1 | -3 | 57 | | 29 | +9 | 23 |
| | 8 | -2 | 08 | | 1 | +10 | 04 |
| Mayo | 15 | +0 | 13 | Noviembre | 8 | +12 | 17 |
| | 22 | +1 | 23 | | 15 | +14 | 08 |
| | 29 | +2 | 35 | | 22 | +15 | 30 |
| | 1 | +2 | 58 | | 29 | +16 | 16 |
| Junio | 8 | +3 | 32 | Diciembre | 1 | +16 | 25 |
| | 15 | +3 | 39 | | 8 | +16 | 15 |
| | 22 | +3 | 20 | | 15 | +15 | 25 |
| | 29 | +2 | 37 | | 22 | +13 | 54 |
| | 1 | +2 | 13 | | 29 | +11 | 47 |
| | 8 | +1 | 05 | | 1 | +11 | 05 |
| | 15 | +0 | 14 | | 8 | +8 | 19 |
| | 22 | -1 | 38 | | 15 | +5 | 12 |
| | 29 | -3 | 00 | | 22 | +1 | 53 |
| | | | | | 29 | +1 | 29 |

1.6 Ángulo horario ω

Por otra parte, el ángulo horario es igual a cero al medio día solar y adquiere un valor de 15° de longitud por cada hora, siendo positivo en las mañanas y negativo por las tardes. Así, $\omega = +30^\circ$ a las 10:00, y $\omega = -15^\circ$ a las 13:00.

Una forma de calcular el ángulo horario ω , considerando que a las 6:00 h, 12:00 h y 18:00 h se tiene 90° , 0° y -90° respectivamente, es por medio de la ecuación (1.4); el ángulo horario ω se puede calcular entonces por medio de la expresión;

$$\omega = -(15^\circ/\text{hr}) \cdot (\text{hora solar}) + 180^\circ. \quad (1.4)$$

1.7 Altura α y Azimut Solar γ

Dado que los movimientos de la Tierra y el Sol son relativos entre sí, en este análisis se supondrá que la Tierra está fija en el espacio, que el Sol describe un movimiento virtual alrededor de ésta, y que el origen del sistema de coordenadas se localiza en el lugar de interés situado en la Tierra. Desde este punto de vista tolomeico, el Sol está restringido a moverse con dos grados de libertad en la esfera celeste. En consecuencia, su posición en el firmamento queda descrita mediante dos variables angulares: la altura solar α y el azimut solar γ . Estos dos parámetros son muy importantes ya que estos definen los movimientos que realizará el seguidor solar de dos grados de libertad. Como se desprende de la Figura 1.7, la primera de estas variables define el ángulo que la visual al Sol forma con el horizonte,

Capítulo 1. Modelo Geométrico de la Posición Solar

en tanto que la segunda define la desviación que tienen los rayos del Sol con respecto al norte verdadero. El cálculo preciso de estas variables depende fundamentalmente de tres parámetros: La latitud del lugar φ , la declinación δ y el ángulo horario ω .

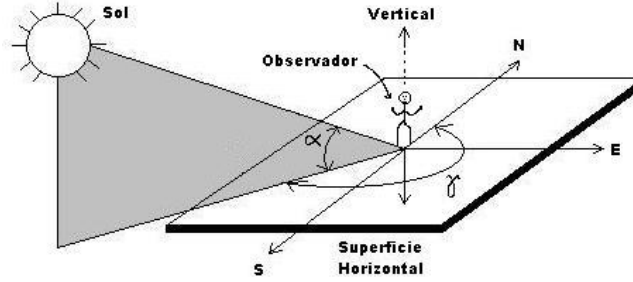


Figura 1.7 Ángulos de la posición solar.

Una vez determinada la latitud del lugar φ , la declinación δ y el ángulo horario ω ; la altura solar α y el azimut solar γ , pueden calcularse fácilmente por medio de las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\text{sen}\alpha = \cos\varphi\cos\delta\cos\omega + \text{sen}\varphi\text{sen}\delta, \quad (1.5)$$

$$\text{sen}\gamma = \frac{\cos\delta\text{sen}\omega}{\cos\alpha}. \quad (1.6)$$

Finalmente debe aplicarse una función inversa cuando el ángulo azimutal es mayor a 90° , esto ocurre cuando la posición del sol rebasa el eje o plano vertical este-oeste, bajo el siguiente razonamiento:

si $\cos\omega < \tan\delta / \tan\varphi$, entonces:

$$\gamma = \text{sen}^{-1} \frac{\cos\delta\text{sen}\omega}{\cos\alpha},$$

en caso contrario; $\cos\omega > \tan\delta / \tan\varphi$; entonces:

$$\gamma = 180^\circ - \text{sen}^{-1} \frac{\cos\delta\text{sen}\omega}{\cos\alpha}.$$

Por otro lado, si $\gamma < 0$, entonces,

$$\gamma = 360^\circ + \gamma.$$

1.8 Ejemplo de cálculo de la posición solar

Una vez que se tienen las ecuaciones de cálculo de la posición solar, se procede a determinar la latitud y longitud del lugar en cuestión y, a partir de la fecha se calcula el número del día del año; en el siguiente ejemplo se describe el procedimiento.

Ejemplo: Especificar la posición del sol el día 22 de mayo a las 11:00 h (hora oficial) en la ciudad de Puebla, México (19°02' 36" N, 98°11'50" O).

Con este fin, primero se determina la declinación del Sol el día 22 de mayo por medio de la ecuación 1.1, donde $n = 142$, entonces:

$$\delta = 23.45 \sin \left(360 \cdot \frac{284 + 142}{365} \right) = 20.3419^\circ$$

Segundo, se procede a calcular E a partir de la ecuación (1.3), donde:

$$B = \frac{360}{364} (142 - 81) = 60.3297^\circ,$$

y

$$E = 9.87 \sin 2(60.33^\circ) - 7.53 \cos(60.33^\circ) - 1.5 \sin(60.33^\circ) = 3.4596 \text{ min.}$$

O también

$$E = 3 \text{ mín } 27 \text{ seg.}$$

Por lo tanto, para calcular la hora solar que difiere de la hora oficial dependiendo del lugar, donde $L_{\text{ref}} = 90^\circ$ y $L_{\text{loc}} = 98.19722^\circ$, de la ecuación 1.2 se tiene:

$$\text{Hora Solar} = 11:00 \text{ h} + 3.4596 \text{ min} + 4 (90^\circ - 98.1972^\circ) =$$

$$\text{Hora Solar} = 11 \text{ h } 00 \text{ min } - 29.3293 \text{ min} = 11 \text{ h } - 0.4888 \text{ h} = 10.5112 \text{ h}$$

$$\text{Hora Solar} = 10 \text{ h } 30 \text{ min } 40 \text{ seg}$$

Tercero, calculando el ángulo horario mediante la ecuación 1.4; donde, Hora Solar = 10.5112 h se tiene:

$$\omega = -15 (10.5112 \text{ h}) + 180^\circ = 22.332^\circ.$$

Capítulo 1. Modelo Geométrico de la Posición Solar

Cuarto, para calcular la altura solar α se hace uso de la ecuación 1.5; donde, la latitud del lugar es $\varphi=19.043^\circ$, la declinación $\delta=20.34^\circ$ y el ángulo horario $\omega=22.332^\circ$, entonces:

$$\text{sen}\alpha = \cos(19.043^\circ)\cos(20.34^\circ)\cos(22.332^\circ) + \text{sen}(19.043^\circ)\text{sen}(20.34^\circ).$$

Por lo tanto:

$$\text{sen}\alpha = 0.9332 \quad \therefore \quad \alpha = 68.9428^\circ.$$

Quinto, similarmente, de la ecuación 1.6 se calcula el azimut solar γ .

$$\text{sen}\gamma = \frac{\cos(20.34^\circ)\text{sen}(22.332^\circ)}{\cos(68.9418^\circ)}.$$

Por lo tanto:

$$\text{sen}\gamma = 0.9916 \quad \therefore \quad \gamma = 82.5760^\circ.$$

Sexto, finalmente, se verifica γ por el razonamiento de la función inversa:

$$\cos 22.332^\circ < \frac{\tan 20.3419^\circ}{\tan 19.0433^\circ}.$$

Por lo tanto, el resultado para γ es correcto.

Esto significa que, para un observador situado en el lugar de referencia (*Puebla, México.*), la posición del Sol se ubica en 82.5760° (azimut solar γ) con respecto al Norte y además con una elevación o altura solar α de 68.9428° con respecto a la superficie; en la Figura 1.8 se muestra una representación de los ángulos calculados para este ejemplo.

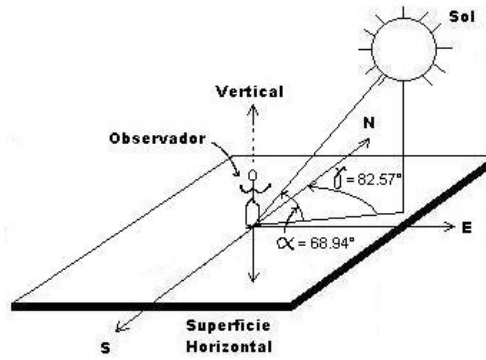


Figura 1.8 Ángulos de la posición solar para las 11:00 en la ciudad de Puebla, México ($19^\circ 02' 36''$ N, $98^\circ 11' 50''$ O).

1.9 Diagrama de la trayectoria solar

Las expresiones anteriores pueden representarse en forma gráfica, en donde una precisión rigurosa resulta superflua. La Figura 1.9 presenta la gráfica de la posición solar para la Latitud Norte de 19.0433° , dada en el ejemplo. El horizonte aparece en esta gráfica como un círculo con el observador en el centro. Los círculos concéntricos igualmente espaciados representan la altura solar α a intervalos de 10° ; mientras que, las líneas radiales representan el azimut solar y en los mismos intervalos. Las curvas elípticas horizontales representan la trayectoria del Sol el día 21 de cada mes, lo cual se representa con un número romano. Las curvas verticales, por otra parte, indican las horas del día (hora solar) con números arábigos.

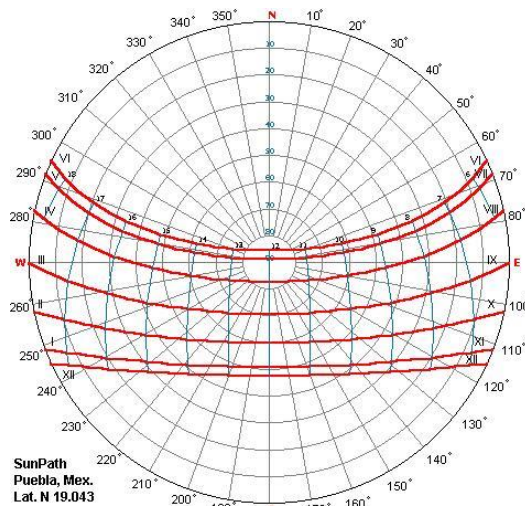


Figura 1.9 Trayectoria del sol para el caso de la ciudad de Puebla, México; con latitud N de $19^\circ 02' 36''$.

