Mediante definición de transformada de Laplace, obtenga la transformada de las siguientes funciones.

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ \sin t, & t > \pi \end{cases}$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} e^{-st}\,0\,dt + \int_{\pi}^{\infty} e^{-st}\sin(t)$

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-st}[s\sin(t) + \cos(t)]}{s^2+1} =$

$e^{-s\pi}\left[\frac{e^{-s0}(s\sin(0) + \cos(0))}{s^2+1}\right] + \frac{e^{-s\infty}(s\sin(0)+\cos(0))}{s^2+1}$

$e^{-s\pi}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{e^{-s\pi}}{s^2+1}$

2. $f(t) \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 4t^2+3t-8, & t > 1 \end{cases}$ $= \int_1^{\infty} e^{-st}(4t^2+3t-8)\,dt =$

$\int_1^{\infty} e^{-st}4t^2 + \int_1^{\infty} e^{-st}3t - \int_1^{\infty} e^{-st}8\,dt$

$4\frac{e^{-st}}{s}\left(t^2 + \frac{2t}{s} + \frac{2t}{s^2}\right) - 3\frac{e^{-st}}{s}\left(t + \frac{1}{s}\right) + 8\frac{e^{-st}}{s}$

$\frac{4}{s}\left((0)^2 + \frac{2(0)}{s} + \frac{2(0)}{s^2}\right) - \frac{3}{s}\left(0 + \frac{1}{s}\right) + \frac{8}{s}$

$\frac{8}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s} +$

3- $f(t)\begin{cases}0, & t<1\\ t^2-1, & 1<t<2\\ 0, & t\geq 2\end{cases} = \int e^{-st}(t^2-1)\,dt$ $\quad u=t^2-1 \quad v=\frac{-e^{-st}}{s}$ $\quad du=2t \quad dv=e^{-st}$

$$-\frac{(t^2-1)e^{-st}}{s}-\int-\frac{2te^{-st}}{s} \qquad u=t \quad v=\frac{-e^{-st}}{s} \qquad du=1 \quad dv=e^{-st}$$

$$\frac{2}{s}\left[-\frac{te^{-st}}{s}-\int-\frac{e^{-st}}{s}\,dt \right. \qquad u=-st \quad du=-s\,dt$$

$$-\frac{1}{s^2}\int e^u\,du=\frac{e^u}{s^2}=\frac{e^{-st}}{s^2}$$

$$-\frac{(t^2-1)e^{-st}}{s}-\left[\frac{2}{s}\left(-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^u}{s^2}\right)\right]=-\frac{(t^2-1)e^{-st}}{s}+\frac{2te^{-st}}{s^2}+\frac{2e^{-st}}{s^3}$$

$$-\frac{(1)^2e^{-s(1)}}{s}+\frac{2(1)e^{-s(1)}}{s^2}+\frac{2e^{-s(1)}}{s^3}=-\frac{e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-s}}{s^3}$$

$$+\frac{(2)^2e^{-s(2)}}{s}+\frac{2(2)e^{-s(2)}}{s^2}+\frac{2e^{-s(2)}}{s^3}=\frac{4e^{-2s}}{s}+\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s^3}$$

$$\frac{e^{-s}}{s}+\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{2e^{-s}}{s^3}-\left(\frac{4e^{-2s}}{s}+\frac{4e^{-2s}}{s^2}+\frac{2e^{-2s}}{s^3}\right)$$

$$\frac{e^{-s}s^2+2e^{-s}s+2e^{-s}-(4e^{-2s}s^2+4e^{-2s}s+2e^{-2s})}{s^3}=e^{-s}[s^2+2(s+1)]-2(2s^2+2s+1)e^{-2s}$$

4- $f(t) = \begin{cases} \sin t & t<\pi \\ 4\sin(3t) & t>\pi \end{cases} = \int_0^{\pi} e^{-st}\sin(t)\,dt + 4\int_{\pi}^{\infty} e^{-st}\sin(3t)\,dt$

$= \left[\frac{-e^{-st}\left[-s\sin(t) + \cos(t)\right]}{s^2+1} \right]_0^{\pi} + 4\left[\frac{-e^{-st}\left[-s\sin(3t) - 3\cos(3t)\right]}{s^2+9} \right]_{\pi}^{\infty}$

$-\frac{e^{-s\pi}\cos(\pi)}{s^2+1} + \frac{e^{-s0}\cos(0)}{s^2+1} + \frac{4e^{-s\pi}\left[-3\cos(3\pi)\right]}{s^2+9}$

$\frac{+e^{-s\pi}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{12e^{-s\pi}}{s^2+9}$

$= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-s\pi}\left[(s^2+9) - (12s^2+12)\right]}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{e^{-s\pi}(11s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+9)}$

$5.- \; f(t) \begin{cases} 2t, & 0<t<2 \\ 2+t, & 2<t<4 \\ 10-t, & 4<t<10 \\ 0, & t>10 \end{cases} = 2\int_0^2 e^{-st}\, t\, dt + \int^4 e^{-st}(2+t) + \int_4^{10} e^{-st}(10-t)$

$u = t \quad v = -e^{-st}/s$

$du = 1 \quad dv = e^{-st}$

$+ \int_{10}^{\infty} e^{-st} \cancel{(0)} dt = 2\left[\frac{-te^{-st}}{s} \right]_0^2 - \int -\frac{e^{-st}}{s} \quad u = -st \quad du = -s\,dt$

$2\left[\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}\int e^{u} du = 2\left[\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^2 = 2\left[\frac{-2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{0e^{0}}{s} + \frac{e^{0}}{s^2} \right.\right.$

$= \frac{-4e^{-2s}}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} + \frac{2}{s^2} \ldots (1)$

$2 \to 4 \quad u = (2+t) \quad v = -e^{-st}/s \qquad \frac{-(2+t)e^{-st}}{s} - \int -\frac{e^{-st}}{s} = \left[\frac{-(2+t)e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_2^4$

$du = 1 \quad dv = e^{-st}$

$\frac{-6e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} \ldots (2)$

$u = (10-t) \quad v = -e^{-st}/s \qquad -\frac{(10-t)e^{-st}}{s} - \int -\frac{e^{-st}}{s} = \left[-\frac{(10-t)e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_4^{10}$

$du = 1 \quad dv = -e^{-st}$

$-\frac{e^{-10s}}{s^2} + \frac{6e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s^2}$

$= \cancel{\frac{-4e^{-2s}}{s}} - \cancel{\frac{2e^{-2s}}{s^2}} + \frac{2}{s^2} - \cancel{\frac{6e^{-4s}}{s}} - \cancel{\frac{e^{-4s}}{s^2}} + \cancel{\frac{4e^{-2s}}{s}} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-10s}}{s^2} + \cancel{\frac{6e^{-4s}}{s}} + \cancel{\frac{e^{-4s}}{s^2}}$

$\frac{2 - e^{-2s} + e^{-10s}}{s^2}$

TEMA

FECHA

Utilizando las reglas básicas de transformadas de Laplace, obtenga la transformada de las siguientes funciones.

1- $f(t)=4t^3-2t^2+5$

$$4\frac{3!}{s^4}-2\frac{2!}{s^3}+\frac{5}{s}=4\frac{6}{s^4}-2\frac{2}{s^3}+\frac{5}{s}=\frac{24}{s^4}-\frac{4}{s^3}+\frac{5}{s}=\frac{24-4s+5s^3}{s^4}$$

2- $f(t)=3\sin(2t)-4\cos(5t)$

$$3\frac{2}{s^2+9}-4\frac{s}{s^2+25}=\frac{6}{s^2+4}-\frac{4s}{s^2+25}$$

3- $f(t)=e^{-2t}(4\cos(3t)+5\sin(3t))$ $s\to s+2$

$$4\frac{s}{s^2+9}+5\frac{3}{s^2+9}=\frac{4s}{(s+2)^2+9}+\frac{15}{(s+2)^2+9}=\frac{4s+15}{s^2+4s+4+9}=\frac{4s+15}{s^2+4s+13}$$

4- $f(t)=3\cosh 6t+8\sinh 3t$

$$3\frac{s}{s^2-36}+8\frac{3}{s^2-9}=\frac{3s}{s^2-36}+\frac{24}{s^2-9}$$

5- $f(t)=\frac{1}{2a^4}(2-2\cos at-at\sin at)$

$$\frac{1}{2a^4}\left[\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+a^2}-(a)\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)\right]=\frac{1}{2a^4}\left[\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+a^2}-\frac{2a^2s}{(s^2+a^2)^2}\right]$$

$$\frac{2}{2a^4s}-\frac{2s}{2a(s^2+a^2)}-\frac{2a^2s}{2a^4(s^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^4s}-\frac{s}{a^4(s^2+a^2)}-\frac{s}{a^2(s^2+a^2)^2}$$

$$\frac{1}{s(s^2+a^2)^2}$$