UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ

Exerciţii

Anania Gîrban

2018

Cuprins

CAPITOLUL 1

RECAPITULARE

1.1 Sisteme liniare

Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ x + 4y - 3z = 12; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2y - 2z = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y - 3z = 5 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ y = 2. \end{cases}$

CAPITOLUL 2

SPAŢII VECTORIALE

2.1 Dependenţă şi independenţă liniară. Sistem de generatori. Baze.

1. Să se arate că următoarele sisteme de vectori sunt liniar dependente şi să se scrie relaţia de dependenţă liniară dintre ei.

   a) $S_1 = \{\bar{v}_1 = (2, -1), \bar{v}_2 = (4, -2), \bar{v}_3 = (-6, 3), \bar{v}_4 = (10, -5)\} \subset \mathbb{R}^2$;

   b) $S_2 = \{\bar{v}_1 = (1, -1, 0), \bar{v}_2 = (2, 2, 1), \bar{v}_3 = (5, 0, 0), \bar{v}_4 = (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

   c) $S_3 = \{\bar{p}_1 = X^3 + X^2 + X + 1, \bar{p}_2 = X^3 - 2X^2 - X,$

   $\bar{p}_3 = 2X^3 - X^2 + 1\} \subset \mathbb{R}_3[X]$;

   d) $S_4 = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \bar{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

   $\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

2. Să se studieze liniar dependenţa următoarelor sisteme de vectori şi în caz de dependenţă liniară să se scrie relaţia de dependenţă. Care din ele sunt sisteme de generatori pentru spaţiile vectoriale date? Care sunt baze?

   a)$S_1 = \{\bar{v}_1 = (-1, -3),\ \bar{v}_2 = (1, 2),\ \bar{v}_3 = (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

   b) $S_2 = \{\bar{v}_1 = (1, 2, 1),\ \bar{v}_2 = (-2, 3, 5),\ \bar{v}_3 = (2, 5, 3),\ \bar{v}_4 = (3, -1, -4)\}$

   $\subset \mathbb{R}^3$;

c) $S_3 = \{\bar{v}_1 = (2, 3, 1, -1),\ \bar{v}_2 = (7, 9, 5, 2),\ \bar{v}_3 = (3, 4, 3, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$;

d) $S_4 = \{\bar{p}_1 = X^3 + X^2 + X + 1,\ \bar{p}_2 = X^3 + X^2 + X\,,$

$\bar{p}_3 = X^3 + X^2\} \subset \mathbb{R}_3[X]$.

e) $S_5 = \{\bar{p}_1 = 2X^2 + X + 1,\ \bar{p}_2 = X^2 + 2X + 1,$

$\bar{p}_3 = X^2 + X + 2,\ \bar{p}_4 = 2X^2 + 2X + 2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$;

f) $S_6 = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

g) $S_7 = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2.2 Schimbări de baze

3. Fie sistemele de vectori $B_1 = \{\bar{v}_1 = (-1, 1, 3),\ \bar{v}_2 = (0, 1, -1),\ \bar{v}_3 = (1, -2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ şi

   $B_2 = \{\bar{v}_1 = (2, -1, 3),\ \bar{v}_2 = (1, 3, 2),\ \bar{v}_3 = (1, -4, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

   a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze ale lui $\mathbb{R}^3$

   b) Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$.

   c) Să se găsească coordonatele vectorului $\bar{v} = (-2, 1, 3)$ relativ la bazele B_1 şi B_2.

4. Fie sistemele de vectori

   a) $B_1 = \{\bar{u}_1 = (1, 3),\ \bar{u}_2 = (2, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $B_2 = \{\bar{v}_1 = (2, -1),\ \bar{v}_2 = (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

   b) $B_1 = \{\bar{r}_1 = X^2 + X - 2,\ \bar{r}_2 = 7X - 1,\ \bar{r}_3 = -2X^2 + X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi $B_2 = \{\bar{p}_1 = X^2 + 3X - 1,\ \bar{p}_2 = 2X + 1,\ \bar{p}_3 = -2X^2 - X\} \subset \mathbb{R}_2[X]$;

   c) $B_1 = \left\{ \bar{N}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{N}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ şi

$$B_2 = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{M}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R});$$

d) $B_1 = \left\{ \bar{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\right.$

$\left. \bar{N}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi

$B_2 = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \bar{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\right.$

$\left. \bar{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

Să se arate pentru fiecare caz că B_1 şi B_2 sunt baze şi să se determine matricele de trecere de la baza B_2 la B_1, $T_{\overleftarrow{B_2B_1}}$.

2.3 Subspaţii vectoriale

5. Să se studieze dacă următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale. Pentru subspaţiile vectoriale găsite să se găsească câte o bază:

a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + 1 = 0\}$;

b) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0\}$;

c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + 4y = 0\}$;

d) $S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 0\}$;

e) $S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0,\ 3x - y - z = 0\}$;

f) $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y - z, y = x + z, z = y - x\}$;

g) $S_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2e^z = 0\}$;

h) $S_8 = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a = c\}$;

i) $S_9 = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] |\ -a + b + 2c = 0, a + b - c = 0\}$;

j) $S_{10} = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] |\ a - b - c = 0, a + b = 0\}$;

k) $S_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + c + d = 0,\ b + d = 0 \right\}$;

l) $S_{12} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) | a + e = 0,\ d - f = 0, \right.$
$\left. b + 2c = 0,\ 3b - c = 0 \right\}$;

m) $S_{13} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) | a - 4d = 0,\ 2a + d = 0 \right\}$;

n) $S_{14} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | a + 3b - c = 0,\ -a + b - 5c = 0, \right.$
$\left. c + d - 3 = 0 \right\}$.

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE

1. Fie

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_1[X],\ f(a,b,c) = (a+b)X + c$;

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & x_1 + x_3 \\ 2x_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix}$;

   c) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b+c, a-d)$;

   d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ f(x,y) = (2x+y, -2x-y, 4x+2y)$;

   e) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(aX^2 + bX + c) = (2a-b, c, 3a)$.

   (i) Să se determine matricele aplicaţiilor liniare în perechea de baze canonice;

   (ii) Să se determine Ker(f) şi dimensiunea lui Ker(f). Este f injectivă? Justificaţi răspunsul.

   (iii) Să se determine Im (f) şi dimensiunea lui Im(f). Este f surjectivă? Dar bijectivă? Justificaţi răspunsul.

2. Să se determine pentru următoarele aplicaţii liniare nucleul, imaginea şi câte o bază pentru fiecare, precum şi matricele în perechile de baze indicate:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_3)$ în perechea de baze

   $B = \{\bar{v}_1 = (1,1,0),\ \bar{v}_2 = (0,1,1),\ \bar{v}_3 = (1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ şi

   $B' = \{\bar{u}_1 = (1,-1),\ \bar{u}_2 = (1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_1[X]$, $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aX - 2b$ în perechea de baze

$B = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ şi

$B' = \{\bar{p}_1 = 2X + 1,\ \bar{p}_2 = -X\} \subset \mathbb{R}_1[X]$;

c) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(aX^2 + bX + c) = (3a - 2b - 2c, -a + 4b + 2c, a - 2b)$ în perechea de baze

$B = \{\bar{p}_1 = 2X + 1,\ \bar{p}_2 = -X^2 - 1,\ \bar{p}_3 = X^2 + X + 1\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi B_c baza canonică din $\mathbb{R}^3$;

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(a, b, c) = (a - b + c)X^2 + (-2a + b)X - a + b - c$ în perechea de baze B_c baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi $B = \{\bar{p}_1 = X - 1,\ \bar{p}_2 = -X^2 + 2X,\ \bar{p}_3 = X^2 - 3\} \subset \mathbb{R}_2[X]$.

3. Fie operatorul liniar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (7x_1, 2x_1 + 7x_2)$. Să se determine matricea $[f]_{B_c}$ asociată lui f relativ la baza canonică, valorile proprii şi subspaţiile proprii corespunzătoare. Este $[f]_{B_c}$ diagonalizabilă?

4. Să se studieze dacă următoarele matrice sunt diagonalizabile. În caz afirmativ să se aducă la forma diagonală şi să se precizeze baza în care are această formă:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = [f]_{B_c}$, unde

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (9x_1 - 3x_2, -3x_1 + x_2);$$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $A = [f]_{B_c}$, unde $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$$f(aX^2 + bX + c) = (2a - b + 2c)X^2 + (5a - 3b + 3c)X - a - 2c;$$

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$;

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; j) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

k) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; l) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

În cazul în care A este inversabilă, să se calculeze folosind teorema lui Hamilton-Cayley A^{-1}.

CAPITOLUL 4

FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE

1. Se dă aplicaţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_2.$$

Să se scrie matricea lui φ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$. Este φ simetrică?

2. Fie forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are in baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Se cere:

a) Să se determine expresia analitică a lui φ;

b) Să se calculeze $\varphi[(1, -1, 0), (2, 1, -1)]$;

c) Să se determine matricea lui φ în baza

$$B = \{\bar{v}_1 = (1, -1, 2),\ \bar{v}_2 = (-1, 0, 2),\ \bar{v}_3 = (3, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

3. Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$ ce are în baza canonică din $\mathbb{R}_1[X]$, matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine expresia analitică a lui φ;

b) Fie baza $B = \{\bar{p}_1 = X - 2,\ \bar{p}_2 = 2X - 1\} \subset \mathbb{R}_1[X]$; Să se scrie matricea lui φ în baza B.

4. Fie forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(aX + b, cX + d) = ad + bc$$

Să se scrie matricea lui φ în baza canonică din $\mathbb{R}_1[X]$, respectiv în baza $B = \{\bar{p}_1 = 2X - 3,\ \bar{p}_2 = -X + 1\}$. Este φ o formă simetrică?

5. Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ce are în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

a) Să se determine expresia analitică a lui φ.

b) Fie baza $B = \{\bar{v}_1 = (1, 1),\ \bar{v}_2 = (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Să se determine $[\varphi]_B$.

6. Se dă forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\begin{aligned} &\varphi[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = \\ &x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2. \end{aligned}$$

Să se determine matricea lui φ în baza

$$B = \{\bar{v}_1 = (1, 1, 0),\ \bar{v}_2 = (1, 0, 1),\ \bar{v}_3 = (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

şi să se calculeze $\varphi[(3, -1, 1), (1, -1, 2)]$.

7. Fie forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ce are în baza canonică matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine expresia analitică a formei pătratice asociate.

8. Să se determine expresia analitică a polarei formei pătratice

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

9. Fie forma pătratică $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 9x_1x_2 + x_2^2.$$

a) Să se determine polara lui f;

b) Să se scrie matricea asociată lui f în baza canonică din $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, respectiv în baza

$$B = \left\{ \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R});$$

c) Să se reducă f la forma canonică folosind metoda valorilor proprii şi să se precizeze o bază relativ la care f are această formă.

10. Fie forma patratică $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ce are în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se determine forma canonică a lui f şi să se precizeze o bază relativ la care f are această formă.

11. Se dă forma biliniară simetrică $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 4x_1y_1 - 5x_2y_2 - 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1$. Să se determine forma pătratică f asociată lui φ, să se reducă f la forma canonică şi să se precizeze o bază relativ la care f are această formă.

12. Fie forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$;

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3$;

c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

În fiecare caz, să se reducă f la forma canonică şi să se precizeze o bază relativ la care f are această formă;

13. Fie forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are in baza canonică matricea:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se determine expresia analitică a lui f, precum şi forma canonică asociată lui f; să se precizeze o bază relativ la care f are această formă.

CAPITOLUL 5

SPAŢII VECTORIALE EUCLIDIENE

1. Să se determine valorile pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii

$$\bar{u} = (3, 1, \alpha),\ \bar{v} = (-6, 5, \alpha)$$

   să fie ortogonali.

2. Se dau vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ şi $\bar{v} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$. Să se calculeze:

   a) Lungimile vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$;

   b) Unghiul dintre vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$;

   c) Să se determine versorii vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

3. Se dau vectorii $\bar{u} = (1, -2, 3)$ şi $\bar{v} = (0, 3, 2)$. Să se calculeze:

   a) unghiul dintre cei doi vectori;

   b) $\bar{u} \times \bar{v}$.

4. Se dau punctele $A(2, 2, 1)$ şi $B(4, 1, 3)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$;

5. Fie punctele $A(4, -2, 2)$, $B(3, 1, 1)$, $C(4, 2, 0)$ şi $D(0, 0, 9)$. Să se determine lunigimea înălţimii din D a tetraedrului $ABCD$.

6. Fie punctele $A(1, 2, -1)$, $B(1, 0, 3)$, $C(2, 1, 2)$ şi $D(2, 3, 4)$. Să se calculeze:

a) Aria triunghiului ABC;

b) Lungimea medianei din A a triunghiului ABC, perimetrul triunghiului ABC şi măsura unghiului ABC;

c) Lungimea înălţimii duse din D şi volumul tetraedrului $ABCD$.

7. Să se verifice că sistemul de vectori

$$B = \{\bar{v}_1 = (-1, -1, 1)\,,\ \bar{v}_2 = (1, -2, -1)\,,\ \bar{v}_3 = (1, 0, 1)\}$$

este un sistem ortogonal de vectori. Să se ortonormeze baza B folosind procedeul de ortonormare Gramm-Schmidt.

8. Utilizând procedeul lui Gramm-Schmidt, să se ortonormeze bazele:

a) $B = \{\bar{v}_1 = (1, 1)\,,\ \bar{v}_2 = (2, 3)\}$;

b) $B = \{\bar{v}_1 = (1, 0, 1)\,,\ \bar{v}_2 = (0, -1, 2)\,,\ \bar{v}_3 = (1, 0, 0)\}$;

c) $B = \{\bar{v}_1 = (2, 1, 2)\,,\ \bar{v}_2 = (3, 3, 0)\,,\ \bar{v}_3 = (1, -1, -5)\}$;

d) $B = \{\bar{v}_1 = (1, -2, 0)\,,\ \bar{v}_2 = (0, -2, 1)\,,\ \bar{v}_3 = (2, 1, 2)\}$.

5.1 Dreapta şi planul în spaţiu

1. Se dau punctele $A(3,-1,3)$, $B(2,1,-1)$ şi dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad d_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}\ .$$

   Să se determine ecuaţiile carteziene ale dreptelor:

   a) AB;

   b) d_3 ce conţine punctul A şi este paralelă cu dreapta d_1;

   c) d_4 ce conţine punctul B şi este perpendiculară pe planul π, unde π este determinat de direcţiile lui d_1 şi d_2 şi trece prin punctul A.

2. Se dau dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ 2x-z-3=0 \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad d_2 : \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y-z+2=0\ . \end{cases}$$

   Să se determine:

   a) ecuaţiile carteziene ale dreptei d_1;

   b) ecuaţiile parametrice ale dreptei d_2;

   c) unghiul dintre direcţiile celor două drepte.

   d) Să se stabilească dacă cele două drepte se intersectează.

3. a) Să se scrie ecuaţia dreptei d ce trece prin punctul de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2} \qquad \text{şi} \qquad d_2 : \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+z+1=0. \end{cases}$$

   şi este perpendiculară pe planul $\pi : 2x+y-3z-3=0$;

   b) Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,0,-1)$ la dreapta d şi la planul π.

4. Se dau punctele $A(3,-1,0)$, $B(-2,1,-1)$, $C(1,1,-1)$ şi dreapta

$$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \ .$$

Să se determine ecuaţia planului care conţine:

a) punctele A, B şi C;

b) punctul A şi este perpendicular pe dreapta d;

c) dreptele d şi AB.

5. a) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $A(1,-1,1)$ faţă de planul π_1 : $x-y+2z+2=0$;

b) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $B(-1,-1,2)$ faţă de planul π_2 : $x+y+3z+7=0$;

c) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $C(-1,2,6)$ faţă de planul π_3 : $2x+y-z=0$.

6. a) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $A(0,-1,2)$ faţă de dreapta d_1 : $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

b) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $B(-1,-1,0)$ faţă de dreapta $d_2 : \begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ z=2. \end{cases}$;

c) Să se găsească coordonatele simetricului punctului $C(1,1,1)$ faţă de dreapta d_3 : $\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ -y+z+3=0. \end{cases}$.

7. a) Să se studieze dacă dreapta $d : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ este paralelă cu planul π : $3x-3y+2z-5=0$;

b) Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1,-1,0)$ la dreapta d şi la planul π.

8. Fie punctele $A(1,-1,2)$, $B(5,1,-2)$, $M_0(1,-2,4)$ şi planul $\pi : -x+2y-2z+1=0$. Să se determine distanţa de la punctul:

   a) A la B;

   b) M_0 la planul π;

   c) M_0 la dreapta AB.

9. Să se calculeze distanţa dintre $M(1,0,-2)$ şi:

   a) planul $\pi_1 : 3x-y-2z+1=0$

   b) planul $\pi_2 : 6x-2y-4z-3=0$;

   c) dreapta $d_1 : \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-6}{3}$

   d) dreapta $d_2 : \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

   e) dreapta $d_3 : \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3y-z+2=0 \end{cases}$.

   f) dreapta $d_4 : \begin{cases} x-z+1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$.

10. Să se determine unghiul dintre:

    a) planele $\pi_1 : x+2y-2z-1=0$ şi $\pi_2 : x+y+1=0$;

    b) dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases} \qquad \text{şi} \qquad d_2 : \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases};$$

    c) dreapta d_1 şi planul π_2.

CAPITOLUL 6

GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ A CURBELOR ŞI SUPRAFEŢELOR DIN $\mathbb{E}_3$

6.1 Elemente de geometrie diferenţială a curbelor

1. a) Să se scrie ecuaţia tangentei la curba

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 \end{cases}$$

care trece prin punctul $M_0(-1, 1, 1)$;

b) Să se găsească punctele în care planul rectificant este paralel cu planul $\pi : 2x - 3y + 5 = 0$.

2. Să se scrie ecuaţia tangentei şi a planului normal la curba:

a) $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t^3 - 2t, \\ y(t) = 4t + 2, \quad \text{în punctul } M_0(t_0 = 1); \\ z(t) = -t^2 + t \end{cases}$

b) $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = a\cos^2 t, \\ y(t) = a\sin t\cos t, \quad \text{în punctul } M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{4}\right); \\ z(t) = a\sin t \end{cases}$

c) $\mathcal{C}: \begin{cases} y = x^2, \\ z = 3x \end{cases}$ în punctul $M_0(2,4,6)$.

3. Să se determine ecuaţiile dreptelor şi planelor triedrului lui Frénet în punctul $M_0(t_0 = 1)$ al curbei

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ y(t) = \dfrac{2t^3}{3} \\ z(t) = \dfrac{t^4}{2}\ . \end{cases}$$

4. Să se determine ecuaţiile dreptelor şi planelor triedrului lui Frénet în punctul $M_0(1,1,0)$ al curbei

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t\ . \end{cases}$$

5. Să se găsescă punctele în care binormala la curba

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = (t^3-1)\bar{i} + (t^2+1)\bar{j} + t\bar{k},\ \ t \in \mathbb{R}$$

este perpendiculară pe planul $\pi: x - 3y + 3z - 11 = 0$.

6. a) Să se determine versorii triedrului lui Frénet în punctul $M_0\left(t_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ al curbei

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = 1 - \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases},\ \ t \in [0,\pi].$$

b) Să se găsescă punctele în care planul rectificant este perpendicular pe dreapta $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-6}{0}$.

7. Să se determine punctele de pe curba $\mathcal{C}: \alpha(t) = \dfrac{2}{t}\bar{i} - 2t\bar{j} + (3t^2-3)\bar{k}$ în care planul normal la curbă este perpendicular pe planul $\pi: 6y + z + 5 = 0$.

8. Să se determine punctele de pe curba $\mathcal{C} : \alpha(t) = \left(\frac{2}{t}, \ln t, -t^2\right)$ în care binormala la curbă este paralelă cu planul $\pi : x - y + 8z - 1 = 0$.

9. Să se determine unghiul curbelor a)

$$\mathcal{C}_1 : \alpha(t) = (1 + \cos t, 1 - \sin t, 1),\ \ t \in [0, \pi]$$

$$\mathcal{C}_2 : \beta(s) = (\sin s + \cos s, 0, \sin s),\ \ s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

b)

$$\mathcal{C}_1 : \alpha(t) = (1 - \sin t, 2, 1 + \cos t),\ \ t \in [0, \pi]$$

$$\mathcal{C}_2 : \beta(s) = (s - 1, 2s, s),\ \ s \in \mathbb{R}.$$

c)

$$\mathcal{C}_1 : \alpha(t) = \left(t \cos t, t \sin t, t - \frac{\pi^2}{t}\right),\ \ t \in (0, \pi]$$

$$\mathcal{C}_2 : \beta(s) = \left(\frac{\pi^2}{s} \cos s, \frac{\pi^2}{s} \sin s, 0\right),\ \ s \in (0, \pi].$$

10. Să se calculeze lungimea arcelor de curbă AB

a) $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \quad \text{unde } A(1, 0, -1) \text{ şi } B(0, 1, -1) \\ z(t) = -1 \end{cases}$

b) $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \text{ln t} \quad \text{unde } A(2, 0, 1) \text{ şi } B(2e, 1, e^2) \\ z(t) = t^2 \end{cases}$

c) $\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\text{ln t} \quad \text{unde } A\left(1, \frac{1}{4}, \sqrt{5}\right) \text{ şi } B(4, 4 - \ln 2, \sqrt{5}) \\ z(t) = \sqrt{5} \end{cases}$

d) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = \sqrt{2}t\ . \end{cases}$ unde $A(1,1,0)$ şi $B(e^2, \frac{1}{e^2}, 2\sqrt{2})$

11. Să se calculeze curbura curbei

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = 3t - 5 \\ z(t) = 3 \end{cases}$$

în punctul $M_0(t_0 = \frac{\pi}{2})$.

12. Să se calculeze curbura şi torsiunea curbelor

a) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = t\sqrt{2} \end{cases}$

b) $\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \\ z(t) = \dfrac{t^3}{6} \end{cases}$

în punctul $M_0(t_0 = 1)$;

6.2 Elemente de geometria diferenţială a suprafeţelor

1. a) Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi ale normalei în punctul $M_0\,(u_0 = 2, v_0 = 0)$ la curba:

$$S : \begin{cases} x = ue^{v} \\ y = ue^{-v} \\ z = uv. \end{cases}$$

   b) Să se găsească punctele în care planul tangent este paralel cu axa Ox.

2. a) Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi ale normalei în punctul $M_0\,(3, 5, 7)$ la curba:

$$S : \begin{cases} x = 2u - v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 - v^3. \end{cases}$$

   b) Să se găsească punctele în care normala este perpendiculară pe planul $\pi : 3y + 2z - 1 = 0$.

3. Să se determine unghiul şi elementul de arc al curbelor de coordonate $C_1 : u = 2$ şi $C_2 : v = 0$ ale suprafeţelor:

   a)

$$S : \begin{cases} x = u + \sin v \\ y = u - \sin v \\ z = v \end{cases}$$

   b)

$$S : \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

c)

$$S: \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}.$$

4. Fie suprafaţa de ecuaţie

$$(S): \; z = x^3 + y^3.$$

Să se determine coeficienţii primei forme fundamentale, ecuaţia planului tangent şi a normalei în punctul $M(1, 2, 9)$.

5. a) Să se studieze dacă curba $u = v$ situată pe suprafaţa

$$\bar{r}(u, v) = (u^2 + v,\; u^2 - v,\; uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

este o curbă plană;

b) Să se găsească punctele în care normala este perpendiculară pe planul $\pi : x + y - 4z - 5 = 0$.

6. Se consideră suprafaţa de ecuaţii

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2}{2} + v \\ y = u + \dfrac{v^2}{2}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \\ z = uv. \end{cases}$$

a) Să se scrie elementul de arie al suprafeţei, să se arate că curba $u = v$ este o curbă plană şi să se calculeze curbura sa;

b) Să se găsească punctele în care planul tangent este perpendicular pe dreapta $d : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

7. Se consideră suprafaţa de ecuaţii

$$S : \begin{cases} x = u^2 + 2u + 1 \\ y = u^2 - 2u - 1 \\ z = v, \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Să se determine curba $\mathcal{C}$ de pe suprafaţa S pentru $v = -1$ şi elementul de arc al curbei;
b) Să se determine metrica şi matricea primei forme fundamentale;
c) Să se găsească punctele în care normala este perpendiculară pe planul $\pi : 2x - y + 7 = 0$.

8. Se consideră suprafaţa de ecuaţii

$$\begin{cases} x = u \ \cos v \\ y = u \ \sin v \\ z = 2 \ \sin(2v), \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, \pi].$$

a) Să se găsească metrica asociată suprafeţei şi ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul $M_0(u_0 = 1, v_0 = 0)$.
b) Să se calculeze elementul de arc şi unghiul curbelor $C_1 : u = 1$ şi $C_2 : v = \dfrac{\pi}{2}$.
c) Să se găsească punctele în care planul tangent este paralel cu planul $\pi : y + z - 3 = 0$.

9. Se consideră suprafaţa de ecuaţii

$$\begin{cases} x = u \ \cos v \\ y = u \ \sin v \\ z = u + v, \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi) .$$

Se cere unghiul dintre curbele de coordonate $C_1 : u = 0$ şi $C_2 : v = 0$ şi elementul lor de arc al celor două curbe.

10. Să se determine punctele suprafeţei:

$$\overline{r}(u,v) = u\ \sin v\overline{i} + u\ \cos v\overline{j} + (u-v)\overline{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

în care normala este perpendiculară pe planul $(\pi): x+y=0$.

11. Să se determine punctele suprafeţei:

$$\overline{r}(u,v) = (u+v)\overline{i} + (u-v)\overline{j} + (uv)\overline{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

în care planul tangent este paralel cu planul $(\pi): x+y-2z=0$.

12. Care este unghiul dintre planul tangent la suprafaţa:

$$S:\ \overline{r}(u,v) = (u+v)\overline{i} + (u-v)\overline{j} - (uv)\overline{k},\ (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

în punctul $M(u_0=1, v_0=0)$ şi dreapta $(d):\ x=y=z$?

13. Fie suprafaţa

$$S:\ \overline{r}(u,v) = 3ue^{v}\overline{i} + 3ue^{-v}\overline{j} + \frac{3}{u^2}\overline{k}, (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Să se determine unghiul curbelor de coordonate $C_1: v=\ln 2$ şi $C_2: u=-3$

b) Să se găsească punctele suprafeţei în care planul tangent este paralel cu planul de ecuaţie $x-y+z=2$.

c) Elementul de arie al suprafeţei.

14. Fie suprafaţa

$$S:\ \overline{r}(u,v) = u\ \cos v\overline{i} + u\ \sin v\overline{j} + 2u\overline{k}, (u,v) \in \mathbb{R}\times(0,2\pi).$$

a) Să se scrie ecuaţia planului determinat de normala la suprafaţă în punctul $P(0,1,2)$.

b) Să se determine unghiul curbelor $\mathcal{C}_1 : v = \frac{\pi}{2}u^2$ şi $\mathcal{C}_2 : v = \frac{\pi}{2}$.

c) Coeficienţii primei forme fundamentale ale suprafeţei.

15. Fie suprafaţa

$$S: \ \bar{r}(u,v) = (\sin(u+v), \cos(u+v), 2u), (u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi).$$

Se cere:

a) Calculaţi curbura şi torsiunea curbei $\mathcal{C} : v = \frac{\pi}{2}$ situată pe suprafaţa S în punctul $A(u_0 = 0)$.

b) Calculaţi unghiul dintre tangenta la curba $\mathcal{C}$ în punctul $A(u_0 = 0)$ şi dreapta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

c) Elementul de arie al suprafeţei.

16. Fie suprafaţa

$$S: \ \bar{r}(u,v) = (e^{u+v}, e^{-u+v}, e^{2u}), (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Se cere:

a) Ecuaţia planului tangent şi a normalei la suprafaţă în punctul $M(u_0 = 0, v_0 = 0)$.

b) Ecuaţia binormalei şi a planului osculator în punctul $A(u_0 = 0)$ la curba $\mathcal{C} : v = 0$ situată pe suprafaţa S.

c) Calculaţi distanţa de la $M(2,3,5)$ la planul osculator determinat la punctul b).

17. Fie suprafaţa

$$S: \ \bar{r}(u,v) = (\sin u \ \cos v, \sin u \ \sin v, \cos u), (u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi).$$

Se cere:

a) Calculaţi curbura şi torsiunea curbei $\mathcal{C} : v = \frac{\pi}{4}$ situată pe suprafaţa S în punctul $A(u_0 = 0)$.

b) Calculaţi unghiul dintre tangenta la curba $\mathcal{C}$ în punctul $A(u_0 = 0)$ şi dreapta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

18. Fie suprafaţa

$$S: \ \bar{r}(u,v) = (e^u \cos v, e^{-u} \sin v, e^{2u}), (u,v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)\,.$$

Se cere:

a) Ecuaţia planului tangent şi a normalei la suprafaţă în punctul $M(u_0 = 0, v_0 = \frac{\pi}{2})$.

b) Ecuaţia binormalei şi a planului osculator în punctul $A(u_0 = 0)$ la curba $\mathcal{C}: v = \frac{\pi}{4}$ situată pe suprafaţa S.

CAPITOLUL 7

RĂSPUNSURI

Răspunsuri verificate de As.dr.mat. Ene Remus Daniel şi As.drd.mat. Paşca Mădălina Sofia

CAPITOLUL 1

Sisteme liniare

a) Sol=$\{x=-z, y=3+z,\ z\in\mathbb{R}\}$ b) Sol=$\left\{x=\dfrac{1}{2}-z, y=z+\dfrac{3}{2},\ z\in\mathbb{R}\right\}$

c) Sistem incompatibil d) Sistem incompatibil

CAPITOLUL 2

SPAŢII VECTORIALE

Dependenţă şi independenţă liniară. Sistem de generatori. Baze.

(1) a) RD: $\begin{cases} -2\bar{v}_1+\bar{v}_2=\bar{0} \\ 3\bar{v}_1+\bar{v}_3=\bar{0} \\ -5\bar{v}_1+\bar{v}_4=\bar{0}; \end{cases}$ b) RD: $-\bar{v}_1-\bar{v}_2+\dfrac{2}{5}\bar{v}_3+\bar{v}_4=\bar{0}$;

c) RD: $-\bar{p}_1-\bar{p}_2+\bar{p}_3=\bar{0}$; d) RD: $-\bar{M}_1-\bar{M}_2+\bar{M}_3=\bar{0}$;

(2) a) Sistem liniar dependent, sistem de generatori, nu e bază,

RD: $-\bar{v}_1-2\bar{v}_2+\bar{v}_3=\bar{0}$;

b) Sistem liniar dependent, nu este sistem de generatori, nu e bază, RD: $\begin{cases} -\dfrac{16}{7}\bar{v}_1 - \dfrac{1}{7}\bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0} \\ -\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_4 = \bar{0}; \end{cases}$

c) Sistem liniar independent, nu este sistem de generatori, nu e bază

d) Sistem liniar independent, nu este sistem de generatori, nu e bază

e) Sistem liniar dependent, sistem de generatori, nu e bază,
RD: $-\dfrac{1}{2}\bar{p}_1 - \dfrac{1}{2}\bar{p}_2 - \dfrac{1}{2}\bar{p}_3 + \bar{p}_4 = \bar{0}$;

f) Sistem liniar independent, nu este sistem de generatori, nu e bază

g) Sistem liniar dependent, nu este sistem de generatori, nu e bază,
RD:$-\bar{M}_1 + 2\bar{M}_2 + \bar{M}_3 = \bar{0}$;

Schimbări de baze

(3) a) B_1 şi B_2 sunt baze b) $T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} 3 & \dfrac{7}{2} & 0 \\ 6 & \dfrac{17}{2} & -2 \\ 5 & \dfrac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$

c)$\bar{w} = (0, -3, -2)_{B_1} = (-7, 6, 6)_{B_2}$

(4) a) $T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ b) $T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ d) $T_{\overleftarrow{B_1B_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Subspaţii vectoriale

(5) a) S_1 nu este subspaţiu vectorial

b) S_2 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{u} = (1, 0)\}$ este o bază a sa

c) S_3 nu este subspaţiu vectorial

d) S_4 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{u}_1 = (1, 3, 0),\ \bar{u}_2 = (0, 2, 1)\}$ este o bază a sa

e) S_5 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{u} = (1, 2, 1)\}$ este o bază a sa

f) S_6 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{u}_1 = (1,1,0),\ \bar{u}_2 = (-1,0,1)\}$ este o bază a sa

g) S_7 nu este subspaţiu vectorial

h) S_8 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{p}_1 = X^2 + 1,\ \bar{p}_2 = X\}$ este o bază a sa

i) S_9 este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{p} = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 1\}$ este o bază a sa

j) S_{10} este subspaţiu vectorial şi $U = \{\bar{p} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 1\}$ este o bază a sa

k) S_{11} este subspaţiu vectorial şi $U = \left\{\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ este o bază a sa

l) S_{12} este subspaţiu vectorial şi $U = \left\{\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ este o bază a sa

m) S_{13} este subspaţiu vectorial şi $U = \left\{\bar{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\right.$
$\left.\bar{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ este o bază a sa

n) S_{14} nu este subspaţiu vectorial

CAPITOLUL 3

APLICAŢII LINIARE

(1) a) $[f]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, Ker($f$)=$L(\{(-1,1,0)\})$, dim(Ker($f$))=1, f nu este injectivă, Im(f)=$L(\{X, X, 1\})$, dim(Im(f))=2, f este surjectivă.

b) $[f]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, Ker($f$)=$L(\{(0,0,0)\})$, dim(Ker($f$))=0, f este injectivă, Im(f)=$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$, dim(Im($f$))=3, f nu este surjectivă.

c) $[f]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, Ker($f$)=$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right)$, dim(Ker($f$))=1, f nu este injectivă, Im(f)=$L(\{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,0),(0,0,-1)\})$, dim(Im($f$))=3, f este surjectivă.

d) $[f]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, Ker($f$)=$L(\{(1,-2)\})$, dim(Ker($f$))=1, f nu este injectivă, Im(f)=$L(\{(2,-2,4),\ (1,-1,2)\})$, dim(Im($f$))=1, f nu este surjectivă.

e) $[f]_{B_cB_c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Ker($f$)=$L(\{0\})$, dim(Ker($f$))=0, f este injectivă,

Im(f)=$L(\{(2,0,3),\ (-1,0,0),\ (0,1,0)\})$, dim(Im($f$))=3, f este surjectivă, deci f este bijectivă.

(2) a) Ker(f)=$L(B_1)$, unde $B_1 = \left\{\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 1\right)\right\}$) este o bază pentru Ker(f),
Im(f)=$L(\{(2,3),\ (1,0),\ (-1,2)\})$, $B_2 = \{(2,3),\ (1,0)\}$ este o bază pentru Im(f),
$[f]_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) Ker(f)=$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right)$, Im$(f)$=$L(B_2)$, $B_2 = \{X, -2\}$ este o bază pentru Im(f), $[f]_{BB'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) Ker(f)=$L(\{0\})$, Im(f)=$L(B_2)$, unde $B_2 = \{(3,-1,1),(-2,4,-2),(-2,2,0)\}$ este o bază pentru Im(f), $[f]_{BB_c} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ 10 & -1 & 5 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

d) Ker(f)=$L(B_1)$, unde $B_1 = \{(1,2,1)\}$ este o bază pentru Ker(f),

Im(f)=$L(\{X^2-2X-1,\ -X^2+X+1,\ X^2-1\})$, $B_2 = \{X^2-2X-1,\ -X^2+X+1\}$ este o bază pentru Im(f), $[f]_{B_cB} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $[f]_{B_c} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, valoare proprie $\{7\}$, $S_{\lambda=7} = L(\{(0,1)\})$, $[f]_{B_c}$ nu este diagonalizabilă.

(4) a) Nu este diagonalizabilă, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(-1,1),(1,1)\}$, $A^{-1} = -\dfrac{1}{16}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(-3,1),(1,3)\}$, nu este inversabilă

d) Nu este diagonalizabilă, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(3,4,3),(-1,0,1),(0,1,0)\}$,

$A^{-1} = -\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) Nu este diagonalizabilă, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(1,1,2),(-1,0,1),(-1,1,0)\}$,

$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

h) Nu este diagonalizabilă, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

i) Nu este diagonalizabilă , nu este inversabilă

j) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(-1,4,1),(1,0,1),(-2,-1,2)\}$, nu este inversabilă

k) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ în baza $B = \{(1,-1,1),(-1,0,1),(0,1,0)\}$,

$A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ -6 & -8 & -6 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

l) Nu este diagonalizabilă $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

CAPITOLUL 4

FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE

(1) $[\varphi]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, nu este simetrică

(2) a) $\varphi[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_2 + 2x_2y_3 - 2x_3y_3$

b) $\varphi[(1,-1,0),(2,1,-1)] = 8$ c) $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} -11 & -15 & 1 \\ -11 & -6 & -11 \\ -4 & -15 & 14 \end{bmatrix}$

(3) a) $\varphi[aX+b, cX+d] = 2ac - bc + ad + bd$ b) $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(4) $[\varphi]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, este simetrică

(5) a) $\varphi[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_2$, b) $[\varphi]_{B_c} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

(6) $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$, $\varphi[(3,-1,1),(1,-1,2)] = 16$

(7) Nu i se poate asocia o formă pătratică

(8) $\varphi[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = x_1y_1 + 2x_3y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_3 - x_3y_3$

(9) a) $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_1 + \dfrac{9x_1y_2}{2} + \dfrac{9x_2y_1}{2} + x_2y_2$

b) $[\varphi]_{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$

c) $f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{11}{2}z_1^2 - \dfrac{7}{2}z_2^2$ în baza $B = \{(1,1),(-1,1)\}$

(10) $f(z_1,z_2) = -3z_1^2 + 2z_2^2$ în baza $B = \{(-1,2),(2,1)\}$

(11) $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 5x_2^2 - 5x_3^2$,

$f(z_1,z_2,z_3) = -6z_1^2 - 5z_2^2 + 5z_3^2$ în baza $B = \{(1,-1,3),(0,3,1),(-10,-1,3)\}$

(12) a) $f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ în baza $B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$

b) $f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + 3z_2^2 - z_3^2$ în baza $B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

c) $f(z_1, z_2, z_3) = -3z_1^2 + 3z_2^2 + z_3^2$ în baza $B = \{(-1, -2, 1), (-1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

(13) a) $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_2x_3 + 5x_3^2$,
$f(z_1, z_2, z_3) = 8z_1^2 + 5z_2^2 - z_3^2$ în baza $B = \{(-1, -1, 1), (1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 7x_2^2 - 8x_1x_3 + 3x_3^2$,

$f(z_1, z_2, z_3) = 7z_1^2 + 7z_2^2 - z_3^2$ în baza $B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

CAPITOLUL 5

Dreapta şi planul în spaţiu

(1) a) $AB : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-4}$ b) $d_3 : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}$
c) $d_4 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$

(2) a) $d_1 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+3}{-4}$ b) $d_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = -3t + 1. \end{cases}$
c) $\arccos\left(\dfrac{13}{\sqrt{231}}\right)$ d) nu se intersectează.

(3) a) $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-3}$ b) $\mathrm{d(A},d) = \sqrt{\dfrac{6}{7}}$, $\mathrm{d(A},\pi) = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$

(4) a) $\pi_1 : y + 2z + 1 = 0$ b) $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$ c) $\pi : x + 3y + z = 0$.

(5) a) $A_1(-1, 1, 1)$ b) $B_1(-3, -3, -4)$ c) $C_1(3, 4, 4)$.

(6) a) $A_1(6, -5, 0)$ b) $B_1(-1, -1, 4)$ c) $C_1(3, 5, -1)$.

(7) a) da b) $\mathrm{d(A},d) = 2\sqrt{\dfrac{109}{29}}$, $\mathrm{d(A},\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{22}}$

(8) a) d(A,B)=6 b) $d(M_0,\pi)=4$ c) $d(M_0,d)=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(9) a) $d(M,\pi_1)=4\sqrt{\frac{2}{7}}$ b) $d(M,\pi_2)=\frac{11}{2\sqrt{14}}$ c) $d(M,d_1)=16\sqrt{\frac{5}{29}}$

d) $d(M,d_2)=5\sqrt{\frac{2}{3}}$ e) $d(M,d_3)=6\sqrt{\frac{3}{7}}$ f) $d(M,d_4)=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

(10) a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$.

CAPITOLUL 6

GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ A CURBELOR ŞI SUPRAFEŢELOR DIN $\mathbb{E}_3$

Elemente de geometria diferenţială a curbelor

(1) a) $T_{M_0}:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ b) $M_1(0,0,1)$ şi $M_2(1,1,1)$.

(2) a) $T_{M_0}:\frac{x+1}{1}=\frac{y-6}{4}=\frac{z}{-1}$, pl norm$_{M_0}: x+4y-z=23$.

b) $T_{M_0}:\frac{x-\frac{a}{2}}{-a}=\frac{y-\frac{a}{2}}{0}=\frac{z-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$, pl norm$_{M_0}: \sqrt{2}x-z=0$.

c) $T_{M_0}:\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{2}3$, pl norm$_{M_0}: x+4y+3z=36$.

(3) $T_{M_0}:\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$, pl norm$_{M_0}: x+2y+2z=\frac{17}{6}$

$B_{M_0}:\frac{x-\frac{1}{2}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-4}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$, pl osculator$_{M_0}: 4x-4y+2z=\frac{1}{3}$

$N_{M_0}:\frac{x-\frac{1}{2}}{-12}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-6}=\frac{z-\frac{1}{2}}{12}$, pl rectificant$_{M_0}: 6x+3y-6z=2$.

(4) $T_{M_0}:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, pl norm$_{M_0}: x-y+\sqrt{2}z=0$

$B_{M_0}:\frac{x-1}{-\sqrt{2}}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z}{2}$, pl osculator$_{M_0}: x-y-\sqrt{2}z=0$

$N_{M_0}:\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{0}$, pl rectificant$_{M_0}: x+y=2$.

(5) $M(0,2,1)$.

(6) a) $\bar{t}_{M_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\bar{b}_{M_0} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\bar{n}_{M_0} = (0, -1, 0)$
b) $M\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$.
(7) $M(1, -4, 9)$.
(8) $M(1, \ln 2, -4)$.