Curs 1, Analiză Matematică

Prof. dr. Gheorghe Moza

1 Şiruri şi serii de numere reale

1.1 Şiruri de numere reale

Definiţie 1.1 *Un şir de numere reale este de forma*

$$a_0, a_1, ..., a_n, ...$$

unde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$. *Un şir este o funcţie* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$. *Un şir se notează prin* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$, *sau simplu* a_n. *Termenul* a_n *se numeşte termenul general al şirului.*

Exemplu 1.1 $a_n = \frac{1}{n(n-2)}$, *unde* $n \geq 3$; $b_n = n - 1$, *unde* $n \geq 0$; $x_n = \frac{\ln n}{n+1}$, *unde* $n \geq 1$.

Definiţie 1.2 *Un şir* a_n, $n \geq n_0$, *se numeşte* ***mărginit****, dacă există două numere reale finite* m *şi* M*, astfel încât*

$$m \leq a_n \leq M,$$

$\forall n \geq n_0$. *Un şir care nu este mărginit se numeşte* ***nemărginit.***

Exemplu 1.2 *Şirul* $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, *este mărginit deoarece* $0 < a_n \leq 1$, $\forall n \geq 1$. *Dar şirul* $b_n = n^4, n \geq 1$, *este nemărginit deoarece* $b_n \to \infty$.

Definiţie 1.3 *Un şir* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *se numeşte* ***crescător*** *dacă*

$$a_{n+1} \geq a_n,$$

$\forall n \geq n_0$, *respectiv,* ***descrescător*** *dacă*

$$a_{n+1} \leq a_n,$$

$\forall n \geq n_0$. *Un şir* (a_n) *se numeşte* ***monoton*** *dacă este crescător sau descrescător.*

Exemplu 1.3 *Şirul* $a_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$, *este descrescător deoarece* $a_n = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, *iar şirul* $a_n = n^4, n \geq 1$, *este crescător deoarece* $a_n = n^4 < (n+1)^4 = a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Definiţie 1.4 *Un şir* $(a_n)_{n \geq n_0}$ *se numeşte* ***convergent*** *dacă există un număr real* ***finit*** $a \in \mathbb{R}$, *astfel încât* $\forall \varepsilon > 0$, *există un rang (număr)* $n_1 \in \mathbb{N}$ *cu proprietatea*

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$. *În acest caz, numărul* $a \in \mathbb{R}$ *se numeşte* ***limita*** *şirului* (a_n) *şi notăm*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

sau, simplu $a_n \to a$. *Dacă un şir nu are limită sau este* $\pm\infty$, *şirul* (a_n) *se numeşte* ***divergent***. *Uneori, dacă limita* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$, *spunem că şirul este convergent la* $\pm\infty$.

Remarca 1.1 *a) Această definiţie ne spune că, dacă şirul* $(a_n)_{n \geq 0}$ *este convergent la* a, *atunci toţi termenii şirului se găsesc într-o vecinătate a limitei* a, *cu excepţie poate a unui număr finit dintre aceştia (termenii de la* a_{n_0} *la* a_{n_1-1}*). Mai exact, pentru* $\forall \varepsilon > 0$ *avem* $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$. *Rangul* $n_1 \in \mathbb{N}$ *depinde de* ε, $n_1 = n_1(\varepsilon)$.

b) Limita unui şir dacă există, este unică.

Proprietăţi

P1) Fie $(a_n)_{n \geq n_0}$ un şir monoton pentru orice $n \geq n_1$, unde $n_1 \in \mathbb{N}$ este un rang fixat. Dacă $(a_n)_{n \geq n_0}$ este şi mărginit, atunci el este convergent. Reciproca este în general falsă.

Remarca 1.2 *Observăm că şirul pană la termenul* a_{n_1} *nu trebuie neapărat să fie monoton. Primii* n_1 *termeni nu influenţează convergenţa şirului.*

P2) Orice şir convergent este mărginit. Dar nu orice şir mărginit este convergent.

P3) **Teorema cleştelui.** Fie trei şiruri cu proprietatea $a_n \leq b_n \leq c_n$, pentru orice $n \geq n_1$ şi $a_n \to a$, $c_n \to a$, atunci $b_n \to a$.

P4) Fie (a_n) un şir pozitiv de numere reale nenule astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Atunci, dacă $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi dacă $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

P5) Fie (a_n) un şir pozitiv de numere reale nenule astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Atunci există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

P6) **(Lema lui Stolz).** Fie $(a_n), (b_n)$ două şiruri de numere reale. Dacă (b_n) este crescător cu limita $+\infty$, şi dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l,$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

P7) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e \approx 2.71$.

P8) (**L'Hospital**)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{P'(n)}{Q'(n)}.$$

Definiţie 1.5 *Un şir (a_n) de numere reale se numeşte şir* ***Cauchy*** *(sau şir* ***fundamental****), dacă $\forall \varepsilon > 0$, există un rang $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon,$$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ *şi* $\forall p \in \mathbb{N}$.

Remarca 1.3 *Notăm $m = n + p$. Atunci definiţia devine: un şir (a_n) este* ***Cauchy*** *dacă $\forall \varepsilon > 0$, există un rang $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încat, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ cu $m, n \geq n_1$,*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Definiţie 1.6 *Spunem că* $(b_n)_{n\geq n_0}$ *este un* ***sub****şir al şirului* $(a_n)_{n\geq n_0}$, *dacă toţi termenii şirului* (b_n) *sunt extraşi dintre termenii şirului* (a_n).

De exemplu, şirurile $b_n = 2n$ şi $c_n = 2n+1$, $n \geq 0$, sunt subşiruri ale şirului $a_n = n$, $n \geq 0$.

Remarca 1.4 *a) Dacă un şir* (a_n) *este convergent şi are limita* a, *atunci toate subşirurile sale sunt convergente la* a.

b) Dacă un şir (a_n) *conţine două subşiruri convergente la două limite diferite, atunci şirul dat* a_n *este divergent.*

Lema 1.1 *(Bolzano-Weierstrass). Orice şir mărginit conţine cel puţin un subşir convergent.*

Teorema 1.1 ***(Criteriul general Cauchy pentru convergenţa şirurilor).*** *Un şir* (a_n) *de numere reale este convergent, dacă şi numai dacă* (a_n) *este un şir Cauchy.*

Exerciţii

1. Folosind definiţia, arătaţi că şirul $a_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 1$, este convergent la $a = 1$.

R. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci $|a_n - 1| < \varepsilon$ este echivalent cu $\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$, sau $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, adică $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Fie $n_1 = n_1(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 \in \mathbb{N}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x *(ex.* $[4.2] = 4$); n_1 este rangul căutat. Fie acum orice $n \geq n_1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, deoarece $[x] + 1 > x$. Deci $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, care este echivalent cu $|a_n - 1| < \varepsilon$, deci şirul (a_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Calculaţi limitele următoarelor şiruri.

2. $a_n = \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\quad b_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n^2}$, $\quad c_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$.

R. Avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1}\right) = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n^2\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n+1))'}{(n)'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0.$$

3. $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $y_n = \frac{n^3}{3^n}$, $z_n = \frac{\sqrt[n]{n!}+n}{n}$, şi

$$t_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{n^2}, n \geq 2.$$

R. Avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Apoi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3n^3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Din P4), rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Fie $z_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} + 1$ şi $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Atunci

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} + 1$.

În final, fie $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$ şi $b_n = n^2$. Dar (b_n) crescător la $+\infty$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2n+1} = 0.$$

Din P6) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.

4. Folosiţi Criteriul general Cauchy pentru a arăta convergenţa şirurilor:

a)

$$a_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n}.$$

R. Avem

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)x|}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dar $\forall \varepsilon > 0$, rezultă $\frac{1}{n} < \varepsilon$ pentru $\forall n \geq n_1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, deci (a_n) este un şir Cauchy, deci convergent.

b)

$$b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

R. Fie $n, p \in \mathbb{N}$ nenule. Atunci

$$\begin{aligned} |b_{n+p} - b_n| &= \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Analog cu a), b_n este convergent.

2 Serii numerice

Definiţie 2.1 *Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale. O sumă infinită de forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

se numeşte ***serie numerică.*** *Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se mai notează pe scurt $\sum_n u_n$, $\sum_{n\geq 1} u_n$, sau $\sum u_n$. Şirul (s_n) cu termenul general*

$$s_n = u_1 + u_2 + \ \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

se numeşte ***şirul sumelor parţiale.***

Definiţie 2.2 *O serie $\sum_n u_n$ se numeşte* ***convergentă*** *dacă şirul (s_n) este convergent. În acest caz, limita s a şirului (s_n),*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

se numeşte ***suma*** *seriei şi scriem*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s.$$

Dacă şirul (s_n) nu este convergent sau are limita $\pm\infty$, atunci spunem că seria $\sum_n u_n$ este ***divergentă.***

Teorema 2.1 ***(Criteriul general Cauchy pentru convergenţa seriilor).*** *Seria $\sum_n u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (s_n) este un şir Cauchy, adică, $\forall \varepsilon > 0$, există un rang $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ şi $\forall p \in \mathbb{N}$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, sau*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Remarca 2.1 *Dacă seria $\sum u_n$ este convergentă, atunci şirul (u_n) este convergent la 0, adică $u_n \to 0$. Dacă $u_n \nrightarrow 0$, atunci seria $\sum u_n$ este divergentă.*

Remarca 2.2 *Dacă* $\sum_n u_n$ *şi* $\sum_n v_n$ *sunt convergente, atunci seria* $\sum_n (\alpha u_n + \beta v_n)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *este convergentă.*

Definiţie 2.3 *Spunem că seria* $\sum_n u_n$ *este* ***absolut convergentă*** *dacă seria* $\sum_n |u_n|$ *este convergentă.*

Propoziţie 2.1 *Orice serie absolut convergentă este convergentă. Reciproca este în general falsă.*

Remarca 2.3 *O serie convergentă care nu este absolut convergentă, se numeşte* ***semi-convergentă.***

Exemplu 2.1 *Seria* $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ *este semi-convergentă.*

Definiţie 2.4 *O serie de forma* $\sum_n (-1)^n u_n$, $u_n \geq 0$, *se numeşte* ***serie alternantă.***

Propoziţie 2.2 ***(Dirichlet Test).*** *Fie seria* $\sum_n (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, *unde* (a_n) *este descrescător şi convergent la* 0. *Atunci seria* $\sum_n (-1)^n a_n$ *este convergentă.*

Exerciţii

1. Studiaţi seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, cu $q \neq 0$ un număr real.

R. a) Dacă $q = 1$, suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty$, deci seria este divergentă.
b) Dacă $q = -1$, suma $s_n = -1 + 1 - 1 + 1 - ... = 0$, dacă n este par, respectiv, $s_n = -1 + 1 - 1 + ... = -1 \neq 0$, dacă n este impar. Deci s_n este divergent, adică seria este divergentă.
c) Dacă $q \in (-1, 1)$, suma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^n = q + q^2 + ... + q^n = q\frac{1 - q^n}{1 - q} \to \frac{q}{1 - q},$$

deoarece $q^n \to 0$. Deci seria converge şi

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1 - q}.$$

d) Dacă $q > 1$, suma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^n = q\frac{1 - q^n}{1 - q} \to +\infty,$$

deoarece $q^n \to \infty$, deci seria diverge.
e) Fie $q < -1$. Cum $q^{2n} \to +\infty$ şi $q^{2n-1} \to -\infty$, şirul s_n este divergent, deci seria este divergentă.

Concluzie. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă dacă şi numai dacă raţia sa $q \in (-1, 1)$.

2. Studiaţi convergenţa seriilor: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$, b) $\sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{n!}$, c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^4+4}$.

R. a)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Cum $s_n \to 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1$, este convergentă.

b) Avem

$$u_n = \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Deci

$$s_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Cum $s_n \to 1$, seria este convergentă.

c) Din

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = \left(n^2+2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 + 2 - 2n\right)\left(n^2 + 2 + 2n\right),$$

avem

$$u_n = \frac{n}{(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)} = \frac{An+B}{n^2-2n+2} + \frac{Cn+D}{n^2+2n+2}.$$

şi $u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2-2n+2} - \frac{1}{n^2+2n+2}\right)$, sau

$$u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-1)^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}\right).$$

Deci s_n devine

$$\begin{aligned} 4s_n &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{17} + \frac{1}{10} - ... + \frac{1}{(n-3)^2+1} - \frac{1}{(n-1)^2+1} \\ &\quad + \frac{1}{(n-2)^2+1} - \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{(n-1)^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+2n+2}. \end{aligned}$$

Cum $s_n \to 3/8$, seria este convergentă la $3/8$.

3. Seria $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ este convergentă deoarece $a_n = \frac{1}{n}$ este descrescător şi convergent la 0.