CHAPITRE 4

La notion de géodésique

Cette notion intervient de manière importante dans la logique qui va conduire EINSTEIN à ses équations des champs, c'est pourquoi il convient dès maintenant de la définir de manière détaillée.

Plusieurs choix peuvent être effectués pour cette définition : tous sont équivalents.

Nous allons, dans un premier temps, présenter cette notion dans l'espace classique à trois dimensions, puis nous la généraliserons à l'espace de MINKOWSKY.

I) Définitions

Soit une surface (S) définie dans un espace de dimension 3, et étudions le mouvement sur (S) d'un point matériel m sans frottement et soumis à aucune force extérieure. Sa vitesse est donc constante, et l'accélération tangentielle à sa trajectoire est nulle. Ce point peut par contre être soumis à une accélération normale qui doit être compensée par la réaction de la surface. On peut alors donner la définition suivante :

Définition 1

On appelle ligne géodésique d'une surface (S), toute trajectoire d'un point mobile lié à (S) sans frottement, et soumis à aucune force extérieure.

D'un point de vue plus géométrique, on peut formaliser la définition précédente de la manière suivante :

Définition 2

Soit un arc (Γ) tracé sur une surface (S). Si en tout point de (Γ) la normale principale (*la normale à la courbe (Γ) incluse dans le plan osculateur : elle s'obtient en dérivant la tangente par rapport à l'abscisse curviligne* dT/ds) coïncide avec la normale à (S), (*ou bien est indéterminée*), alors (Γ) est une géodésique.

L'aspect physique sous-jacent à cette définition est le fait que l'accélération tangentielle doit être nulle, puisque le point mobile évolue à vitesse constante. Il ne peut donc exister qu'une accélération normale, qui est donc obligatoirement normale à la surface.

On peut également caractériser une ligne géodésique par une troisième définition, souvent utilisée en physique :

Définition 3

Soit m1 et m2 deux points de la surface (S) . Dans l'ensemble des arcs reliant m1 à m2, tout arc tracé sur (S) tel que sa longueur soit stationnaire pour des variations infinitésimales de cet arc constitue une géodésique.

Cette dernière formulation est souvent interprétée en disant que la longueur de l'arc représente alors un extremum (maximum ou minimum de distance entre les deux points) Ce sera d'ailleurs une définition très usitée : une géodésique sera une courbe qui représente le plus court (ou le plus long) chemin entre deux points donnés sur une surface gauche. Il ressort de manière triviale que si une droite (D) est incluse dans (S), alors (D) est une géodésique de la surface.

II) Exemple lié à la physique

Après les définitions plutôt abstraites du paragraphe précédent, illustrons cette notion par un exemple de phénomène physique décrit par une ligne géodésique.

Considérons une onde plane, en polarisation électrique, qui tombe sur un cylindre parfaitement conducteur (Figure IV-1)

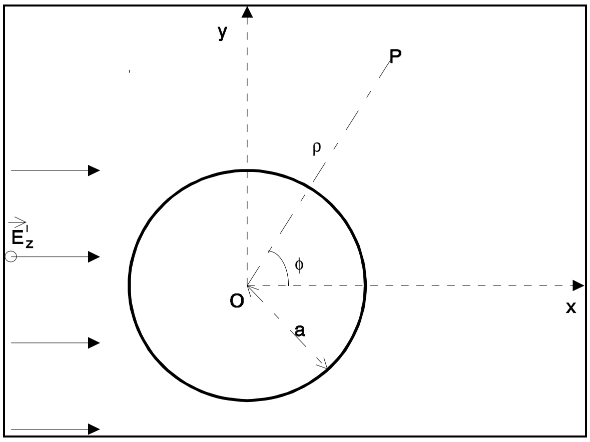

Figure IV-1 : *onde plane tombant sur un cylindre parfaitement conducteur.*

La solution exacte à ce problème de diffraction a été publiée pour la première fois par RAYLEIGH, et il en donne une représentation sous la forme d'une série infinie telle que nous allons la décrire.

La direction d'incidence étant parallèle à l'axe des x, le champ incident au point P est donné par :

$$E_z^i = \exp(-jkx) = \exp(-jk\rho\cos\phi) \qquad \text{(IV-1)}$$

La décomposition de l'équation (IV-1) en termes de fonctions d'ondes cylindriques s'écrit sous la forme :

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n}\mathbf{J}_n(k\rho)\exp(jn\phi) \qquad \text{(IV-2)}$$

Le champ total sera donné par la somme d'un champ incident, et d'un champ diffracté, et puisque ce dernier ne peut être constitué que par des ondes qui vont se propager vers l'infini, on le recherche sous la forme d'un spectre tel que :

$$E_z^s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n j^{-n}\mathbf{H}_n^{(2)}(k\rho)\exp(jn\phi) \qquad \text{(IV-3)}$$

Le champ total s'exprime alors de la façon suivante :

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n}\left\{\mathbf{J}_n(k\rho) + a_n\mathbf{H}_n^{(2)}(k\rho)\right\}\exp(jn\phi) \qquad \text{(IV-4)}$$

Les valeurs des coefficients a_n sont déterminées à l'aide des conditions aux limites sur le cylindre (ρ = a) où le champ total doit être nul.

$$a_n = -\frac{\mathbf{J}_n(ka)}{\mathbf{H}_n^{(2)}(ka)} \qquad \text{(IV-5)}$$

D’où le champ total entourant le cylindre

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{j^{-n}}{\mathbf{H}_n^{(2)}(ka)} \left\{ \mathbf{J}_n(k\rho)\mathbf{H}_n^{(2)}(ka) + \mathbf{J}_n(ka)\mathbf{H}_n^{(2)}(k\rho) \right\} \exp(jn\phi) \qquad \text{(IV-6)}$$

Le problème majeur posé par cette série est sa convergence très lente lorsque le point d’observation se trouve loin du cylindre (ρ grand). Quelques transformations mathématiques subtiles ont permis de la transformer en une série très rapidement convergente, pour un point d’observation situé dans la zone d’ombre du cylindre (Figure IV-2)

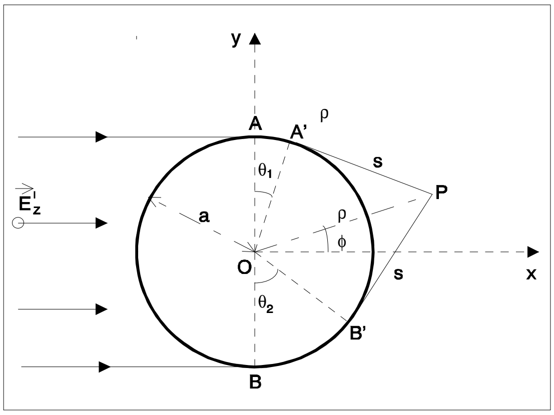

Figure IV-2 : *Point d’observation dans la zone d’ombre du cylindre.*

$$E_z^s = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[\exp\left\{ -\left(jk + \Omega_n \right) a\theta_1 \right\} + \exp\left\{ -\left(jk + \Omega_n \right) a\theta_2 \right\} \right] \frac{\exp(-jks)}{\sqrt{8\pi jks}} \qquad \text{(IV-7)}$$

où D_n représente un coefficient de diffraction qui dépend de la polarisation de l’onde, et Ω_n un coefficient d’atténuation complexe.

L’interprétation physique de l’équation (IV-7) est la suivante : Les rayons incidents en A et B se courbent tangentiellement au cylindre, en suivant une ligne géodésique, jusqu’aux point A’ et B’ où ils sont éjectés, et se propagent en espace libre jusqu’au point d’observation : on parle alors de rayons rampants.

L’extension de ce résultat à des surfaces quelconques qui est faite dans les méthodes asymptotiques comme la théorie géométrique de la diffraction, conduit à admettre que les rayons rampants se déplacent toujours en suivant des géodésiques des surfaces sur lesquelles ils se propagent.

Si on se réfère à la première définition qui a été donnée, cela signifie, qu’avant d’être éjecté tangentiellement à la surface (avec une certaine probabilité en chaque point), chaque photon suit une ligne géodésique, c’est à dire qu’il se déplace sans frottement, à vitesse constante, tout en étant lié à la surface.

III) Mise en équation d’une ligne géodésique

III.1 Cinématique classique

Les équations permettant de déterminer les lignes géodésiques peuvent être obtenues à partir de la formulation de LAGRANGE .

Soit un point m de l'espace, repéré par ses coordonnées x,y,z. Si ces coordonnées dépendent d'un seul paramêtre, par exemple le temps, la trajectoire est une courbe de l'espace. Si ces coordonnées dépendent de deux variables u et v, alors l'ensemble des points m lorsque u et v varient représente une surface. Tout point m appartenant à cette surface sera donc tel que :

$$\overrightarrow{om} = x(u,v)\vec{e}_x + y(u,v)\vec{e}_y + z(u,v)\vec{e}_z \qquad \text{(IV-8)}$$

En physique classique (non relativiste), le temps t est une variable indépendante. Lorsque le point m se déplace sur la surface, u et v sont paramétrés en fonction de t. On en déduit la vitesse :

$$\frac{d\overrightarrow{om}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{om}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\overrightarrow{om}}{dv}\frac{dv}{dt} \qquad \text{(IV-9)}$$

ce qui conduit à mettre sa norme au carré sous la forme :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\overrightarrow{om}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \qquad \text{(IV-10)}$$

après avoir posé :

$$E = \left(\frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \qquad \text{(IV-11)}$$

$$F = \frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial u}\frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad \text{(IV-12)}$$

$$G = \left(\frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \qquad \text{(IV-13)}$$

Désignons par $\vec{V}$ le vecteur vitesse. Le point m décrira une géodésique si et seulement si la composante tangentielle de son accélération est nulle soit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial u} = 0 \quad \textit{et} \quad \frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{\partial\overrightarrow{om}}{\partial v} = 0 \qquad \text{(IV-14)}$$

De même que pour effectuer une intégration par parties, nous posons :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u}=\frac{d}{dt}(\vec{V}.\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u})-\vec{V}.\frac{d}{dt}(\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u}) \quad \text{(IV-15)}$$

En désignant par un point la dérivation par rapport au temps, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u}=\frac{\partial \overrightarrow{om}/\partial t}{\partial u/\partial t}=\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{u}} \quad \text{(IV-16)}$$

Ce qui permet de mettre le premier terme de la différence (IV-15) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}.\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u})=\frac{d}{dt}(\vec{V}.\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{u}})=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \dot{u}}) \quad \text{(IV-17)}$$

Après avoir échangé l'ordre de dérivation, le second terme se transforme également :

$$\vec{V}.\frac{d}{dt}(\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u})=\vec{V}.\frac{\partial}{\partial u}(\frac{d\,\overrightarrow{om}}{dt})=\vec{V}.(\frac{\partial \vec{V}}{\partial u})=\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial u} \quad \text{(IV-18)}$$

On retrouve ainsi, à partir de l'équation (IV-14), le résultat de la formulation de LAGRANGE. Les géodésiques d'une surface, déduites de l'équation (IV-14), sont donc caractérisées par le système :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \dot{u}})-\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial u}=0 \quad \text{(IV-19)}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \dot{v}})-\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial v}=0 \quad \text{(IV-20)}$$

A titre d'exemple, on peut rechercher les géodésiques d'un cylindre de rayon R, dont la représentation paramétrique en fonction de u et v peut s'écrire :

$$x=R\cos(u), \qquad y=R\sin(u), \qquad z=v \quad \text{(IV-21)}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial u}=(-R\sin(u),R\cos(u),0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{om}}{\partial v}=(0,0,1) \quad \text{(IV-22)}$$

D'où les composantes E, F, G exprimées en (IV-11), (IV-12) et (IV-13) suivantes :

$$E=R^2, \qquad F=0, \qquad G=1 \quad \text{(IV-23)}$$

La norme au carré de la vitesse s’écrit donc :

$$\vec{V}^2 = R^2\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \quad \text{(IV-24)}$$

Les termes qui interviennent dans les équations de LAGRANGE sont donnés par les expressions :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot{u}} = R^2\dot{u} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial u} = 0 \quad \text{(IV-25)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial \dot{v}} = \dot{v} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial v} = 0 \quad \text{(IV-26)}$$

Si bien que les équations qui définissent les géodésiques (IV-19) et (IV-20) sont les suivantes :

$$\ddot{u} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{v} = 0 \quad \text{(IV-27)}$$

$$\dot{u} = \alpha \quad \text{et} \quad \dot{v} = \beta \quad \text{(IV-28)}$$

$$u = \alpha t + C1 \quad \text{et} \quad v = \beta t + C2 \quad \text{(IV-29)}$$

où α et β sont des constantes arbitraires, tandis que C1 et C2 sont liées aux conditions initiales. Les géodésiques sont décrites par les équations paramétrées suivantes:

$$x(t) = R\cos(\alpha t + C1) \qquad y(t) = R\sin(\alpha t + C1) \qquad z(t) = \beta t + C2 \quad \text{(IV-30)}$$

On reconnait facilement deux familles de géodésiques obtenues pour $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. La première condition correspond aux droites génératrices du cylindre tandis que la deuxième représente les cercles orthogonaux aux génératrices précédentes. Pour les autres familles, on notera qu’elles peuvent être obtenues en déplaçant un point m sur la surface du cylindre de telle manière que :

- sa composante de vitesse suivant un cercle de rayon R soit constante.
- sa composante de vitesse suivant l’axe Oz soit constante.

III.2 Equation tensorielle d’une géodésique

Plaçons nous d’emblée dans un espace de dimension 4. Soit $\vec{r}(s)$ une courbe paramètrée par la longueur de son arc s. Un vecteur unitaire tangent est défini par :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dx^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{d\vec{r}}{dx^2}\frac{dx^2}{ds} + \frac{d\vec{r}}{dx^3}\frac{dx^3}{ds} + \frac{d\vec{r}}{dx^4}\frac{dx^4}{ds} \quad \text{(IV-31)}$$

Il est commode de choisir comme base riemannienne dans toute la suite du calcul, la base définie par les vecteurs tangents $\vec{e}_\mu = \dfrac{d\vec{r}}{dx^\mu}$.

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx^1}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dx^2}{ds}\vec{e}_2 + \frac{dx^3}{ds}\vec{e}_3 + \frac{dx^4}{ds}\vec{e}_4 \qquad \text{(IV-32)}$$

$$\vec{t} = \frac{dx^\mu}{ds}\vec{e}_\mu \qquad \text{(IV-33)}$$

Nous décrirons une ligne géodésique, si en deux points infiniment voisins de cette courbe, le vecteur tangent est conservée dans la base riemannienne. Pour autant, cela ne signifie pas que la ligne obtenue sera une droite, car en chaque point les vecteurs de base peuvent être différents. On donne quelquefois une représentation imagée, en disant que la ligne obtenue sera 'la plus droite possible'.

Le fait que le vecteur tangent $\vec{t}$ soit maintenu 'constant' peut être illustré de manière simple dans le cas du cylindre. Une base de vecteurs tangents en tout point du cylindre est donnée par $\{\vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ (Figure IV-3). Toute combinaison $\vec{t} = \alpha_\theta \vec{e}_\theta + \alpha_z \vec{e}_z$ où α_θ et α_z sont des constantes représente un vecteur tangent indépendant de l'abscisse curviligne où on se situe. En suivant une courbe indiquée par ce vecteur, on dessine donc une ligne géodésique. On retrouve en celà les commentaires de la fin du paragraphe précédent. En particulier, pour α_θ = 0, la géodésique obtenue est une génératrice du cylindre, tandis que pour α_z = 0, on retrouve le cercle orthogonal à cette dernière.

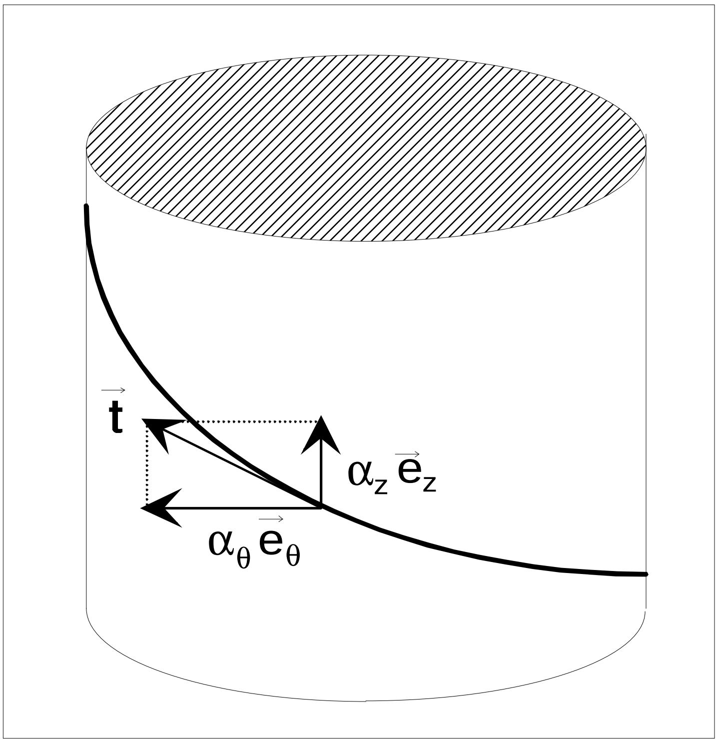

Figure IV-3 : *Représentation d'une ligne géodésique sur un cylindre.*

La condition qui exprime la constance du vecteur tangent est la suivante :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^1}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dx^2}{ds}\vec{e}_2 + \frac{dx^3}{ds}\vec{e}_3 + \frac{dx^4}{ds}\vec{e}_4\right) = 0 \quad \text{(IV-34)}$$

Soit encore, en développant la parenthèse :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{d^2x^1}{ds^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2x^2}{ds^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2x^3}{ds^2}\vec{e}_3 + \frac{d^2x^4}{ds^2}\vec{e}_4 \\ &\quad + \left\{\frac{d\vec{e}_1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \frac{d\vec{e}_2}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \frac{d\vec{e}_3}{ds}\frac{dx^3}{ds} + \frac{d\vec{e}_4}{ds}\frac{dx^4}{ds}\right\} = 0 \end{aligned} \quad \text{(IV-35)}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}\vec{e}_\mu + \frac{dx^\mu}{ds}\frac{d\vec{e}_\mu}{ds} = 0 \quad \text{(IV-36)}$$

Nous sommes alors amenés à développer l'accolade suivant la base que nous avons choisie. Cela suppose que l'on se donne les composantes de chacun des vecteurs $\frac{d\vec{e}_\mu}{ds}$ en fonction des $\vec{e}_\mu$. On pose, sur l'exemple du premier vecteur :

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{d\vec{e}_1}{dx^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{d\vec{e}_1}{dx^2}\frac{dx^2}{ds} + \frac{d\vec{e}_1}{dx^3}\frac{dx^3}{ds} + \frac{d\vec{e}_1}{dx^4}\frac{dx^4}{ds} \quad \text{(IV-37)}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{d\vec{e}_1}{dx^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds} \quad \text{(IV-38)}$$

Puis,on exprime chacune des dérivées vectorielles sur la base locale $\vec{e}_\mu$:

$$\frac{d\vec{e}_1}{dx^1} = \Gamma^1_{11}\vec{e}_1 + \Gamma^2_{11}\vec{e}_2 + \Gamma^3_{11}\vec{e}_3 + \Gamma^4_{11}\vec{e}_4 \quad \text{(IV-39)}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dx^2} = \Gamma^1_{12}\vec{e}_1 + \Gamma^2_{12}\vec{e}_2 + \Gamma^3_{12}\vec{e}_3 + \Gamma^4_{12}\vec{e}_4 \quad \text{(IV-40)}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dx^3} = \Gamma^1_{13}\vec{e}_1 + \Gamma^2_{13}\vec{e}_2 + \Gamma^3_{13}\vec{e}_3 + \Gamma^4_{13}\vec{e}_4 \quad \text{(IV-41)}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{dx^4} = \Gamma^1_{14}\vec{e}_1 + \Gamma^2_{14}\vec{e}_2 + \Gamma^3_{14}\vec{e}_3 + \Gamma^4_{14}\vec{e}_4 \quad \text{(IV-42)}$$

Soit, en écriture condensée, pour chacun des vecteurs $\vec{e}_\mu$:

$$\frac{d\vec{e}_\mu}{dx^\alpha} = \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\vec{e}_\lambda \quad \text{(IV-43)}$$

Les coefficients $\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}$ sont appelés les symboles de CHRISTOFFEL de seconde espèce. Ils jouent un rôle très important en analyse tensorielle et sont quelquefois représentés par les symboles $\begin{Bmatrix}\lambda \\ \mu\alpha\end{Bmatrix}$ ou $\{\mu\alpha,\lambda\}$. Cette dernière notation permet d'insister sur le fait que les symboles de CHRISTOFFEL ne présentent pas un caractère tensoriel, ce que laisse suggérer, à tors, la notation $\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}$.

En injectant les développements (IV-42) ou (IV-43) dans l'équation (IV-37), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1}{ds} &= \left(\Gamma^1_{11}\vec{e}_1+\Gamma^2_{11}\vec{e}_2+\Gamma^3_{11}\vec{e}_3+\Gamma^4_{11}\vec{e}_4\right)\frac{dx^1}{ds}+\left(\Gamma^1_{12}\vec{e}_1+\Gamma^2_{12}\vec{e}_2+\Gamma^3_{12}\vec{e}_3+\Gamma^4_{12}\vec{e}_4\right)\frac{dx^2}{ds}\\ &+\left(\Gamma^1_{13}\vec{e}_1+\Gamma^2_{13}\vec{e}_2+\Gamma^3_{13}\vec{e}_3+\Gamma^4_{13}\vec{e}_4\right)\frac{dx^3}{ds}+\left(\Gamma^1_{14}\vec{e}_1+\Gamma^2_{14}\vec{e}_2+\Gamma^3_{14}\vec{e}_3+\Gamma^4_{14}\vec{e}_4\right)\frac{dx^4}{ds}\end{aligned} \qquad \text{(IV-44)}$$

$$\frac{d\vec{e}_\mu}{ds}=\frac{d\vec{e}_\mu}{dx^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\vec{e}_\lambda \qquad \text{(IV-45)}$$

La dernière étape consiste à reporter cette expression dans les équations générales (IV-35) et (IV-36) et à regrouper les composantes relatives à chaque vecteur de base.

Partant de (IV-44), on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1}{ds}\frac{dx^1}{ds} &= \left(\Gamma^1_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^1_{12}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^1_{13}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^1_{14}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^1}{ds}\right)\vec{e}_1\\ &+\left(\Gamma^2_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^2_{12}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^2_{13}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^2_{14}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^1}{ds}\right)\vec{e}_2\\ &+\left(\Gamma^3_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^3_{12}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^3_{13}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^3_{14}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^1}{ds}\right)\vec{e}_3\\ &+\left(\Gamma^4_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^4_{12}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^4_{13}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds}+\Gamma^4_{14}\frac{dx^4}{ds}\frac{dx^1}{ds}\right)\vec{e}_4\end{aligned} \qquad \text{(IV-46)}$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds}\frac{dx^1}{ds}=\Gamma^{\lambda}_{1\alpha}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}\vec{e}_\lambda \qquad \text{(IV-47)}$$

avec des expressions analogues pour chacun des termes :

$$\frac{d\vec{e}_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}\vec{e}_\lambda \qquad \lambda,\alpha,\mu = 1\,..\,4 \qquad \text{(IV-48)}$$

L'annulation des composantes de chaque vecteur $\vec{e}_\lambda$ de la relation (IV-36) conduit enfin à l'équation générale d'une ligne géodésique que nous donnerons, pour des raisons évidentes, seulement en écriture condensée :

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}=0 \qquad \text{(IV-49)}$$

Comme toujours en notation abrégée, il faut se méfier de l'apparente simplicité de cette relation qui regroupe en fait, dans le cas le plus général, 4 équations de 17 termes chacune.

III.3 Equation générale d'une ligne géodésique, déduite de l'équation de LAGRANGE.

L'approche que nous allons développer maintenant est inspirée de la définition 3. Si ds représente l'élément de longueur, la longueur L d'une courbe quelconque reliant deux points M et M' s'écrira :

$$L=\int_{\text{Trajet } MM'} ds \qquad \text{(IV-50)}$$

Cette courbe représentera une ligne géodésique si L est un extremum. Nous savons que dans un espace riemannien à N dimensions, l'élément de longueur se développe ainsi :

$$ds^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} g_{ij}dx^i dx^j \qquad \text{(IV-51)}$$

ou encore en notation abrégée :

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j \qquad \text{(IV-52)}$$

Nous ne connaissons pas la forme analytique générale de ds^2 qui dépend de la métrique utilisée, mais si nous cherchons à minimiser l'intégrale (IV-50), nous pensons naturellement à l'équation de LAGRANGE.

Pour commencer simplement, nous considérons une courbe y(x) qui relie deux points M et M' dans un plan (Figure IV-4) :

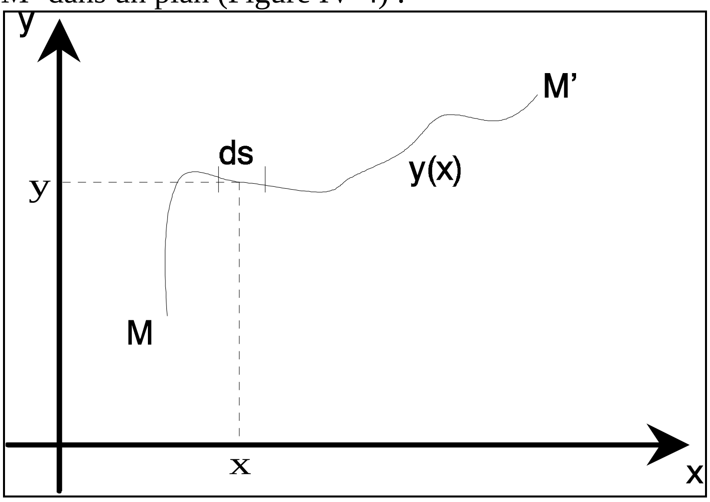

Figure IV-4 : *Représentation d'un élément de longueur sur une courbe quelconque y(x).*

Nous allons supposer que ds est seulement fonction de la position de l'élément de longueur et de la pente de la courbe, soit donc de trois variables indépendantes : x, y, et dy/dx, cette dernière étant notée $\dot{y}$ par commodité. Nous posons :

$$ds = F(x, y, \dot{y})dx \qquad \text{(IV-53)}$$

Dans un premier temps, nous allons montrer qu'une condition nécessaire pour que :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, \dot{y})dx \qquad \text{(IV-54)}$$

soit un extremum est que :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \qquad \text{(IV-55)}$$

Soit y=Y(x), $x_1 \le x \le x_2$, la courbe qui rend L extremum.

Alors y(x) = Y(x) + εη(x), ou ε est un infiniment petit qui est seulement fonction de y et $\dot{y}$ est une courbe voisine de Y(x). Si on souhaite de plus que y(x) coïncide exactement avec Y(x) en x_1 et x_2 , on doit imposer : $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

L'intégrale L pour cette courbe voisine s'écrit :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ \ Y(x) + \varepsilon\eta(x),\ \ \dot{Y}(x) + \varepsilon\dot{\eta}(x))dx \qquad \text{(IV-56)}$$

Elle sera extremum pour ε = 0 si l'on a :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{(IV-57)}$$

ε est une fonction qui dépend de y et $\dot{y}$,si bien que :

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\eta} \qquad \text{(IV-58)}$$

Si on suppose que toutes les conditions sont réunies pour que la dérivation puisse traverser le signe somme, on obtient à partir de la condition (IV-57) :

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\dot{\eta}\right)dx = 0 \qquad \text{(IV-59)}$$

La séparation de cette intégrale en deux, puis l'intégration par partie du deuxième terme permet d'écrire :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y}\eta dx + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})dx = 0 \qquad \text{(IV-60)}$$

Les conditions sur η aux extrémités de la courbe, énoncées plus haut, montrent que le second terme de cette expression est nul. Il reste :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) \right) \eta dx = 0 \qquad \text{(IV-61)}$$

Et puisque η est une fonction arbitraire, nous pouvons conclure :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) = 0 \qquad \text{(IV-62)}$$

Il s'agit de l'équation de LAGRANGE, déjà rencontrée dans les formules (IV-19) et (IV-20). Ce résultat s'étend facilement au cas d'une intégrale qui est fonction de plusieurs variables :

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y^1, \dot{y}^1, y^2, \dot{y}^2, \ldots\ldots, y^N, \dot{y}^N)dx \qquad \text{(IV-63)}$$

Les conditions pour que cette fonction soit extremum s'écrivent alors :

$$\frac{\partial F}{\partial y^k} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^k}) = 0 \qquad \text{(IV-64)}$$

Cette dernière relation doit nous permettre de remonter à l'équation générale d'une géodésique, puisqu'elle minimise ou maximise l'intégrale :

$$L = \int_{\text{Trajet MM}'} ds \qquad \text{(IV-65)}$$

à condition de poser :

$$ds = F(x, y^1, \dot{y}^1, y^2, \dot{y}^2, \ldots\ldots, y^N, \dot{y}^N)dx \qquad \text{(IV-66)}$$

Puisqu'il s'agit d'optimiser une distance, le poit de départ est toujours l'élément de longueur ds dont nous rappelons l'expression dans un espace de RIEMANN :

$$ds = \sqrt{g_{ij}dy^i dy^j} \qquad \text{(IV-67)}$$

Un astuce de calcul va nous permettre d'utiliser l'équation de LAGRANGE: nous allons paramétrer les y^k en fonction de l'abscisse curviligne s :

$$ds = \sqrt{g_{ij}\frac{dy^i}{ds}\frac{dy^j}{ds}}ds = \sqrt{g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j}ds \qquad \text{(IV-68)}$$

L'identification est alors facile : nous posons :

$$F(x, y^1, \dot{y}^1, y^2, \dot{y}^2, \ldots\ldots, y^N, \dot{y}^N) = \sqrt{g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j} = 1 \qquad \text{(IV-69)}$$

Le fait que F soit constante n'implique pas pour autant que les dérivées partielles soient nulles. Puisque les variables y^k et $\dot{y}^k$ sont indépendantes, la première dérivée partielle qui intervient dans l'équation de LAGRANGE est aisée à calculer :

$$\frac{\partial F}{\partial y^k} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\dot{y}^i\dot{y}^j}{2F} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\dot{y}^i\dot{y}^j \qquad \text{(IV-70)}$$

La seconde par contre, mérite un petit développement :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}^k} = \frac{\frac{\partial}{\partial \dot{y}^k}(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j)}{2F} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{y}^k}(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j) \qquad \text{(IV-71)}$$

Le tenseur métrique g_{ij} ne dépend pas des $\dot{y}^k$. Il va donc se comporter comme une constante au cours de la dérivation. Un développement à l'ordre 3 va nous aider à effectuer quelques transformations :

$$\begin{aligned} g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j = {} & g_{11}\dot{y}^1\dot{y}^1 + g_{12}\dot{y}^1\dot{y}^2 + g_{13}\dot{y}^1\dot{y}^3 \\ & + g_{21}\dot{y}^2\dot{y}^1 + g_{22}\dot{y}^2\dot{y}^2 + g_{23}\dot{y}^2\dot{y}^3 \\ & + g_{31}\dot{y}^3\dot{y}^1 + g_{32}\dot{y}^3\dot{y}^2 + g_{33}\dot{y}^3\dot{y}^3 \end{aligned} \qquad \text{(IV-72)}$$

La dérivée partielle par rapport à $\dot{y}^1$ s'écrit :

$$\frac{\partial(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j)}{\partial \dot{y}^1} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^1}(g_{11}\dot{y}^1\dot{y}^1 + g_{12}\dot{y}^1\dot{y}^2 + g_{13}\dot{y}^1\dot{y}^3 + g_{21}\dot{y}^2\dot{y}^1 + g_{31}\dot{y}^3\dot{y}^1) \qquad \text{(IV-73)}$$

Le tenseur métrique g_{ij} étant symétrique, il est possible de regrouper les termes deux par deux pour obtenir :

$$\frac{\partial(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j)}{\partial \dot{y}^1} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^1}(g_{11}\dot{y}^1\dot{y}^1 + 2g_{21}\dot{y}^2\dot{y}^1 + 2g_{31}\dot{y}^3\dot{y}^1) \qquad \text{(IV-74)}$$

D'où le résultat :

$$\frac{\partial(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j)}{\partial\dot{y}^1} = 2g_{i1}\dot{y}^i \tag{IV-75}$$

Qui se généralise sans difficultés à chacune des dérivées partielles :

$$\frac{\partial F}{\partial\dot{y}^k} = \frac{1}{2}\left\{2g_{ik}\dot{y}^i\right\} = g_{ik}\dot{y}^i \tag{IV-76}$$

En regroupant les résultats partiels (IV-70) et (IV-76), on obtient finalement l'équation de LAGRANGE sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ik}\dot{y}^i\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^k}\dot{y}^i\dot{y}^j = 0 \tag{IV-77}$$

Pour retrouver l'équation classique d'une géodésique, il nous faut encore développer le premier terme de (IV-77) :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ik}\dot{y}^i\right) = g_{ik}\frac{\partial\dot{y}^i}{\partial s} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial s}\dot{y}^i \tag{IV-78}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ik}\dot{y}^i\right) = g_{ik}\ddot{y}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}\dot{y}^i\frac{\partial y^j}{\partial s} \tag{IV-79}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ik}\dot{y}^i\right) = g_{ik}\ddot{y}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}\dot{y}^i\dot{y}^j \tag{IV-80}$$

Enfin, une subtilité du calcul tensoriel, déjà rencontrée dans le chapitre décrivant l'écriture tensorielle des équations de MAXWELL ((III-82), (III-83), et (III-88)), nous permet de poser :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j}\dot{y}^i\dot{y}^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}\right)\dot{y}^i\dot{y}^j \tag{IV-81}$$

En reportant ces deux derniers résultats ((IV-80) et (IV-81)) dans (IV-77), nous atteignons presque l'objectif fixé :

$$g_{ik}\ddot{y}^i + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right\}\dot{y}^i\dot{y}^j = 0 \tag{IV-82}$$

Nous rappelons que le point signifie une dérivation par rapport à l'abscisse curviligne s :

$$g_{ik}\frac{d^2y^i}{ds^2} + [ij,k]\frac{dy^i}{ds}\frac{dy^j}{ds} = 0 \tag{IV-83}$$

où les coefficients :

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right\} \tag{IV-84}$$

sont appelés les symboles de CHRISTOFFEL de première espèce.

Pour atteindre le but souhaité, il reste à éliminer le coefficient g_{ik} qui se trouve devant la dérivée seconde des y^i dans (IV-83).Ceci est rendu possible en multipliant la totalité de l'équation par le terme g^{rk} . En effet, un résultat classique de l'analyse tensorielle établit que:

$$g^{rk} g_{ik} = \delta_i^r \tag{IV-85}$$

où δ représente le symbole de KRONECKER. Pour mémoire, ce symbole vaut 1 lorsque i est égal à r et 0 lorsque i est différent de r. Il en résulte l'équation générale d'une ligne géodésique sous la forme :

$$\frac{d^2 y^r}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{rk}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right\}\frac{dy^i}{ds}\frac{dy^j}{ds} = 0 \tag{IV-86}$$

Les pages laborieuses qui nous ont conduit à cette formulation trouvent ici leur récompense, car nous y voyons l'expression des coefficients de CHRISTOFFEL de seconde espèce en fonction du tenseur métrique :

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk}\left\{\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right\} \tag{IV-87}$$

Nous disposons désormais des premiers outils qui vont nous permettre d'avancer vers la relativité générale.