# Séries de Fourier - Exercices

**Exercice 1** Soit $\alpha$ un nombre réel et $f$ la fonction périodique de période 1, définie par l'expression

$$f(t) = \cos(3\alpha)\cos(2\pi t) + \sin(3\alpha)\sin(2\pi t)$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de $f$.
2. Déterminer la valeur moyenne de $f$ et sa valeur efficace.

**Exercice 2** Soit $\alpha$ un nombre réel, $0 < \alpha < 1$, et $\psi$ la fonction impaire et $2\pi$-périodique définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha\pi \\ 0 & \text{si } \alpha\pi < t \leqslant \pi \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction $\psi$ sur $[-2\pi\,;\,4\pi]$.
2. Ecrire la série de Fourier associée à $\psi$.

**Exercice 3** Soit la fonction $\pi$-périodique $\varphi$ définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(2nt) - \frac{5\sqrt{2}}{6}\sin(2nt) + \frac{\sqrt{6}}{8}\cos(6nt)$$

Déterminer la valeur efficace $\varphi_{\text{eff}}$ de $\varphi$.

**Exercice 4** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, de période $2\pi$ telle que :

$$f(t) = Ke^{-t} \qquad \text{si } t \in [0; 2\pi[\,,$$

$K$ étant une constante réelle positive.

1. On se propose de calculer les intégrales

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-t}\cos(nt)\,dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sin(nt)\,dt$$

où $n$ est un entier strictement positif.

a. *Première méthode*

En intégrant $I$ par parties, prouver que $I = \frac{1}{n}J$.

En intégrant $J$ par parties, prouver que $J = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-2\pi}\right) - \frac{1}{2}I$.

En déduire les valeurs de $I$ et $J$.

b. *Deuxième méthode*

Prouver que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{jnt}e^{-t}\,dt = \frac{1-e^{-2\pi}}{1-nj}$, où $j$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

En déduire les valeurs de $I$ et $J$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

Dans toute la suite, on suppose que $K = \dfrac{\pi}{1-e^{-2\pi}}$.

3. Prouver que, si $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cos(nt) + \frac{n}{n^2+1}\sin(nt)\right)$$

Quelle est la somme de la série de Fourier si $t = 2k\pi$ ?

4. Dessiner le spectre de fréquence de $f$.