Enunciado

Dada la siguiente matriz A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Probar que A **no** admite factorización **LU**.

b) Hallar una matriz de permutación **P** adecuada de manera que **PA** tenga factorización **LU**.

Contexto

Este ejercicio es el primero en la guía en el cual aparece una matriz que no admite factorización LU, y se pide probar ese hecho, por lo que es una buena oportunidad para testear el conocimiento del alumno sobre los requisitos para la factorización de una matriz. Además, se introduce por primera vez la necesidad de agregar una matriz de permutación, por lo que también es una excelente oportunidad para testear que se haya entendido el concepto de matriz de permutación y el cómo construirla y utilizarla.

Resolución item a

Una condición necesaria, pero no suficiente, es que la matriz A sea inversible, lo que suele ser un buen primer "test" para descartar matrices fácilmente. Para el caso concreto del ejercicio, la matriz A resulta inversible, por lo que será necesario usar otras herramientas para probar lo que se pide. Primero calcularía en el pizarrón el determinante de A, y veríamos que es $\neq 0$. Preguntaría si ven algún indicio "a ojo" del porqué de que A no admita factorización, y en caso de que no haya ideas, resaltaría que no podríamos realizar nuestro algoritmo dado que el pivote es 0. Me aseguraría que entiendan qué es un pivote y porqué el hecho de que sea $= 0$ impide realizar el algoritmo. A continuación recordaría, si no surgió previamente la idea, la siguiente proposición vista en la clase teórica:

Proposición

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, existe factorización LU de $\mathbf{A} \iff$ para todo $1 \leq k \leq n$, $\det(\mathbf{A}(1 : k\ , 1 : k)) \neq 0$.

Con esta proposición a nuestra disposición, preguntaría si hay ideas acerca de cómo probar lo que nos piden. Si no hay ideas, explicaría que bastaría con encontrar un menor principal con determinante $= 0$, ya que esto es suficiente para implicar que A no admite factorización LU. Tomamos $k = 1$, y vemos que $\det(0) = 0$. Con esto podemos concluír que $\mathbf{A}$ no admite factorización LU.

1 Resolución item b

En el item anterior mostramos que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, lo que nos permite afirmar que $\mathbf{A}$ admite factorización PLU. Lo que necesitamos es, coloquialmente, reordenar las filas de $\mathbf{A}$ de manera que se pueda realizar el algoritmo para calcular $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$. Notamos que el intercambio de la fila 1 por la fila 2 nos deja con un pivote $\neq 0$, así que es una permutación candidata, aunque no sabemos *a priori* si va a funcionar, ya que la única manera de chequear esto es realizando el algoritmo o viendo los determinantes de sus menores principales, por lo que es ua decisión arbitraria. Antes de continuar, me aseguraría que el concepto de matriz de permutación está claro, y en caso de que no, mostraría algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ para ver "cómo lucen" y "qué hacen".

¿Qué significa, en términos de multiplicación de matrices, "intercambiar la fila 1 por la fila 2"? Significa encontrar una matriz de permutación $\mathbf{P}$ tal que al multiplicar **por izquierda** a $\mathbf{A}$ obtengamos como resultado: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Tomamos $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hacemos toda la multiplicación $\mathbf{PA}$ en el pizarrón y corroboramos que efectivamente obtuvimos lo que buscábamos. Ahora, para la nueva matriz $\mathbf{PA}$, calculamos su factorización LU, pero primero recordamos lo siguiente:

Propiedad

Si A admite factorización LU, entonces:

$\mathbf{U}$ resulta ser la matriz triangular superior que se obtiene al terminar el proceso de eliminación de Gauss.

$\mathbf{L}$ resulta ser la matriz triangular inferior que se obtiene de guardar en su respectivo lugar los "multiplicadores" en cada paso de la eliminación de Gauss, pero con sus signos cambiados.

Acá estamos tratando a $\mathbf{PA}$ como la $\mathbf{A}$ que aparece en la propiedad. Entonces, no tenemos más que escalonar la matriz y guardarnos los multiplicadores en las posiciones correspondientes.

Haría todo el cálculo en el pizarrón

Obtenemos las matrices:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto resolvimos el ítem b.