

Universität

N **Gesamthochschule Paderborn** Fachbereich 17 · Mathematik - Informatik

Coxetertransformationen

Diplomarbeit

von

Axel Boldt

Paderborn, Juni 1992

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Der allgemeine Existenzsatz für Auslander-Reiten-Folgen	3
§1 Die Kategorie <u>Mod-R</u> und der Funktor Tr	3
§2 Auslander-Reiten-Folgen	14
§3 Beweis des Existenzsatzes	17
II Auslander-Reiten-Folgen über Artin-Algebren	27
§4 Funktorkategorien	27
§5 Einige Dualitäten und der Funktor Tr	31
§6 Der Existenzsatz	38
III Das Coxeterpolynom im erblichen Fall	42
§7 Graphentheoretische Sprechweisen	42
§8 Die Coxetertransformation	44
§9 Das Coxeterpolynom erblicher Algebren	48
§10 Das charakteristische Polynom von Multigraphen	66
§11 Eine Notation für gewurzelte Kreiseebäume	71
§12 Implementationen	75
§13 Experimente und offene Fragen	81
Anhang	83
1. Das Programm <code>coxpoly</code>	83
2. Das Programm <code>cycfactor</code>	96
3. Das Programm <code>coxmat</code>	99
Literaturverzeichnis	107

Einleitung

Das Thema dieser Arbeit sind Coxetertransformationen und Auslander-Reiten-Translationen. Diese Konzepte sind eng verknüpft. In den beiden ersten Kapiteln stelle ich zwei Existenzsätze für Auslander-Reiten-Folgen in verschiedenen Kategorien vor und im dritten Kapitel widme ich mich, hauptsächlich im Falle erblicher Algebren, der Coxetertransformation und insbesondere deren charakteristischem Polynom, dem Coxeterpolynom. Es ergeben sich Verfahren zur Bestimmung desselben, die auch implementiert wurden. Die resultierenden Programme findet man im Anhang.

Auslander-Reiten-Folgen wurden im Jahre 1975 von Maurice Auslander und Idun Reiten eingeführt. Es handelt sich um eine sehr spezielle Klasse von kurzen exakten Sequenzen; die Begriffsbildung macht zunächst in jeder abelschen Kategorie Sinn.

Direkt aus den Definitionen folgt, daß ein Endterm einer solchen Folge bereits die gesamte Sequenz bis auf Isomorphie bestimmt und daß beide Endterme einen lokalen Endomorphismenring haben, also unzerlegbar sind. Die Bedeutung der Auslander-Reiten-Folgen wird klar, wenn man sich verdeutlicht, daß ein wesentliches Ziel der Darstellungstheorie die Untersuchung der unzerlegbaren Objekte gewisser Kategorien ist.

Eine wichtige Frage ist deshalb in jeder zu untersuchenden abelschen Kategorie, ob 'Auslander-Reiten-Folgen existieren', genauer: ob es zu jedem Objekt C mit lokalem Endomorphismenring (und evtl. weiteren einschränkenden Eigenschaften, die aus der Definition selbst stammen) eine Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

gibt. Wegen der oben angesprochenen Eindeutigkeit können wir dann

$$A = \tau C$$

definieren: dies ist die Auslander-Reiten-Translation. Von großem Interesse ist dabei eine nähere Kenntnis der Abbildung τ , da Auslander-Reiten-Folgen im allgemeinen schwer zu finden sind.

Ziel ist also sowohl der Existenzsatz wie auch die Beschreibung der Endterme in Abhängigkeit voneinander. Dieses Programm wird im ersten Kapitel für die Kategorie der Moduln über einem beliebigem Ring und im zweiten Kapitel für die Kategorie der endlich erzeugten Moduln über einer Artin-Algebra (eine Verallgemeinerung von endlichdimensionalen Algebren über Körpern) durchgeführt.

Es sind dabei die Aussagen des zweiten Kapitels keineswegs Korollare aus denen des ersten: die Auslander-Reiten-Sequenzen über einem beliebigen Ring werden im allgemeinen sehr 'große', d. h. nicht endlich erzeugte Terme beinhalten. Über einer Artin-Algebra hingegen können wir sicher sein, daß die Auslander-Reiten-Translation

endlich erzeugte Moduln stets in endlich erzeugte überführt. Außerdem ist in der Situation des zweiten Kapitels eine sehr viel explizitere Beschreibung der Endterme möglich, als dies im ersten Kapitel der Fall ist.

Im dritten Kapitel schließlich wird weiter spezialisiert. Zu jedem Köcher (was im wesentlichen ein gerichteter Graph ist) ohne gerichtete Kreise gehört in natürlicher Weise eine endlichdimensionale Algebra, und es stellt sich heraus, daß (bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper) die Auslander-Reiten-Translation in der Kategorie der endlich erzeugten Moduln über dieser Algebra auf der Ebene der Grothendieckgruppe eine lineare Abbildung induziert, die sogenannte Coxetertransformation. Deren beschreibende Matrix, die Coxetermatrix, ist rein kombinatorisch aus dem zugrundeliegenden Köcher berechenbar. Das Hauptaugenmerk wird sich auf das charakteristische Polynom dieser Transformation richten; es ist unter anderem deswegen von Interesse, weil es das Wachstumsverhalten der Coxetermatrix kontrolliert.

Nach der Klärung der Abhängigkeit des Coxeterpolynoms von der konkreten Orientierung des Köchers beweise ich einige neue Formeln für das Coxeterpolynom. Diese erlauben es, die Coxeterpolynome einer gewissen Köcherklasse, der sogenannten Kreiseebäume, rekursiv zu berechnen. Hierzu ist es wünschenswert, eine griffige Notation für diese Köcher zu besitzen. So wird es möglich, die Coxeterpolynome von ganzen Köcherklassen symbolisch zu bestimmen; desweiteren erlauben die Formeln eine weit effizientere Berechnung von Coxeterpolynomen von Kreiseebäumen, als dies bisher möglich war. Dadurch wurden einige Feldversuche durchführbar, die ich im letzten Paragraphen anspreche.

Im Anhang finden sich die Implementierungen der Algorithmen in der Programmiersprache des Computeralgebrasystems MapleV.

Ganz herzlich möchte ich mich bei Herrn Prof. Helmut Lenzing für die zahlreichen und wertvollen Diskussionen, Anregungen und Hilfestellungen bedanken.

Kapitel I

Der allgemeine Existenzsatz für Auslander-Reiten-Folgen

§1 Die Kategorie $\underline{\text{Mod-}R}$ und der Funktor Tr

Sehr viele Informationen über die beiden in der Überschrift genannten Konzepte findet man in [AuslBridg]. Ich habe hier nur soviel aufgeschrieben, wie in den folgenden Paragraphen gebraucht wird.

(1.1) Bezeichnungen: (1) In diesem Paragraphen sei R stets ein beliebiger Ring, d. h.: ein assoziativer Ring mit Eins.

(2) Die Kategorie aller R -Linksmoduln wird mit $R\text{-Mod}$, die der endlich präsentierten R -Linksmoduln mit $R\text{-mod}$ bezeichnet. Analog ist $\text{Mod-}R$ die Kategorie der R -Rechtsmoduln und $\text{mod-}R$ die volle Unterkategorie der endlich präsentierten R -Rechtsmoduln.

Mit $R\text{-Proj}$, $R\text{-proj}$, $\text{Proj-}R$ bzw. $\text{proj-}R$ bezeichne ich die vollen Unterkategorien der projektiven Objekte in den Kategorien $R\text{-Mod}$, $R\text{-mod}$, $\text{Mod-}R$ bzw. $\text{mod-}R$. Analog sind $R\text{-Inj}$ und $\text{Inj-}R$ die vollen Unterkategorien der injektiven Objekte in $R\text{-Mod}$ bzw. $\text{Mod-}R$.

(3) Um ohne Skrupel von Funktorkategorien reden zu können, kann man die Kategorientheorie wie in [Gabriel1] aufbauen. Dazu muß man als zusätzliches mengentheoretisches Axiom akzeptieren, daß jede Menge Element eines Universums ist. Tut man dies, so ist beispielsweise $R\text{-Mod}$ bzw. Ab definiert als die Kategorie aller R -Linksmoduln bzw. abelscher Gruppen, deren zugrundeliegende Menge Element eines zuvor fest gewählten, R und \mathbb{Z} enthaltenden Universums \mathfrak{U} ist. Es sind dann $R\text{-Mod}$ und Ab sogenannte ' \mathfrak{U} -Kategorien'. Nun ist es problemlos möglich, etwa die (abelsche) Kategorie $[R\text{-Mod}, \text{Ab}]$ der additiven Funktoren von der Kategorie der R -Linksmoduln in die Kategorie der abelschen Gruppen zu betrachten.

Grundlegendes über Funktorkategorien findet man im Abschnitt 3.4 von [Popescu].

□

(1.2) Die stabile Kategorie. (1) Für einen Morphismus $X \xrightarrow{p} Y$ in $R\text{-Mod}$ sind äquivalent:

(a) Es existiert ein $Q \in R\text{-Proj}$ und Morphismen $g \in \text{Hom}_R(X, Q)$, $h \in \text{Hom}_R(Q, Y)$ mit $p = hg$. Also: p faktorisiert über einen projektiven Modul.

(b) Ist $Z \xrightarrow{s} Y \rightarrow 0$ exakt in $R\text{-Mod}$, so gilt $p \in \text{Im Hom}_R(X, s)$, es existiert also $g \in \text{Hom}_R(X, Z)$ mit $p = sg$. D. h.: p läßt sich über jeden Epimorphismus liften.

Ist $Y \in R\text{-mod}$, so sind die Aussagen (a) und (b) ebenfalls zu (c), (d) äquivalent:

(c) Es existiert ein $Q \in R\text{-proj}$ und $g \in \text{Hom}_R(X, Q)$, $h \in \text{Hom}_R(Q, Y)$ mit $p = hg$.

(d) Ist $Z \xrightarrow{s} Y \rightarrow 0$ exakt mit $Z \in R\text{-mod}$, so existiert $g \in \text{Hom}_R(X, Z)$ mit $p = sg$.

Beweis: (a) \Rightarrow (b) Weil Q projektiv und s surjektiv ist, läßt sich h über s liften; damit läßt sich auch $p = hg$ über s liften.

(b) \Rightarrow (a): Es existiert stets ein projektiver Modul Q und eine exakte Folge $Q \xrightarrow{h} Y \rightarrow 0$; nach (b) läßt sich p über h liften.

Nun gelte $Y \in R\text{-mod}$.

(b) \Rightarrow (d) ist klar.

(c) \Rightarrow (a) Hierzu muß man nur $R\text{-proj} \subset R\text{-Proj}$ wissen: Ist $Q \in R\text{-proj}$, so existiert eine exakte Folge $R^n \xrightarrow{h} Q \rightarrow 0$; diese spaltet auf, da Q projektiv in $R\text{-mod}$ ist. Q ist also direkter Summand von R^n und damit projektiv in $R\text{-Mod}$.

(d) \Rightarrow (c) Da Y endlich erzeugt ist, gibt es eine exakte Folge $R^n \xrightarrow{h} Y \rightarrow 0$; es ist $R^n \in R\text{-proj}$, und aus (d) folgt (c).

(2) Sind $X, Y \in R\text{-Mod}$, so bezeichnen wir die Menge aller Morphismen $X \xrightarrow{p} Y$, die die äquivalenten Bedingungen aus (1) erfüllen, mit $P(X, Y)$.

Ist $P \xrightarrow{\psi} Y \rightarrow 0$ exakt mit einem $P \in R\text{-Proj}$, so gilt also

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \{p \in \text{Hom}_R(X, Y) \mid \text{es gibt } g \in \text{Hom}_R(X, P) \text{ mit } p = \psi g\} \\ &= \text{Im Hom}_R(X, \psi). \end{aligned}$$

(3) P ist ein zweiseitiges Ideal in der additiven Kategorie $R\text{-Mod}$.

Beweis: Seien $p_1, p_2 \in P(X, Y)$. Die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & Y \\ & \searrow g_1 & \nearrow h_1 \\ & P_1 & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_2} & Y \\ & \searrow g_2 & \nearrow h_2 \\ & P_2 & \end{array}$$

liefern

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1+p_2} & Y \\ & \searrow \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} & \nearrow \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ & P_1 \oplus P_2 & \end{array}$$

Sind dabei P_1, P_2 projektive Moduln, so ist auch $P_1 \oplus P_2$ projektiv. Also: $p_1 + p_2 \in P(X, Y)$.

Die Beziehungen $P(X, Y) \circ \text{Hom}_R(X', X) \subset P(X', Y)$ und $\text{Hom}_R(Y, Y') \circ P(X, Y) \subset P(X, Y')$ sind klar.

(4) Man kann also $\underline{R\text{-Mod}} := (R\text{-Mod})/P$ definieren. $\underline{R\text{-Mod}}$ hat dann dieselben Objekte wie $R\text{-Mod}$ und die Morphismenmengen sind für $X, Y \in R\text{-Mod}$ gegeben durch

$$\underline{\text{Hom}}_R(X, Y) = \text{Hom}_R(X, Y)/P(X, Y).$$

Das Bild eines Morphismus $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ bezeichnen wir mit \underline{f} . Die Verknüpfung von Morphismen $\underline{f}, \underline{g}$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ ist durch

$$\underline{f} \circ \underline{g} := \underline{f \circ g}$$

erklärt.

Es ist $\underline{R\text{-Mod}}$ eine additive Kategorie, und wir können $\underline{\text{Hom}}_R$ auffassen als additiven Bifunktor

$$\underline{\text{Hom}}_R : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$$

wie auch als additiven Bifunktor

$$\underline{\text{Hom}}_R : \underline{R\text{-Mod}} \times \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \text{Ab}$$

$\underline{R\text{-mod}}$ bezeichnet die von den Objekten aus $R\text{-mod}$ in $\underline{R\text{-Mod}}$ erzeugte volle Unterkategorie.

(5) In völlig analoger Weise erklärt man natürlich, ausgehend von $\text{Mod-}R$, die Kategorien $\underline{\text{Mod-}R}$ und $\underline{\text{mod-}R}$.

(6) Offenbar ist $\underline{R\text{-Mod}}$ durch die folgende universelle Eigenschaft gekennzeichnet: *Ist \mathcal{C} eine additive Kategorie und $F : R\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{C}$ ein additiver Funktor mit $F(P) = 0$ für jedes $P \in R\text{-Proj}$, so existiert ein eindeutig bestimmter Funktor*

$$\underline{F} : \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \mathcal{C} \text{ mit}$$

$$\underline{F}(M) = F(M) \text{ für alle } M \in R\text{-Mod und}$$

$$\underline{F}(\underline{f}) = F(f) \text{ für alle } f \in \text{Hom}_R(M, N).$$

\underline{F} ist additiv.

Die Kategorien $\underline{R\text{-mod}}$, $\underline{\text{Mod-}R}$ und $\underline{\text{mod-}R}$ haben analoge Eigenschaften.

(7) Nach (6) sind also für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Bifunktoren

$$\text{Ext}_R^n : \underline{R\text{-Mod}} \times R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab} \text{ und } \text{Tor}_n^R : \underline{\text{Mod-}R} \times \underline{R\text{-Mod}} \rightarrow \text{Ab}$$

erklärt. (Ein Bifunktor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ist nichts anderes als ein Funktor von \mathcal{A} in die Kategorie der Funktoren von \mathcal{B} nach \mathcal{C}). \square

(1.3) Satz: *Es seien $X, Y \in R\text{-Mod}$. Die Abbildung*

$$\underline{\text{Hom}}_R(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Ext}_R^1(Y, -), \text{Ext}_R^1(X, -))$$

mit

$$\underline{f} \longmapsto \text{Ext}_R^1(f, -)$$

ist ein in X und Y natürlicher Isomorphismus zwischen $\underline{\text{Hom}}_R(X, Y)$ und der Gruppe $\text{Hom}(\text{Ext}_R^1(Y, -), \text{Ext}_R^1(X, -))$ aller natürlichen Transformationen von $\text{Ext}_R^1(Y, -)$ nach $\text{Ext}_R^1(X, -)$.

Beweis: Wähle eine exakte Folge

$$\eta: 0 \longrightarrow K \xrightarrow{\phi} P \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow 0$$

mit einem projektiven Modul P . Dann ist

$$\text{Hom}_R(P, -) \xrightarrow{\text{Hom}_R(\phi, -)} \text{Hom}_R(K, -) \xrightarrow{\rho} \text{Ext}_R^1(Y, -) \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in der Kategorie $[R\text{-Mod}, \text{Ab}]$ der kovarianten, additiven Funktoren von $R\text{-Mod}$ nach Ab , und man erhält in Ab das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Ext}_R^1(Y, -), \text{Ext}_R^1(X, -)) & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Hom}_R(K, -), \text{Ext}_R^1(X, -)) & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Hom}_R(P, -), \text{Ext}_R^1(X, -)) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & \text{Ext}_R^1(X, K) & \xrightarrow{\text{Ext}_R^1(X, \phi)} & \text{Ext}_R^1(X, P) \end{array}$$

Die obere Zeile ist exakt; die Isomorphismen kommen aus dem Yoneda-Lemma (vgl. (4.1)(5)), und die Kommutativität des Diagramms ist gerade die Natürlichkeit des Yoneda-Isomorphismus.

Aus η entsteht die exakte Folge

$$\text{Hom}_R(X, P) \xrightarrow{\text{Hom}_R(X, \psi)} \text{Hom}_R(X, Y) \xrightarrow{\nu} \text{Ext}_R^1(X, K) \xrightarrow{\text{Ext}_R^1(X, \phi)} \text{Ext}_R^1(X, P),$$

also

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{Ext}_R^1(Y, -), \text{Ext}_R^1(X, -)) &\cong \text{Ker } \text{Ext}_R^1(X, \phi) \\ &\cong \text{Coker } \text{Hom}_R(X, \psi) \\ &= \text{Hom}_R(X, Y) / \text{Im } \text{Hom}_R(X, \psi) \\ &= \underline{\text{Hom}}_R(X, Y). \end{aligned}$$

Es sei nun $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$; ich suche das Bild der natürlichen Transformation $\text{Ext}_R^1(f, -) \in \text{Hom}(\text{Ext}_R^1(Y, -), \text{Ext}_R^1(X, -))$ unter diesem Isomorphismus in $\underline{\text{Hom}}_R(X, Y)$.

In $\text{Hom}(\text{Hom}_R(K, -), \text{Ext}_R^1(X, -))$ erhalten wir das Element $\text{Ext}_R^1(f, -) \circ \rho$, das durch den Yoneda-Isomorphismus auf

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(f, K)(\rho_K(1_K)) &= \text{Ext}_R^1(f, K)(\text{Ext}_R^1(X, 1_K)([\eta])) \\ &= \text{Ext}_R^1(f, K)([\eta]) \\ &= \nu(f) \end{aligned}$$

abgebildet wird (ich bezeichne das Bild einer exakten Folge μ in der entsprechenden Ext-Gruppe mit $[\mu]$). Es ist damit \underline{f} das Bild von $\text{Ext}_R^1(f, -)$ unter dem betrachteten Isomorphismus, und er hat somit die in der Behauptung angegebene Gestalt. Mit dieser Information läßt sich die Natürlichkeit des Isomorphismus leicht nachrechnen. \square

Insbesondere ist also jede natürliche Transformation

$$t : \text{Ext}_R^1(Y, -) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(X, -)$$

von der Form

$$t = \text{Ext}_R^1(f, -)$$

mit einem $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$.

Wir sehen, daß sich $(\underline{R}\text{-Mod})^{\text{op}}$ und $(\underline{R}\text{-mod})^{\text{op}}$ als volle Unterkategorien der abelschen Kategorie $[R\text{-Mod}, \text{Ab}]$ aller additiven Funktoren $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$ auffassen lassen.

In [HiltRees] sind die Mono-, Epi- und Isomorphismen zwischen Ext-Funktoren beschrieben; mit diesen Ergebnissen könnte man die folgende Aussage leicht einsehen. Ich möchte sie aber elementar beweisen:

(1.4) Satz: *$X, Y \in R\text{-Mod}$ sind genau dann in $R\text{-Mod}$ isomorph, wenn projektive Moduln $P, Q \in R\text{-Mod}$ existieren, so daß $X \oplus P$ und $Y \oplus Q$ isomorph in $R\text{-Mod}$ sind. Sind $X, Y \in R\text{-mod}$, so können P, Q aus $R\text{-mod}$ gewählt werden.*

Beweis: " \Leftarrow " Zu zeigen genügt offenbar, daß X und $X \oplus P$ in $R\text{-Mod}$ isomorph sind. Es ist $(1_X, 0) \circ \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = 1_X$ und $1_{X \oplus P} - \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} \circ (1_X, 0) = 0 \oplus 1_P \in P(X \oplus P, X \oplus P)$, denn

$$\begin{array}{ccc} X \oplus P & \xrightarrow{0 \oplus 1_P} & X \oplus P \\ & \searrow (0, 1_P) \quad \nearrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1_P \end{pmatrix} & \\ & P & \end{array}$$

kommutiert. Also ist die Restklasse von $\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\text{Hom}_R(X, X \oplus P)$ ein Isomorphismus zwischen X und $X \oplus P$ in $R\text{-Mod}$.

" \Rightarrow " Es existieren $\alpha \in \text{Hom}_R(X, Y)$, $\beta \in \text{Hom}_R(Y, X)$ mit $1_X - \beta\alpha \in P(X, X)$ und $1_Y - \alpha\beta \in P(Y, Y)$.

Wähle eine exakte Folge $Q \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0$ mit einem $Q \in R\text{-Proj}$. Dann existiert

$g \in \text{Hom}_R(X, Q)$ mit $1_X - \beta\alpha = fg$, also $1_X = (\beta, f) \circ \begin{pmatrix} \alpha \\ g \end{pmatrix}$, d. h. es gibt eine exakte, aufspaltende Folge

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ g \end{pmatrix}} Y \oplus Q \xrightarrow{(s, t)} E \longrightarrow 0.$$

Es existiert also ein Isomorphismus $\begin{pmatrix} \alpha & u \\ g & v \end{pmatrix} : X \oplus E \longrightarrow Y \oplus Q$ mit Umkehrung $\begin{pmatrix} \beta & f \\ s & t \end{pmatrix}$. Man erhält die exakte aufspaltenden Folge

$$(*) \quad 0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ t \end{pmatrix}} X \oplus E \xrightarrow{(\alpha, u)} Y \longrightarrow 0.$$

Zu zeigen ist noch, daß E projektiv ist. Wähle dazu eine exakte Folge $P \xrightarrow{\lambda} E \longrightarrow 0$ mit einem projektiven Modul P . Weil f surjektiv ist, gilt wegen der Exaktheit von $(*)$: $X \subset \text{Ker}(\alpha, u)$, also $\alpha(X) \subset u(E)$, und damit muß u surjektiv sein. Also ist $P \xrightarrow{u\lambda} Y$ surjektiv, und wegen $1_Y - \alpha\beta \in \text{P}(Y, Y)$ existiert $Y \xrightarrow{\chi} P$ mit $u\lambda\chi = 1_Y - \alpha\beta$. Wegen $\alpha\beta + us = 1_Y$ folgt $u(\lambda\chi - s) = 0$, nach $(*)$ existiert also $Y \xrightarrow{q} Q$ mit

$$(1) \quad \lambda\chi - s = tq.$$

Weil Q projektiv und λ surjektiv ist, läßt sich t über λ liften, es existiert also $Q \xrightarrow{\mu} P$ mit

$$(2) \quad \lambda\mu = t.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda(\chi u - \mu q u + \mu v) &\stackrel{(2)}{=} (\lambda\chi - tq)u + tv \\ &\stackrel{(1)}{=} su + tv \\ &= 1_E. \end{aligned}$$

Also ist λ ein aufspaltender Epimorphismus und E ist projektiv mit $X \oplus E \cong Y \oplus Q$. Sind $X, Y \in R\text{-mod}$, so kann Q endlich erzeugt gewählt werden. Es ist dann auch E endlich erzeugt. Endlich erzeugte projektive Moduln sind aber endlich präsentiert (es existiert $n \in \mathbb{N}$ und eine in $R\text{-Mod}$ exakte Folge $0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$; diese spaltet auf, da Q projektiv ist, also ist K direkter Summand von R^n , damit ein homomorphes Bild von R^n und somit endlich erzeugt). \square

(1.5) Der Funktor Tr. (1) Es sei

$$\phi : P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $M \in R\text{-mod}$, d.h. ϕ sei eine exakte Folge mit $P_0, P_1 \in R\text{-proj}$. Definiere

$$\text{Tr}(M; \phi) := \text{Coker}(P_0^* \xrightarrow{\phi_1^*} P_1^*).$$

(Dabei ist $*$: $R\text{-Mod} \rightarrow \text{Mod-}R$ der additive, kontravariante und linksexakte Funktor $\text{Hom}_R(-, R)$.) Ist P endlich erzeugt und projektiv, so ist auch P^* endlich erzeugt und projektiv, denn aus $P \oplus Q \cong R^n$ folgt $P^* \oplus Q^* \cong (R^*)^n \cong R^n$. Also ist $\text{Tr}(M; \phi) \in \text{mod-}R$.

(2) Ist $N \in R\text{-mod}$ ein weiterer Modul mit projektiver Auflösung

$$\psi : Q_1 \xrightarrow{\psi_1} Q_0 \xrightarrow{\psi_0} N \longrightarrow 0$$

und ist $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, so erhält man aus der Projektivität von P_0 und P_1 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow h & & \downarrow g & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und daher existiert $u \in \text{Hom}_R(\text{Tr}(N; \psi), \text{Tr}(M; \phi))$, so daß

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^* & \longrightarrow & Q_1^* & \longrightarrow & \text{Tr}(N; \psi) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g^* & & \downarrow h^* & & \downarrow u & & \\ P_0^* & \longrightarrow & P_1^* & \longrightarrow & \text{Tr}(M; \phi) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert. Dabei hängt u von der Wahl von g und h ab; die Klasse

$$\underline{u} \in \underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr}(N, \psi), \text{Tr}(M, \phi))$$

ist davon jedoch unabhängig: Sei auch

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow h' & & \downarrow g' & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativ und sei $u' \in \text{Hom}_R(\text{Tr}(N; \psi), \text{Tr}(M; \phi))$ der induzierte Morphismus. Dann kommutiert auch

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0 & \xrightarrow{\phi_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow h-h' & & \downarrow g-g' & & \downarrow 0 & & \\ Q_1 & \xrightarrow{\psi_1} & Q_0 & \xrightarrow{\psi_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da P_0 projektiv ist und weil $\psi_0(g - g') = 0\phi_0 = 0$ gilt, existiert dann $P_0 \xrightarrow{k} Q_1$ mit $\psi_1 k = g - g'$. In $\text{mod-}R$ ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} Q_0^* & \longrightarrow & Q_1^* & \longrightarrow & \text{Tr}(N; \psi) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow g^*-g'^* & \nearrow k^* & \downarrow h^*-h'^* & & \downarrow u-u' & & \\ P_0^* & \longrightarrow & P_1^* & \xrightarrow{t} & \text{Tr}(M; \phi) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Das Homotopielemma (vgl. [JensLenz], Lemma B.1; man macht sich leicht klar, daß es auch noch in dieser etwas allgemeineren Situation gilt) liefert dann $\text{Tr}(N, \psi) \xrightarrow{l} P_1^*$ mit $tl = u - u'$; da auch P_1^* projektiv ist (an dieser Stelle wird gebraucht, daß wir in $R\text{-mod}$ arbeiten), faktorisiert $u - u'$ also über einen projektiven Modul und es folgt $\underline{u} = \underline{u}'$. Dieses Element aus $\underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr}(N; \psi), \text{Tr}(M; \phi))$ bezeichnen wir mit $\text{Tr}(f; \phi, \psi)$. Offenbar gilt dann

$$\text{Tr}(1_M; \phi, \phi) = \underline{1_{\text{Tr}(M; \phi)}},$$

für $f, h \in \text{Hom}_R(M, N)$:

$$\text{Tr}(f + h; \phi, \psi) = \text{Tr}(f; \phi, \psi) + \text{Tr}(h; \phi, \psi)$$

und, falls zusätzlich $\chi : S_1 \xrightarrow{\chi_1} S_0 \xrightarrow{\chi_0} L \longrightarrow 0$ eine projektive Auflösung in $R\text{-mod}$ und $g \in \text{Hom}_R(N, L)$ ist:

$$\text{Tr}(gf; \phi, \chi) = \text{Tr}(f; \phi, \psi) \circ \text{Tr}(g; \psi, \chi).$$

Es sei $p \in P(M, N)$, $p = uv$ mit $v \in \text{Hom}_R(M, P)$ und $u \in \text{Hom}_R(P, N)$ und $P \in R\text{-proj.}$ Es ist

$$\chi : 0 \longrightarrow P \xrightarrow{1_P} P \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von P ; es folgt $\text{Tr}(P; \chi) = 0$ und daher in $\underline{\text{mod-}R}$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(p; \phi, \psi) &= \text{Tr}(v; \phi, \chi) \circ \underline{1_{\text{Tr}(P; \chi)}} \circ \text{Tr}(u; \chi, \psi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deswegen kann man

$$\text{Tr}(\underline{f}; \phi, \psi) := \text{Tr}(f; \phi, \psi) \text{ für } f \in \text{Hom}_R(M, N)$$

definieren.

(3) Seien ϕ_M, ψ_M projektive Auflösungen von $M \in R\text{-mod}$ und ϕ_N, ψ_N solche von $N \in R\text{-mod}$; sei $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Nach (2) kommutiert das folgende Diagramm in $\underline{\text{mod-}R}$:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \text{Tr}(N; \phi_N) & \xrightarrow[\sim]{\text{Tr}(1_N; \psi_N, \phi_N)} & \text{Tr}(N; \psi_N) \\ \downarrow \text{Tr}(f; \phi_M, \phi_N) & & \downarrow \text{Tr}(f; \psi_M, \psi_N) \\ \text{Tr}(M; \phi_M) & \xrightarrow[\sim]{\text{Tr}(1_M; \psi_M, \phi_M)} & \text{Tr}(M; \psi_M) \end{array}$$

Wählen wir nun zu jedem $M \in R\text{-mod}$ eine feste projektive Auflösung ϕ_M und bezeichnen diese globale Auswahl mit Φ , so ergibt die Festsetzung

$$\text{Tr}_\Phi(M) := \text{Tr}(M; \phi_M) \text{ für } M \in R\text{-mod und}$$

$$\text{Tr}_\Phi(f) := \text{Tr}(f; \phi_M, \phi_N) \text{ für } f \in \text{Hom}_R(M, N)$$

einen additiven, kontravarianten Funktor

$$\text{Tr}_\Phi : R\text{-mod} \longrightarrow \underline{\text{mod-}R}.$$

Ebenso können wir diesen Funktor auffassen als

$$\text{Tr}_\Phi : \underline{R\text{-mod}} \longrightarrow \underline{\text{mod-}R}.$$

Trifft man eine andere globale Wahl Ψ von projektiven Auflösungen, so erhält man nach (*) isomorphe Funktoren; bezeichne diesen natürlichen Isomorphismus mit

$$\tau^{\Phi, \Psi} : \text{Tr}_\Phi \xrightarrow{\sim} \text{Tr}_\Psi.$$

(4) Alle Konstruktionen aus (1)-(3) lassen sich natürlich auch in $\text{mod-}R$ durchführen (zur Unterscheidung erhalten sie stets eine Tilde); insbesondere ist

$$\widetilde{\text{Tr}}(f; \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$$

erklärt, falls f ein Morphismus in $\text{mod-}R$ ist und $\tilde{\phi}$ eine projektive Auflösung seiner Quelle und $\tilde{\psi}$ eine seines Zieles ist.

(5) Ist $M \in R\text{-Mod}$, so liefert der Einsetzungshomomorphismus

$$\lambda_M : M \longrightarrow M^{**}$$

eine natürliche Transformation

$$\lambda : 1_{R\text{-Mod}} \longrightarrow -^{**}.$$

Da $1_{R\text{-Mod}}$ und $-^{**}$ additive Funktoren sind und weil $\lambda_R : R \rightarrow R^{**}$ ein Isomorphismus ist, ist dann λ_P ein Isomorphismus für jeden endlich erzeugten projektiven Modul P .

(6) Es sei

$$\phi : P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung in $R\text{-mod}$. Dann ist

$$\phi^* : P_0^* \xrightarrow{\phi_1^*} P_1^* \longrightarrow \text{Tr}(M; \phi) \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung in $\text{mod-}R$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \phi : P_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \lambda_{P_1} \parallel & & \lambda_{P_0} \parallel & & & & \\ \phi^{**} : P_1^{**} & \xrightarrow{\phi_1^{**}} & P_0^{**} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(M; \phi); \phi^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

läßt sich durch einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$v^\phi : M \xrightarrow{\sim} \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(M; \phi); \phi^*)$$

in R -mod kommutativ ergänzen.

Es sei

$$\psi : Q_1 \xrightarrow{\psi_1} Q_0 \xrightarrow{\psi_0} N \longrightarrow 0$$

eine weitere projektive Auflösung in R -mod und $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Wie in (2) erhält man ein kommutativ-exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \\ Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

welches

$$\begin{array}{ccccccc} \psi^* : Q_0^* & \longrightarrow & Q_1^* & \longrightarrow & \text{Tr}(N; \psi) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u & & \\ \phi^* : P_0^* & \longrightarrow & P_1^* & \longrightarrow & \text{Tr}(M; \phi) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induziert. Dabei gilt

$$\underline{u} = \text{Tr}(f; \phi, \psi).$$

Wir erhalten so in R -mod das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow f & \searrow v^\phi & \\ & P_1^{**} & \longrightarrow & P_0^{**} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(M; \phi); \phi^*) & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \downarrow l & \\ Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \parallel & \downarrow & \parallel & \downarrow & \searrow v^\psi & \\ & Q_1^{**} & \longrightarrow & Q_0^{**} & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(N; \psi); \psi^*) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Hierbei ist l eine R -lineare Abbildung mit

$$\underline{l} = \widetilde{\text{Tr}}(u; \psi^*, \phi^*).$$

Die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[\sim]{v^\phi} & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(M; \phi); \phi^*) \\ \downarrow f & & \downarrow l \\ N & \xrightarrow[\sim]{v^\psi} & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(N; \psi); \psi^*) \end{array}$$

folgt mit einer spaßigen Diagrammjagd aus der Kommutativität der übrigen Quadrate im vorigen Diagramm sowie der Exaktheit seiner Zeilen. In R -mod liest sich dies so: Es kommutiert

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[\sim]{v^\phi} & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(M; \phi); \phi^*) \\ \downarrow \underline{f} & & \downarrow \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(f; \phi, \psi); \psi^*, \phi^*) \\ N & \xrightarrow[\sim]{v^\psi} & \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(N; \psi); \psi^*) \end{array}$$

(7) Es sei nun wieder Φ eine globale Auswahl von projektiven Auflösungen in $R\text{-mod}$ und $\tilde{\Phi}$ eine solche in $\text{mod-}R$.

$\text{Tr}_\Phi : \underline{R\text{-mod}} \rightarrow \underline{\text{mod-}R}$ und $\text{Tr}_{\tilde{\Phi}} : \underline{\text{mod-}R} \rightarrow \underline{R\text{-mod}}$ sind Dualitäten: es gilt

$$\widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Phi}} \circ \text{Tr}_\Phi \cong 1_{\underline{R\text{-mod}}} \quad \text{und} \quad \text{Tr}_\Phi \circ \widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Phi}} \cong 1_{\underline{\text{mod-}R}}.$$

Beweis: Die zu $M \in R\text{-mod}$ in Φ gehörige Auflösung sei mit ϕ_M und die zu $L \in \text{mod-}R$ in $\tilde{\Phi}$ gehörige mit $\tilde{\phi}_L$ bezeichnet. Die kommutativen Diagramme (3)(*) und (6)(*) zeigen, daß

$$\begin{aligned} \rho^{\Phi, \tilde{\Phi}} : 1_{\underline{R\text{-mod}}} &\rightarrow \widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Phi}} \circ \text{Tr}_\Phi \quad \text{mit} \\ \rho_M^{\Phi, \tilde{\Phi}} &= \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Phi(M)}; \tilde{\phi}_{\text{Tr}_\Phi(M)}, \phi_M^*) \circ \underline{v^{\phi_M}} \quad \text{für alle } M \in \underline{R\text{-mod}} \end{aligned}$$

ein natürlicher Isomorphismus ist. Eine Isomorphie

$$\tilde{\rho}^{\Phi, \tilde{\Phi}} : 1_{\underline{\text{mod-}R}} \rightarrow \text{Tr}_\Phi \circ \widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Phi}}$$

kann man genauso konstruieren.

(8) Der in (7) beschriebene natürliche Isomorphismus $\rho^{\Phi, \tilde{\Phi}}$ hängt nicht von den Auswahlen Φ und $\tilde{\Phi}$ von projektiven Auflösungen ab. Genauer: ist auch Ψ eine solche Auswahl in $R\text{-mod}$ und $\tilde{\Psi}$ eine in $\text{mod-}R$, so kommutiert folgendes Diagramm von natürlichen Transformationen:

$$\begin{array}{ccc} & 1_{\underline{R\text{-mod}}} & \\ \rho^{\Phi, \tilde{\Phi}} \swarrow & & \searrow \rho^{\Psi, \tilde{\Psi}} \\ \widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Phi}} \circ \text{Tr}_\Phi & \xrightarrow{\tilde{\tau}^{\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}}, \tau^{\Psi, \Phi}} & \widetilde{\text{Tr}}_{\tilde{\Psi}} \circ \text{Tr}_\Psi \end{array}$$

Analoges gilt für $\tilde{\rho}$.

Beweis: Es sei $M \in R\text{-mod}$. Die Kommutativität von (6)(*), angewandt auf $f = 1_M$, $\phi = \phi_M$ und $\psi = \psi_M$, liefert

$$\underline{v^{\psi_M}} = \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(1_M; \phi_M, \psi_M); \psi_M^*, \phi_M^*) \circ \underline{v^{\phi_M}}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \rho^{\Psi, \tilde{\Psi}}(M) &= \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Psi(M)}; \tilde{\psi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}, \psi_M^*) \circ \underline{v^{\psi_M}} \\ &= \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Psi(M)}; \tilde{\psi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}, \psi_M^*) \circ \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(1_M; \phi_M, \psi_M); \psi_M^*, \phi_M^*) \circ \underline{v^{\phi_M}} \\ &= \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Psi(M)}; \tilde{\psi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}, \tilde{\phi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}) \\ &\quad \circ \widetilde{\text{Tr}}(\text{Tr}(1_M; \phi_M, \psi_M); \tilde{\phi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}, \tilde{\phi}_{\text{Tr}_\Phi(M)}) \\ &\quad \circ \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Phi(M)}; \tilde{\phi}_{\text{Tr}_\Phi(M)}, \phi_M^*) \circ \underline{v^{\phi_M}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \widetilde{\text{Tr}}(1_{\text{Tr}_\Psi(M)}; \widetilde{\psi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}, \widetilde{\phi}_{\text{Tr}_\Psi(M)}) \circ \widetilde{\text{Tr}}_\Phi(\text{Tr}(1_M; \phi_M, \psi_M)) \circ \rho_M^{\Phi, \widetilde{\Phi}} \\
&= \widetilde{\tau}_{\text{Tr}_\Psi(M)}^{\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}} \circ \widetilde{\text{Tr}}_\Phi(\tau_M^{\Psi, \Phi}) \circ \rho_M^{\Phi, \widetilde{\Phi}} \\
&= (\widetilde{\tau}^{\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}} \cdot \tau^{\Psi, \Phi})_M \circ \rho_M^{\Phi, \widetilde{\Phi}}.
\end{aligned}$$

(9) Nach (8) und (3) ist es gerechtfertigt, eine Auswahl Φ von projektiven Auflösungen in $R\text{-mod}$ festzuhalten und in Zukunft Tr statt Tr_Φ zu schreiben.

Im folgenden ist wichtig, daß für $X \in R\text{-mod}$ die Abbildung

$$\text{Tr} : \underline{\text{End}}_R(X) \longrightarrow \underline{\text{End}}_R(\text{Tr } X)^{\text{op}}$$

ein Ringisomorphismus ist. □

§2 Auslander-Reiten-Folgen

Ich halte mich hier an die grundlegende Arbeit [AusReit] von M. Auslander und I. Reiten.

(2.1) Definition: Es sei \mathcal{C} ein beliebige Kategorie.

- (1) Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in \mathcal{C} heißt *links-minimal*, falls jeder Endomorphismus $B \xrightarrow{h} B$ mit $hf = f$ notwendig ein Isomorphismus ist.
- (2) $A \xrightarrow{f} B$ heißt *links-fast-aufspaltend*, falls f kein aufspaltender Monomorphismus ist und falls zu jedem Morphismus $A \xrightarrow{h} L$, der kein aufspaltender Monomorphismus ist, ein $B \xrightarrow{k} L$ mit $kf = h$ existiert.
- (3) $A \xrightarrow{f} B$ heißt *minimal links-fast-aufspaltend*, falls f links-minimal und links-fast-aufspaltend ist.
- (4) Ein Morphismus $B \xrightarrow{g} C$ in \mathcal{C} heißt *rechts-minimal*, falls jeder Endomorphismus $B \xrightarrow{h} B$ mit $gh = g$ notwendig ein Isomorphismus ist.
- (5) $B \xrightarrow{g} C$ heißt *rechts-fast-aufspaltend*, falls g kein aufspaltender Epimorphismus ist und falls zu jedem Morphismus $L \xrightarrow{h} C$, der kein aufspaltender Epimorphismus ist, ein $L \xrightarrow{k} B$ mit $gk = h$ existiert.
- (6) $B \xrightarrow{g} C$ heißt *minimal rechts-fast-aufspaltend*, falls g rechts-minimal und rechts-fast-aufspaltend ist. □

Offenbar sind die in (4), (5) und (6) definierten Begriffe dual zu denen aus (1), (2) bzw. (3).

(2.2) Lemma: *Es sei \mathcal{C} eine additive Kategorie, es seien f und g Morphismen in \mathcal{C} .*

- (1) *Ist $A \xrightarrow{f} B$ links-fast-aufspaltend, so ist $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ ein lokaler Ring.*
- (2) *Ist $B \xrightarrow{g} C$ rechts-fast-aufspaltend, so ist $\text{End}_{\mathcal{C}}(C)$ ein lokaler Ring.*

Beweis: (1) Es ist $I := \text{Im Hom}_{\mathcal{C}}(f, A)$ ein Linksideal in $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$; I enthält genau diejenigen Elemente aus $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$, die kein Linksinverses besitzen: Sei $A \xrightarrow{h} A$ ein solches. Dann ist h kein aufspaltender Monomorphismus, also existiert $B \xrightarrow{k} A$ mit $kf = h$, d. h. $h \in I$. Läge umgekehrt ein Element in I , das ein Linksinverses besitzt, so wäre auch $1_C \in I$, da I ein Linksideal ist. Dies würde aber bedeuten, daß f ein Linksinverses besitzt, also ein aufspaltender Monomorphismus ist, was nicht stimmt. Also ist I das einzige maximale Linksideal in $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ und damit ist dieser Ring lokal.

(2) ist dual zu (1). □

(2.3) Satz: *Es sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie und*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

sei eine exakte Folge in \mathcal{C} . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) *f ist links-fast-aufspaltend und g ist rechts-fast-aufspaltend.*
- (2) *$\text{End}_{\mathcal{C}}(C)$ ist lokal und f ist links-fast-aufspaltend.*
- (3) *f ist minimal links-fast-aufspaltend.*
- (4) *$\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ ist lokal und g ist rechts-fast-aufspaltend.*
- (5) *g ist minimal rechts-fast-aufspaltend.*

Beweis: (1) \Rightarrow (2) und (1) \Rightarrow (4) folgen direkt aus dem Lemma.

(2) \Rightarrow (3): Es sei $B \xrightarrow{h} B$ mit $hf = f$. Man erhält folgendes kommutativ-exakte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h & & \downarrow k \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ist k ein Isomorphismus, so ist nach dem Fünfer-Lemma auch h einer, und das ist ja zu zeigen.

Sei nun also k kein Isomorphismus. Weil $\text{End}_{\mathcal{C}}(C)$ lokal ist, ist dann $1_C - k$ ein Isomorphismus; wegen $(1_B - h)f = f - fh = 0$ existiert $C \xrightarrow{r} B$ mit $rg = 1_C - k$. Es folgt

$$\begin{aligned} (1_C - k)g &= g - kg \\ &= g - gh \\ &= g(1_B - h) \\ &= grg, \end{aligned}$$

also

$$1_C - k = gr.$$

Da $1_C - k$ ein Isomorphismus ist, ist also g ein aufspaltender Epimorphismus. Das bedeutet, daß die Folge zerfällt, somit f ein aufspaltender Monomorphismus ist, was

aber der Definition von 'links-fast-aufspaltend' widerspricht.

(3) \Rightarrow (1) Es sei $L \xrightarrow{h} C$ kein aufspaltender Epimorphismus. Bilde das Pull-Back-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & X & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow k & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zerfällt η , so läßt sich h über g liften, und das wollen wir zeigen.

Zerfällt η nicht, so ist u kein aufspaltender Monomorphismus, und nach Voraussetzung (3) läßt sich u über f auf B fortsetzen, es existiert also $B \xrightarrow{r} X$ mit $rf = u$. Es ergibt sich ein kommutativ-exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow r & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & X & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow k & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Weil f links-minimal ist, ist dann kr und nach dem Fünfer-Lemma damit auch hj ein Isomorphismus. Also ist h ein aufspaltender Epimorphismus; das war aber von vornherein ausgeschlossen.

(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1) ist dual zu (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). □

(2.4) Definition: Es sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie. Eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in \mathcal{C} heißt *Auslander-Reiten-Folge* oder auch *fast-zerfallende Folge*, wenn sie die äquivalenten Bedingungen aus (2.3) erfüllt. □

In (6.1) findet man eine interessante Charakterisierung der Auslander-Reiten-Folgen in einer abelschen Krull-Schmidt Kategorie.

Eine wichtige Eigenschaft von Auslander-Reiten-Folgen ist die Tatsache, daß die Endterme einander bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen. Genauer:

(2.5) Satz: *Es sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie, es seien*

$$\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

und

$$\eta' : 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \longrightarrow 0$$

Auslander-Reiten-Folgen in \mathcal{C} . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $A \cong A'$
 (2) $C \cong C'$
 (3) $\eta \cong \eta'$

Beweis: (1) \Rightarrow (3): Wir nehmen ohne Einschränkung $A = A'$ an. Weil f links-fast-aufspaltend und f' kein aufspaltender Monomorphismus ist, existiert $B \xrightarrow{k} B'$ mit $kf = f'$; weil f' links-fast-aufspaltend und f kein aufspaltender Monomorphismus ist, existiert $B' \xrightarrow{l} B$ mit $lf' = f$. Wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \eta' : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow l & & \downarrow s \\
 \eta : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow k & & \downarrow r \\
 \eta' : 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Da f' linksminimal ist, ist lk und damit auch rs ein Isomorphismus; s ist also ein aufspaltender Monomorphismus und damit ein Isomorphismus, da $\text{End}_{\mathcal{C}}(C)$ lokal ist. Es muß dann auch l ein Isomorphismus sein: wir haben $\eta \cong \eta'$ gezeigt.

(2) \Rightarrow (3) ist dual zu (1) \Rightarrow (3).

(3) \Rightarrow (1) und (3) \Rightarrow (2) sind klar. □

Ist

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Folge in \mathcal{C} , so bezeichnet man die Isomorphieklasse von A mit τC und die von C mit $\tau^{-1}A$. τ ist die *Auslander-Reiten-Translation* der Kategorie \mathcal{C} .

§3 Beweis des Existenzsatzes

Hier ist wieder R ein beliebiger Ring. Ziel des Paragraphen ist der Satz (3.9): Zu jedem endlich präsentierten R -Linksmodul C mit lokalem Endomorphismenring existiert in $R\text{-Mod}$ eine Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

(Selbstverständlich gilt dasselbe dann auch für R -Rechtsmoduln durch Übergang zu R^{op} .)

Der Beweis ist im wesentlichen aus [Auslander] übernommen.

(3.1) Lemma: *Es seien $U, V \in R\text{-Mod}$. Die Abbildung*

$$U^* \otimes_R V \xrightarrow{\beta_{U,V}} \text{Hom}_R(U, V)$$

mit

$$\beta_{U,V}(f \otimes v)(u) = f(u) \cdot v$$

für alle $u \in U$, $v \in V$ und $f \in U^$ ist ein in U und V natürlicher Homomorphismus abelscher Gruppen.*

In den beiden folgenden Situationen ist $\beta_{U,V}$ ein Isomorphismus:

(1) $U \in R\text{-proj}$ und $V \in R\text{-Mod}$ beliebig

(2) $U \in R\text{-mod}$ und $V \in R\text{-Proj}$.

Beweis: β ist wohldefiniert, da die Zuordnung $(f, v) \mapsto f(-) \cdot v$ offenbar R -bilinear ist. Die Natürlichkeit von $\beta_{U,V}$ kann man einfach nachrechnen.

(1) $\beta_{R,V}$ ist ein Isomorphismus, und da die Funktoren $-^* \otimes V$ und $\text{Hom}_R(-, V)$ additiv sind, ist dann auch $\beta_{U,V}$ ein Isomorphismus für jedes $U \in R\text{-proj}$.

(2) Nun gelte $U \in R\text{-mod}$. Da $\beta_{U,R}$ ein Isomorphismus ist und die Funktoren $U^* \otimes -$ und $\text{Hom}_R(U, -)$ mit beliebigen direkten Summen vertauschen (letzterer, weil U endlich präsentiert ist, vgl. [Bourbaki], §1.5, Prop.8), ergibt sich zunächst die Bijektivität von $\beta_{U,R(I)}$ für beliebige Indexmengen I und dann die Bijektivität von $\beta_{U,V}$ für alle $V \in R\text{-Proj}$. \square

(3.2) Lemma: *Es sei $C \in R\text{-mod}$ und $X \in R\text{-Mod}$. Man hat eine in C und X natürliche exakte Sequenz*

$$C^* \otimes X \xrightarrow{\beta_{C,X}} \text{Hom}_R(C, X) \xrightarrow{\gamma_{C,X}} \underline{\text{Hom}}_R(C, X) \longrightarrow 0$$

(dabei ist $\gamma_{C,X}$ der durch $\gamma_{C,X}(f) = \underline{f}$ für alle $f \in \text{Hom}_R(C, X)$ erklärte natürliche Epimorphismus). Mit anderen Worten: Es ist

$$\text{Im } \beta_{C,X} = P(C, X).$$

Beweis: Wähle eine exakte Sequenz $P \longrightarrow X \longrightarrow 0$ mit $P \in R\text{-Proj}$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C^* \otimes P & \longrightarrow & C^* \otimes X & \longrightarrow & 0 \\ \parallel \beta_{C,P} & & \downarrow \beta_{C,X} & & \\ \text{Hom}_R(C, P) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, X) & \xrightarrow{\gamma_{C,X}} & \underline{\text{Hom}}_R(C, X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist kommutativ und die Zeilen sind exakt: für die obere folgt dies aus der Rechtsexaktheit des Tensorierens, für die untere aus (1.2). Es folgt die Behauptung. \square

(3.3) Lemma: Seien $C \in R\text{-mod}$, $X \in R\text{-Mod}$. Man hat einen in C und X natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr} C, X) \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C,X}} \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, X).$$

Dabei wird Tor_1^R aufgefaßt als Funktor $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}R \times R\text{-mod} \rightarrow \mathrm{Ab}$ (vgl. (1.2)(7)) und Tr als Funktor $R\text{-mod} \rightarrow \underline{\mathrm{mod}}\text{-}R$.

Beweis: Es sei

$$P_1 \xrightarrow{\phi} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

die zur Definition von $\mathrm{Tr} C$ verwendete projektive Auflösung von C in $R\text{-mod}$. Wir erhalten das kommutativ-exakte Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C^* & \rightarrow & P_0^* & \xrightarrow{\phi^*} & P_1^* \rightarrow \mathrm{Tr} C \rightarrow 0 \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & & K & \\ & & & & \nearrow & \searrow & \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

und damit das folgende in $[R\text{-Mod}, \mathrm{Ab}]$:

$$(\#) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & 0 & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr} C, -) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & K \otimes - & \longrightarrow 0 \\ & & C^* \otimes - & \longrightarrow & P_0^* \otimes - & \longrightarrow & \\ & \downarrow \beta_{C,-} & & & \downarrow \beta_{P_0,-} & & \\ 0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(C, -) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0, -) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_1, -) \\ & & \downarrow \gamma_{C,-} & & & & \downarrow \beta_{P_1,-} \\ & & \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, -) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array} \quad \textcircled{1}$$

Das Teildiagramm $\textcircled{1}$ kommutiert, da selbiges nach $(*)$ für

$$\begin{array}{ccc} P_0^* \otimes - & \longrightarrow & K \otimes - \\ & \searrow \phi^* \otimes - & \downarrow \\ & & P_1^* \otimes - \end{array}$$

gilt und β eine natürliche Transformation ist.

Das Schlangenlemma (vgl. [Popescu] Cor. 11.9) liefert nach $(\#)$ den gewünschten Isomorphismus

$$\alpha_{C,-} : \operatorname{Tor}_1^R(\operatorname{Tr} C, -) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Hom}}_R(C, -).$$

Dieser ist natürlich in C , weil das gesamte Diagramm $(\#)$ durch ein $C \xrightarrow{f} C'$ in das zu C' gehörige abgebildet wird und weil der vom Schlangenlemma gelieferte Morphismus natürlich gewählt werden kann. \square

Ist S ein beliebiger Ring, so bezeichne ich die Kategorie der S - R -Bimoduln mit $S\text{-Mod-}R$.

(3.4) Lemma: *Es seien $X \in R\text{-Mod}$, $Y \in S\text{-Mod-}R$ und $Z \in S\text{-Mod}$. Es existiert ein in X, Y und Z natürlicher Homomorphismus abelscher Gruppen:*

$$\operatorname{Ext}_R^1(X, \operatorname{Hom}_S(Y, Z)) \xrightarrow{\delta_{X,Y,Z}} \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_1^R(Y, X), Z).$$

Ist Z injektiv, so ist $\delta_{X,Y,Z}$ ein Isomorphismus.

Beweis: Wähle eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit $P \in R\text{-Proj}$. Dann ist

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(Y, X) \longrightarrow Y \otimes_R K \longrightarrow Y \otimes_R P$$

exakt, und in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Hom}_R(P, \operatorname{Hom}_S(Y, Z)) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(K, \operatorname{Hom}_S(Y, Z)) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_R^1(X, \operatorname{Hom}_S(Y, Z)) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ \operatorname{Hom}_S(Y \otimes_R P, Z) & \xrightarrow{r} & \operatorname{Hom}_S(Y \otimes_R K, Z) & \xrightarrow{s} & \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_1^R(Y, X), Z) & & \end{array}$$

ist die obere Sequenz exakt; in der unteren gilt i. a. nur $sr = 0$. Es wird also ein eindeutiger Homomorphismus

$$\operatorname{Ext}_R^1(X, \operatorname{Hom}_S(Y, Z)) \xrightarrow{\delta_{X,Y,Z}} \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_1^R(Y, X), Z)$$

induziert, der das Diagramm kommutieren läßt.

Ist Z injektiv, so ist die untere Zeile im letzten Diagramm sogar exakt und s ist ein Epimorphismus. Es ist dann $\delta_{X,Y,Z}$ ein Isomorphismus.

Das obige Diagramm hätte man offenbar sofort in der Kategorie der Bifunktoren $S\text{-Mod-}R \times S\text{-Mod} \rightarrow \operatorname{Ab}$ aufschreiben können; deswegen ist die Natürlichkeit von δ in Y und Z klar.

Es sei nun $X \xrightarrow{\phi} X'$ ein Morphismus in $\operatorname{Mod-}R$ und

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

exakt mit $P' \in R\text{-Proj.}$ Es wird ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & X' \longrightarrow 0 \end{array}$$

induziert. Man erhält

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Hom}_R(K, \text{Hom}_S(Y, Z)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_R^1(X, \text{Hom}_S(Y, Z)) & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \nearrow \text{Hom}_R(\psi, \text{Hom}_S(Y, Z)) & \parallel & & \nearrow \text{Ext}_R^1(\phi, \text{Hom}_S(Y, Z)) & \downarrow \delta_{X, Y, Z} & \\ \text{Hom}_R(K', \text{Hom}_S(Y, Z)) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_R^1(X', \text{Hom}_S(Y, Z)) & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \\ \parallel & & \downarrow \delta_{X', Y, Z} & & & & \\ & \nearrow \text{Hom}_S(Y \otimes_R K, Z) & \parallel & & \nearrow \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, X), Z) & & \\ \text{Hom}_S(Y \otimes_R K', Z) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, X'), Z) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, \phi), Z) & & \\ \parallel & & \downarrow \text{Hom}_S(Y \otimes_R \psi, Z) & & \nearrow \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, \phi), Z) & & \\ & \nearrow \text{Hom}_S(Y \otimes_R K, Z) & \parallel & & \nearrow \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, X), Z) & & \\ \text{Hom}_S(Y \otimes_R K', Z) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, X'), Z) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(Y, \phi), Z) & & \end{array}$$

und hier kommutiert alles bis auf die rechte Seitenfläche. Durch Diagrammjagd folgt dann auch deren Kommutativität und damit die Natürlichkeit von δ in X . \square

(3.5) Lemma: Es sei $X \in R\text{-Mod}$, $C \in R\text{-mod}$. Setze $S := \text{End}_R(\text{Tr } C)$. Dann ist $\text{Tr } C \in S\text{-Mod-}R$, und es ist $\underline{\text{Hom}}_R(C, X)$ ein S -Linksmodul vermöge des Ringhomomorphismus

$$S \xrightarrow{\gamma} \underline{\text{End}}_R(\text{Tr } C) \xrightarrow[\sim]{\text{Tr}^{-1}} (\underline{\text{End}}_R(C))^{\text{op}}$$

(dabei ist $\gamma(f) := \underline{f}$ für $f \in S$.) Es existieren in X und $I \in S\text{-Inj}$ natürliche Isomorphismen

$$\text{Ext}_R^1(X, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, X), I).$$

Beweis: Die Isomorphismen

$$\text{Tor}_1^R(\text{Tr } C, X) \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C, X}} \underline{\text{Hom}}_R(C, X)$$

aus (3.3) sind natürlich in C und daher S -linear: Sei $f \in S$. Zu zeigen ist die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \text{Tor}_1^R(\text{Tr } C, X) & \xrightarrow{\alpha_{C, X}} & \underline{\text{Hom}}_R(C, X) \\ \downarrow \text{Tor}_1^R(f, X) & & \downarrow \underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr}^{-1}(\underline{f}), X) \\ \text{Tor}_1^R(\text{Tr } C, X) & \xrightarrow{\alpha_{C, X}} & \underline{\text{Hom}}_R(C, X) \end{array}$$

Sei $g \in \text{End}_R(C)$ mit $\underline{g} = \text{Tr}^{-1}(\underline{f})$. Dann ist

$$\underline{\text{Hom}}_R(g, X) = \underline{\text{Hom}}_R(\text{Tr}^{-1}(\underline{f}), X) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr} g, X) = \mathrm{Tor}_1^R(f, X)$$

und das Diagramm kommutiert, weil α natürlich in C ist. Verwendet man nun (3.4), so erhält man Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_R^1(X, \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tr} C, I)) &\cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr} C, X), I) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(\underline{\mathrm{Hom}}_R(C, X), I). \end{aligned}$$

Die Natürlichkeit in I ist klar; für die Natürlichkeit in X muß man sich überlegen, daß für jede R -lineare Abbildung $X \xrightarrow{\phi} X'$ die Abbildungen $\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tr} C, \phi)$ und $\underline{\mathrm{Hom}}_R(C, \phi)$ S -linear sind. Dies ist aber einfach; man benutzt, daß Tor_1^R und $\underline{\mathrm{Hom}}_R$ Bifunktoren sind. \square

(3.6) Lemma: *Es sei S ein beliebiger Ring und $U \in \mathrm{Mod}\text{-}R$, $V \in S\text{-Mod}\text{-}R$ und $W \in S\text{-Mod}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho_{U,V,W} : U \otimes_R \mathrm{Hom}_S(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(U, V), W) \text{ mit} \\ \rho_{U,V,W}(u \otimes f)(g) &= f(g(u)) \end{aligned}$$

für alle $u \in U$, $f \in \mathrm{Hom}_S(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}_R(U, V)$ ist ein in U , V und W natürlicher Homomorphismus. Ist $U \in \mathrm{proj}\text{-}R$, so ist $\rho_{U,V,W}$ ein Isomorphismus.

Beweis: Dies kann man einfach nachrechnen. Ist $U \in \mathrm{proj}\text{-}R$, so schließt man wieder wie in (3.1). \square

(3.7) Lemma: *Es sei $U \in \mathrm{mod}\text{-}R$, $S = \mathrm{End}_R(U)$ und $I \in S\text{-Inj}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma_I : U \otimes_R \mathrm{Hom}_S(U, I) &\xrightarrow{\sim} I \quad \text{mit} \\ u \otimes f &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

ist ein in I natürlicher Isomorphismus von S -Linksmoduln.

Beweis: Es existiert eine exakte Folge

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

mit $P_0, P_1 \in \mathrm{proj}\text{-}R$. Es ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(U, I) & \longrightarrow & P_0 \otimes_R \mathrm{Hom}_S(U, I) & \longrightarrow & U \otimes_R \mathrm{Hom}_S(U, I) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel \rho_{P_1, U, I} & & \parallel \rho_{P_0, U, I} & & \downarrow \rho_{U, U, I} & & \\ \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(P_1, U), I) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(P_0, U), I) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(U, U), I) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Beide Zeilen sind exakt: die obere, weil das Tensorieren rechtsexakt ist, und die untere, weil I ein injektiver S -Modul ist. Es folgt: $\rho_{U, U, I}$ ist ein Isomorphismus. Weiter hat man

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(U, U), I) \cong \mathrm{Hom}_S(S, I) \cong I$$

Verfolgt man diese Isomorphismen elementweise, so erhält man gerade die in der Behauptung angegebene Zuordnungsvorschrift. Die Natürlichkeit von ρ folgt dann aus dieser. \square

(3.8) Lemma: Sei $U \in \text{mod-}R$, $S = \text{End}_R(U)$. Der Funktor

$$\text{Hom}_S(U, -) : S\text{-Inj} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

ist voll-treu.

Beweis: Seien $I_1, I_2 \in S\text{-Inj}$. Man hat die folgende Kette von Homomorphismen abelscher Gruppen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_S(I_1, I_2) & \xrightarrow{\text{Hom}_S(U, -)} & \text{Hom}_R(\text{Hom}_S(U, I_1), \text{Hom}_S(U, I_2)) \\ & & \sim \downarrow \Phi \\ & & \text{Hom}_S(U \otimes_R \text{Hom}_S(U, I_1), I_2) \\ & & \sim \downarrow \text{Hom}_S(\sigma_{I_1}^{-1}, I_2) \\ & & \text{Hom}_S(I_1, I_2) \end{array}$$

(dabei ist Φ der bekannte, natürliche Isomorphismus.) Um zu zeigen, daß $\text{Hom}_S(U, -)$ ein Isomorphismus ist, genügt es nachzurechnen, daß die Verkettung dieser drei Abbildungen die Identität auf $\text{Hom}_S(I_1, I_2)$ ergibt: es sei $f \in \text{Hom}_S(I_1, I_2)$, $u \in U$ und $g \in \text{Hom}_S(U, I_1)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(\text{Hom}_S(U, f))(u \otimes g) &= \text{Hom}_S(U, f)(g)(u) \\ &= f(g(u)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(\sigma_{I_1}^{-1}, I_2)^{-1}(f)(u \otimes g) &= \text{Hom}_S(\sigma_{I_1}, I_2)(f)(u \otimes g) \\ &= f(\sigma_{I_1}(u \otimes g)) \\ &= f(g(u)). \end{aligned}$$

\square

Beachte, daß der nun folgende Existenzsatz im Gegensatz zu dem aus (6.4) nicht symmetrisch ist: zu gegebenem Anfangsterm A liefert er *keine* Auslander-Reiten-Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

(3.9) Satz [Allgemeiner Existenzsatz für Auslander-Reiten-Folgen]: *Es sei $C \in R\text{-mod}$ nicht projektiv; $\text{End}_R(C)$ sei lokal. Wie in (3.5) ist $\underline{\text{Hom}}_R(C, C)$ ein $S := \text{End}_R(\text{Tr } C)$ -Linksmodul: S operiert auf $\underline{\text{Hom}}_R(C, C)$ vermöge*

$$s \cdot \underline{g} := \underline{g} \circ \text{Tr}^{-1}(s)$$

für $s \in S$ und $g \in \text{Hom}_R(C, C)$. Es sei $H := \text{rad } \text{End}_R(C)$ mit Bild \underline{H} in $\underline{\text{Hom}}_R(C, C)$. Es ist dann \underline{H} ein S -Untermodul von $\underline{\text{Hom}}_R(C, C)$. Es sei

$$0 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_R(C, C) / \underline{H} \xrightarrow{r} I$$

die S -injektive Hülle von $\underline{\text{Hom}}_R(C, C) / \underline{H}$ (vgl. [AndFull], §18). Es sei $\nu \in \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), I)$ die Verkettung

$$\nu : \underline{\text{Hom}}_R(C, C) \xrightarrow{\text{nat}} \underline{\text{Hom}}_R(C, C) / \underline{H} \xrightarrow{r} I$$

Unter dem Isomorphismus aus (3.5) entspricht ν einem Element

$$[\eta] \in \text{Ext}_R^1(C, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)),$$

$$\eta : 0 \longrightarrow \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I) \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

η ist eine Auslander-Reiten-Folge in $R\text{-Mod}$.

Beweis: (1) \underline{H} ist ein S -Untermodul von $\underline{\text{Hom}}_R(C, C)$, weil H ein Rechts- $\text{End}_R(C)$ -Untermodul von $\text{Hom}_R(C, C)$ ist.

(2) η spaltet nicht auf: Andernfalls ist $[\eta] = 0$ in $\text{Ext}_R^1(C, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I))$ und damit $\nu = 0$ in $\text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), I)$, d. h.

$$\underline{H} = \underline{\text{Hom}}_R(C, C)$$

und damit

$$H + P(C, C) = \text{Hom}_R(C, C),$$

also existiert $h \in H$ und $p \in P(C, C)$ mit

$$h + p = 1_C.$$

Wegen $1_C \notin H$ ist $p \notin H$. Also ist p ein Isomorphismus, denn H besteht gerade aus den Nichteinheiten des lokalen Rings $\text{End}_R(C)$; wegen $p \in P(C, C)$ existiert dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow[p]{\sim} & C \\ & \searrow & \nearrow \\ & P & \end{array}$$

mit einem $P \in R\text{-Proj}$. C wäre also ein direkter Summand eines projektiven Moduls und damit selber projektiv im Widerspruch zur Voraussetzung.

(3) Es sei $L \in R\text{-Mod}$ und $h \in \text{Hom}_R(L, C)$ kein aufspaltender Epimorphismus. Dies bedeutet

$$\text{Im Hom}_R(C, h) \subsetneq \text{Hom}_R(C, C),$$

also, weil $\text{Im Hom}_R(C, h)$ ein Rechtsideal im lokalen Ring $\text{End}_R(C)$ ist,

$$\text{Im Hom}_R(C, h) \subset H,$$

damit

$$\text{Im } \underline{\text{Hom}}_R(C, h) \subset \underline{H} = \text{Ker}(\nu),$$

also

$$\text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, h), I)(\nu) = \nu \circ \underline{\text{Hom}}_R(C, h) = 0.$$

Das nach (3.5) kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_R^1(C, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), I) \\ \downarrow \text{Ext}_R^1(h, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) & & \downarrow \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, h), I) \\ \text{Ext}_R^1(L, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, L), I) \end{array}$$

liefert dann

$$[\mu] = \text{Ext}_R^1(h, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I))([\eta]) = 0.$$

μ ist die obere Zeile in dem Pull-back Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mu : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I) & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow h \\ \eta : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I) & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Weil μ aufspaltet, läßt sich h über g liften.

(4) g ist rechts-minimal: Sei $h \in \text{End}_R(B)$ mit $gh = g$. Man erhält ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I) & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow h & & \parallel \\ \eta : 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I) & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Zu zeigen genügt, daß j ein Isomorphismus ist. Nach (3.8) existiert $t \in \text{Hom}_S(I, I)$ mit $j = \text{Hom}_S(\text{Tr } C, t)$. Wir zeigen: t ist ein Isomorphismus.

Obiges Diagramm liefert zunächst

$$\text{Ext}_R^1(C, j)([\eta]) = [\eta];$$

aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_R^1(C, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), I) \\ \downarrow \text{Ext}_R^1(C, j) & & \downarrow \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), t) \\ \text{Ext}_R^1(C, \text{Hom}_S(\text{Tr } C, I)) & \xlongequal{\quad} & \text{Hom}_S(\underline{\text{Hom}}_R(C, C), I) \end{array}$$

folgt damit

$$\mathrm{Hom}_S(\underline{\mathrm{Hom}}_R(C, C), t)(\nu) = \nu,$$

also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, C) & \xrightarrow{\nu} & I \\ \parallel & & \downarrow t \\ \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, C) & \xrightarrow{\nu} & I \end{array}$$

Dies induziert wegen $\underline{H} = \mathrm{Ker}(\nu)$ ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, C)/\underline{H} & \xrightarrow{r} & I \\ & & \parallel & & \downarrow t \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_R(C, C)/\underline{H} & \xrightarrow{r} & I \end{array}$$

Da (I, r) eine injektive Hülle ist, und weil $tr = r$ injektiv ist, folgt die Injektivität von t . Im t ist also isomorph zu I , daher injektiv, und es gilt $\mathrm{Im} r \subset \mathrm{Im} t \subset I$. Wieder weil (I, r) eine injektive Hülle ist, folgt $\mathrm{Im} t = I$. Insgesamt: t ist ein Isomorphismus. \square

Kapitel II

Auslander-Reiten-Folgen über Artin-Algebren

§4 Funktorkategorien

(4.1) Es sei \mathcal{C} eine additive Kategorie (im Sinne von [Popescu]: die Morphismenmengen sind abelsche Gruppen, die Komposition ist bilinear und endliche direkte Summen existieren).

(1) Man kann \mathcal{C} als Verallgemeinerung eines Ringes ansehen; den Linksmoduln entsprechen dann die kovarianten, additiven Funktoren $F : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$. Dieser Zusammenhang ist in [Mitchell2] ausführlich dargestellt. Es ist also sinnvoll, die Kategorie dieser Funktoren (zusammen mit den natürlichen Transformationen als Morphismen) mit $\mathcal{C}\text{-Mod}$ zu bezeichnen (ebenfalls benutze ich hin und wieder die schon in Kapitel I eingeführte Schreibweise $[\mathcal{C}, \text{Ab}]$ für diese Kategorie). Dabei gelten wieder die Bemerkungen aus (1.1)(3): \mathcal{C} ist eine \mathfrak{A} -Kategorie.

(2) $\mathcal{C}\text{-Mod}$ ist eine abelsche Kategorie; eine Sequenz

$$F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H$$

in $\mathcal{C}\text{-Mod}$ ist genau dann exakt, wenn für jedes $A \in \mathcal{C}$

$$F(A) \xrightarrow{\phi_A} G(A) \xrightarrow{\psi_A} H(A)$$

eine exakte Folge abelscher Gruppen ist (vgl. dazu [Popescu], Theorem 3.4.1 und 3.4.2).

Die Konstruktion direkter Summen geschieht ebenfalls komponentenweise:

$$\begin{aligned} (F \oplus G)(A) &= F(A) \oplus G(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{C} \text{ und} \\ (F \oplus G)(f) &= F(f) \oplus G(f) \quad \text{für alle Morphismen } f \text{ in } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(3) Ist $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ ein derartiger ' \mathcal{C} -Modul', so operieren die Morphismen von \mathcal{C} auf $\coprod_{A \in \mathcal{C}} F(A)$ vermöge

$$f \cdot x := F(f)(x) \quad \text{für } x \in F(A) \text{ und } A \xrightarrow{f} B$$

(das Symbol \coprod bezeichnet stets das Coprodukt in der Kategorie der Mengen, also die disjunkte Vereinigung.) Diese Operation hat, bis auf die Tatsache, daß sie nur partiell definiert ist, die üblichen Eigenschaften einer Skalarmultiplikation; alle modultheoretischen Begriffe lassen sich so auf die Elemente von $\mathcal{C}\text{-Mod}$ übertragen.

(4) Ein $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ heißt *endlich erzeugt*, falls $x_1, \dots, x_n \in \coprod_{A \in \mathcal{C}} F(A)$ existieren, so daß jedes $x \in \coprod_{A \in \mathcal{C}} F(A)$ in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i$$

mit geeigneten Morphismen f_i aus \mathcal{C} darstellbar ist. $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist dann ein *Erzeugendensystem* von F .

Wenn die Kategorie \mathcal{C} festgehalten wird, schreibe ich einfach $(A, -)$ für den Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ (dabei ist $A \in \mathcal{C}$).

$(A, -)$ ist projektiv und endlich erzeugt (ein Erzeugendensystem ist z. B. $\{1_A\}$). Es gilt: $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn ein $A \in \mathcal{C}$ und eine in $\mathcal{C}\text{-Mod}$ exakte Folge

$$(A, -) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

existiert.

(5) Das Yoneda-Lemma: *Man hat einen in $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ und $A \in \mathcal{C}$ natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-Mod}}((A, -), F) \xrightarrow{\sim} F(A).$$

Dieser ist gegeben durch

$$t \longmapsto t_A(1_A) \quad \text{für jede natürliche Transformation } t : (A, -) \longrightarrow F.$$

Ist umgekehrt $x \in F(A)$, so ist die korrespondierende natürliche Transformation $t : (A, -) \longrightarrow F$ erklärt durch:

$$t_B(f) := F(f)(x) \quad \text{für jedes } B \in \mathcal{C} \text{ und jedes } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Der Beweis besteht aus einfachem Nachrechnen und steht z. B. in [Mitchell1], Lemma IV.2.1.

(6) Ein *Unterfunktor* von $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ ist ein Funktor $G \in \mathcal{C}\text{-Mod}$, so daß $G(A)$ für jedes $A \in \mathcal{C}$ eine Untergruppe von $F(A)$ ist und die Injektionen $i_A : G(A) \longrightarrow F(A)$ eine natürliche Transformation $G \xrightarrow{i} F$ liefern.

Ein Unterfunktor ist also eindeutig gegeben durch die Auswahl von Untergruppen $G(A) < F(A)$ für jedes $A \in \mathcal{C}$, so daß

$$f \cdot x \in G(B) \quad \text{für jedes } x \in G(A) \text{ und jedes } A \xrightarrow{f} B$$

gilt. Die Unterfunktoren von F bilden einen Verband.

(7) Seien $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ und $x_1, \dots, x_n \in \coprod_{A \in \mathcal{C}} F(A)$. Der von x_1, \dots, x_n in F erzeugte Unterfunktorkomplex ist derjenige Unterfunktorkomplex von F , der x_1, \dots, x_n als Erzeugendensystem hat.

(8) $S \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ heißt *einfach*, wenn $S \neq 0$ gilt und S und 0 die einzigen Unterfunktorkomplexe von S sind.

Ein Unterfunktorkomplex M von $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ heißt *maximal*, wenn $M \neq F$ gilt und M bzgl. Inklusion maximal mit dieser Eigenschaft ist (oder äquivalent: wenn F/M einfach ist).

(9) Sei $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$. Definiere $\text{rad } F$ als den Durchschnitt der maximalen Unterfunktorkomplexe von F .

Für $A, B \in \mathcal{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{rad}(A, -)(B) &= \{A \xrightarrow{f} B \mid 1_A - gf \text{ ist invertierbar für alle } B \xrightarrow{g} A\} \\ &= \{A \xrightarrow{f} B \mid 1_B - fg \text{ ist invertierbar für alle } B \xrightarrow{g} A\}. \end{aligned}$$

Dies ist in [Mitchell2], Lemma 4.1 und 4.2 bewiesen. Man bezeichnet diese Menge von Morphismen auch mit $\text{rad}(A, B)$. \square

(4.2) Funktoren auf Krull-Schmidt-Kategorien. (1) Eine Krull-Schmidt-Kategorie \mathcal{C} ist eine additive Kategorie, in der zu jedem $A \in \mathcal{C}$ Objekte $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{C}$ mit lokalem Endomorphismenring existieren, so daß

$$A \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$$

gilt.

Man kann zeigen, daß diese Zerlegung dann bis auf Isomorphie und Reihenfolge der Summanden eindeutig bestimmt ist (vgl. den Beweis von Proposition 5.4 in [Pierce]). Weiterhin ist ein $U \in \mathcal{C}$ genau dann unzerlegbar, wenn $\text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ ein lokaler Ring ist. Jedes $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$ ist offenbar durch seine Werte auf den unzerlegbaren Objekten aus \mathcal{C} und auf den Morphismen zwischen diesen bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Krull-Schmidt-Kategorien sind die natürlichen Verallgemeinerungen von lokalen Ringen.

Im folgenden sei \mathcal{C} eine Krull-Schmidt-Kategorie.

(2) Sei $U \in \mathcal{C}$ unzerlegbar. Dann hat $(U, -)$ genau einen maximalen Unterfunktorkomplex, nämlich $\text{rad } U$. Jeder echte Unterfunktorkomplex von $(U, -)$ ist Unterfunktorkomplex von $\text{rad } U$.

Beweis: Seien F, G verschiedene, maximale Unterfunktorkomplexe von $(U, -)$. Dann ist $F + G = (U, -)$, also existieren $f \in F(U)$, $g \in G(U)$ mit $f + g = 1_U$. Es sind $f, g \in \text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ keine Einheiten (sonst wäre $F = (U, -)$ bzw. $G = (U, -)$); dies ist aber ein Widerspruch, denn $\text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ ist lokal.

Nach Zorns Lemma ist jeder echte Unterfunktorkomplex von $(U, -)$ in einem maximalen Unterfunktorkomplex enthalten, da $(U, -)$ endlich erzeugt ist. Wegen $(U, -) \neq 0$ existiert also insbesondere ein maximaler Unterfunktorkomplex. Dieser ist nach dem obigen eindeutig bestimmt und fällt deswegen mit $\text{rad}(U, -)$ zusammen.

(3) Es sei $S \in \mathcal{C}\text{-Mod}$. S ist genau dann einfach, wenn ein unzerlegbares $U \in \mathcal{C}$ mit

$$S = (U, -)/\text{rad}(U, -)$$

existiert.

Es gilt dann $S(U) \neq 0$ und $S(V) = 0$ für jedes unzerlegbare $V \not\cong U$. Desweiteren ist $S(f) = 0$ für jeden Morphismus $U \xrightarrow{f} X$, der kein aufspaltender Monomorphismus ist.

Beweis: Nach (2) ist $(U, -)/\text{rad}(U, -)$ einfach.

Sei nun S einfach. Wegen $S \neq 0$ existiert $A \in \mathcal{C}$ mit $S(A) \neq 0$. Sei $A \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ die Zerlegung von A in unzerlegbare Objekte. Wegen $A \neq 0$ ist dann $n \geq 1$; wegen

$$S(A) \cong S(U_1) \oplus \cdots \oplus S(U_n) \neq 0$$

existiert also ein unzerlegbares $U \in \mathcal{C}$ mit $S(U) \neq 0$. Nach dem Yoneda-Lemma existiert dann ein $(U, -) \xrightarrow{\phi} S$ mit $\phi \neq 0$. Da S einfach ist, muß ϕ ein Epimorphismus sein. Der Kern von ϕ ist notwendig maximal, also $= \text{rad}(U, -)$ nach (2).

Sei nun $V \not\cong U$ unzerlegbar und $U \xrightarrow{f} V$. Für $V \xrightarrow{g} U$ ist gf nicht invertierbar (sonst existiert $V \xrightarrow{g'} U$ mit $g'f = 1_U$, und es folgt $(fg' - 1_V)fg' = fg'fg' - fg' = 0$, also $fg' = 0$ oder $fg' = 1_V$ da $\text{End}_{\mathcal{C}}(V)$ lokal ist, und damit ist f entweder 0 oder ein Isomorphismus; beides ist unmöglich), also ist $1_U - gf$ invertierbar ($\text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ ist lokal) und damit $f \in \text{rad}(U, V)$. Insgesamt:

$$S(V) = (U, V)/\text{rad}(U, V) = 0.$$

Sei nun $U \xrightarrow{f} X$ kein aufspaltender Monomorphismus, sei $U \xrightarrow{h} U$. Dann ist auch fh kein aufspaltender Monomorphismus (andernfalls wäre h ein Isomorphismus, da $\text{End}_{\mathcal{C}}(U)$ lokal ist, und damit wäre auch f ein aufspaltender Monomorphismus im Widerspruch zur Voraussetzung); wie oben sieht man jetzt $fh \in \text{rad}(U, X)$ ein.

$$S(f) : (U, U)/\text{rad}(U, U) \longrightarrow (U, X)/\text{rad}(U, X)$$

ist also die Nullabbildung. □

(4.3) k -Kategorien. Es sei k ein kommutativer Ring.

(1) Eine k -Kategorie ist eine Kategorie, deren Morphismenmengen k -Modul-Strukturen tragen, so daß die Komposition von Morphismen k -bilinear wird. Beispiele für k -Kategorien sind Modulkategorien über einer k -Algebra.

Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} k -Kategorien. Ein k -Funktork $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist ein Funktor, der auf den Morphismenmengen k -lineare Abbildungen induziert.

Die Kategorie dieser k -Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} wird mit $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ bezeichnet. Ist \mathcal{D} eine abelsche Kategorie, so ist auch $\{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$ abelsch: Kerne, Cokerne, endliche direkte Summen etc. werden wie bei Funktorkategorien üblich komponentenweise gebildet.

(2) Es sei \mathcal{C} eine k -Kategorie. Die Kategorien $\mathcal{C}\text{-Mod}$ und $\{\mathcal{C}, k\text{-Mod}\}$ sind isomorph: Ist $F \in \mathcal{C}\text{-Mod}$, so wird jedes $F(X)$, $X \in \mathcal{C}$, ein k -Modul vermöge des Ringhomomorphismus

$$\lambda \mapsto F(\lambda 1_X) : k \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}(F(X)).$$

Ist $X \xrightarrow{\phi} Y$ ein Morphismus in \mathcal{C} , so gilt

$$F(\phi) \circ F(\lambda 1_X) = F(\phi \circ \lambda 1_X) = F(\lambda 1_Y \circ \phi) = F(\lambda 1_Y) \circ F(\phi),$$

also ist $F(\phi)$ bzgl. der eben definierte k -Modul-Strukturen von $F(X)$ und $F(Y)$ eine k -lineare Abbildung. Weiter ist

$$F(\lambda \phi) = F(\lambda 1_Y \circ \phi) = F(\lambda 1_Y) \circ F(\phi) = \lambda F(\phi),$$

d. h. F wird ein k -Funktor.

Ist $F \xrightarrow{t} G$ ein Morphismus in $\mathcal{C}\text{-Mod}$, so ist

$$t_X \circ F(\lambda 1_X) = G(\lambda 1_X) \circ t_X,$$

also ist $t_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ k -linear und damit auch ein Morphismus in $\{\mathcal{C}, k\text{-Mod}\}$. Insgesamt haben wir so einen Funktor $\mathcal{C}\text{-Mod} \longrightarrow \{\mathcal{C}, k\text{-Mod}\}$ erhalten. Seine Umkehrung besteht einfach im 'Vergessen' der k -Modul-Strukturen: für $F \in \{\mathcal{C}, k\text{-Mod}\}$, $X \in \mathcal{C}$ und $\lambda \in k$ gilt

$$F(\lambda 1_X) = \lambda F(1_X) = \lambda 1_{F(X)}.$$

□

Im folgenden unterscheiden wir nicht mehr zwischen den Kategorien $\mathcal{C}\text{-Mod}$ und $\{\mathcal{C}, k\text{-Mod}\}$.

§5 Einige Dualitäten und der Funktor Tr

(5.1) Definition: Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien. Eine *Dualität*

$$D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

ist ein kontravarianter Funktor, zu dem ein weiterer kontravarianter Funktor

$$D' : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

mit

$$D D' \cong 1_{\mathcal{D}} \quad \text{und} \quad D' D \cong 1_{\mathcal{C}}$$

existiert.

□

Offenbar ist in dieser Situation dann auch D' eine Dualität.

Sind \mathcal{C} , \mathcal{D} additive Kategorien, so ist eine Dualität $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ von selbst ein additiver Funktor.

Den folgenden Satz könnte man offensichtlich allgemeiner formulieren, was aber nicht nötig ist. Ich beweise ihn auch nicht.

(5.2) Satz: *Seien \mathcal{C} , \mathcal{D} abelsche Kategorien und*

$$D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

eine Dualität. Es gilt:

(1) *Die Sequenz*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

ist genau dann exakt in \mathcal{C} , wenn

$$D C \xrightarrow{Dg} D B \xrightarrow{Df} D A$$

exakt in \mathcal{D} ist.

(2) *$P \in \mathcal{C}$ ist genau dann projektiv, wenn $D P \in \mathcal{D}$ injektiv ist.*

(3) *$S \in \mathcal{C}$ ist genau dann einfach, wenn $D S \in \mathcal{D}$ einfach ist.*

(4) *$U \in \mathcal{C}$ ist genau dann unzerlegbar, wenn $D U \in \mathcal{D}$ unzerlegbar ist.*

(5) *Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in \mathcal{C} ist genau dann minimal links-fast-aufspaltend, wenn $D f$ in \mathcal{D} minimal rechts-fast-aufspaltend ist. \square*

Der folgende Satz wird uns im Falle eines kommutativen, artinschen Rings k eine Dualität $k\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod}$ liefern. Er ist aber auch für sich genommen ganz interessant. Betrachtet werden gewisse Endomorphismen der Grothendieckgruppe eines kommutativen Rings k , die sich zu Endofunktoren der Kategorie der k -Moduln endlicher Länge anheben lassen:

(5.3) Satz: *Es sei k ein kommutativer Ring. \mathcal{S} sei ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen einfacher k -Moduln und $G := \mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ sei die Grothendieckgruppe von k (dies ist die freie abelsche Gruppe mit Basis \mathcal{S}). Mit $k\text{-el}$ sei die volle Unterkategorie der Moduln endlicher Länge in $k\text{-Mod}$ bezeichnet, und $p : k\text{-el} \longrightarrow G$ sei die natürliche Abbildung, die einem Modul endlicher Länge die Faktoren seiner Kompositionsreihe zuordnet. Sei $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eine Abbildung und $\bar{f} : G \longrightarrow G$ der Gruppenhomomorphismus mit $\bar{f}(S) = f(S)S$ für alle $S \in \mathcal{S}$. Sei E_f die injektive Hülle von $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S^{f(S)}$ in $k\text{-Mod}$; betrachte den Funktor*

$$F_f := \text{Hom}_k(-, E_f) : k\text{-Mod} \longrightarrow k\text{-Mod}.$$

Dann gilt:

(a) *$F_f(k\text{-el}) \subset k\text{-el}$, und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} k\text{-el} & \xrightarrow{F_f} & k\text{-el} \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ G & \xrightarrow{\bar{f}} & G \end{array}$$

kommutiert.

(b) Die durch den Einsetzungshomomorphismus gegebene natürliche Transformation

$$t : 1_{k\text{-el}} \longrightarrow F_f^2$$

ist genau dann surjektiv, wenn $\text{Im } f \subset \{0, 1\}$ gilt und genau dann injektiv, wenn $\text{Im } f \subset \mathbb{N}$ gilt.

Beweis: (a) Sei $M \in k\text{-el}$. Durch Induktion nach der Länge $l_k(M)$ von M zeige ich, daß $F_f(M)$ endliche Länge hat und $p(F_f(M)) = \overline{f}(p(M))$ gilt.

Der Fall $l(M) = 0$ ist klar. Gelte nun $l(M) = 1$.

Im ersten Fall nehme ich $F_f(M) = 0$ an. Sei $S \in \mathcal{S}$ der einfache Modul aus \mathcal{S} mit $M \cong S$. Dann ist $f(S) = 0$, denn andernfalls würde die Injektion $S \longrightarrow E_f$ ein Element $\neq 0$ in $F_f(M)$ induzieren. Wir haben also $p(F_f(M)) = 0 = f(S)S = \overline{f}(S) = \overline{f}(p(M))$.

Im zweiten Fall sei $F_f(M) \neq 0$. Sei $\phi \in F_f(M) \setminus \{0\}$. Da $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S^{f(S)}$ groß in E_f ist, gilt $\phi(M) \cap \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S^{f(S)} \neq \{0\}$; weil M einfach ist, muß ϕ injektiv sein, also ist $\phi(M)$ einfach mit $\phi(M) \subset \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S^{f(S)}$. Also existiert $S \in \mathcal{S}$ mit $f(S) \neq 0$ und $M \cong S$. Sei $T \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ und $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S^{f(S)} \xrightarrow{p_T} T^{f(T)}$ die natürliche Projektion. Wegen $T \not\cong M$ ist $p_T \circ \phi = 0$. Also $\phi(M) \subset S^{f(S)}$ und

$$F_f(M) \cong \text{Hom}_k(S, S^{f(S)}) \cong \text{Hom}_k(S, S)^{f(S)}.$$

Sei $x \in S \setminus \{0\}$. Ist $\phi \in \text{Hom}_k(S, S)$, so existiert $\lambda \in k$ mit $\phi(x) = \lambda x$ wegen $S = kx$, und es folgt $\phi = \lambda 1_S$. Mit $\mathfrak{m} = \text{Ann}(S)$ gilt $\mathfrak{m} \text{Hom}_k(S, S) = 0$ und daher $l_k(\text{Hom}_k(S, S)) = \dim_{k/\mathfrak{m}}(\text{Hom}_k(S, S)) = 1$, also

$$\text{Hom}_k(S, S) \cong k/\mathfrak{m} \cong S.$$

Damit hat $F_f(M)$ endliche Länge, und es gilt

$$p(F_f(M)) = p(S^{f(S)}) = f(S)S = \overline{f}(S) = \overline{f}(p(M)).$$

Nun gelte $l(M) > 1$. Es existiert ein einfacher Untermodul N von M . Da E_f injektiv ist, ist

$$0 \longrightarrow F_f(M/N) \longrightarrow F_f(M) \longrightarrow F_f(N) \longrightarrow 0$$

exakt, und wegen $l(N), l(M/N) < l(M)$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$l(F_f(M)) = l(F_f(M/N)) + l(F_f(N)) < \infty$$

und

$$\begin{aligned} \overline{f}(p(M)) &= \overline{f}(p(N) + p(M/N)) \\ &= \overline{f}(p(N)) + \overline{f}(p(M/N)) \\ &= p(F_f(N)) + p(F_f(M/N)) \\ &= p(F_f(M)). \end{aligned}$$

(b) Zunächst die Aussage über die Surjektivität:

" \Leftarrow " Wieder durch Induktion nach $l(M)$; der Fall $l(M) = 0$ ist klar. Sei nun $l(M) = 1$. Es gibt $S \in \mathcal{S}$ mit $S \cong M$. Ist $f(S) = 0$, so ist nach (a) auch $F_f(M) = 0$, also $F_f^2(M) = 0$ und t_M ist surjektiv. Gelte nun $f(S) = 1$. Es ist $F_f(M) \cong S$ nach dem Beweis von (a), also $F_f^2(M) \cong S$. Wegen der Einbettung $S \rightarrow E_f$ ist t_M injektiv und damit surjektiv.

Nun der Fall $l(M) > 1$. Wähle wieder einen einfachen Untermodul N von M . In dem kommutativ-exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow t_N & & \downarrow t_M & & \downarrow t_{M/N} & & \\ 0 & \longrightarrow & F_f^2(N) & \longrightarrow & F_f^2(M) & \longrightarrow & F_f^2(M/N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sind $t_N, t_{M/N}$ nach Induktionsvoraussetzung surjektiv, also auch t_M .

" \Rightarrow " Gelte $f(S) > 1$ für ein $S \in \mathcal{S}$. Nach (a) ist $F_f(S) \cong S^{f(S)}$, also $F_f^2(S) \cong S^{f(S)^2}$ und wegen $l(F_f^2(S)) > l(S)$ kann t_S nicht surjektiv sein.

Nun zur Injektivität:

" \Rightarrow " Aus $f(S) = 0$ für ein $S \in \mathcal{S}$ folgt $F_f^2(S) = 0$, also kann t_S nicht injektiv sein.

" \Leftarrow " Wieder beginnen wir mit einem einfachen Modul M . Wegen $f(S) \neq 0$ gilt nach (a) $F_f(M) \neq 0$; jedes $\phi \in F_f(M) \setminus \{0\}$ ist aber injektiv: daher ist t_M injektiv. Den Induktionsschritt können wir ganz genauso wie im Fall der Surjektivität durchführen. \square

Den Teil (1) des folgenden Korollars findet man in [AndFull], Ex. 23.8.

(5.4) Korollar: Sei k ein kommutativer Ring, \mathcal{S} ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen der einfachen k -Moduln und E die injektive Hülle von $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} S$.

(1) Es ist $D = \text{Hom}_k(-, E)$ eine Dualität der Kategorie der k -Moduln endlicher Länge auf sich.

(2) Ist k artinsch, so ist $D = \text{Hom}_k(-, E)$ eine Dualität

$$D : k\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod}.$$

\square

(5.5) Definition: Eine Artin-Algebra Λ ist eine Algebra über einem kommutativen, artinschen Ring k , die als k -Modul endlich erzeugt ist. \square

Oder äquivalent: ein Ring, der als Modul über seinem Zentrum endlich erzeugt ist, und dessen Zentrum ein artinscher Ring ist.

Im Rest dieses Paragraphen sei Λ eine Artin-Algebra über dem kommutativen, artinschen Ring k .

Eine Artin-Algebra Λ ist insbesondere ein links- und rechtsartinscher Ring, besitzt

jedoch noch mehr Struktur: wir können die Dualität

$$D_1 : k\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod}$$

aus (5.4) ausnutzen, um zu einer Dualität

$$D_2 : \text{mod-}\Lambda \longrightarrow \Lambda\text{-mod}$$

zu gelangen:

(5.6) Es sei $D_1 = \text{Hom}_k(-, E)$ die Dualität aus (5.4). Offenbar liefert D_1 einen kontravarianten Funktor

$$\text{Hom}_k(-, E) : \text{Mod-}\Lambda \longrightarrow \Lambda\text{-Mod}$$

Weil ein Λ -Modul genau dann als Λ -Modul endlich erzeugt ist, wenn er als k -Modul endlich erzeugt ist und wegen $D_1(k\text{-mod}) \subset k\text{-mod}$ erhalten wir so einen kontravarianten Funktor

$$D_2 : \text{mod-}\Lambda \longrightarrow \Lambda\text{-mod}.$$

Ganz analog ergibt sich ein kontravarianter Funktor

$$D'_2 : \Lambda\text{-mod} \longrightarrow \text{mod-}\Lambda.$$

Nun genügt es nachzurechnen, daß die natürliche Transformation t aus (5.3) tatsächlich aus Λ -linearen Abbildungen besteht; dies ist aber einfach. Wir erhalten: D_2 und D'_2 sind zueinander inverse Dualitäten. \square

Wir können nun diese beiden Dualitäten zu einer Dualität von Funktorkategorien anheben. Die so entstehende Dualität D_3 ist das wesentlich Hilfsmittel im Beweis des Existenzsatzes für Auslander-Reiten-Folgen im nächsten Paragraphen.

Die Kategorie $\{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}$ ist eine volle Unterkategorie von $\{\Lambda\text{-mod}, k\text{-Mod}\}$ und kann daher nach (4.3)(2) als volle Unterkategorie von $[\Lambda\text{-mod}, \text{Ab}]$ aufgefaßt werden. Diese Unterkategorie hat die folgende Eigenschaft: Ist

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge in $[\Lambda\text{-mod}, \text{Ab}]$, so gilt

$$G \in \{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\} \iff F, H \in \{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}.$$

Insbesondere ist $\{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}$ eine abelsche Kategorie.

(5.7) Lemma: *Die Zuordnung*

$$F \longmapsto D_1 \circ F \circ D'_2$$

liefert eine Dualität

$$D_3 : \{\text{mod-}\Lambda, k\text{-mod}\} \longrightarrow \{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}.$$

Beweis: Auf den Morphismen in $\{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}$ (das sind natürliche Transformationen $t : F \longrightarrow G$) ist D_3 wie folgt erklärt:

$$D_3(t)_X := D_1(t_{D'_2 X}) \text{ für jedes } X \in \text{mod-}\Lambda$$

Die zu D_3 inverse Dualität D'_3 ist gegeben durch

$$G \longmapsto D_1 \circ G \circ D_2.$$

Dieses läßt sich leicht nachrechnen. □

In (1.5) hatte ich $\text{Tr } M$ für jedes $M \in \Lambda\text{-mod}$ mittels einer willkürlich gewählten projektiven Auflösung konstruiert. Das hatte zur Folge, daß $\text{Tr } M$ als Objekt nur in der Kategorie mod- Λ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt war, denn es gibt bei endlich präsentierten Moduln über beliebigen Ringen keine kanonische projektive Auflösung. Das ist nun anders: Weil Λ artinsch ist, besitzt jeder Λ -Modul eine projektive Hülle (vgl. [AndFull], Cor 28.8); wir können also $\text{Tr } M$ stets mit einer minimalen projektiven Auflösung von M in $\Lambda\text{-mod}$ berechnen.

Zunächst ein Hilfssatz (dessen Voraussetzung zu eng ist; es würde eine additive Kategorie mit aufspaltenden Idempotenten ausreichen).

(5.8) Lemma: *Sei \mathcal{C} eine abelsche Kategorie,*

$$X \xrightarrow{f} P \oplus Y \longrightarrow 0$$

sei exakt in \mathcal{C} und P projektiv. Dann existiert ein Isomorphismus g und ein Epimorphismus f' , so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & P \oplus Y & \longrightarrow & 0 \\ g \downarrow \sim & & \parallel & & \\ P \oplus X' & \xrightarrow{1_P \oplus f'} & P \oplus Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Beweis: Seien $P \oplus Y \xrightarrow{p} P$ und $P \xrightarrow{q} P \oplus Y$ sowie $P \oplus Y \xrightarrow{s} Y$ die natürlichen Abbildungen. Da P projektiv ist, existiert $P \xrightarrow{k} X$ mit $fk = q$. Es folgt $pfk = pq = 1_P$, also $X = \text{Im } k \oplus \text{Ker } pf$. Setze $X' := \text{Ker } pf$; es sei $X' \xrightarrow{j} X$ die Inklusion. Weil k ein Monomorphismus ist, ist $P \oplus X' \xrightarrow{(k,j)} X$ ein Isomorphismus mit $f \circ (k, j) = (fk, fj) = (q, fj)$, wegen $p \circ (q, fj) = (pq, pfj) = (1_P, 0)$ und $s \circ (q, fj) = (sq, sfj) = (0, sfj) =: (0, f')$ gilt dann $f \circ (k, j) = 1_P \oplus f'$. □

(5.9) Der Funktor Tr . Für jedes $M \in \Lambda\text{-mod}$ sei $\text{Tr } M \in \text{mod-}\Lambda$ der nach (1.5) mit einer minimalen projektiven Auflösung von M berechnete Λ -Modul. Ebenso werde $\text{Tr } L$ für $L \in \text{mod-}\Lambda$ mit minimalen projektiven Auflösungen berechnet.

(1) Für $M \in \Lambda\text{-mod}$ hat $\text{Tr } M$ keinen projektiven Summanden $\neq 0$.

Beweis: Es gelte $\text{Tr } M = P \oplus Y$ mit einem $P \in \text{proj-}\Lambda$. Sei

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

die minimale projektive Auflösung von M . Mit (5.8) ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* & \xrightarrow{f^*} & P_1^* & \longrightarrow & \text{Tr } M & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow \sim & & \parallel & & \\ P_0^* & \xrightarrow{\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}} & P \oplus Q & \xrightarrow{1_P \oplus f'} & P \oplus Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Weil die untere Zeile exakt ist, gilt dabei $k = 0$. Anwendung von $-^*$ liefert:

$$\begin{array}{ccc} P^* \oplus Q^* & \xrightarrow{(0, l^*)} & P_0^{**} \\ \downarrow \sim & & \parallel \\ P_1^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & P_0^{**} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 \end{array}$$

Der Kern der obersten Abbildung kann nur dann klein in $P^* \oplus Q^*$ sein, wenn $P^* = 0$, also $P \cong P^{**} = 0$ gilt.

(2) Für $M_1, M_2 \in \Lambda\text{-mod}$ gilt $\text{Tr}(M_1 \oplus M_2) \cong \text{Tr } M_1 \oplus \text{Tr } M_2$ in $\text{mod-}\Lambda$.

Beweis: Wir wissen nach (1.5), daß $\text{Tr} : \Lambda\text{-mod} \longrightarrow \underline{\text{mod-}\Lambda}$ ein additiver Funktor ist. Also gilt $\text{Tr}(M_1 \oplus M_2) \cong \text{Tr } M_1 \oplus \text{Tr } M_2$ in $\underline{\text{mod-}\Lambda}$. Hieraus folgt nach (1.4) die Existenz von $P, Q \in \text{proj-}\Lambda$ mit

$$\text{Tr}(M_1 \oplus M_2) \oplus P \cong \text{Tr } M_1 \oplus \text{Tr } M_2 \oplus Q$$

in $\text{mod-}\Lambda$. $\text{mod-}\Lambda$ ist eine Krull-Schmidt-Kategorie, da Λ rechts-artinsch ist; nach (1) haben weder $\text{Tr}(M_1 \oplus M_2)$ noch $\text{Tr } M_1 \oplus \text{Tr } M_2$ projektive Summanden. Also folgt

$$\text{Tr}(M_1 \oplus M_2) \cong \text{Tr } M_1 \oplus \text{Tr } M_2$$

in $\text{mod-}\Lambda$.

(3) Ist $M \in \Lambda\text{-mod}$ nicht projektiv, so ist $\text{Tr } M \neq 0$.

Beweis: Nach (1.5) und (1.4) existieren $P, Q \in \Lambda\text{-proj}$ mit

$$M \oplus P \cong \text{Tr } \text{Tr } M \oplus Q.$$

Aus $\text{Tr } M = 0$ würde $\text{Tr } \text{Tr } M = 0$ folgen; damit wäre M projektiv.

(4) *Ist $M \in \Lambda\text{-mod}$ unzerlegbar und nicht projektiv, so ist $\text{Tr } M$ unzerlegbar.*

Beweis: Nach (3) ist $\text{Tr } M \neq 0$. Nehmen wir $\text{Tr } M = A \oplus B$ mit $A, B \in \text{mod-}\Lambda$, $A, B \neq 0$ an. Nach (1) haben A und B keine projektive Summanden $\neq 0$, also $\text{Tr } A, \text{Tr } B \neq 0$ nach (3). Wie oben existieren $P, Q \in \text{proj-}\Lambda$ mit

$$\begin{aligned} M \oplus P &\cong \text{Tr } \text{Tr } M \oplus Q \\ &\cong \text{Tr}(A \oplus B) \oplus Q \\ &\cong \text{Tr } A \oplus \text{Tr } B \oplus Q. \end{aligned}$$

Da auch $\text{Tr } A, \text{Tr } B$ keine projektiven Summanden $\neq 0$ haben, müßte M zerlegbar sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

§6 Der Existenzsatz

In diesem Paragraphen sei wieder Λ eine Artin-Algebra über dem kommutativen, artinschen Ring k .

Den Beweis für die Existenz von Auslander-Reiten-Folgen in $\Lambda\text{-mod}$, wie ich ihn hier vorstelle, findet man in [JensLenz], Theorem 12.45, und in [Lenzing].

Wesentliches Beweismittel ist der folgenden Satz (beachte: $\Lambda\text{-mod}$ ist eine abelsche Krull-Schmidt Kategorie).

(6.1) Satz: *Es sei \mathcal{C} eine abelsche Krull-Schmidt Kategorie, es sei $C \in \mathcal{C}$ unzerlegbar und nicht projektiv.*

(1) *Ist*

$$\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Folge in \mathcal{C} , so ist der von $[\eta]$ in $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, -)$ erzeugte Unterfunktorkomplex einfach.

(2) *Ist S ein einfacher Unterfunktorkomplex von $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, -)$, so existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes) unzerlegbares $A \in \mathcal{C}$ mit $S(A) \neq 0$. Wählt man $[\eta] \in S(A) \setminus \{0\}$, so ist*

$$\eta : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Folge in \mathcal{C} .

Beweis: (1) Man kann in jeder abelschen Kategorie Ext-Funktoren definieren, vgl. [Mitchell], Ch. VII. Die dort angesprochenen mengentheoretischen Schwierigkeiten treten hier nicht auf, weil sich das zugrundeliegende Universum \mathfrak{U} stets so groß wählen läßt, daß die Ext-Mengen Elemente von \mathfrak{U} bleiben.

Bezeichne den von $[\eta]$ in $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, -)$ erzeugten Unterfunktorkomplex mit $\mathcal{C} \cdot [\eta]$; es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \cdot [\eta](X) &= \{\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, \phi)([\eta]) \mid \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)\} \\ &= \{\phi \cdot [\eta] \mid \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)\}\end{aligned}$$

für jedes $X \in \mathcal{C}$. Sei $A \xrightarrow{\phi} X$ ein Morphismus in \mathcal{C} . Ist ϕ kein aufspaltender Monomorphismus, so existiert $B \xrightarrow{\chi} X$ mit $\chi f = \phi$, weil η eine Auslander-Reiten-Folge ist. Wir bilden das Push-out-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & \nearrow \chi & \downarrow & & \parallel \\ \mu : 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{r} & Y & \xrightarrow{s} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach dem Homotopielemma existiert $C \xrightarrow{\psi} Y$ mit $s\psi = 1_C$; also spaltet μ auf und es gilt

$$\phi \cdot [\eta] = [\mu] = 0.$$

Ist jedoch ϕ ein aufspaltender Monomorphismus, so existiert $X \xrightarrow{\psi} A$ mit $\psi\phi = 1_A$, und es folgt $\psi \cdot (\phi \cdot [\eta]) = [\eta]$.

Insgesamt ist also jeder Unterfunktorkomplex von $\mathcal{C} \cdot [\eta]$, der $\phi \cdot [\eta]$ enthält, entweder $= 0$ oder $= \mathcal{C} \cdot [\eta]$; wegen $[\eta] \neq 0$ ist $\mathcal{C} \cdot [\eta] \neq 0$ und damit ist dieser Funktor einfach.

(2) Nach (4.2)(3) existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes unzerlegbares $A \in \mathcal{C}$ mit $S(A) \neq 0$. Ist $\phi : A \longrightarrow X$ ein Morphismus in \mathcal{C} , der kein aufspaltender Monomorphismus ist, so gilt $S(\phi) = 0$ wieder nach (4.2)(3); im Push-out-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \parallel \\ \mu : 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

hat man also $[\mu] = \text{Ext}_{\Lambda}^1(C, \phi)([\eta]) = S(\phi)([\eta]) = 0$, d. h. μ spaltet auf und ϕ läßt sich über f auf B fortsetzen. \square

Um diesen Satz später anwenden zu können, müssen wir uns zunächst

$$\text{Ext}_{\Lambda\text{-mod}}^1 = \text{Ext}_{\Lambda\text{-Mod}}^1 = \text{Ext}_{\Lambda}^1$$

klarmachen: der Grund ist, daß in einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

mit X und Z auch Y in $\Lambda\text{-mod}$ liegt.

Wir konzentrieren uns nun darauf, einen einfachen Unterfunktorkomplex von $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(C, -)$ zu finden.

(6.2) Lemma: *Ist $M \in \text{mod-}\Lambda$, so gilt $D_3(M, -) \cong M \otimes_\Lambda -$.*

Beweis: Es existiert eine exakte Folge

$$\Lambda^m \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Für $X \in \Lambda\text{-mod}$ ist dann $\text{Hom}_\Lambda(M, X)$ ein k -Untermodule von $\text{Hom}_\Lambda(\Lambda^m, X) \cong X^m$; dieser Modul ist über k endlich erzeugt, und weil k noethersch ist, ist damit auch $\text{Hom}_\Lambda(M, X) \in k\text{-mod}$. Es ist $M \otimes_\Lambda X$ ein epimorphes Bild des endlich erzeugten k -Moduls $\Lambda^m \otimes_\Lambda X \cong X^m$ und damit selber endlich erzeugt über k . Also gilt

$$(M, -) \in \{\text{mod-}\Lambda, k\text{-mod}\} \quad \text{und} \quad M \otimes_\Lambda - \in \{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\},$$

insbesondere $D_1^2(M \otimes_\Lambda -) \cong M \otimes_\Lambda -$. Es folgt

$$\begin{aligned} D_3(M, -)(X) &= D_1 \circ (M, -) \circ D_2'(X) \\ &= D_1(\text{Hom}_\Lambda(M, \text{Hom}_k(X, E))) \\ &\cong D_1(\text{Hom}_k(M \otimes_\Lambda X, E)) \\ &\cong M \otimes_\Lambda X, \end{aligned}$$

und die beiden auftretenden Isomorphismen sind natürlich in X (und in M), liefern daher (natürliche) Isomorphismen von Funktoren. \square

(6.3) Lemma: *Ist $M \in \text{mod-}\Lambda$ unzerlegbar, so hat der Funktor $M \otimes_\Lambda - \in [\Lambda\text{-mod}, \text{Ab}]$ einen kleinsten Unterfunctor S ; es gilt $S(D_2 M) \neq 0$.*

Beweis: Es sei $T := (M, -)/\text{rad}(M, -) \in \{\text{mod-}\Lambda, k\text{-mod}\}$. Zeige: $S := D_3 T$ ist der kleinste Unterfunctor von $M \otimes_\Lambda -$. Nach (4.2)(3) gilt $T(M) \neq 0$, also $S(D_2 M) = D_1(T(D_2' D_2 M)) \cong D_1(T(M)) \neq 0$. Sei nun

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M \otimes_\Lambda -$$

exakt in $[\Lambda\text{-mod}, \text{Ab}]$ mit $F \neq 0$. Es ist dann $F \in \{\Lambda\text{-mod}, k\text{-mod}\}$, und

$$(M, -) \longrightarrow D_3' F \longrightarrow 0$$

ist exakt. Weil $\text{rad}(M, -)$ nach (4.2)(2) der größte Unterfunctor von $(M, -)$ ist, liefert der Homomorphiesatz wegen $D_3' F \neq 0$ ein kommutativ-exaktes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (M, -) & \longrightarrow & D_3' F & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \downarrow & & \\ & & T & & \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

was wiederum

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M \otimes_{\Lambda} - \\
 & & \uparrow & \nearrow & \\
 & & S & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

induziert. Also ist S der kleinste Unterfunctor von $M \otimes_{\Lambda} -$. \square

(6.4) Satz [Existenz von Auslander-Reiten-Folgen in $\Lambda\text{-mod}$]: (1) *Ist $C \in \Lambda\text{-mod}$ unzerlegbar und nicht projektiv, so existiert eine Auslander-Reiten-Folge*

$$0 \longrightarrow D_2 \operatorname{Tr} C \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

(2) *Ist $A \in \Lambda\text{-mod}$ unzerlegbar und nicht injektiv, so existiert eine Auslander-Reiten-Folge*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \operatorname{Tr} D'_2 A \longrightarrow 0.$$

Beweis: (1) Es sei $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine minimale projektive Auflösung von C . Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow f & & \parallel & & \parallel \\
 & & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & C \longrightarrow 0
 \end{array}$$

erhalten wir mit (3.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 (P_0, -) & \longrightarrow & (N, -) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_{\Lambda}^1(C, -) & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow (f, -) & & & & \\
 (P_0, -) & \longrightarrow & (P_1, -) & & & & \\
 \parallel & & \parallel & & & & \\
 P_0^* \otimes - & \longrightarrow & P_1^* \otimes - & \longrightarrow & \operatorname{Tr} C \otimes - & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Weil f surjektiv ist, ist $(f, -)$ injektiv; das Fünferlemma liefert also eine Injektion $0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\Lambda}^1(C, -) \longrightarrow \operatorname{Tr} C \otimes -$; da C nicht projektiv ist, ist $\operatorname{Ext}_{\Lambda}^1(C, -) \neq 0$; weil C zusätzlich unzerlegbar ist, ist $\operatorname{Tr} C$ nach (5.9)(4) ebenfalls unzerlegbar. Also enthält $\operatorname{Ext}_{\Lambda}^1(C, -)$ den von (6.3) gelieferten kleinsten Unterfunctor S von $\operatorname{Tr} C \otimes -$. S ist natürlich einfach, und weil $D_2 \operatorname{Tr} C$ unzerlegbar ist mit $S(D_2 \operatorname{Tr} C) \neq 0$, folgt die Behauptung aus (6.1).

(2) Dies folgt aus (5.2) und (1): man ersetzt zuerst in (1) Λ durch Λ^{op} (es ist Λ^{op} wieder eine Artin-Algebra); wendet diese Aussage dann auf den unzerlegbaren, nicht projektiven Λ^{op} -Linksmodul $D'_2 A$ an und dualisiert die entstehende Auslander-Reiten-Sequenz anschließend noch einmal mit D_2 , um eine solche in $\Lambda\text{-mod}$ zu erhalten. \square

Kapitel III

Das Coxeterpolynom im erblichen Fall

§7 Graphentheoretische Sprechweisen

In diesem Paragraphen werden nur einige Definitionen getroffen, die sich auf Köcher und Graphen beziehen.

(7.1) Köcher. (1) Ein *Köcher* Γ ist ein Tupel $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$, bestehend aus endlichen Mengen $V\Gamma, E\Gamma$ und Abbildungen $\alpha: E\Gamma \rightarrow V\Gamma, \omega: E\Gamma \rightarrow V\Gamma$. Die Elemente von $V\Gamma$ heißen die *Punkte* von Γ , diejenigen von $E\Gamma$ sind die *Pfeile* von Γ . $\alpha(e)$ ist der Anfangs- und $\omega(e)$ der Endpunkt des Pfeils $e \in E\Gamma$. Ein Punkt und ein Pfeil heißen *inzident*, wenn der Punkt Anfangs- oder Endpunkt des Pfeils ist. Ein Pfeil mit demselben Anfangs- und Endpunkt heißt *Schleufe*.

(2) Der Köcher $\Gamma' = (V\Gamma', E\Gamma', \alpha', \omega')$ ist ein *Teilköcher* von Γ , wenn $E\Gamma' \subset E\Gamma$, $V\Gamma' \subset V\Gamma$ und $\alpha' = \alpha|_{E\Gamma'}$, $\omega' = \omega|_{E\Gamma'}$ gilt.

(3) Ist $M_0 \subset V\Gamma$ und $M_1 \subset E\Gamma$, $M := M_0 \amalg M_1$, so sei $\Gamma \setminus M$ der größte Teilköcher $\Gamma' = (V\Gamma', E\Gamma', \alpha', \omega')$ von Γ mit $V\Gamma' = V\Gamma \setminus M_0$ und $E\Gamma' \subset E\Gamma \setminus M_1$.

Der von $M_0 \subset V\Gamma$ erzeugte *volle Teilköcher* ist $\Gamma \setminus (V\Gamma \setminus M_0)$.

(4) Zwei Köcher $\Gamma_1 = (V\Gamma_1, E\Gamma_1, \alpha_1, \omega_1)$, $\Gamma_2 = (V\Gamma_2, E\Gamma_2, \alpha_2, \omega_2)$ heißen *isomorph*, falls bijektive Abbildungen $Vf: V\Gamma_1 \rightarrow V\Gamma_2$, $Ef: E\Gamma_1 \rightarrow E\Gamma_2$ mit $\alpha_2 \circ (Ef) = (Vf) \circ \alpha_1$ und $\omega_2 \circ (Ef) = (Vf) \circ \omega_1$ existieren. $f = (Vf, Ef): \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ ist in diesem Fall ein *Isomorphismus von Köchern*.

(5) Die Matrix $A_\Gamma := (a_{qp})_{(q,p) \in V\Gamma \times V\Gamma}$ mit

$$a_{qp} = \#\{e \in E\Gamma \mid \alpha(e) = p \text{ und } \omega(e) = q\}$$

(beachte: a_{qp} zählt tatsächlich die Pfeile von p nach q !) heißt die *Adjazenzmatrix* des Köchers Γ (sie ist nur bis auf Numerierung der Punkte von Γ , d. h. bis auf Konjugation mit einer Permutationsmatrix bestimmt).

(6) Ein *Weg* w in Γ ist eine Folge $w = (q|e_n, \dots, e_1|p)$ mit $p, q \in V\Gamma$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $e_i \in E\Gamma$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß gilt $\alpha(e_1) = p$, $\omega(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und $\omega(e_n) = q$. p ist der Anfangs- und q der Endpunkt von w ; man sagt auch: w ist ein Weg von p nach q . [Man wählt diese Reihenfolge der Pfeile, um die Schreibweise der Komposition von Abbildungen zu imitieren.] Die Zahl n ist die *Länge* von w . Für jeden Punkt $p \in V\Gamma$ hat man also insbesondere den zu p gehörigen Punktweg $w_p := (p|p)$ der Länge 0, dessen Anfangs- und Endpunkt p ist.

(7) Ein *Zyklus* in Γ ist ein Weg w mit positiver Länge, dessen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen.

(8) Sind $v = (q|e_n, \dots, e_1|p)$ und $w = (p|f_m, \dots, f_1|r)$ Wege in Γ , so ist die Komposition von v und w der durch $vw := (q|e_n, \dots, e_1, f_m, \dots, f_1|r)$ erklärte Weg. Das Komponieren von Wegen ist in offensichtlichem Sinne assoziativ.

(9) Die Elemente von $V\Gamma \setminus \omega(E\Gamma)$ sind die *Quellen* und diejenigen von $V\Gamma \setminus \alpha(E\Gamma)$ die *Senken* von Γ . Ist jeder Punkt von Γ eine Quelle oder eine Senke, so sagt man, Γ sei *bipartit*. \square

(7.2) Die Wegealgebra eines Köchers. Sei $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$ ein Köcher ohne Zyklen und k ein Körper. Die *Wegealgebra* $k[\Gamma]$ zu Γ über k hat die (endliche) Menge der Wege in Γ als Basis des zugrundeliegenden k -Vektorraumes. Die Multiplikation ist auf Basiselementen durch die Komposition von Wegen gegeben; sind v, w Wege in Γ mit $\omega(w) \neq \alpha(v)$, so wird $vw := 0$ gesetzt. Die bilineare Fortsetzung dieser Verknüpfung auf ganz $k[\Gamma]$ liefert offenbar eine assoziative Multiplikation.

Es ist also $k[\Gamma]$ eine endlichdimensionale, assoziative Algebra über k mit Einselement: es gilt $1_{k[\Gamma]} = \sum_{p \in V\Gamma} w_p$. \square

(7.3) Multigraphen. (1) Ein *Multigraph* G ist ein Tupel $G = (VG, EG, \pi)$, bestehend aus endlichen Mengen VG, EG und einer Abbildung $\pi: EG \rightarrow 2^{VG}$ mit $1 \leq \#\pi(e) \leq 2$ für alle $e \in EG$. Es sind die Elemente von VG die *Punkte* und die von EG die *Kanten* von G . Eine Kante $e \in EG$ mit $\#\pi(e) = 1$ heißt *Schleufe*. Die Punkte $p, q \in VG$ heißen *adjacent*, falls ein $e \in EG$ mit $\pi(e) = \{p, q\}$ existiert; in diesem Fall heißen e und p bzw. e und q *inzident*.

(2) Die *Adjazenzmatrix* eines Multigraphen G ist die symmetrische Matrix $A_G := (a_{qp})_{(q,p) \in VG \times VG}$ mit $a_{qp} = \#\{e \in EG \mid \pi(e) = \{q, p\}\}$.

(3) Der Multigraph $G' = (VG', EG', \pi')$ ist ein *Teilgraph* von $G = (VG, EG, \pi)$, falls $VG' \subset VG$, $EG' \subset EG$ und $\pi' = \pi|_{EG'}$ gilt.

(4) Ist $M_0 \subset VG$ und $M_0 \subset EG$, $M := M_0 \amalg M_1$, so sei $G \setminus M$ der größte Teilgraph $G' = (VG', EG', \pi')$ von G mit $VG' = VG \setminus M_0$ und $EG' \subset EG \setminus M_1$.

Der von $M_0 \subset VG$ erzeugte *volle Teilgraph* ist $G \setminus (VG \setminus M_0)$.

(5) Ist G ein Multigraph und sind $p, q \in VG$, so ist ein *Weg* von p nach q eine Folge

$(p_n|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p_0)$ mit $p_0, \dots, p_n \in VG$, $p_0 = p$, $p_n = q$ und $e_1, \dots, e_n \in EG$, so daß $\pi(e_i) = \{p_{i-1}, p_i\}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Die *Länge* eines solchen Weges ist n .

Der Weg $(p_n|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p_0)$ heißt *Kreis*, falls $p_0 = p_n$ gilt und es kein $i \in \{0, \dots, n-2\}$ mit $p_i = p_{i+2}$ gibt.

Ein *einfacher Kreis* ist ein Kreis $(p|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p)$ der Länge $n \geq 1$ mit paarweise verschiedenen Punkten p, p_1, \dots, p_{n-1} . (Beachte: eine doppelte Kante ist also kein einfacher Kreis; eine Schlaufe aber schon.)

(6) Wir nennen zwei Punkte $p, q \in VG$ eines Multigraphen G *verbunden*, falls ein Weg von p nach q existiert. 'Verbundensein' ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf VG . Die von den Äquivalenzklassen erzeugten vollen Teilgraphen von G sind die *Zusammenhangskomponenten* von G , und G heißt *zusammenhängend*, falls er nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht.

(7) Die Multigraphen $G_1 = (VG_1, EG_1, \pi_1)$ und $G_2 = (VG_2, EG_2, \pi_2)$ heißen *isomorph*, falls Bijektionen $Vf : VG_1 \rightarrow VG_2$ und $Ef : EG_1 \rightarrow EG_2$ existieren, so daß für jedes $e \in EG_1$ gilt: $\pi_2(Ef(e)) = Vf(\pi_1(e))$.

(8) Der Multigraph G heißt *Multiwald*, falls er keinen einfachen Kreis enthält, und *Multibaum*, falls er zusätzlich zusammenhängend ist.

(9) Sei $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$ ein Köcher. Der Multigraph $G = (VG, EG, \pi)$ mit $VG = V\Gamma$, $EG = E\Gamma$ und $\pi(e) = \{\alpha(e), \omega(e)\}$ für jedes $e \in EG$ ist der Γ *zugrundeliegende Multigraph*. Man sagt auch: Γ ist eine *Orientierung* von G . Der Γ zugrundeliegende Multigraph wird mit $\bar{\Gamma}$ bezeichnet.

(10) Der Köcher Γ heißt *zusammenhängend*, wenn $\bar{\Gamma}$ zusammenhängend ist; die *Zusammenhangskomponenten* von Γ sind die von den Punktemengen der Zusammenhangskomponenten von $\bar{\Gamma}$ erzeugten vollen Teilköcher von Γ .

(11) Der *Grad* des Punktes p im Multigraphen G ist die Anzahl der mit ihm inzidenten Kanten; ist dieser größer als 1, so ist p ein *Verzweigungspunkt* von G . \square

§8 Die Coxetertransformation

Es wird zunächst die Coxetertransformation für endlichdimensionale Algebren endlicher globaler Dimension über einem festen algebraisch abgeschlossenen Körper k vorgestellt ('endlichdimensional' bedeutet dabei immer: als k -Vektorraum); anschließend wird konkreter der erbliche Fall, d. h. der Fall der in (7.2) eingeführten Wegealgebren, diskutiert.

(8.1) Cartan- und Coxetermatrizen. Sei Λ eine endlichdimensionale k -Algebra von endlicher globaler Dimension (zum Begriff der globalen Dimension vgl. z. B.

[JensLennz], S. 369 f.). Es seien $S_1, \dots, S_n \in \Lambda\text{-mod}$ die einfachen Λ -Linksmoduln. Bezeichne die Grothendieckgruppe von Λ mit $K_0(\Lambda)$ und die natürliche Abbildung $\Lambda\text{-mod} \rightarrow K_0(\Lambda)$ mit $M \mapsto [M]$. Dann ist $K_0(\Lambda)$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang n , und zwar ist $\{[S_1], \dots, [S_n]\}$ eine Basis von $K_0(\Lambda)$.

Für $M \in \Lambda\text{-mod}$ bezeichne $P(M)$ bzw. $I(M)$ die projektive bzw. die injektive Hülle von M in $\Lambda\text{-mod}$. Definiere die Zahlen c_{ij} durch

$$[P(S_j)] = \sum_{i=1}^n c_{ij} [S_i] \quad \text{für jedes } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Es gilt dann:

$$[I(S_i)] = \sum_{j=1}^n c_{ij} [S_j] \quad \text{für jedes } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Man nennt die $n \times n$ -Matrix $C_\Lambda := (c_{ij})$ die *Cartanmatrix* von Λ .

Weil Λ endliche globale Dimension hat, sind auch $\{[P(S_1)], \dots, [P(S_n)]\}$ und $\{[I(S_1)], \dots, [I(S_n)]\}$ Basen von $K_0(\Lambda)$. Durch die Festsetzung

$$[P(S_i)] \mapsto -[I(S_i)], \quad i = 1, \dots, n,$$

wird daher eine \mathbb{Z} -lineare Abbildung

$$\Phi_\Lambda: K_0(\Lambda) \rightarrow K_0(\Lambda)$$

erklärt, die *Coxetertransformation* von Λ . Die zu Φ_Λ bezüglich der Basis $[S_1], \dots, [S_n]$ gehörige Matrix, ebenfalls mit Φ_Λ bezeichnet, ist die *Coxetermatrix* von Λ . Es gilt

$$\Phi_\Lambda = -{}^t C_\Lambda C_\Lambda^{-1},$$

wie man direkt an den Definitionen von Φ_Λ und C_Λ abliest.

Das charakteristische Polynom $\chi_\Lambda(T) := |TI - \Phi_\Lambda|$ der Coxetertransformation ist das *Coxeterpolynom* von Λ . \square

Den engen Zusammenhang von Auslander-Reiten-Translation und Coxetertransformation zeigt z. B. der folgende Satz (vgl. [Ringel], S.75). Man nennt eine Algebra *erblich*, wenn ihre globale Dimension ≤ 1 ist.

(8.2) Satz: Sei Λ eine endlichdimensionale k -Algebra; wir setzen voraus, daß Λ erblich ist. τ bezeichne die Auslander-Reiten-Translation in $\Lambda\text{-mod}$. Dann gilt für jedes unzerlegbare, nicht projektive $M \in \Lambda\text{-mod}$:

$$[\tau M] = \Phi_\Lambda[M].$$

\square

Die Coxetertransformation beschreibt also die Auslander-Reiten-Translation auf der Ebene der Grothendieckgruppe.

Eine Eigenschaft des Coxeterpolynoms können wir bereits an dieser Stelle festhalten (vgl. etwa [A'Campo]):

(8.3) Bemerkung: Sei Λ eine endlichdimensionale k -Algebra von endlicher globaler Dimension. Das Coxeterpolynom χ_Λ von Λ ist selbstreziprok, d. h. mit $n := \text{grad}(\chi_\Lambda)$ gilt

$$\chi_\Lambda(T) = T^n \chi_\Lambda(1/T).$$

Beweis: Sei C die Cartanmatrix von Λ . Man hat

$$\begin{aligned} \chi_\Lambda(T) &= |TI + {}^tCC^{-1}| \\ &= |{}^tC| |T {}^tC^{-1}C + I| |C^{-1}| \\ &= |T {}^tC^{-1}C + I| \\ &= |T {}^tCC^{-1} + I| \\ &= T^n |{}^tCC^{-1} + (1/T)I| \\ &= T^n \chi_\Lambda(1/T). \end{aligned}$$

□

Ein Ziel dieses Kapitels ist die formelmäßige Beschreibung des Coxeterpolynoms von Wegealgebren in Abhängigkeit vom zugrundeliegenden Köcher. Das Interesse an Wegealgebren verdeutlicht der folgende Satz (vgl. [Gabriel2]): mit der Untersuchung von Wegealgebren erledigt man bereits den Fall beliebiger *erblicher* Algebren.

(8.4) Satz: Sei Λ eine endlichdimensionale, erbliche k -Algebra. Dann ist Λ Morita-äquivalent zu der Wegealgebra eines zykliefreien Köchers Γ , der effektiv aus Λ berechenbar ist. Insbesondere stimmen die Coxetermatrizen und -polynome von Λ und $k[\Gamma]$ überein. □

(8.5) Cartan- und Coxetermatrizen von Wegealgebren. Es sei $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$ ein zykliefreier Köcher mit Wegealgebra $k[\Gamma]$.

(1) Die Elemente w_p mit $p \in V\Gamma$ (vgl. (7.1)(6)) bilden ein vollständiges System primitiver orthogonaler Idempotenter in $k[\Gamma]$. Die $k[\Gamma]w_p$ sind daher ein Repräsentantensystem für die Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver $k[\Gamma]$ -Links-Moduln, und ihre Radikalfaktormoduln sind paarweise nicht-isomorph und repräsentieren die einfachen $k[\Gamma]$ -Links-Moduln. Wir können als Indexmenge für die in (8.1) definierten Matrizen daher stets $V\Gamma \times V\Gamma$ verwenden.

(2) Für die Cartanmatrix gilt

$$C_{k[\Gamma]} = (\#\{\text{Wege von } p \text{ nach } q\})_{(q,p) \in V\Gamma \times V\Gamma}.$$

Insbesondere hängt $C_{k[\Gamma]}$ und damit auch $\Phi_{k[\Gamma]}$ und $\chi_{k[\Gamma]}$ nur von Γ , nicht aber von dem algebraisch abgeschlossenen Körper k ab, so daß man von Cartan- und Coxetermatrix sowie Coxeterpolynom des Köchers Γ sprechen und $C_\Gamma := C_{k[\Gamma]}$, $\Phi_\Gamma := \Phi_{k[\Gamma]}$ und $\chi_\Gamma := \chi_{k[\Gamma]}$ definieren kann.

(3) Sind $q, p \in V\Gamma$ verschieden, so kann man die Anzahl der Wege von p nach q so bestimmen: für jedes $r \in V\Gamma$ multipliziert man die Anzahl der Wege von p nach r mit der Anzahl der Pfeile von r nach q und summiert alle diese Zahlen auf.

Ist also $A_\Gamma := (a_{qp})_{(q,p) \in V\Gamma \times V\Gamma}$ die Adjazenzmatrix und $C_\Gamma = (c_{qp})_{(q,p) \in V\Gamma \times V\Gamma}$ die Cartanmatrix von Γ , so gilt

$$\sum_{r \in V\Gamma} a_{qr} c_{rp} = \begin{cases} c_{qp} & \text{falls } q \neq p, \\ 0 & \text{falls } q = p. \end{cases}$$

Wegen $c_{pp} = 1$ für alle $p \in V\Gamma$ folgt dann (mit der $V\Gamma \times V\Gamma$ -Einheitsmatrix I) $A_\Gamma C_\Gamma = C_\Gamma - I$, also

$$C_\Gamma^{-1} = I - A_\Gamma.$$

(4) Ein *Twist-Weg* in Γ ist eine Folge $t = (q|e_n, \dots, e_1|p)$ mit $p, q \in V\Gamma$, $n \in \mathbb{N}$ und $e_i \in E\Gamma$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß $(\omega(e_{n-1})|e_{n-1}, \dots, e_1|p)$ ein Weg und e_n ein Pfeil von q nach $\omega(e_{n-1})$ ist. (Im Fall $n = 1$ soll das bedeuten, daß $t = (q|e_1|p)$ nur aus einer Kante e_1 von q nach p besteht.) Es ist also t ein 'Weg' von p nach q , dessen letzter Pfeil 'verkehrt' durchlaufen wird. Nennen wir n die Länge des Twist-Weges t , so hat damit jeder Twist-Weg mindestens die Länge 1.

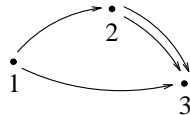
Die Anzahl der Twist-Wege von p nach q läßt sich wieder wie folgt berechnen: Man multipliziert für jedes $r \in V\Gamma$ die Anzahl der Wege von p nach r mit der Anzahl der Pfeile von q nach r und summiert. Hieraus folgt (wegen $\Phi_\Gamma = -{}^t C_\Gamma C_\Gamma^{-1} = -{}^t C_\Gamma (I - A_\Gamma) = {}^t C_\Gamma A_\Gamma - {}^t C_\Gamma$):

$$\Phi_\Gamma = (\#\{\text{Twist-Wege von } p \text{ nach } q\} - \#\{\text{Wege von } p \text{ nach } q\})_{(p,q) \in V\Gamma \times V\Gamma}$$

Diese anschauliche Interpretation der Einträge der Coxetermatrix wird später sehr hilfreich sein.

(5) Sei $\bar{\Gamma}$ der Γ zugrundeliegende Multigraph. Sind $p, q \in V\Gamma$ in $\bar{\Gamma}$ nicht verbunden, so gibt es keine Wege und keine Twistwege von p nach q in Γ . Die Coxetermatrix von Γ ist daher eine Blockdiagonalmatrix aus den Coxetermatrizen der Zusammenhangskomponenten von Γ , und das Coxeterpolynom ist das Produkt der Coxeterpolynome der Zusammenhangskomponenten von Γ . \square

(8.6) Beispiel: Betrachten wir den folgenden Köcher Γ :



Ordnen wir die Punkte von Γ in der Reihenfolge 1, 2, 3, so ergibt sich

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß es stets möglich ist, die Punkte eines zyklfreien Köchers Γ so anzuordnen, daß die Adjazenz- und Cartanmatrizen Dreiecksgestalt haben; dazu erweitert man einfach die durch $E\Gamma$ auf $V\Gamma$ natürlicherweise gegebene Halbordnung zu einer Ordnung.

Für die Coxetermatrix von Γ folgt mit (8.5)(4) :

$$\Phi_\Gamma = \begin{pmatrix} 4-1 & 6-1 & 0-3 \\ 3-0 & 4-1 & 0-2 \\ 1-0 & 2-0 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

und das Coxeterpolynom ergibt sich zu

$$\chi_\Gamma(T) = |TI - \Phi_\Gamma| = T^3 - 5T^2 - 5T + 1.$$

□

§9 Das Coxeterpolynom erblicher Algebren

Zunächst untersuche ich, inwieweit das Coxeterpolynom von der speziellen Orientierung eines Graphen abhängt und insbesondere, bei welchen Graphen die Orientierung für das Coxeterpolynom belanglos ist.

Anschließend wird eine neue Formel vorgestellt, die das rekursive Berechnen der Coxeterpolynome von Multibäumen erlaubt. Die Formel gestattet einige Korollare und Verallgemeinerungen.

Abschließend leite ich eine Beziehung für die Coxeterpolynome einer gewissen Klasse von Köchern her, denen kein Multibaum zugrunde liegt. Als Spezialfall ergeben sich die Coxeterpolynome von (zyklfrei orientierten) Kreisen.

(9.1) Spiegeln eines Köchers. Sei $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$ ein Köcher, sei $r \in V\Gamma$ eine Quelle oder eine Senke in Γ . Der *an r gespiegelte Köcher* $\sigma_r\Gamma$ entsteht aus Γ durch Umkehren der Richtung eines jeden zu r inzidenten Pfeils. Offenbar ist r dann wieder eine Quelle oder Senke von $\sigma_r\Gamma$.

Sind $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$ und $\tilde{\Gamma} = (V\tilde{\Gamma}, E\tilde{\Gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{\omega})$ Köcher mit derselben Punktmenge und läßt sich Γ durch eine endliche Folge von Spiegelungen in $\tilde{\Gamma}$ überführen, so nennen wir Γ und $\tilde{\Gamma}$ *spiegelungsäquivalent*. □

Das Spiegeln eines Köchers und insbesondere die Auswirkungen auf die endlichdimensionalen unzerlegbaren Moduln der Wegealgebra sind eingehend in [BGP] untersucht worden.

Der nächste Satz ist grundlegend für alles folgende: er erlaubt in vielen Fällen bei der Berechnung des Coxeterpolynoms die spezielle Orientierung eines Graphen zu vernachlässigen. In [AuslPlatz] wurde (in einem etwas allgemeineren Kontext) der

Zusammenhang der in (8.1) definierten Coxetertransformation mit der herkömmlichen Coxetertransformation einer Weyl-Gruppe herausgearbeitet, und mit dieser Charakterisierung ist der folgende Satz leicht einzusehen. Ich beweise ihn aber rein kombinatorisch.

(9.2) Satz: *Sei Γ ein zyklfreier Köcher, sei r eine Quelle oder eine Senke von Γ . Dann sind die Coxetermatrizen von Γ und $\sigma_r\Gamma$ ähnlich; insbesondere gilt*

$$\chi_\Gamma = \chi_{\sigma_r\Gamma}.$$

Beweis: Wir behandeln den Fall einer Quelle r ; der andere Fall geht ganz analog. Sei $n := \#V\Gamma$. Zählen wir wieder die Wege von r nach $q \in V\Gamma$ in Γ und die von q nach r in $\sigma_r\Gamma$ wie in (8.5)(3) ab und wählen wir r als ersten Punkt der Numerierung, so ergibt sich mit

$$a := (\#\{\text{Pfeile von } r \text{ nach } p \text{ in } \Gamma\})_{p \in V\Gamma \setminus \{r\}} \in \mathbb{Z}^{n-1} \text{ und} \\ B := (\#\{\text{Wege von } p \text{ nach } q \text{ in } \Gamma\})_{(q,p) \in V\Gamma \setminus \{r\} \times V\Gamma \setminus \{r\}} \in M_{n-1}(\mathbb{Z}) :$$

$$C_\Gamma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \\ Ba & & & B \end{array} \right) \text{ und } C_{\sigma_r\Gamma} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t a B \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & B \end{array} \right)$$

Setze

$$S := \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & & & {}^t a \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right) \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

Dann gilt

$$SC_\Gamma {}^t S = S \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & B \\ 0 & & & \end{array} \right) = C_{\sigma_r\Gamma},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_r\Gamma} &= -{}^t C_{\sigma_r\Gamma} C_{\sigma_r\Gamma}^{-1} \\ &= -{}^t (SC_\Gamma {}^t S) (SC_\Gamma {}^t S)^{-1} \\ &= S (-{}^t C_\Gamma {}^t S {}^t S^{-1} C_\Gamma^{-1}) S^{-1} \\ &= S \Phi_\Gamma S^{-1}. \end{aligned}$$

□

Spiegelungsäquivalente, zyklfreie Köcher haben also dasselbe Coxeterpolynom. Sinnvoll ist es sicher, an dieser Stelle die Klasse derjenigen Graphen zu betrachten, deren zyklfreie Orientierungen sämtlich spiegelungsäquivalent sind. Das geschieht in (9.4).

(9.3) Lemma: *Sei G ein Multigraph, e eine Kante von G und keine Schlaufe. Dann läßt sich jede zykelfreie Orientierung von $G \setminus \{e\}$ zu einer zykelfreien Orientierung von G fortsetzen.*

Beweis: Sei Γ' eine zykelfreie Orientierung von $G \setminus \{e\}$. Seien p und q die beiden Punkte der Kante e . Es wäre nur dann unmöglich, Γ' zu einer zykelfreien Orientierung von G fortzusetzen, wenn es in Γ' einen Weg von p nach q und auch einen von q nach p gäbe. Dies ist nicht der Fall, da nach Voraussetzung Γ' zykelfrei und $p \neq q$ ist. \square

(9.4) Satz: *Die beiden folgenden Eigenschaften eines Multigraphen G sind äquivalent:*

- (1) *G hat keine Schleifen und je zwei zykelfreie Orientierungen von G sind spiegelsäquivalent.*
- (2) *G ist ein Multiwald (vgl. (7.3)(8)).*

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Es sei G kein Multiwald. Dann gibt es in G einen einfachen Kreis $(p_0|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p_0)$. Weil G keine Schleifen besitzt, ist $n \geq 3$.

Es sei C der Teilgraph von G mit $VC = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ und $EC = \{e_1, \dots, e_n\}$. Ist Γ eine zykelfreie Orientierung von C , so definieren wir

$$m(\Gamma) := \#\{e \in E\Gamma \mid \alpha(e) = p_i \text{ und } \omega(e) = p_{((i+1) \bmod n)} \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Numerieren wir die Punkte von C also im Uhrzeigersinn, so zählt $m(\Gamma)$ die Anzahl der im Uhrzeigersinn orientierten Pfeile von Γ .

Ist t eine Quelle oder Senke von Γ , so sieht man leicht, daß $m(\Gamma) = m(\sigma_t \Gamma)$ gilt. Jede endliche Folge von Spiegelungen an Punkten aus VC erhält also die Invariante m .

Wegen $n \geq 3$ existieren zwei zykelfreie Orientierungen Γ_1, Γ_2 von C mit $m(\Gamma_1) \neq m(\Gamma_2)$. Diese lassen sich durch mehrfache Anwendung von Lemma (9.3) zu zykelfreien Orientierungen von G fortsetzen, die dann aber nicht spiegelsäquivalent sind, da nur Spiegelungen an Punkten aus VC die Orientierung der Kanten in EC verändern können.

(2) \Rightarrow (1): Durch Induktion nach $\#VG$. Weil Multiwälder keine Schleifen haben, ist der Fall $\#VG = 1$ klar. Sei nun $\#VG > 1$. Da G keine einfachen Kreise und nur endlich viele Punkte besitzt, existiert ein Punkt $p \in VG$, der nur zu höchstens einem Punkt von G adjazent ist. Ist p ein isolierter Punkt, so können wir direkt mit der Induktionsvoraussetzung auf die Behauptung schließen; andernfalls sei q der einzige Nachbar von p . Seien nun Γ_1 und Γ_2 zwei zykelfreie Orientierungen von G . Nach Induktionsvoraussetzung können wir die Orientierungen $\Gamma_1 \setminus \{p\}$ und $\Gamma_2 \setminus \{p\}$ durch eine endliche Folge von Spiegelungen ineinander überführen. Diese Spiegelungen lassen sich auch in Γ_1 bzw. Γ_2 durchführen: Spiegelungen an q müssen dabei evtl. durch Spiegelungen an p vorbereitet werden. Stimmen anschließend die 'Richtungen' der Pfeile zwischen p und q in Γ_1 und Γ_2 überein, so ist man fertig; andernfalls muß noch einmal an p gespiegelt werden. (Beachte, daß alle Pfeile in einem Γ_i , die p und q verbinden, dieselbe Richtung haben, denn Γ_i ist zykelfrei.) \square

Aus Lemma (9.3) folgt induktiv: Jeder Multigraph ohne Schleifen besitzt eine zykliefreie Orientierung. Dieses und (9.2) mit (9.4) gestattet die folgende Definition:

(9.5) Definition: Sei G ein Multiwald. Man wählt eine zykliefreie Orientierung Γ von G und setzt

$$\chi_G := \chi_\Gamma.$$

χ_G ist das *Coxeterpolynom* von G . □

(9.6) Lemma: Sei Γ ein zykliefreier Köcher und sei r ein Punkt von Γ . Es gibt einen zu Γ spiegelsäquivalenten Köcher $\tilde{\Gamma}$, in dem r eine Senke ist. (Ebenfalls kann r natürlich durch Spiegelungen zu einer Quelle gemacht werden.)

Beweis: Die durch die Orientierung gegebene Halbordnung auf $V\Gamma$ läßt sich zu einer Ordnung erweitern; sei $V\Gamma = \{p_1, \dots, p_n\}$ so numeriert, daß gilt: Wenn ein Pfeil von p_j nach p_i existiert, so ist $i < j$. Es sei $r = p_k$. Wir spiegeln nun einfach der Reihe nach an p_1, \dots, p_{k-1} . Dann ist p_k eine Senke. □

Die in §12 vorzustellenden Programme bauen im wesentlichen auf der nun folgenden Formel zur Berechnung des Coxeterpolynoms auf. Eine wichtige Reduktion im Beweis wird von obigem Lemma geleistet, dessen Beweisidee aus [BGP] kommt.

(9.7) Das Identifizieren zweier Teilköcher. Seien $\Gamma_1 = (V\Gamma_1, E\Gamma_1, \alpha_1, \omega_1)$, $\Gamma_2 = (V\Gamma_2, E\Gamma_2, \alpha_2, \omega_2)$ Köcher, sei Δ_1 ein Teilköcher von Γ_1 und Δ_2 einer von Γ_2 . Δ_1 und Δ_2 seien isomorph; $f = (Vf, Ef): \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ sei ein Isomorphismus (vgl. (7.1)(4)). Die *Identifikation von Δ_1 und Δ_2 entlang f zu Δ* ist der folgendermaßen definierte Köcher $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma, \alpha, \omega)$:

Es sei \sim_V die Äquivalenzrelation auf $V\Gamma_1 \amalg V\Gamma_2$, die jedes $p \in V\Delta_1$ mit $(Vf)(p) \in V\Delta_2$ identifiziert; es sei \sim_E die Äquivalenzrelation auf $E\Gamma_1 \amalg E\Gamma_2$, die jedes $e \in E\Delta_1$ mit $(Ef)(e) \in E\Delta_2$ identifiziert; setze

$$V\Gamma := (V\Gamma_1 \amalg V\Gamma_2) / \sim_V \quad \text{und} \quad E\Gamma := (E\Gamma_1 \amalg E\Gamma_2) / \sim_E;$$

die Eigenschaften von f sichern, daß die natürlichen Abbildungen

$$\alpha_1 \amalg \alpha_2 : E\Gamma_1 \amalg E\Gamma_2 \longrightarrow V\Gamma_1 \amalg V\Gamma_2 \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 \amalg \omega_2 : E\Gamma_1 \amalg E\Gamma_2 \longrightarrow V\Gamma_1 \amalg V\Gamma_2$$

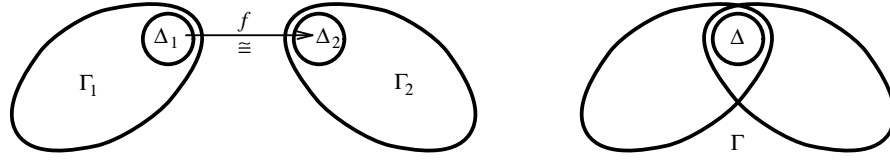
dann Abbildungen

$$\alpha : E\Gamma \longrightarrow V\Gamma \quad \text{und} \quad \omega : E\Gamma \longrightarrow V\Gamma$$

induzieren.

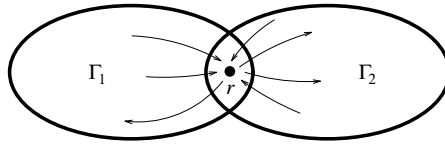
Natürlich ist Δ der Name des entstehenden, zu Δ_1 und Δ_2 isomorphen Teilköchers von Γ .

Folgendes Bild veranschaulicht die Situation:



□

(9.8) Satz [Identifizieren zweier Punkte]: Seien Γ_1 und Γ_2 zykelfreie Köcher; sei r_1 ein Punkt von Γ_1 und r_2 einer von Γ_2 . Der Köcher Γ entstehe aus Γ_1 und Γ_2 durch Identifikation von r_1 und r_2 zu r . Γ sieht also etwa so aus:



Bezeichnen wir mit $\{r\}$ den einpunktigen Köcher ohne Pfeile, so gilt:

$$\chi_\Gamma = \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}}.$$

Beweis: Nach (9.2) und (9.6) dürfen wir voraussetzen, daß r_1 , r_2 und r Senken sind. Wir setzen $\Gamma'_1 := \Gamma_1 \setminus \{r_1\}$, $\Gamma'_2 := \Gamma_2 \setminus \{r_2\}$ und können ohne Einschränkung $V\Gamma_1 = \{1, \dots, n_1\}$, $V\Gamma_2 = \{1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 - 1\}$ und $V\Gamma = \{1, \dots, n_1 + n_2 - 1\}$ sowie $r = r_1 = r_2 = 1$ annehmen.

Zur Notation: Es seien A'_1, A'_2, A_1, A_2, A die Adjazenzmatrizen, C'_1, C'_2, C_1, C_2, C die Cartanmatrizen, $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi$ die Coxetermatrizen und $\chi'_1, \chi'_2, \chi_1, \chi_2, \chi$ die Coxeterpolynome der beteiligten Köcher $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$; Mit I'_1, I'_2, I_1, I_2, I seien die Einheitsmatrizen der entsprechenden Formate bezeichnet. Ist X eine $n \times n$ -Matrix und $i \in \{1, \dots, n\}$, so steht $X(\cdot, i)$ für die $n \times (n - 1)$ -Matrix, die aus X durch Streichen der i -ten Spalte entsteht. Analog ist $X(i, \cdot)$ erklärt. Setze noch

$${}^t a = (a_q)_{q \in V\Gamma'_1} := (\#\{\text{Pfeile von } q \text{ nach } r \text{ in } \Gamma_1\})_{q \in V\Gamma'_1} \in \mathbb{Z}^{n_1-1}.$$

Damit gilt $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a \\ \hline 0 & A'_1 \end{array} \right)$. Die Anzahl der Wege von $p \in V\Gamma'_1$ nach r ergibt sich mit $C'_1 = (c_{uv}) = (\#\{\text{Wege von } v \text{ nach } u \text{ in } \Gamma'_1\})$ zu $\sum_{q \in V\Gamma'_1} a_q c_{qp}$; deshalb hat man

$$C_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & aC'_1 \\ \hline 0 & C'_1 \end{array} \right), \text{ also}$$

$$\Phi_1 = {}^t C_1 (A_1 - I_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline {}^t(aC'_1) & & & {}^t C'_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} -1 & a \\ \hline 0 & A'_1 - I'_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} -1 & a \\ \hline -{}^t(aC'_1) & {}^t(aC'_1)a + \Phi'_1 \end{array} \right).$$

Analog gilt mit ${}^tb = (b_q)_{q \in \text{VR}'_2} := (\#\{\text{Pfeile von } q \text{ nach } r \text{ in } \Gamma_2\})_{q \in \text{VR}'_2} \in \mathbb{Z}^{n_2-1}$:

$$\Phi_2 = \left(\begin{array}{c|c} -1 & b \\ \hline -{}^t(bC'_2) & {}^t(bC'_2)b + \Phi'_2 \end{array} \right).$$

Setzen wir $X'_1 := TI'_1 - \Phi'_1$ und $X'_2 := TI'_2 - \Phi'_2$, so gilt

$$(*) \quad \chi_1 = \left| \left(\begin{array}{c|c} T+1 & -a \\ \hline {}^t(aC'_1) & X'_1 - {}^t(aC'_1)a \end{array} \right) \right| = \left| \left(\begin{array}{c|c} T+1 & Ta \\ \hline {}^t(aC'_1) & X'_1 \end{array} \right) \right|$$

(durch Addition des a_i -fachen der ersten zur i -ten Spalte für $i = 2, \dots, n_1$). Ebenso läßt sich χ_2 darstellen.

Es ist $A = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & a & b \\ \hline 0 & A'_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A'_2 \end{array} \right)$ und $C = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & aC'_1 & bC'_2 \\ \hline 0 & C'_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C'_2 \end{array} \right)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \Phi = {}^tC(A - I) &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline {}^t(aC'_1) & {}^tC'_1 & 0 \\ \hline {}^t(bC'_2) & 0 & {}^tC'_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & a & b \\ \hline 0 & A'_1 - I'_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A'_2 - I'_2 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & a & b \\ \hline -{}^t(aC'_1) & {}^t(aC'_1)a + \Phi'_1 & {}^t(aC'_1)b \\ \hline -{}^t(bC'_2) & {}^t(bC'_2)a & {}^t(bC'_2)b + \Phi'_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\chi = \left| \left(\begin{array}{c|c|c} T+1 & -a & -b \\ \hline {}^t(aC'_1) & X'_1 - {}^t(aC'_1)a & -{}^t(aC'_1)b \\ \hline {}^t(bC'_2) & -{}^t(bC'_2)a & X'_2 - {}^t(bC'_2)b \end{array} \right) \right|$$

durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Spalte zu den anderen:

$$= \left| \left(\begin{array}{c|c|c} T+1 & Ta & Tb \\ \hline {}^t(aC'_1) & X'_1 & 0 \\ \hline {}^t(bC'_2) & 0 & X'_2 \end{array} \right) \right|$$

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
&= (T+1)\chi'_1\chi'_2 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n_1} (-1)^{i+1} T a_i \left| \left(\frac{{}^t(aC'_1) \mid X'_1(, i-1) \mid 0}{{}^t(bC'_2) \mid 0 \mid X'_2} \right) \right| \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n_2} (-1)^{n_1+i} T b_{n_1+i-1} \left| \left(\frac{{}^t(aC'_1) \mid X'_1 \mid 0}{{}^t(bC'_2) \mid 0 \mid X'_2(, i-1)} \right) \right| \\
&= (T+1)\chi'_1\chi'_2 \\
&\quad + \chi'_2 \sum_{i=2}^{n_1} (-1)^{i+1} T a_i \left| \left({}^t(aC'_1) \mid X'_1(, i-1) \right) \right| \\
&\quad + (-1)^{n_1-1} \chi'_1 \sum_{i=2}^{n_2} (-1)^{n_1+i} T b_{n_1+i-1} \left| \left({}^t(bC'_2) \mid X'_2(, i-1) \right) \right|
\end{aligned}$$

Entwicklung von χ_1 und χ_2 in der Form (*) nach der ersten Zeile liefert:

$$\begin{aligned}
&= (T+1)\chi'_1\chi'_2 \\
&\quad + \chi'_2(\chi_1 - (T+1)\chi'_1) \\
&\quad + \chi'_1(\chi_2 - (T+1)\chi'_2) \\
&= \chi_1\chi'_2 + \chi'_1\chi_2 - (T+1)\chi'_1\chi'_2.
\end{aligned}$$

□

Die Formel lautet etwas ungenau aber griffig formuliert:

Aus $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{r\}$ folgt

$$\chi_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}}.$$

Man beachte auch, daß die Formel im Fall $\Gamma_2 = \{r\}$, also beim 'Ankleben eines Punktes an Γ'_1 ', keine Information liefert:

$$\begin{aligned}
\chi_{\Gamma_1} &= \chi_{\Gamma} = \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{r\}} \\
&= \chi_{\Gamma_1} \chi_{\emptyset} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\{r\}} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\emptyset} \\
&= \chi_{\Gamma_1}
\end{aligned}$$

(\emptyset bezeichnet natürlich den Köcher mit leerer Punkt- und Pfeilmenge; es ist $\chi_{\emptyset} = 1$).

(9.9) Lemma: Seien Γ_1 und Γ_2 zyklfreie Köcher; sei r_1 ein Punkt von Γ_1 und r_2 einer von Γ_2 . Der Köcher Γ entstehe aus Γ_1 und Γ_2 durch Identifikation von r_1 und r_2 zu r . Es sei $\tilde{\Gamma}_1$ spiegelsäquivalent zu Γ_1 und $\tilde{\Gamma}_2$ spiegelsäquivalent zu Γ_2 . $\tilde{\Gamma}$ entstehe aus $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$ durch Identifikation von r_1 und r_2 . Dann ist $\tilde{\Gamma}$ spiegelsäquivalent zu Γ , und insbesondere gilt

$$\chi_{\Gamma} = \chi_{\tilde{\Gamma}}.$$

Beweis: Ich zeige, daß jede Spiegelung an einem Punkt von Γ_1 im Köcher Γ nachvollzogen werden kann, ohne die Orientierung der Kanten von $\tilde{\Gamma}_2$ zu ändern. Das

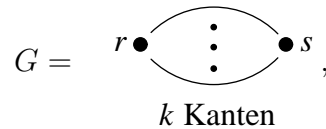
Resultat folgt dann induktiv.

Problematisch ist offenbar nur eine Spiegelung an r , denn sie ist nur dann erlaubt, wenn r eine Senke oder Quelle von Γ ist, und sie verändert die Orientierung einiger Kanten von $\bar{\Gamma}_2$. Wir betrachten den Fall, daß $r = r_1$ eine Senke von Γ_1 ist, und an r gespiegelt werden soll.

Die Punktmenge $V\Gamma_2 = \{p_1, \dots, p_n\}$ von Γ_2 sei so geordnet, daß gilt: Wenn in Γ_2 ein Pfeil von p_j nach p_i existiert, so ist $i < j$. Es gelte $r = p_k$. Wir spiegeln nun der Reihe nach an p_1, \dots, p_{k-1} . Dann ist p_k eine Senke der auf $\bar{\Gamma}_2$ entstandenen Orientierung und daher auch eine der auf $\bar{\Gamma}$ entstandenen Orientierung; es kann in Γ an $r = p_k$ gespiegelt werden. Anschließend spiegelt man der Reihe nach an p_{k+1}, \dots, p_n , und erhält auf $\bar{\Gamma}_2$ wieder die Ausgangsorientierung Γ_2 zurück, denn jeder Pfeil von Γ_2 hat zweimal ihre Richtung gewechselt. \square

Wieder erinnert der Beweis an Schlußweisen aus [BGP].

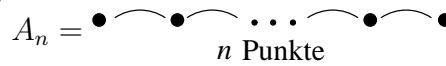
(9.10) Zwei elementare Multibäume. (1) Ist G der Multigraph bestehend aus einer k -fachen Kante mit $k \geq 0$, also



so gilt

$$\chi_G = \begin{vmatrix} T - (k^2 - 1) & k \\ -k & T - (-1) \end{vmatrix} = (T + 1)^2 - k^2 T = \chi_{\{r\}} \chi_{\{s\}} - k^2 T.$$

(2) Für den linearen Graphen



mit $n \geq 0$ gilt

$$\chi_{A_n} = v_{n+1} := \frac{T^{n+1} - 1}{T - 1}.$$

Beweis: Induktion nach n . A_0 ist der leere Graph mit Coxeterpolynom $1 = v_1$, A_1 ist der einpunktige Graph ohne Kanten mit $\chi_{A_1} = T + 1 = v_2$ und A_2 ist eine einfache Kante und hat nach (1) das Coxeterpolynom $(T + 1)^2 - T = v_3$.

Gelte nun $n \geq 3$. Die Formel (9.8) liefert mit der Induktionsvoraussetzung:

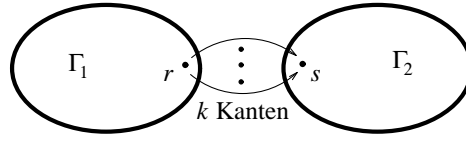
$$\begin{aligned} \chi_{A_n} &= \chi_{A_1} \chi_{A_{n-1}} + \chi_{A_2} \chi_{A_{n-2}} - (T + 1) \chi_{A_1} \chi_{A_{n-2}} \\ &= (T + 1) v_n + (\chi_{A_2} - (T + 1)^2) v_{n-1} \\ &= (T + 1) v_n - T v_{n-1} \\ &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

\square

Die beiden Formeln werden wir in (9.14) als Spezialfälle einer umfassenderen Beziehung erkennen.

Für das konkrete Rechnen sind 3 Folgerungen aus (9.8) nützlich:

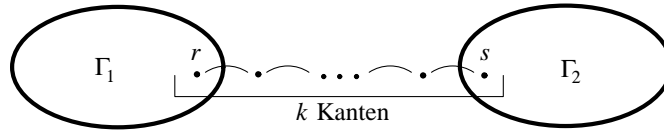
(9.11) **Korollar:** (1) Betrachte einen Köcher Γ der Form



(mit $k \geq 0$). Es gilt:

$$\chi_\Gamma = \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} - k^2 T \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.$$

(2) Sei Γ ein Köcher, der wie folgt aussieht (es sei $k \geq 0$):

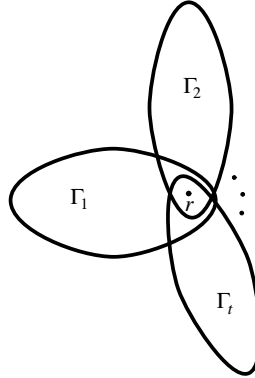


Die Orientierung der Kanten des linearen Graphen zwischen r und s ist für das Coxeterpolynom dabei belanglos. Es gilt:

$$\chi_\Gamma = v_k \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} - T v_{k-1} (\chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} + \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}) + T^2 v_{k-2} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.$$

(Dabei ist $v_0 = \frac{T^0 - 1}{T - 1} = 0$, $v_{-1} = \frac{T^{-1} - 1}{T - 1} = -\frac{1}{T}$ und $v_{-2} = \frac{T^{-2} - 1}{T - 1} = -\frac{T+1}{T^2}$ gesetzt; die übrigen v_k sind in (9.10)(2) erklärt.)

(3) Wenn Γ so aussieht:



(also $t \geq 1$ Teilköcher $\Gamma_1, \dots, \Gamma_t$ mit $\cup_{i=1}^n \text{VT}_i = \text{VT}$ und $\text{VT}_i \cap \text{VT}_j = \{r\}$ für $i \neq j$ hat), dann gilt

$$\chi_\Gamma = \left(\prod_{i=1}^t \chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}} \right) \left(\sum_{i=1}^t \frac{\chi_{\Gamma_i}}{\chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}}} - (t-1) \chi_{\{r\}} \right).$$

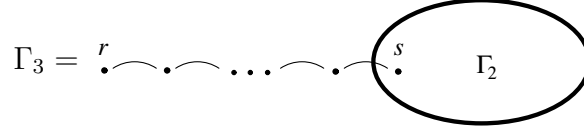
Beweis: (1) Sei $\Gamma_3 =$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \chi_{\Gamma_3} &= (\chi_{\{r\}} \chi_{\{s\}} - k^2 T) \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{r\}} \chi_{\{s\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} \\ &= \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_2} - k^2 T \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{also } \chi_\Gamma &= \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_3 \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_3} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_3 \setminus \{r\}} \\
&= \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} (\chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_2} - k^2 T \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}) - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} \\
&= \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} - k^2 T \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.
\end{aligned}$$

(2) Für $k = 0$ erhält man mit den oben angegebenen Definitionen für v_0 , v_{-1} und v_{-2} gerade die Formel aus (9.8) zurück.

Sei nun $k > 0$. Ich setze



Dann ist (9.8) anwendbar (beachte, daß nach (9.2), (9.4) und (9.9) die Orientierung des linearen Astes von Γ_3 für das Coxeterpolynom keine Rolle spielt), und man erhält

$$\chi_{\Gamma_3} = v_{k+2} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + v_{k+1} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{s\}} v_{k+1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.$$

Weiter gilt:

$$\chi_{\Gamma_3 \setminus \{r\}} = v_{k+1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + v_k \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{s\}} v_k \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.$$

Nun ergibt sich schon das Resultat:

$$\begin{aligned}
\chi_\Gamma &= \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_3 \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_3} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_3 \setminus \{r\}} \\
&= v_{k+1} \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + v_k \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{s\}} v_k \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} \\
&\quad + v_{k+2} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + v_{k+1} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{s\}} v_{k+1} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} \\
&\quad - \chi_{\{r\}} (v_{k+1} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + v_k \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} - \chi_{\{s\}} v_k \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}) \\
&= v_k \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} \\
&\quad + \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} (v_{k+1} - \chi_{\{s\}} v_k) + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2} (v_{k+1} - \chi_{\{r\}} v_k) \\
&\quad + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} (v_{k+2} - \chi_{\{s\}} v_{k+1} - \chi_{\{r\}} v_{k+1} + \chi_{\{r\}} \chi_{\{s\}} v_k) \\
&= v_k \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2} - T v_{k-1} (\chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}} + \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2}) + T^2 v_{k-2} \chi_{\Gamma_1 \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2 \setminus \{s\}}.
\end{aligned}$$

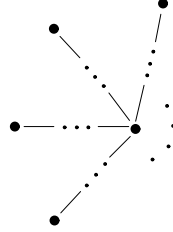
(3) Durch Induktion nach t ; $t = 1$ ist trivial.

Gelte nun $t > 1$. Setze $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus (\text{VT}_t \setminus \{r\})$. Dann zerfällt $\tilde{\Gamma} \setminus \{r\}$ in die $t - 1$ Zusammenhangskomponenten $\Gamma_1 \setminus \{r\}, \dots, \Gamma_{t-1} \setminus \{r\}$, und nach (8.5)(5) ist $\chi_{\tilde{\Gamma} \setminus \{r\}} = \prod_{i=1}^{t-1} \chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}}$. Mit der Induktionsvoraussetzung und (9.8) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_\Gamma &= \chi_{\tilde{\Gamma}} \chi_{\Gamma_t \setminus \{r\}} + \chi_{\tilde{\Gamma} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_t} - \chi_{\{r\}} \chi_{\tilde{\Gamma} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_t \setminus \{r\}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{t-1} \chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}} \right) \left(\sum_{i=1}^{t-1} \frac{\chi_{\Gamma_i}}{\chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}}} - (t-2) \chi_{\{r\}} \right) \chi_{\Gamma_t \setminus \{r\}} \\
&\quad + \left(\prod_{i=1}^{t-1} \chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}} \right) (\chi_{\Gamma_t} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_t \setminus \{r\}}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^t \chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}} \right) \left(\sum_{i=1}^t \frac{\chi_{\Gamma_i}}{\chi_{\Gamma_i \setminus \{r\}}} - (t-1) \chi_{\{r\}} \right).
\end{aligned}$$

□

(9.12) Bemerkung: (1) Als Spezialfall von (9.11)(3) ergibt sich natürlich das Coxeterpolynom χ_{p_1, \dots, p_t} eines Sterns vom Typ $[p_1, \dots, p_t]$



(die t Arme bestehen einschließlich des Verzweigungspunktes der Reihe nach aus p_1, \dots, p_t Punkten) zu

$$\chi_{p_1, \dots, p_t} = \left(\prod_{i=1}^t v_{p_i} \right) \left(\sum_{i=1}^t \frac{v_{p_i+1}}{v_{p_i}} - (t-1)(T+1) \right).$$

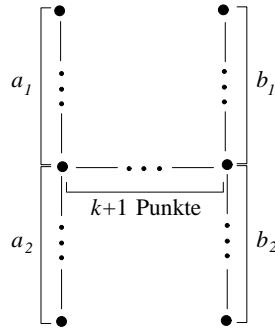
Benutzt man

$$\frac{T^{p_i+1} - 1}{T^{p_i} - 1} - (T+1) = -T \frac{T^{p_i-1} - 1}{T^{p_i} - 1},$$

so erhält man hieraus die folgende Formel, die in [LenzPena] auf ganz anderem Wege hergeleitet wurde:

$$\chi_{p_1, \dots, p_t} = \left(\prod_{i=1}^t v_{p_i} \right) \left((T+1) - T \sum_{i=1}^t \frac{v_{p_i-1}}{v_{p_i}} \right).$$

(2) Aus (9.11)(2) ergibt sich eine Formel für das Coxeterpolynom des einfachsten Graphen mit 2 Verzweigungspunkten,



nämlich

$$v_k v_{a_1+a_2} v_{b_1+b_2} - T v_{k-1} (v_{a_1} v_{a_2} v_{b_1+b_2} + v_{b_1} v_{b_2} v_{a_1+a_2}) + T^2 v_{k-2} v_{a_1} v_{a_2} v_{b_1} v_{b_2}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Formeln aus [GHJ]. □

In (9.11)(3) haben wir bereits eine Generalisierung der Formel (9.8) gesehen; nun folgt eine weitere. Wir identifizieren (vgl. (9.7)) nicht mehr nur zwei Punkte miteinander, sondern ganze 'konvexe' Teilwälder.

(9.13) Satz: Es seien Γ_1, Γ_2 zyklfreie Köcher mit vermöge $f: \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ isomorphen Teilköchern Δ_1 und Δ_2 . Sei Γ der aus Γ_1 und Γ_2 durch Identifikation von Δ_1 und Δ_2 entlang f zu Δ entstehende Köcher. Wir setzen voraus, daß $\overline{\Delta}$ ein Multiwald ist und daß Δ in Γ in folgendem Sinne konvex ist: in $\overline{\Gamma} \setminus E\Delta$ sind die Punkte von Δ paarweise nicht verbunden (vgl. (7.3)(6)). Identifiziere Γ_1 und Γ_2 mit ihrem Bild in Γ . Dann gilt mit $\hat{\Gamma}_1 := \Gamma_1 \setminus E\Delta$ und $\hat{\Gamma}_2 := \Gamma_2 \setminus E\Delta$:

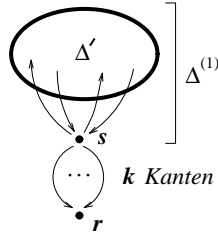
$$\chi_\Gamma = \sum_{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta} (-1)^{\#D} \chi_{\hat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\hat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)}.$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle Zerlegungen von $V\Delta$ in 3 disjunkte Teilmengen A_1, D, A_2 .

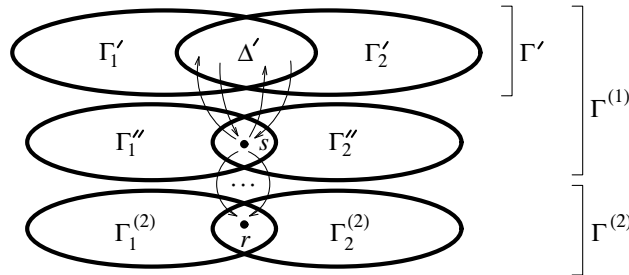
Beweis: Induktion nach $\#V\Delta$. Im Fall $\#V\Delta = 0$ ist Γ die disjunkte Vereinigung von Γ_1 und Γ_2 , also $\chi_\Gamma = \chi_{\Gamma_1} \chi_{\Gamma_2}$ in Übereinstimmung mit der Formel.

Ist $\#V\Delta = 1$, so liegt exakt die Situation aus (9.8) vor: die Formel ist korrekt.

Nun gelte $\#V\Delta > 1$. Weil $\overline{\Delta}$ ein Multiwald ist, existiert ein Punkt $r \in V\Delta$, der nur zu höchstens einem anderen Punkt $s \in V\Delta$ adjazent ist. Für den Fall einer Senke r sieht Δ also etwa so aus:



Γ hat dann wegen der Konvexität von Δ die folgende Gestalt:



Setze noch $\hat{\Gamma}'_1 := \Gamma'_1 \setminus E\Delta'$ und $\hat{\Gamma}'_2 := \Gamma'_2 \setminus E\Delta'$; $\hat{\Gamma}_1^{(1)}$ bezeichne die disjunkte Vereinigung von $\hat{\Gamma}'_1$ und $\hat{\Gamma}_1''$ und $\hat{\Gamma}_2^{(1)}$ bezeichne diejenige von $\hat{\Gamma}'_2$ und $\hat{\Gamma}_2''$. Ich beginne mit einer Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ \{r, s\} \not\subset D}} (-1)^{\#D} \chi_{\hat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\hat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \\ &= \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ r \notin D}} (-1)^{\#D} \chi_{\hat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\hat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \\ &+ \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ s \notin D, r \in D}} (-1)^{\#D} \chi_{\hat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\hat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\chi_{\Gamma_1^{(2)}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)}}) \\
&\quad \sum_{A_1^{(1)} \cup D^{(1)} \cup A_2^{(1)} = V\Delta^{(1)}} (-1)^{\#D^{(1)}} \chi_{\widehat{\Gamma}_1^{(1)} \setminus (D^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\widehat{\Gamma}_2^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup D^{(1)})} \\
&\quad - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} \\
&\quad \sum_{\substack{A_1^{(1)} \cup D^{(1)} \cup A_2^{(1)} = V\Delta^{(1)} \\ s \notin D^{(1)}}} (-1)^{\#D^{(1)}} \chi_{\widehat{\Gamma}_1^{(1)} \setminus (D^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\widehat{\Gamma}_2^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup D^{(1)})} \\
&= (\chi_{\Gamma_1^{(2)}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)}} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}}) \\
&\quad \sum_{A_1^{(1)} \cup D^{(1)} \cup A_2^{(1)} = V\Delta^{(1)}} (-1)^{\#D^{(1)}} \chi_{\widehat{\Gamma}_1^{(1)} \setminus (D^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\widehat{\Gamma}_2^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup D^{(1)})} \\
&\quad + \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} \\
&\quad \left(- \chi_{\Gamma_1'' \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma_2'' \setminus \{s\}} \sum_{A_1' \cup D' \cup A_2' = V\Delta'} (-1)^{\#D'} \chi_{\widehat{\Gamma}_1' \setminus (D' \cup A_2')} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1' \cup A_2')} \chi_{\widehat{\Gamma}_2' \setminus (A_1' \cup D')} \right)
\end{aligned}$$

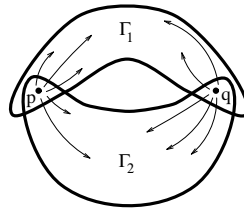
Hiermit, mit (9.11)(1) und mit der Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $\Gamma^{(1)}$ und auf Γ' , folgt nun:

$$\begin{aligned}
\chi_{\Gamma} &= \chi_{\Gamma^{(1)}} \chi_{\Gamma^{(2)}} - k^2 T \chi_{\Gamma^{(1)} \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma^{(2)} \setminus \{r\}} \\
&= (\chi_{\Gamma_1^{(2)}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} + \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)}} - \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}}) \\
&\quad \sum_{A_1^{(1)} \cup D^{(1)} \cup A_2^{(1)} = V\Delta^{(1)}} (-1)^{\#D^{(1)}} \chi_{\widehat{\Gamma}_1^{(1)} \setminus (D^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)})} \chi_{\widehat{\Gamma}_2^{(1)} \setminus (A_1^{(1)} \cup D^{(1)})} \\
&\quad - k^2 T \chi_{\Gamma_1'' \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma_2'' \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma'} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} \\
&= \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ \{r, s\} \not\subset D}} (-1)^{\#D} \chi_{\widehat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\widehat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \\
&\quad + \chi_{\{r\}} \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_1'' \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma_2'' \setminus \{s\}} \\
&\quad \sum_{A_1' \cup D' \cup A_2' = V\Delta'} (-1)^{\#D'} \chi_{\widehat{\Gamma}_1' \setminus (D' \cup A_2')} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1' \cup A_2')} \chi_{\widehat{\Gamma}_2' \setminus (A_1' \cup D')} \\
&\quad - k^2 T \chi_{\Gamma_1^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_2^{(2)} \setminus \{r\}} \chi_{\Gamma_1'' \setminus \{s\}} \chi_{\Gamma_2'' \setminus \{s\}} \\
&\quad \sum_{A_1' \cup D' \cup A_2' = V\Delta'} (-1)^{\#D'} \chi_{\widehat{\Gamma}_1' \setminus (D' \cup A_2')} \chi_{\Delta^{(1)} \setminus (A_1' \cup A_2')} \chi_{\widehat{\Gamma}_2' \setminus (A_1' \cup D')} \\
&= \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ \{r, s\} \not\subset D}} (-1)^{\#D} \chi_{\widehat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\widehat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \\
&\quad + \sum_{\substack{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta \\ \{r, s\} \subset D}} \left((-1)^{\#D} \chi_{\widehat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\widehat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)} \right. \\
&\quad \left. (\chi_{\{r\}} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2) \setminus \{r\}} - k^2 T \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2) \setminus \{r, s\}}) \right) \\
&= \sum_{A_1 \cup D \cup A_2 = V\Delta} (-1)^{\#D} \chi_{\widehat{\Gamma}_1 \setminus (D \cup A_2)} \chi_{\Delta \setminus (A_1 \cup A_2)} \chi_{\widehat{\Gamma}_2 \setminus (A_1 \cup D)}.
\end{aligned}$$

□

Die Formeln, die bisher vorgestellt wurden, sind noch unbefriedigend; sie gestatten nicht einmal die Berechnung des Coxeterpolynoms eines (natürlich zyklisch orientierten) einfachen Kreises. Durch Iteration der bisher beherrschten Operationen lassen sich im wesentlichen nur Multibäume (bzw. -wälder) erledigen.

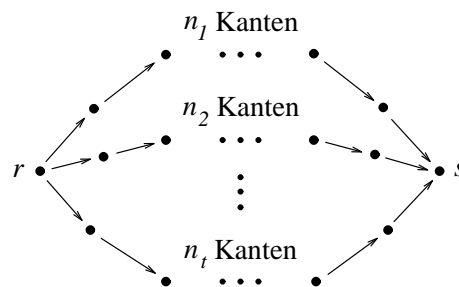
Allerdings muß man beachten, daß es definitiv *keine* Formel geben kann, die folgendes leistet: *Gegeben* seien zwei Köcher Γ_1, Γ_2 ; p_1, q_1 seien Quellen von Γ_1 und p_2, q_2 seien Quellen von Γ_2 . Γ entstehe aus Γ_1 und Γ_2 durch Identifikation von p_1 mit p_2 zu p und q_1 mit q_2 zu q .



Gesucht ist χ_Γ in Abhängigkeit von χ_{Γ_1} , χ_{Γ_2} , $\chi_{\Gamma_1 \setminus \{p\}}$, $\chi_{\Gamma_2 \setminus \{p\}}$, $\chi_{\Gamma_1 \setminus \{q\}}$, $\chi_{\Gamma_2 \setminus \{q\}}$, $\chi_{\Gamma_1 \setminus \{p,q\}}$, $\chi_{\Gamma_2 \setminus \{p,q\}}$.

Daß ein derartiger Zusammenhang nicht existiert, sieht man so ein: In (9.15) wird herauskommen, daß das Coxeterpolynom eines einfachen Kreises von dessen Orientierung, nämlich von der Anzahl der 'im Uhrzeigersinn orientierten Kanten' abhängt; man kann sich einen einfachen Kreis vorstellen als Ergebnis der Identifikation der Endpunkte zweier linearer Graphen. Die Coxeterpolynome dieser linearen Graphen hängen nach (9.2) und (9.4) aber nicht von ihrer Orientierung ab. Also kann es keine Formel geben, die das Coxeterpolynom des einfachen Kreises alleine aus den Coxeterpolynomen der beteiligten linearen Graphen bestimmt.

(9.14) Satz: *Es sei Γ der folgende Köcher:*



Dabei ist $t \in \mathbb{N}_0$ und $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_\Gamma &= \left(\prod_{i=1}^t v_{n_i} \right) \left((T+1)^2 - t^2 T + (t-2)T(T+1) \sum_{i=1}^t \frac{v_{n_i-1}}{v_{n_i}} \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^t v_{n_i} \right) \left((t-1)^2 (T+1)^2 - t^2 T - (t-2)(T+1) \sum_{i=1}^t \frac{v_{n_i+1}}{v_{n_i}} \right). \end{aligned}$$

Beweis: Beim Erstellen der Coxetermatrizen im Laufe dieses Beweises benutze ich ständig die Beschreibung (8.5)(4) der Coxetermatrix eines Köchers durch die in ihm vorhandenen Wege und Twist-Wege. Nicht aufgeführte Einträge in einer Matrix sind

stets als 0 zu lesen.

Die Zahlen n_1, \dots, n_t seien so numeriert, daß $n_1 = \dots = n_k = 1$ und $n_{k+1}, \dots, n_t > 1$ gilt. Dabei ist also $k \in \{0, \dots, t\}$.

Für $i \in \{k+1, \dots, t\}$ sei

$$\Phi_i := \Phi_{A_{n_i-1}} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Coxetermatrix des linearen Graphen mit $n_i - 1$ Punkten. Setze

$$X_i := TI_{n_i-1} - \Phi_i = \begin{pmatrix} T & & & 1 \\ -1 & \ddots & & 1 \\ & \ddots & T & \vdots \\ 0 & & -1 & T+1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $|X_i| = v_{n_i}$. Es sei X'_i die Matrix, die aus X_i entsteht, indem die letzte Spalte durch ${}^t(1, \dots, 1)$ ersetzt wird. Entwickelt man X_i und X'_i nach der letzten Zeile oder Spalte, so sieht man

$$|X'_i| = |X_i| - TT^{n_i-2} = v_{n_i-1}.$$

$\Gamma \setminus \{s\}$ ist ein Stern vom Typ $[n_{k+1}, \dots, n_t]$; wählt man r als ersten Punkt der Numerierung und zählt anschließend die Punkte der linearen Äste der Reihe nach durch, so ergibt sich die folgende Coxetermatrix:

$$\Phi_{\Gamma \setminus \{s\}} = \begin{pmatrix} (t-k-1) & & -1 & & -1 & & -1 \\ 1 & & & & & & \\ & \boxed{\Phi_{k+1}} & & & & & \\ 1 & & & \boxed{\Phi_{k+2}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & & \boxed{\Phi_t} \end{pmatrix}$$

denn: von r nach r gibt es genau einen Weg und $t - k$ Twist-Wege (diese haben die Länge 2); von r zu einer jeden Nicht-Senke von $\Gamma \setminus \{s\}$ gibt es genau einen Weg und einen Twist-Weg, und von r zu einer jeden Senke von $\Gamma \setminus \{s\}$ gibt es genau einen Weg und keinen Twist-Weg. Von den zu r adjazenten Punkten gibt es in $\Gamma \setminus \{s\}$ nach r jeweils genau einen Twistweg (der Länge 1).

Ich setze noch

$$\widetilde{\Phi}_i := \Phi_i + \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir können jetzt die Coxetermatrix von Γ aufstellen (wobei r in der Numerierung der erste und s der letzte Punkt sei):

$$\Phi_{\Gamma} = \begin{pmatrix} tk+t-k-1 & (t-1) & (t-1) & (t-1) & -t \\ k+1 & \boxed{\widetilde{\Phi}_{k+1}} & 1 & 1 & -1 \\ k & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & 1 & \boxed{\widetilde{\Phi}_{k+2}} & 1 & \vdots \\ k+1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & \vdots & 1 & \dots & 1 \\ k+1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & \vdots & \vdots & \boxed{\widetilde{\Phi}_t} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k & 1 & 1 & 1 & -1 \\ k & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Dies kommt so zustande: Das Hinzufügen der Senke s zu $\Gamma \setminus \{s\}$ hat zur Folge, daß nunmehr von r aus zu jeder Senke von $\Gamma \setminus \{s\}$ t Twist-Wege verlaufen; außerdem gibt es nun von jedem Punkt aus $V\Gamma \setminus \{r, s\}$ zu jeder Senke von $\Gamma \setminus \{s\}$ einen zusätzlichen Twist-Weg (nämlich den, der über s verläuft). Von r nach r existieren nun tk zusätzliche Twistwege: Es gibt t Möglichkeiten, von r nach s zu laufen, von dort geht es dann auf einer der k Pfeile zurück nach r . Offenbar gibt es von r nach s genau t Wege und keinen Twist-Weg, von jedem anderen Punkt aus gibt es genau einen Weg nach s und ebenfalls keinen Twist-Weg. Von jeder Nicht-Quelle von $\Gamma \setminus \{r\}$ nach r existieren genau k Twist-Wege (man läuft zuerst nach s und dann über eine der k Pfeile zurück nach r) und kein Weg; von jeder Quelle von $\Gamma \setminus \{r\}$ nach r gibt es keinen Weg, aber nun k zusätzliche Twistwege (die über s verlaufen). Von s aus gibt es zu den Senken von $\Gamma \setminus \{s\}$ jeweils genau einen Twist-Weg (dieser hat die Länge 1) und keine Wege; zu den anderen Punkten von $\Gamma \setminus \{s, r\}$ gibt es von s aus weder Wege noch Twist-Wege.

Es ist nun die Determinante $\chi_{\Gamma} = |TI - \Phi_{\Gamma}|$ zu berechnen. Zunächst addiere ich das k -fache der letzten Spalte zur ersten und anschließend jeweils die letzte Spalte zu den

Spalten, die den Senken von $\Gamma \setminus \{s\}$ entsprechen. So ergibt sich

$$\chi_\Gamma = \begin{vmatrix} (T-t+k+1) & 1 & 1 & 1 & t \\ -1 & \boxed{X_{k+1}} & & & 1 \\ & -1 & \boxed{X_{k+2}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ -1 & & & \boxed{X_t} & \vdots \\ kT & T & T & T & T+1 \end{vmatrix}$$

Nun kann man das T -fache der ersten von der letzten Zeile subtrahieren:

$$= \begin{vmatrix} (T-t+k+1) & -1 & -1 & -1 & t \\ -1 & \boxed{X_{k+1}} & & & 1 \\ & -1 & \boxed{X_{k+2}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ -1 & & & \boxed{X_t} & \vdots \\ ((t-1)T-T^2) & & & & (T+1-tT) \end{vmatrix}$$

und nun nach der letzten Zeile entwickeln:

$$= (T+1-tT) |TI - \Phi_{\Gamma \setminus \{s\}}| \\ - (-1)^{\sum_{i=k+1}^t (n_i-1)} ((t-1)T - T^2) \begin{vmatrix} & -1 & -1 & -1 & t \\ & \boxed{X_{k+1}} & & & 1 \\ & & \boxed{X_{k+2}} & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \boxed{X_t} & \vdots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Das Coxeterpolynom $|TI - \Phi_{\Gamma \setminus \{s\}}|$ eines Sterns wurde in (9.12)(1) bestimmt; die Determinante entwickeln wir nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
&= \left((1-t)T + 1 \right) \left(\prod_{i=k+1}^t v_{n_i} \right) \left((T+1) - T \sum_{i=k+1}^t \frac{v_{n_i-1}}{v_{n_i}} \right) \\
&\quad - (-1)^{\sum_{i=k+1}^t (n_i-1)} \left((t-1)T - T^2 \right) \\
&\quad \left((-1)^{\sum_{i=k+1}^t (n_i-1)} t \prod_{i=k+1}^t |X_i| \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{\sum_{i=k+1}^t (n_i-1)} \sum_{i=k+1}^t \begin{vmatrix} \boxed{X_{k+1}} & & & & 1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \boxed{X'_i} & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{X_t} \end{vmatrix} \right) \\
&= \left((1-t)T + 1 \right) \left(\prod_{i=k+1}^t v_{n_i} \right) \left((T+1) - T \sum_{i=k+1}^t \frac{v_{n_i-1}}{v_{n_i}} \right) \\
&\quad + \left((t-1)T - T^2 \right) \left((-t) \prod_{i=k+1}^t |X_i| + \sum_{i=k+1}^t |X'_i| \prod_{\substack{j=k+1 \\ j \neq i}}^t |X_j| \right) \\
&= \left(\prod_{i=k+1}^t v_{n_i} \right) \\
&\quad \left(\left((1-t)T + 1 \right) (T+1) + \left((t-1)T - T^2 \right) (-t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left((1-t)T + 1 \right) (-T) + \left((t-1)T - T^2 \right) \right) \sum_{i=k+1}^t \frac{v_{n_i-1}}{v_{n_i}} \right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^t v_{n_i} \right) \left((T+1)^2 - t^2 T + (t-2)T(T+1) \sum_{i=1}^t \frac{v_{n_i-1}}{v_{n_i}} \right).
\end{aligned}$$

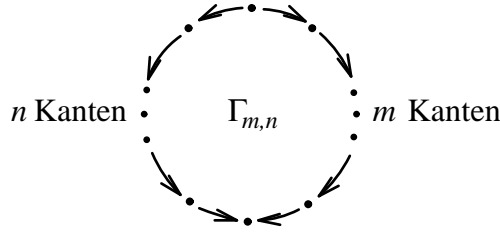
Die zweite behauptete Formel folgt aus der ersten wieder mit der Beziehung

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - (T+1) = -T \frac{v_{n-1}}{v_n}$$

□

(9.15) Das Coxeterpolynom einfacher Kreise. Es sei C ein Graph, der nur aus einem einfachen Kreis (wie in (7.3)(5) definiert) besteht und mehr als einen Punkt besitzt.

(1) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m + n = \#EC$. Betrachte die folgende Orientierung von C :



Es gilt

$$\chi_{\Gamma_{m,n}} = (T^m - 1)(T^n - 1).$$

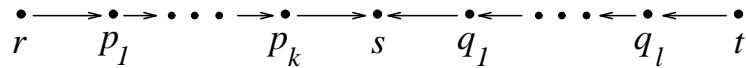
Beweis: Die erste Formel aus (9.14) liefert für $t = 2$, $n_1 = m$ und $n_2 = n$:

$$\chi_{\Gamma_{m,n}} = v_m v_n ((T + 1)^2 - 4T^2) = v_m (T - 1) v_n (T - 1) = (T^m - 1)(T^n - 1).$$

(2) Jede zyklfreie Orientierung Γ von C läßt sich durch eine Folge von Spiegelungen in eine der in (1) beschriebenen Orientierungen $\Gamma_{m,n}$ überführen; dabei ist $\{m, n\}$ durch Γ eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Orientierungen $\Gamma_{m,n}$ sind dadurch charakterisiert, daß sie genau eine Quelle und eine Senke besitzen.

Sei nun Γ eine zyklfreie Orientierung von C , die diese Eigenschaft nicht hat. Dann enthält Γ ohne Einschränkung den folgenden Köcher als vollen Teilköcher:



Dabei sind r und t Quellen von Γ . Sind k und l größer als 0, so spiegelt man erst an s , dann an q_1, \dots, q_l und an p_k, \dots, p_1 . Anschließend sind r und t keine Quellen oder Senken mehr. p_1 und q_l sind Quellen geworden und s ist Senke geblieben: der Abstand von s zu den beiden Quellen hat sich also verringert. Induktiv erreicht man so also stets den Fall, daß $k = 0$ oder $l = 0$ ist; gelte etwa $k = 0$. Man spiegelt der Reihe nach an s, q_1, \dots, q_l ; dann bleibt nur die Quelle q_l übrig, und man hat die Gesamtzahl der Quellen und Senken um 2 vermindert.

Die Eindeutigkeit von $\{m, n\}$ folgt jetzt natürlich aus (1), denn das Coxeterpolynom ändert sich ja bei Spiegelungen nicht und die Polynome $(T^m - 1)(T^n - 1)$ bestimmen $\{m, n\}$ eindeutig. \square

Für die Bestimmung des Coxeterpolynoms der Orientierung Γ eines einfachen Kreises sind also nur die beiden oben definierten Zahlen m, n und nicht die konkrete Orientierung relevant. Übrigens stimmt das oben erklärte m mit dem im Beweis von (9.4) vorgekommenen $m(\Gamma)$ überein.

§10 Das charakteristische Polynom von Multigraphen

Ich definiere das charakteristische Polynom von Multigraphen und stelle dann eine Beziehung zwischen dem Coxeterpolynom eines bipartiten Köchers (vgl. (7.1)(9)) und

dem charakteristischen Polynom des ihm zugrundeliegenden Graphen vor. Hieraus folgen sowohl Aussagen über die Nullstellenmenge des Coxeterpolynoms bipartiter Köcher wie auch neue Formeln für das charakteristische Polynom durch Anwendung der Ergebnisse aus §9. Auch werden wir sehen, daß das Coxeterpolynom einen zykl-freien Köcher *nicht* bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(10.1) Definition: Sei G ein Multigraph mit Adjazenzmatrix A_G . Das *charakteristische Polynom* von G ist definiert als das charakteristische Polynom von A_G und wird mit P_G bezeichnet:

$$P_G(T) := |TI - A_G|.$$

□

Viele Informationen über P_G findet man in [CDS]. Konkrete Anwendungen für das charakteristische Polynom eines Graphen gibt es in der Quantenchemie: die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gewisser Graphen, die ein Molekül beschreiben, entsprechen den möglichen Energieniveaus der darin vorkommenden Elektronen. Der folgende Satz ist [A'Campo] entnommen:

(10.2) Satz: Sei Γ ein bipartiter Köcher mit zugrundeliegendem Multigraph $\bar{\Gamma}$. Dann gilt mit $n := \# V\Gamma$:

$$\chi_\Gamma(T^2) = T^n P_{\bar{\Gamma}}(T + \frac{1}{T}).$$

Beweis: Weil Γ bipartit ist, haben alle Wege in Γ die Länge 0 oder 1; diejenigen mit Länge 1 verlaufen von den Quellen zu den Senken. Ist k die Anzahl der Senken in Γ , so hat die Cartanmatrix von Γ also die Form $C_\Gamma = I + B$ mit $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & X \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ und einer $k \times (n - k)$ -Matrix X . Es ist dann $|C_\Gamma| = 1$ und $C_\Gamma^{-1} = I - B$ wegen $B^2 = 0$. Außerdem ist $A_{\bar{\Gamma}} = B + {}^tB$. Man erhält:

$$\begin{aligned} \chi_\Gamma(T^2) &= |T^2I + {}^tC_\Gamma C_\Gamma^{-1}| \\ &= |{}^tC_\Gamma^{-1}| |T^2I + {}^tC_\Gamma C_\Gamma^{-1}| \\ &= |T^2(I - {}^tB) + I - B| \\ &= T^n |(T + \frac{1}{T})I - T {}^tB - \frac{1}{T}B| \\ &\stackrel{(*)}{=} T^n |(T + \frac{1}{T})I - (B + {}^tB)| \\ &= T^n P_G(T + \frac{1}{T}). \end{aligned}$$

Zu (*): Es ist

$$\left| \begin{array}{cc|c} T+\frac{1}{T} & & \\ & \ddots & \\ & & T+\frac{1}{T} \\ \hline & & -\frac{1}{T}X \\ \hline -T^tX & & T+\frac{1}{T} \\ & \ddots & \\ & & T+\frac{1}{T} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|c} T+\frac{1}{T} & & \\ & \ddots & \\ & & T+\frac{1}{T} \\ \hline & & -X \\ \hline -^tX & & T+\frac{1}{T} \\ & \ddots & \\ & & T+\frac{1}{T} \end{array} \right|,$$

wie man durch Multiplikation der ersten k Zeilen mit T und der ersten k Spalten mit $1/T$ sieht. \square

(10.3) Korollar: Sei Γ ein bipartiter Köcher. Die Nullstellen von χ_Γ liegen in $S^1 \cup \mathbb{R}^{>0}$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\chi_\Gamma(\lambda) = 0$. Weil Φ_Γ invertierbar ist, gilt $\lambda \neq 0$. Wähle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mu^2 = \lambda$. Nach (10.2) folgt $P_{\overline{\Gamma}}(\mu + \frac{1}{\mu}) = 0$. Da die Adjazenzmatrix $A_{\overline{\Gamma}}$ symmetrisch ist, sind alle Nullstellen von $P_{\overline{\Gamma}}$ reell, also $\mu + \frac{1}{\mu} \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\mu \in S^1 \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und also $\lambda = \mu^2 \in S^1 \cup \mathbb{R}^{>0}$. \square

Es ist noch ungeklärt, ob man diese Aussage auf allgemeinere Köcherklassen ausdehnen kann.

Sicher ist es an dieser Stelle sinnvoll, diejenigen Multigraphen zu beschreiben, die eine bipartite Orientierung zulassen:

(10.4) Lemma: Sei G ein Multigraph. Äquivalent sind:

- (1) G besitzt eine bipartite Orientierung.
- (2) Jeder einfache Kreis in G (vgl. (7.3)) hat eine gerade Anzahl von Kanten.
- (3) Jeder Kreis in G hat eine gerade Anzahl von Kanten.

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Sei Γ eine bipartite Orientierung von G und $(p|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p)$ ein einfacher Kreis in G mit ungerader Länge n . Ohne Einschränkung können wir p als Senke von Γ annehmen. Dann ist p_1 eine Quelle und damit auch p_3, p_5, \dots, p . Es ist also p in Γ gleichzeitig Quelle und Senke, was nicht stimmen kann, da eine zu p inzidente Kante e_1 existiert.

(2) \Rightarrow (3): Sei $(p_n|e_n|p_{n-1}|\dots|p_1|e_1|p_0)$ mit $p_0 = p_n$ ein Kreis in G . Es existieren $0 \leq i < j \leq n$, so daß $p_i = p_j$ gilt und $(p_j|e_j|\dots|e_{i+1}|p_i)$ ein einfacher Kreis ist. Dieser hat nach (2) gerade Länge. Nun kann man den Beweis durch Induktion nach n beenden: es ist zwar $(p_n|\dots|p_{j+1}|e_{j+1}|p_i|\dots|p_0)$ nicht notwendig ein Kreis (es könnte etwa $p_i = p_{j+2}$ sein), aber durch Entfernung einer geraden Anzahl von Kanten kommt man schließlich zu einem Kreis oder zu einem Punktweg.

(3) \Rightarrow (1): Wir können annehmen, daß G zusammenhängend ist und $VG \neq \emptyset$ gilt.

Wähle $p \in VG$ und setze

$$\begin{aligned} A &= \{q \in VG \mid \text{Es gibt einen Weg gerader Länge von } p \text{ nach } q \text{ in } G\}, \\ B &= \{q \in VG \mid \text{Es gibt einen Weg ungerader Länge von } p \text{ nach } q \text{ in } G\}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (3) impliziert dann $VG = A \cup B$, und die Punkte aus A sind paarweise nicht adjazent; dasselbe gilt für diejenigen aus B . G läßt sich also bipartit orientieren, indem alle Punkte aus A zu Quellen und alle aus B zu Senken gemacht werden. \square

Ich untersuche nun die in (10.2) aufgetretene Operation genauer:

(10.5) Bemerkung: Ist $f \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\}$ mit $T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T}) \in \mathbb{Z}[T^2]$, so ist $f \in \mathbb{Z}[T^2] \cup T\mathbb{Z}[T^2]$.

Beweis: Es existieren $g \in \mathbb{Z}[T^2]$, $h \in T\mathbb{Z}[T^2]$ mit $f = g + h$. Nehmen wir $g, h \neq 0$ an (und o.B.d.A. $\text{grad}(g) > \text{grad}(h)$), so folgt der Widerspruch

$$\underbrace{T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T})}_{\in \mathbb{Z}[T^2]} = \underbrace{T^{\text{grad}(g)} g(T + \frac{1}{T})}_{\in \mathbb{Z}[T^2]} + \underbrace{T^{\text{grad}(g)-\text{grad}(h)}}_{\in T\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}} \underbrace{T^{\text{grad}(h)} h(T + \frac{1}{T})}_{\in \mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}}. \quad \square$$

Die Aussage ist interessant: mit (10.2) und (10.4) folgt, daß das charakteristische Polynom eines jeden Multigraphen, dessen Kreise stets eine gerade Anzahl von Kanten enthalten, in $\mathbb{Z}[T^2] \cup T\mathbb{Z}[T^2]$ liegt. Dieses läßt sich auch unmittelbar mit den Formeln für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einsehen, die z. B. in [CDS] stehen.

Für die Formulierung des nächsten Satzes benutze ich die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \text{Rez}_g &:= \{f \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\} \mid f \text{ ist selbstreziprok und } \text{grad}(f) \text{ ist gerade}\} \\ \text{Rez}_u &:= \{f \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\} \mid f \text{ ist selbstreziprok und } \text{grad}(f) \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

(10.6) Satz: Die Abbildung

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}[T^2] \cup T\mathbb{Z}[T^2]) \setminus \{0\} &\longrightarrow \text{Rez}_g \cup \text{Rez}_u \quad \text{mit} \\ f &\longmapsto f^*, \quad \text{definiert durch} \\ f^*(T^2) &= T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T}) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von \mathbb{Z}_2 -graduerten (multiplikativen) Monoiden; es gilt

$$(\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\})^* = \text{Rez}_g \text{ und } (T\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\})^* = \text{Rez}_u.$$

Für $f, g \in \mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}$ (oder $f, g \in T\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}$) mit $f + g \neq 0$ gilt

$$(f + g)^* = T^{\frac{\text{grad}(f+g) - \text{grad}(f)}{2}} f^* + T^{\frac{\text{grad}(f+g) - \text{grad}(g)}{2}} g^*.$$

Beweis: Sei $f \in \mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}$, also $f(T) = g(T^2)$ mit einem $g \in \mathbb{Z}[T]$. Dann gilt $T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T}) = T^{\text{grad}(f)} g(T^2 + 2 + \frac{1}{T^2}) = h(T^2)$ mit $h(T) = T^{\text{grad}(g)} g(T + 2 + \frac{1}{T}) \in \mathbb{Z}[T]$. Es ist $\text{grad}(h) = 2 \text{grad}(g)$ und h ist selbstreziprok.

Sei nun $f \in T\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\}$, also $f(T) = Tg(T^2)$ mit einem $g \in \mathbb{Z}[T]$. Dann gilt $T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T}) = (T^{\text{grad}(f)+1} + T^{\text{grad}(f)-1})g(T^2 + 2 + \frac{1}{T^2}) = h(T^2)$ mit $h(T) = (T + 1)T^{\text{grad}(g)} g(T + 2 + \frac{1}{T}) \in \mathbb{Z}[T]$. Es ist $\text{grad}(h) = 2 \text{grad}(g) + 1$ und h ist selbstreziprok. Wir haben gezeigt: Die Abbildung $f \mapsto f^*$ ist wohldefiniert und erfüllt $(\mathbb{Z}[T^2] \setminus \{0\})^* = \text{Rez}_g$ und $(T\mathbb{Z}[T^2])^* = \text{Rez}_u$.

Die Multiplikativität und die Additivität von $*$ sind klar. Zur Injektivität: Aus $f^* = g^*$ folgt $T^{\text{grad}(f)} f(T + \frac{1}{T}) = T^{\text{grad}(g)} g(T + \frac{1}{T})$ und durch Gradvergleich $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$, also $f(T + \frac{1}{T}) = g(T + \frac{1}{T})$. Etwa durch Einsetzen von hinreichend vielen Werten für T folgt dann $f = g$.

Die Abbildung ist auch surjektiv: Definiere $t_0 := 2$, $t_1 := T$ und $t_{n+1} := Tt_n - t_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (die t_n sind die normierten Tschebyscheffpolynome erster Art). Es gilt

$$t_n(T + \frac{1}{T}) = T^n + \frac{1}{T^n},$$

was man induktiv aus

$$T^{n+1} + \frac{1}{T^{n+1}} = (T + \frac{1}{T})(T^n + \frac{1}{T^n}) - (T^{n-1} + \frac{1}{T^{n-1}})$$

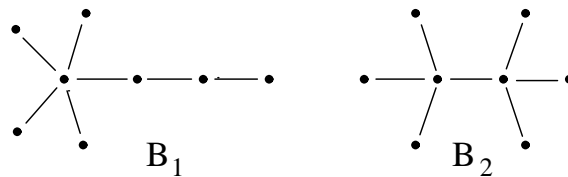
herleitet. Ebenso weist man $\text{grad}(t_n) = n$ nach. Jetzt sei $g \in \mathbb{Z}[T]$ selbstreziprok. $g(T^2)$ liegt in Rez_g und hat daher die Form $g(T^2) = T^d \sum_{i=0}^d a_i(T^i + \frac{1}{T^i})$ mit gewissen $a_i \in \mathbb{Z}$ (von denen jedes zweite 0 ist). Für $f := \sum_{i=0}^d a_i t_i$ gilt dann $T^d f(T + \frac{1}{T}) = g(T^2)$, also $f \in \mathbb{Z}[T^2] \cup T\mathbb{Z}[T^2]$ nach (10.5) und $f^*(T^2) = g(T^2)$, d. h. $f^* = g$. \square

Selbstverständlich gilt also: f ist genau dann im Monoid $(\mathbb{Z}[T^2] \cup T\mathbb{Z}[T^2]) \setminus \{0\}$ irreduzibel, wenn f^* in $\text{Rez}_g \cup \text{Rez}_u$ irreduzibel ist. Dies darf man allerdings nicht mit der Irreduzibilität von Polynomen in $\mathbb{Z}[T]$ verwechseln! Es gilt z. B.

$$((T-1)(T+1))^* = T^2 + T + 1 \text{ und } (2T^2 + 1)^* = (2T+1)(T+2).$$

Die Beziehung (10.2) lässt sich in zwei Richtungen ausnutzen:

(10.7) Bemerkung: (1) Es ist schon lange bekannt, daß es nicht-isomorphe Graphen mit demselben charakteristischen Polynom gibt (derartige Graphen nennt man auch 'kospektral'). Die einfachsten kospektralen Bäume findet man in [CollSin]; sie sehen so aus:



Mit (10.2) folgt dann: Es gilt $\chi_{B_1} = \chi_{B_2}$, obwohl B_1 und B_2 nicht isomorph sind.

(2) Die Formel aus (9.13) läßt sich vermöge (10.2) in eine Beziehung über charakteristische Polynome von Multigraphen übersetzen. Allerdings hätte man dann die Gültigkeit nur für solche Multigraphen gezeigt, die die äquivalenten Aussagen aus (10.4) erfüllen. Es ist jedoch auch möglich, den Beweis von (9.13) zu imitieren, denn es gilt eine zu (9.8) analoge Beziehung auch für charakteristische Polynome von Multigraphen G_1, G_2 :

$$\begin{aligned} &\text{Ist } G_1 \cap G_2 = \{r\}, \text{ so gilt} \\ &P_{G_1 \cup G_2} = P_{G_1} P_{G_2 \setminus \{r\}} + P_{G_1 \setminus \{r\}} P_{G_2} - P_{\{r\}} P_{G_1 \setminus \{r\}} P_{G_2 \setminus \{r\}}. \end{aligned}$$

(Dies findet man in [Schwenk].) Das auf diese Weise beweisbare Analogon zu (9.13) habe ich in der mir zugänglichen Literatur nicht gefunden, im Gegensatz zu den Übersetzungen der Beziehungen aus (9.11).

(3) Allgemein scheint es also so zu sein, daß sich die Eigenschaften des charakteristischen Polynoms von Multigraphen und des Coxeterpolynoms von zykelfreien Köchern entsprechen; bisher lassen sich die Formeln aber nicht auf einfache Weise ineinander überführen, da ja (10.2) nur unter der recht starken Voraussetzung der bipartiten Orientierung richtig ist.

§11 Eine Notation für gewurzelte Kreisebäume

Genauer müßte die Überschrift lauten: ‘Eine Notation für Äquivalenzklassen gewurzelter, zykelfreier Orientierungen von Kreisebäumen.’

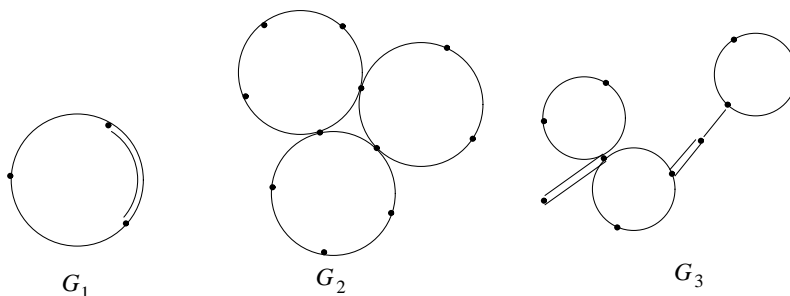
Ich beginne mit den Definitionen, erkläre dann die Notation, auch an einem Beispiel, und diskutiere Fragen, die mit der Eindeutigkeit des zu einer Klasse gehörigen Symbols zu tun haben.

(11.1) Definition: (1) Ein *gewurzelter Köcher* ist ein nichtleerer Köcher zusammen mit einem seiner Punkte, der Wurzel.

(2) Ich nenne zwei gewurzelte Köcher (Γ_1, r_1) und (Γ_2, r_2) *äquivalent*, falls es einen zu Γ_1 spiegelungsäquivalenten Köcher $\tilde{\Gamma}_1$ (vgl. (9.1)) und einen Köcherisomorphismus $f = (Vf, Ef) : \tilde{\Gamma}_1 \longrightarrow \Gamma_2$ (vgl. (7.1)(4)) mit $Vf(r_1) = r_2$ gibt. Die Äquivalenzklasse von (Γ, r) bezeichne ich mit $[(\Gamma, r)]$.

(3) Ein zusammenhängender Multigraph ohne Schleifen, in dem zwei verschiedene einfache Kreise stets kantendisjunkt sind, heißt *Kreisebaum*. \square

(11.2) **Beispiel:** Betrachte die folgenden Multigraphen:



G_1 und G_2 sind keine Kreisbäume; G_3 ist einer. □

(11.3) **Lemma:** Sei G ein nichtleerer Kreisebaum. Für jeden einfachen Kreis C in G sei

$$l(C) := \#\{p \in VC \mid p \text{ hat in } G \text{ einen Grad} \geq 3\}.$$

Es gilt: G ist ein einfacher Kreis, oder es gibt in G einen Punkt, der nur zu höchstens einem anderen Punkt adjazent ist, oder G enthält einen einfachen Kreis C mit $l(C) = 1$.

Beweis: Nehmen wir an: jeder Punkt in G ist zu mindestens zwei verschiedenen Punkten aus G adjazent. Ist G kein einfacher Kreis, so gilt (weil G zusammenhängend ist) $l(C) \geq 1$ für alle einfachen Kreise C in G . Nehmen wir also noch $l(C) \geq 2$ für alle einfachen Kreise C in G an. Man wählt nun $p \in VG$ beliebig und beginnt in p einen Weg nach folgender Regel: Hat man zuletzt eine Kante benutzt, die Teil eines einfachen Kreises C ist (C ist dann durch die Kante eindeutig bestimmt), so läuft man nicht 'um ganz C herum', sondern verläßt C vorher. Dies ist wegen $l(C) \geq 2$ stets möglich. Außerdem geht man von einem Punkt p aus niemals zu dem Punkt zurück, von dem man gerade kam (möglich, weil p mindestens zwei Nachbarn hat). Man erhält so einen unendlichen Weg in G , der aus lauter verschiedenen Punkten besteht, und das ist sicher ein Widerspruch. □

Das Lemma zeigt, daß ein Kreisebaum, ausgehend von einfachen Kreisen, mehrfachen Kanten und linearen Graphen, durch die in (9.8) untersuchte Operation des Identifizierens zweier Punkte entsteht. (Man sieht an dieser Stelle sofort, daß Kreisebäume planar sind, d. h. sie können ohne Kantenüberschneidungen in die Ebene eingebettet werden.) Das Coxeterpolynom einer zykliefreien Orientierung Γ läßt sich damit rein mechanisch berechnen, wenn man zusätzlich zu G nur die zu jedem einfachen Kreis von G nach (9.15) gehörigen Zahlen m und n kennt. Ebenso hängt die Klasse von Γ bzgl. Spiegelungsäquivalenz nur von diesen Daten ab, wie (9.9) (und eine Induktion mit (11.3)) zeigt.

Um diese mechanische Rechnung auch tatsächlich maschinell durchführen zu können, ist zunächst eine geeignete Notation für diese Köcherklasse zu entwickeln (die Darstellung durch die Adjazenzmatrix ist sicher viel zu unhandlich). Da die Operationen aus §9 für die beteiligten Köcher stets einen ausgezeichneten Punkt voraussetzen, an dem

‘verklebt’ wird, sollten wir genauer ein Symbol für gewurzelte, zyklfreie Orientierungen von Kreisebäumen suchen; da wir ausschließlich am Coxeterpolynom interessiert sind, reicht es, diese nur bis auf Äquivalenz (vgl. (11.1)(2)) zu beschreiben. Das geschieht nun:

(11.4) Die Notation. (1) Die Äquivalenzklasse der Orientierungen des linearen Graphen mit $n \geq 1$ Punkten, deren Wurzel das eine Ende ist, wird mit

$$n$$

bezeichnet.

(2) Die Äquivalenzklasse der zyklfreien Orientierungen des Multigraphen, der aus 2 durch $n \geq 1$ Kanten verbundenen Punkten besteht und deren Wurzel der eine dieser beiden Punkte ist, wird mit

$$K(n)$$

bezeichnet.

(3) Ist v eines der in (1) und (2) beschriebenen Symbole und bezeichnet es $[(\Lambda, s)]$ und ist U das Symbol der Klasse $[(\Gamma, r)]$, so bezeichnet

$$v * U$$

die Klasse des gewurzelten Köchers, der durch Identifikation von r mit dem Nicht-Wurzel-Ende von Λ entsteht und s als Wurzel hat.

(4) Bezeichnen U_1, \dots, U_t ($t \geq 1$) die Äquivalenzklassen $[(\Gamma_1, r_1)], \dots, [(\Gamma_t, r_t)]$, so steht

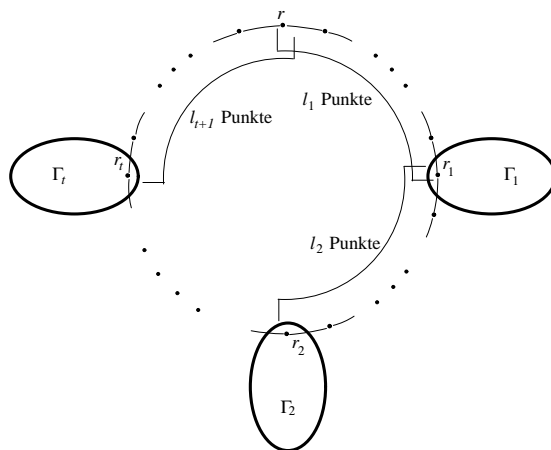
$$[U_1, \dots, U_t]$$

für die Klasse desjenigen gewurzelten Köchers, der aus den Γ_i durch Identifikation der r_i zu einer neuen Wurzel r entsteht.

(5) Bezeichnen U_1, \dots, U_t ($t \geq 0$) die Äquivalenzklassen $[(\Gamma_1, r_1)], \dots, [(\Gamma_t, r_t)]$ und sind $m, n, l_1, \dots, l_{t+1} \in \mathbb{N}$ mit $m + n = \sum_{i=1}^{t+1} (l_i - 1)$ und $l_i \geq 2$, so ist

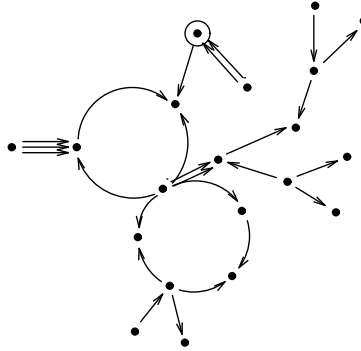
$$C_{m,n}(l_1, U_1, \dots, l_t, U_t, l_{t+1})$$

die Notation für die Klasse des folgenden gewurzelten Köchers Γ :



Dabei sei r die Wurzel von Γ und von den $m + n$ Kanten des Kreises seien m im Uhrzeigersinn und n gegen den Uhrzeigersinn orientiert. (Γ entsteht aus $l_1 * [U_1, l_2 * [U_2, l_3 * \dots, l_t * [U_t, l_{t+1}] \dots]]$ durch Identifikation der Wurzel von l_1 mit dem freien Ende von l_{t+1} .) \square

(11.5) Beispiel: Wir wollen die Äquivalenzklasse des folgenden gewurzelten Köchers beschreiben (der eingekreiste Punkt ist die Wurzel):



Eine Notation ist:

$$[K(2), 2 * C_{1,2}(2, \underbrace{[C_{3,2}(4, [2, 2], 3), K(2) * [2 * [2, 2], 3 * [2, 2]]}_{\text{}}), 2, K(3), 2)]$$

Eine andere Möglichkeit:

$$[1, K(1) * \underbrace{C_{2,1}(2, K(3), 2, [K(2) * [3 * [2, 2], 2 * [2, [2]]], C_{2,3}(3, [2, 2], 4)]}_{\text{}}), 2, K(2)]$$

\square

(11.6) Bemerkung: (1) Jede Äquivalenzklasse einer gewurzelten, zykelfreien Orientierung (Γ, r) eines Kreisebaumes ist durch ein Symbol beschreibbar; dazu führt man eine Fallunterscheidung nach der Wurzel r durch:

(a) Hat r den Grad 0, so ist $V\Gamma = \{r\}$, weil Γ zusammenhängend ist, und $[(\Gamma, r)]$ wird durch das Symbol 1 beschrieben.

(b) Ist r nur zu einem weiteren Punkt von Γ adjazent, so beginnt das gesuchte Symbol mit einer der in (11.4)(1) oder (2) beschriebenen Konstruktionen, evtl. gefolgt von der aus (11.4)(3).

(c) Hat r den Grad 2 und ist r in einem einfachen Kreis von $\bar{\Gamma}$ enthalten, so beginnt das gesuchte Symbol mit der Konstruktion aus (11.4)(5).

(d) In allen anderen Fällen findet (11.4)(4) Anwendung.

(2) Wie in (11.5) gesehen, läßt das Symbol noch recht viele Freiheiten. Durch die folgenden Konventionen erreicht man eine gewisse Normierung:

(a) Das Symbol n ist als Teil eines größeren Symbols nur für $n \geq 2$ erlaubt.

- (b) Das Symbol $[U_1, \dots, U_t]$ ist nur bei $t \geq 2$ erlaubt (weil U und $[U]$ stets dieselben Äquivalenzklassen bezeichnen).
- (c) Als Elemente von Listen sind keine Listen erlaubt ($[A, [B, C]]$ bezeichnet dieselbe Klasse wie $[A, B, C]$).
- (d) Teilsymbole der Form $n * m$ sind verboten. ($n * m$ bezeichnet dieselbe Äquivalenzklasse wie $n + m - 1$).
- (e) Ausdrücke der Form $K(n)$ sind nur für $n \geq 2$ erlaubt.
- (f) Das Symbol $C_{1,1}$ ist verboten. (Man kann dafür $K(2)$ benutzen.)

Alle übrigbleibenden Mehrdeutigkeiten resultieren daraus, daß

$$[U_1, \dots, U_t] \text{ und } [U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(t)}]$$

für jedes $\sigma \in S_t$ sowie

$C_{m,n}(l_1, U_1, \dots, U_t, l_{t+1})$ und $C_{n,m}(l_1, U_1, \dots, U_t, l_{t+1})$ und $C_{m,n}(l_{t+1}, U_t, \dots, U_1, l_1)$ jeweils dieselben Äquivalenzklassen beschreiben. \square

§12 Implementationen

Die Implementationen wurden in MapleV durchgeführt. Die im letzten Paragraphen vorgestellte Notation sieht in Maple ein klein wenig anders aus; dieses beschreibe ich zunächst, dann wird jedes der im Anhang befindlichen Programme genau erklärt.

(12.1) Die Maple-Notation. Das Symbol $'*$ ' ist in Maple für die Multiplikation vordefiniert. Deswegen ist es für unser Symbol wertlos: der Term $3 * 4$ z. B. würde automatisch zu 12 vereinfacht und nicht zu 6. Da man dieses Verhalten nicht ändern kann, habe ich mich entschieden, diesen Operator in Maple mit $\&*$ zu bezeichnen. (Die sogenannten neutralen Operatoren von Maple beginnen immer mit einem $\&$. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß der Evaluator keinerlei Eigenschaften voraussetzt; vielmehr kann der Benutzer einem neutralen Operator selbst gewisse Eigenschaften 'aufzwingen', etwa Assoziativität.)

Obwohl es nicht unbedingt nötig gewesen wäre, habe ich aus systematischen Gründen auch den Operator K zum Beschreiben einer mehrfachen Kante in Maple mit $\&K$ und den Operator C zum Beschreiben eines Kreises mit $\&C$ bezeichnet.

Da in Maple keine Indesschreibweise möglich ist, läßt sich die Notation für Kreise aus (11.4)(5) nicht ohne weiteres in Maple übertragen; statt

$$C_{m,n}(l_1, U_1, \dots, l_t, U_t, l_{t+1})$$

schreiben wir in Maple

$$\&C([m, n], l_1, U_1, \dots, l_t, U_t, l_{t+1}).$$

Außerdem lasse ich die Abkürzung $\&C([m, n])$ für $\&C([m, n], m+n+1)$ zu. \square

(12.2) Das Programm coxpoly. Dieses Maple-Programm berechnet aus der Notation der Äquivalenzklasse einer zykelfreien Orientierung eines Kreisebaumes das zugehörige Coxeterpolynom.

Als Eingabe verlangt die Prozedur ein Symbol `kbaum` und einen Ausdruck `T`; das Coxeterpolynom der durch `kbaum` definierten Köcherklasse wird dann an der Stelle `T` berechnet (i. a. wird `T` eine Unbestimmte, also ein Name ohne Wert sein). Wird ein optionaler dritter Parameter `V` angegeben, so müssen `T` und `V` Namen sein. Im Resultat wird dann die Abkürzung $V(j)$ für den häufig auftretenden Term $(T^j - 1)/(T - 1)$, also für das Coxeterpolynom des A_{j-1} , benutzt.

Will man das Coxeterpolynom einer konkreten zykelfreien Orientierung eines konkreten Kreisebaumes berechnen, so ist dieses im Prinzip immer durch Aufstellen der Coxetermatrix und anschließendem Berechnen des charakteristischen Polynoms möglich; der Vorteil meines Verfahrens besteht dann lediglich in einem erheblichen Geschwindigkeitsgewinn (s. u.). Nutzt man jedoch die Fähigkeit von Maple aus, mit Namen symbolisch rechnen zu können, so eröffnet das Programm tatsächlich neue Möglichkeiten; es erlaubt als Eingabe nicht nur die in (11.4) und (12.1) beschriebenen Maple-Symbole, sondern sogenannte *Symbol-Schemata*, die ich im folgenden erkläre:

Zunächst ist es erlaubt, überall, wo in einem Symbol eine natürliche Zahl stehen muß, nun auch einen allgemeinen Ausdruck einzusetzen. Die in ihm vorkommenden Variablen- und Funktionsnamen müssen aus Gründen, die sofort klar werden, mit Kleinbuchstaben beginnen. Das Coxeterpolynom wird dann in Abhängigkeit von den in diesen Ausdrücken vorkommenden unevaluierten Namen bestimmt. So ist es z. B. durch den Aufruf

$$\text{coxpoly}(\text{p}\&*[2,2], T)$$

möglich, die Abhängigkeit des Coxeterpolynoms vom Parameter `p` (vorausgesetzt, `p` ist ein Name ohne Wert) zu analysieren.

Weiter ist es zulässig, jedes Teilsymbol von `kbaum`, daß die Äquivalenzklasse eines gewurzelten Köchers beschreibt, durch einen (evtl. indizierten) Namen oder einen unevaluierten Funktionsaufruf `B`, der mit einem Großbuchstaben beginnt, zu ersetzen. `B` steht dabei für einen beliebigen, gewurzelten und zykelfreien Köcher; die Einschränkung auf gewurzelte, zykelfrei orientierte Kreisebäume ist nicht notwendig. Das Coxeterpolynom wird dann in Abhängigkeit von $\&\text{Chi}(B)$, dem Coxeterpolynom von `B`, und $\&\text{chi}(B)$, dem Coxeterpolynom des aus `B` durch Entfernen der Wurzel entstehenden Köchers, bestimmt. Man kann das Programm also als Formelgenerator verwenden; der Aufruf

$$\text{coxpoly}([G1, \&K(k)\&*G2], T)$$

ergibt z. B. die Formel aus (9.11)(1). Dieses ist jedoch nur eingeschränkt nutzbar, da das Programm sein Resultat nicht hinreichend vereinfacht; das muß jeweils mit den einschlägigen Maple-Routinen oder von Hand nachgeholt werden, bis eine verdauliche Form erreicht ist.

Es existiert noch eine dritte Erweiterung gegenüber den einfachen Maple-Symbolen: Listen, die das Identifizieren der Wurzeln mehrere Köcher zu einer neuen Wurzel

symbolisieren, dürfen auch unevaluierte Aufrufe des Maple-Reihungsoperators $\$$ enthalten. Das Coxeterpolynom wird dann in Abhängigkeit von den vorkommenden Namen zurückgegeben. So liefert z. B. der Aufruf

$$\text{coxpoly}([p(i)\$i=1..t], T)$$

die Formel eines Sterns aus (9.12)(1), vorausgesetzt $p(i)$ und t sind Namen ohne Wert. Der in (9.11)(3) beschriebene Baum hat das Symbolschema $[G(i)\$i=1..t]$. Reihungen dürfen auch geschachtelt werden.

Das Programm `coxpoly` selbst besteht im wesentlichen nur aus einem Aufruf der Hilfsprozedur `coxpoly1`, die die eigentliche Arbeit verrichtet. Das von `coxpoly1` gelieferte Ergebnis enthält die Abkürzung $W(j, T)$ für den Term $(T^{j-1})/(T-1)$; in `coxpoly` wird dann anschließend dieses $W(j, T)$ durch $(T^{j-1})/(T-1)$ bzw. $V(j)$ ersetzt und das Ergebnis evtl. normalisiert.

Die Prozedur `coxpoly1` verlangt dieselben Argumente wie `coxpoly` und liefert eine Liste zurück, die aus dem Coxeterpolynom des übergebenen Köchers sowie des aus diesem durch Entfernen der Wurzel entstehenden Köchers, jeweils an der Stelle T ausgewertet, besteht. Dieses ist die wesentliche Idee des Programmes: man beobachtet, daß die Formeln aus §9 stets diese beiden Coxeterpolynome der beteiligten gewurzelten Köcher beinhalten; außerdem ist es offenbar leicht und schnell möglich, aus den Coxeterpolynomen der beteiligten Teilköcher (die ja auch für die Bestimmung des Coxeterpolynoms von `kbaum` benötigt werden) das Coxeterpolynom des aus `kbaum` durch Entfernen der Wurzel entstehenden Köchers zu berechnen. Das Programm ist weitgehend selbsterklärend: es wird je nach vorliegendem Symboltyp die entsprechende Formel aus §9 angewandt. Ein großer Teil des Programmtextes beschäftigt sich lediglich damit, festzustellen, ob das übergebene Symbol `kbaum` ein syntaktisch korrekt gebildetes Symbol für die Äquivalenzklasse einer zyklischen Orientierung eines Kreisebaumes ist oder nicht.

Nur falls `kbaum` ein Kreis ist, also ein $\&\mathbf{C}$ -Ausdruck, muß für die Berechnung des Coxeterpolynoms etwas gearbeitet werden: Fatal wäre es, wollte man auch dieses Symbol rekursiv abarbeiten. Um das Coxeterpolynom des aus

$$\text{kbaum} = \&\mathbf{C}([m, n], l_1, U_1, \dots, l_t, U_t, l_{t+1})$$

durch Entfernen der Wurzel entstehenden Köchers zu bekommen, muß das Symbol

$$(l_1 - 1) \&* [U_1, l_2 \&* [U_2, \dots [U_t, (l_{t+1} - 1)] \dots]]$$

generiert und an `coxpoly1` übergeben werden. Würde man also rekursiv arbeiten und für jedes $i \in \{1, \dots, t\}$ einmal `coxpoly1` mit einem gewissen $\&\mathbf{C}$ -Ausdruck, der $U_1 \dots U_i$ enthält, aufrufen, so wüchse der Aufwand sicher quadratisch in der Symbollänge.

Stattdessen entwickle ich das Coxeterpolynom eines $\&\mathbf{C}$ -Ausdrucks iterativ: Zuerst wird für $j = t, \dots, 1$ das Coxeterpolynom $u[j]$ des linearen Graphen mit $-1 + \sum_{k=j+1}^{t+1} (l_k - 1)$ Punkten berechnet, und zwar unter Benutzung des Ergebnisses des vorherigen Iterationsschrittes. Nun wird ausgehend vom Coxeterpolynom von $\&\mathbf{C}([m, n])$

sukzessive für $i = 1, \dots, t$ das Coxeterpolynom **result** von

$$\&C([m, n], l_1, U_1, \dots, l_i, U_i, 1 + \sum_{j=i+1}^{r+1} (l_j - 1))$$

berechnet. Um keine Mehrfachrechnungen notwendig zu machen, werden gleichzeitig im i -ten Iterationsschritt die Coxeterpolynome

$$\begin{aligned} p[1] & \text{ von } l_i \&* [U_{i-1}, l_{i-1} \&* [\dots, l_2 \&* [U_1, l_1] \dots]], \\ q[1] & \text{ von } l_i \&* [U_{i-1}, l_{i-1} \&* [\dots, l_2 \&* [U_1, (l_1 - 1)] \dots]], \\ p[2] & \text{ von } (l_i - 1) \&* [U_{i-1}, l_{i-1} \&* [\dots, l_2 \&* [U_1, l_1] \dots]], \\ \text{sowie } q[2] & \text{ von } (l_i - 1) \&* [U_{i-1}, l_{i-1} \&* [\dots, l_2 \&* [U_1, (l_1 - 1)] \dots]] \end{aligned}$$

bestimmt. So gelingt es, den i -ten Iterationsschritt nur mit den im $(i - 1)$ -ten berechneten Daten (und den $u[j]$) zu bestreiten.

Das im letzten Iterationsschritt berechnete $q[2]$ ist offenbar das Coxeterpolynom des aus **kbaum** durch Entfernen der Wurzel entstehenden Köchers und wird deswegen neben **result** als zweites Resultat zurückgegeben.

Nun zur Aufwandsabschätzung. *Ich setze voraus, daß die arithmetischen Operationen $+$, $-$, $*$ und $/$, angewandt auf Zahlen, einen konstanten Aufwand haben.* Betrachtet wird das Problem, aus einer Notation **kbaum** wie in (12.1) definiert und einer gegebenen Zahl T den Wert des zugehörigen Coxeterpolynoms an der Stelle T zu berechnen. *Der Zeitbedarf der Prozedur **coxpoly** für dieses Problem ist linear in der Länge des Symbols **kbaum**.* Bewiesen wird diese Aussage durch Induktion über den Aufbau des Symbols **kbaum**. Ist **kbaum** selbst eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so ist der Ausdruck $(T^{k+1} - 1)/(T - 1)$ zu berechnen. Verwendet man beim Potenzieren die Binärdarstellung von $k+1$, so ist dieses mit Aufwand $\log(k+1)$, also linear in der Länge von **kbaum**, möglich. Ist **kbaum** ein $\&*$ -Ausdruck, so ordnet **coxpoly** diesen zunächst rechtsassoziativ. Dieses Umordnen geschieht für jedes in **kbaum** vorkommende $\&*$ höchstens einmal, so daß sich insgesamt auch nur linearer Aufwand ergibt. Das Berechnen des Coxeterpolynoms des $\&*$ -Ausdrucks aus seinen beiden Operanden benötigt nur noch konstante Zeit, falls einmal die Coxeterpolynome dieser beiden Operanden berechnet worden sind. Völlig unproblematisch ist der Fall, daß **kbaum** ein $\&K$ -Ausdruck ist. Bei einem $[\dots]$ -Ausdruck sind nach dem Berechnen der Coxeterpolynome der t Operanden noch etwa $3t$ Rechenoperationen notwendig: insgesamt bleibt der Aufwand linear in der Länge des Ausdrucks. Nun zu den $\&C$ -Ausdrücken: zunächst werden die $u[j]$ bestimmt, und zwar so, daß der Zeitaufwand proportional zur Summe der Längen von l_2, \dots, l_{t+1} bleibt. Anschließend wird in einer Schleife für $i = 1, \dots, t$ jeweils der Köcher U_i 'angeklebt'; dazu wird das Coxeterpolynom von U_i berechnet und anschließend (beim Aktualisieren von p und q) noch eine Zeit verbraucht, die proportional zur Länge von l_{i+1} ist. Man beachte, daß durch die geschickte Wahl der p , q und $u[j]$ die Daten des i -ten Iterationsschrittes schnell aus den vorher berechneten bestimmt werden können. Wichtig ist auch, daß die $u[j]$ *vor Beginn der Iteration* zu bestimmen sind, da sie in der Reihenfolge $u[1], \dots, u[t+1]$ benötigt werden, aber unbedingt in der Reihenfolge $u[t+1], \dots, u[1]$ ausgerechnet werden müssen.

Es ist möglich, mit einem in der Anzahl der Punkte des Köchers quadratischen Zeitaufwand aus einer Notation `kbaum` die Koeffizienten des zugehörigen Coxeterpolynoms zu bestimmen. Da der Aufwand des Maple-Befehls `normal` nicht bekannt ist, kann man das an der vorliegenden Version von `coxpoly` nur schwer sehen. Man kann aber so vorgehen: Besteht der Köcher aus n Punkten, so bestimmt man einfach die Werte des Coxeterpolynoms an $n + 1$ Stellen mit `coxpoly` und berechnet anschließend das Coxeterpolynom (nämlich das Interpolationspolynom dieser Daten in der Form von Newton) und dessen Koeffizienten. Der Zeitbedarf ist proportional zu n^2 . (Natürlich wurde hierbei benutzt, daß die Symbollänge linear mit n wächst. Dies ist nur gewährleistet, wenn die in (11.6)(2) angegebenen Restriktionen beachtet werden.) \square

Mit dem folgenden Programm sollten Vermutungen überprüft werden, die sich auf die Gestalt der irreduziblen Faktoren von Coxeterpolynomen beziehen.

(12.3) Das Programm `cycfactor`. Als Argument wird ein Polynom F mit ganzzahligen Koeffizienten in einer Unbestimmten erwartet. Zurückgegeben wird eine Liste

$$[[n_1, \dots, n_k], [[G_1, m_1], \dots, [G_l, m_l]], r],$$

mit irreduziblen Polynomen G_i , so daß

$$F = \prod_{i=1}^k \Phi_{n_i} \cdot \prod_{i=1}^l G_i^{m_i}$$

gilt. Dabei ist Φ_k das k -te Kreisteilungspolynom.

Eine wesentliche Laufzeitverbesserung gegenüber dem bloßen Abtesten aller in Frage kommenden Kreisteilungspolynome erreicht man, indem vor dem wirklichen Test auf Teilbarkeit im Polynomring zuerst in beide Polynome die Zahl 2 eingesetzt und die erhaltenen Werte auf Teilbarkeit untersucht werden (die Koeffizienten beider Polynome sind ja ganzzahlig). Experimentell zeigt sich, daß dieses Vorgehen durch weiteres Einsetzen anderer Argumente nicht mehr verbessert wird.

Ein Problem besteht darin, abzuschätzen, welche Kreisteilungspolynome überhaupt als Teiler in Frage kommen. Diese Aufgabe wird von der Routine `suchgrenze` erledigt, die auf dem folgenden Lemma beruht. Beachte: Mit der Eulerschen φ -Funktion gilt $\text{grad } \Phi_k = \varphi(k)$. \square

(12.4) Lemma: Sei $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge. Sei $k \in \mathbb{N}$. Es sei $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\prod_{i=1}^r (1 - 1/p_i) \geq 1/k.$$

Dann gilt für jedes $d \in \mathbb{N}$ mit $d \leq \prod_{i=1}^r (p_i - 1)$:

$$\text{Aus } q > kd \quad \text{folgt} \quad \varphi(q) > d.$$

Beweis: Es gelte $q = \prod p_i^{n_i}$ und $\varphi(q) \leq d$. Dann ist

$$\prod_{i=1}^r (p_i - 1) \geq d \geq \varphi(q) = \prod_{n_i > 0} p_i^{n_i-1} (p_i - 1) \geq \prod_{n_i > 0} (p_i - 1),$$

also $\#\{i \in \mathbb{N} | n_i > 0\} \leq r$ und es folgt

$$\prod_{n_i > 0} (1 - 1/p_i) \geq \prod_{i=1}^r (1 - 1/p_i)$$

(diese Ungleichung gilt termweise; links können nicht mehr Terme als rechts stehen).
Es folgt

$$q = \frac{\varphi(q)}{\prod_{n_i > 0} (1 - 1/p_i)} \leq \frac{d}{\prod_{i=1}^r (1 - 1/p_i)} \leq kd. \quad \square$$

(12.5) Das Programm `coxmat`. Es handelt sich um ein Maple-Programm zur Berechnung der Konjugationsklasse der Coxetermatrizen eines Multibaumes. Nach (9.2) und (9.4) sind die zu verschiedenen Orientierungen eines Multibaumes gehörigen Coxetermatrizen konjugiert. Das Programm berechnet die Coxetermatrix einer bipartiten Orientierung des übergebenen Multibaumes.

Als Argument wird ein Symbol wie in (12.1) erklärt erwartet, mit der einen Ausnahme, daß der Operator `&C` nicht zulässig ist. Als Teil eines Symbols sind keine unevaluierten Namen als Parameter erlaubt.

Die Vorgehensweise des Programms beruht im wesentlichen nur auf der Beobachtung (8.5)(4) über die kombinatorische Interpretation der Einträge in einer Coxetermatrix.

Die eigentliche Arbeit wird wieder von einer Unterprozedur `coxmat1` erledigt. Sie erhält als Argument die Notation `tree` eines (gewurzelten) Multibaumes, eine Matrix `A`, einen Index `start_ind` und einen boolschen Wert `up`. Die Coxetermatrix des aus `tree` durch Entfernung der Wurzel entstehenden, bipartit orientierten Multiwaldes wird in die Matrix `A`, beginnend mit dem Index `start_ind` eingetragen. Die Orientierung von `tree` wird dabei so gewählt, daß die Wurzel genau dann eine Senke wird, wenn `up=true` ist. Zurückgegeben wird die Anzahl `nodes_out` der Punkte von `tree` sowie zwei Listen `alist_out` und `aalist_out`. `alist_out` enthält zu jedem in `tree` zur Wurzel adjazenten Punkt die Anzahl der Kanten zwischen diesem und der Wurzel; `aalist_out` enthält zu jedem Punkt aus `tree`, der zur Wurzel den Abstand 2 hat, die Anzahl der Twistwege zwischen diesem und der Wurzel (falls welche existieren). Es ist klar, daß diese Informationen ausreichen, um die Coxetermatrix eines zusammengesetzten Symbols aus denen der Komponenten zu berechnen: Zwischen der Wurzel und den Punkten, die einen Abstand > 2 zu ihr haben, gibt es wegen der bipartiten Orientierung weder Wege noch Twistwege in `tree`.

Eine Betrachtung des Programmtextes zeigt, daß jedes Element der Matrix `A` höchstens zweimal beschrieben wird: die Prozedur hat also quadratischen Aufwand in der Punktzahl von `tree`. (Der Aufwand ist nicht besser als quadratisch, denn der Baum

$[2, 2, \dots, 2]$ liefert bei bipartiter Orientierung eine fast voll besetzte Coxetermatrix, falls die Wurzel eine Senke ist.) Dies ist eine wesentliche Verbesserung gegenüber dem Berechnen der Coxetermatrix mittels $\Phi_\Gamma = -{}^t C_\Gamma(I - A_\Gamma)$, denn letzteres benötigt mindestens eine Matrixmultiplikation. Allerdings ist noch nicht klar, ob die Prozedur `coxmat` optimal ist; es wäre möglich, daß jeder Multibaum eine Orientierung besitzt, die zu einer schwach besetzten Coxetermatrix führt und daß diese Orientierung sowie die zugehörige Coxetermatrix schneller als quadratisch berechenbar sind. (Das oben angeführte Beispiel führt zu einer schwach besetzten Coxetermatrix, wenn die andere bipartite Orientierung gewählt wird.) \square

§13 Experimente und offene Fragen

Ich habe mit den im vorigen Paragraphen vorgestellten und im Anhang befindlichen Programmen einige größere Felduntersuchungen durchgeführt. Hierbei ging es um verschiedenen Vermutungen über das Coxeterpolynom, von denen einige inzwischen bewiesen oder widerlegt werden konnten.

Vermutet wurde, daß die Anzahl der nichtzyklotomischen irreduziblen Faktoren des Coxeterpolynoms eines Baumes durch die Anzahl seiner Verzweigungspunkte beschränkt sei. Ich begann, dieses zunächst bei den H-förmigen Bäumen (vgl. (9.12)(2)) mit Armlänge ≤ 25 zu testen und fand die Vermutung bestätigt. Gleichzeitig erwies sich eine andere Vermutung als falsch: die Anzahl der nichtzyklotomischen irreduziblen Faktoren des Coxeterpolynoms eines Baumes wächst nicht notwendig bei Vergrößerung des Baumes. Daher eignet sich diese Anzahl nicht unbedingt als Komplexitätsmaß.

Bei den Berechnungen an H-förmigen Bäumen ergaben sich einige Ergebnisse, die mit theoretischen Vorhersagen nicht übereinstimmten; es stellte sich heraus, daß der Grund ein Fehler in der Maple-Faktorisierungsroutine war. Dieser Fehler war bereits bekannt und die Berechnungen konnten mit einer verbesserten Prozedur wiederholt werden.

Sowohl bei den H-förmigen Bäumen der Armlänge ≤ 25 wie auch bei den Bäumen der Form $[t * [r * [p_1, p_2], s * [q_1, q_2]]]$ mit $r, s, t, p_1, p_2, q_1, q_2 \leq 15$ bestätigte sich die Vermutung über die Anzahl der nichtzyklotomischen Faktoren; inzwischen wurde sie von Herrn Lenzen und Herrn de la Peña bewiesen.

Eine weitere Beobachtung ist bisher über den experimentellen Status noch nicht hinaus: die nichtzyklotomischen Faktoren eines Coxeterpolynoms sind stets selbstreziprok. Dies ist nicht selbstverständlich, aber inzwischen bei der oben angesprochenen Klasse von H-förmigen Bäumen bestätigt.

Ich habe eine weitere Vermutung über die Nullstellenmenge des Coxeterpolynoms getestet. In (10.3) hatten wir gesehen, daß die Nullstellen des Coxeterpolynoms eines bipartiten Köchers entweder positiv sind oder den Betrag 1 haben. Man vermutet, daß die Voraussetzung 'bipartit' hierbei zu eng ist. Ich habe die Coxeterpolynome

aller Köcher mit 4 Punkten und höchstens 7-fachen Kanten getestet (die Köcher mußten dabei nur bis auf Spiegelungsäquivalenz klassifiziert werden, außerdem konnten alle bipartiten Orientierungen sowie die Kreise mit einfachen Kanten außer acht gelassen werden, da für diese die Vermutung korrekt ist). Bei allen diesen untersuchten Coxeterpolynomen lagen die Nullstellen im vorhergesagten Bereich (natürlich nur im Rahmen der Rechengenauigkeit, da hier nicht exakt gerechnet werden konnte). Bisher gibt es noch keinen Beweis für diese Vermutung.

Anhang

1. Das Programm coxpoly

LAST EDIT: Mon Jul 20 14:06:03 1992 by Axel Boldt (axel@uni-paderborn.de)

```
coxpoly := proc(kbaum,T,V)
#
# Berechnet das Coxeterpolynom des Wurzel-Kreisebaumes mit dem Symbol
# kbaum an der Stelle T. Ist der optionale Parameter V angegeben und
# sind V und T Namen, so steht im Ergebnis die Abkuerzung  $V(j)$  fuer
#  $(T^{j-1})/(T-1)$ .
#
#
# Korrekte Symbole fuer Wurzel-Kreisebaeume werden wie folgt gebildet:
#
#
# ** Ist  $t \geq 1$  und sind  $S_1, \dots, S_t$  Symbole fuer die gewurzelten
# Koecher  $(B_1, v_1), \dots, (B_t, v_t)$ , so symbolisiert
#  $[S_1, \dots, S_t]$ 
# den Wurzel-Kreisebaum  $(B, v)$ , der aus den  $B_i$  durch Identifizierung
# der Wurzeln  $v_1, \dots, v_t$  zu einer neuen Wurzel  $v$  entsteht.
#
#
# ** Fuer eine natuerliche Zahl  $n$  bezeichnet
#  $n$ 
# den linearen Graphen  $A(n)$  mit  $n$  Punkten und
#  $\&K(n)$ 
# eine  $n$ -fache Kante, jeweils mit einem Randpunkt als Wurzel.
#
#
# ** Ist  $k$  ein Symbol der Form  $n$  oder  $\&K(n)$  und ist  $S$  das Symbol
# eines beliebigen Wurzel-Kreisebaum  $(B, v)$ , so bezeichnet
#  $k \&S$ 
# den Wurzel-Kreisebaum, der aus dem Identifizieren von  $v$  mit einem
# Ende von  $k$  entsteht und das andere Ende von  $k$  als Wurzel hat.
#
#
```

```

# ** Ist t >= 0 und sind S1,...,St Symbole fuer Wurzel-Kreise-
# baume und sind p,q >= 1 und n_1,...,n_(t+1) >= 2 mit
# n_1+...+n_(t+1) = p+qtr+1, so bezeichnet
#          &C([p,q],n_1,S1,n_2,S2,...,St,n_(t+1))
# den Koecher, der aus n_1&*[S1,n_2&*[...n_t&*[St,n_(t+1)]...]] durch
# Identifizieren seiner Wurzel mit dem Ende von n_(t+1) zu einer neuen
# Wurzel entsteht. Von den p+q Kanten des entstehenden Kreises seien p
# "im Uhrzeigersinn" und q "gegen den Uhrzeigersinn" orientiert. Als
# Abkuerzung ist &C([p,q]) fuer &C([p,q],p+q+1) erlaubt.
#
#
#
# Als Argument kbaum ist auch das Schema eines Wurzel-Kreisebaumes
# zulaessig; d.h. in n &* t und in &K(n) darf n ein unevaluierte
# (evtl. indizierte) Name oder ein unevaluierter Funktionsausdruck
# sein, und in Listen duerfen $-Ausdruecke stehen, z.B. steht
#          [ p[i] &* [ 3 , &K(r[j]) ] $ j=1..s(i) ] $ i=1..t ]
# fuer
# [p[1]*[3,&K(r[1]),...,&K(r[s(1)])],...,p[t]*[3,&K(r[1]),...,&K(r[s(t)])]];
# dabei duerfen die s(i), r und t auch unevaluierte Namen sein. Die
# Abkuerzung t$k steht fuer t,...,t , wobei das Symbol t k-mal
# hingeschrieben ist. In der Argumentliste zu &C sind keine
# $-Ausdruecke erlaubt. Die Namen, die ganze Zahlen bezeichnen,
# muessen mit Kleinbuchstaben beginnen.
#
# Ueberall, wo in einem Schema das Symbol eines Wurzel-Kreisebaumes
# stehen muss, ist auch ein unevaluierter (evtl. indizierter) Name
# oder ein unevaluierter Funktionsausdruck B, der mit einem
# Grossbuchstaben beginnt, erlaubt. Das Coxeterpolynom wird dann in
# Abhaengigkeit von &Chi(B) und &chi(B) bestimmt ( &Chi(B) bezeichnet
# das Coxeterpolynom von B und &chi(B) das des aus B durch Entfernung
# der Wurzel entstehenden Koechers). Die Namen &Chi und &chi sollten
# daher keinen Wert haben.
#
# Um Rechenzeit zu sparen, stehen im Resultat die unevaluierten Summen
# in der Form Sum(...) und nicht sum(...); dies hat zur Folge, dass es
# sinnvoll sein kann (etwa wenn fuer vorher unspezifizierte Parameter
# nun Zahlen eingesetzt werden sollen), das Resultat (nach dem
# Einsetzen der Zahlen!) mit subs({Sum=sum,Product=product},-) zu
# bearbeiten.
#
# local resultat,W;

# Das Argument fuer coxpoly darf kein einzelner $-Ausdruck

```

```

# sein; dies muss hier abgetestet werden, da coxpoly1 als Argumente
# solche Ausdruecke zulaesst.
if type(kbaum,function) and op(0,kbaum)='$' then
  ERROR('Als Argument ist kein $-Ausdruck erlaubt ',kbaum)
fi;

if not(type('&Chi',name) and type('&chi',name)) then
  print('WARNUNG: &chi und &Chi sollten Namen ohne Werte sein. ');
fi;

# coxpoly1 liefert sowohl das Coxeterpolynom von kbaum als auch das
# des aus kbaum durch Entfernen der Wurzel entstehenden Koechers.
# Uns interessiert nur ersteres:
resultat:='coxpoly/coxpoly1'(kbaum,T,W)[1];

# Verarbeite die Abkuerzung V richtig:
if nargs=3 then
  if not( type (T,name) and type(V,name)) then
    ERROR('das zweite und dritte Argument muessen Namen sein. ')
  fi;
  W:=proc(j,U)
    if j=-1 then RETURN(-U^(-1))
    elif j=0 then RETURN(0)
    elif j=1 then RETURN(1)
    else RETURN ('procname'(args[1]))
  fi;
end;
# Ersetze W durch V im Resultat, aber nicht
# W(-1,U), W(0,U) und W(1,U):
RETURN(subs(W=V,eval(resultat)))
else
  if T=1 then
    W:=proc(j,U)
      RETURN (j) # V(j) hat an der Stelle 1 den Wert j.
    end
  elif T=0 then
    W:=proc(j,U)
      if j=0 then
        RETURN(0)
      else
        RETURN(1)
      fi
    end
  else

```

```

W:=proc(j,U)
  if j=-1 then RETURN(-U^(-1))
  elif j=0 then RETURN(0)
  elif j=1 then RETURN(1)
  elif j=2 then RETURN(U+1)
  # Falls Maple x^j als x*x*...*x berechnet, muss hier eine
  # intelligentere Routine eingebaut werden, die x^j in Zeit
  # O(log(j)) bestimmen kann:
  else RETURN((U^j-1)/(U-1))
  fi
end
fi;

# Ersetze nun im Resultat ueberall das W durch seine Definition:
RETURN(normal(eval(resultat),expanded))
fi
end;

####
#### Nun folgen Hilfsprozeduren fuer coxpoly:
####

'coxpoly/is_nat_number_expr':= proc(s)

# Stellt fest, ob s ein Ausdruck ist, der eine natuerliche Zahl
# bezeichnet (d.h. s ist eine natuerliche Zahl oder die in s
# vorkommenden Namen und Funktionsnamen beginnen mit Kleinbuchstaben)

  evalb( type(s,posint) or 'coxpoly/is_number_expr'(s) )

end;

'coxpoly/is_number_expr':= proc(s)

# Stellt fest, ob s ein Ausdruck ist, der eine ganze Zahl bezeichnet
# (d.h. die Namen und Funktionsnamen in s beginnen mit Kleinbuchstaben)

  local result,opnd;
  option remember;

```



```

if type(s,string) then
  RETURN( evalb( lexorder('a',s) # Achtung: 'a' und *nicht* 'a'
                  and lexorder(s,'zzzz') ) ) # ein bisschen gemogelt...
elif type(s,function) or type(s,indexed) then
  RETURN('coxpoly/is_number_expr'(op(0,s)))
elif type(s,integer) then
  RETURN(true)
elif type(s,'+') or type(s,'*') or type(s,'^') then
  # Checke nun alle Operanden von s:
  result:=true;
  for opnd in op(s) while result do
    result := 'coxpoly/is_number_expr'(opnd)
  od;
  RETURN(result)
else
  RETURN(false)
fi
end;

```

```

'coxpoly/is_kbaum_name' := proc(s)

```

```

# Stellt fest, ob s der Name eines verallgemeinerten Wurzelbaumes
# ( beginnend mit einem Grossbuchstaben ) ist.

```

```

option remember;

if type(s,string) then
  RETURN( evalb ( lexorder('A',s)
                  and lexorder(s,'ZZZZ') ) )
elif type(s,function) or type(s,indexed) then
  RETURN('coxpoly/is_kbaum_name'(op(0,s)))
else
  RETURN(false)
fi
end;

```

```

'coxpoly/coxpoly1' := proc(kbaum,T,V)

# p1 sei das Coxeterpolynom von kbaum und p2 das des aus kbaum durch
# Entfernen der Wurzel entstehenden Koechers. Zurueckgegeben wird
# eine Liste der Werte von p1, p2 an der Stelle T.
# Dabei steht V(j,T) synonym fuer (T^j-1)/(T-1), j>=-2.

local n,r,k,p,q,i,j,t,u,result,dummy_p1,dummy_q1,G,
      erst_opnd,kanten,pkte,result_ohne_wurzel,zweit_opnd;
option remember;

#####
if 'coxpoly/is_nat_number_expr'(kbaum) then
  RETURN( V(kbaum+1,T),
          V(kbaum,T)
        )
#####
elif type(kbaum,function) and op(0,kbaum)='&*' then
  if nops(kbaum)<>2 then
    ERROR('Der Operator &* benoetigt zwei Operanden',kbaum)
  fi;
  erst_opnd:=op(1,kbaum);
  if type(erst_opnd,function) and op(0,erst_opnd)='&*' then
    # Hier wird dafuer gesorgt, dass Ketten n1 &* n2 &* n3 &* ...
    # als n1 &* ( n2 &* ( n3 &* ... )) aufgefasst werden:
    RETURN('coxpoly/coxpoly1'(op(1,erst_opnd)&*
                                (op(2,erst_opnd)&*op(2,kbaum))),
            T,
            V)
  )
  elif type(op(2,kbaum),function) and op(0,op(2,kbaum))='$' then
    ERROR('Als zweiter Operand zu &* ist kein $-Ausdruck erlaubt',
          kbaum)
  elif 'coxpoly/is_nat_number_expr'(erst_opnd) then
    p:='coxpoly/coxpoly1'(op(2,kbaum),T,V);
    RETURN( V(erst_opnd,T)*p[1]-T*V(erst_opnd-1,T)*p[2],
            V(erst_opnd-1,T)*p[1]-T*V(erst_opnd-2,T)*p[2]
          )
  elif type(erst_opnd,function) and op(0,erst_opnd)='&K' then
    if not( nops(erst_opnd)=1 and
            'coxpoly/is_nat_number_expr'(op(1,erst_opnd))
          )
    then
      ERROR('&K benoetigt eine natuerliche Zahl als Argument ',kbaum)
    fi
  fi
fi

```

```

    fi;
    p:='coxpoly/coxpoly1'(op(2,kbaum),T,V);
    RETURN( V(2,T)*p[1]-op(1,erst_opnd)^2*T*p[2],
            p[1]
          )
  else
    ERROR('der erste Operand von &* muss n oder &K(n) mit n>=1 sein',
          kbaum)
  fi
#####
  elif type(kbaum,list) then
    t:=nops(kbaum);
    for i from 1 to t do
      p[i]:='coxpoly/coxpoly1'(kbaum[i],T,V)
    od;
    RETURN( product('p[i][2]', 'i'=1..t)
            *(sum('p[i][1]/p[i][2]', 'i'=1..t)-(t-1)*V(2,T)),
            product('p[i][2]', 'i'=1..t)
          )
#####
    elif 'coxpoly/is_kbaum_name'(kbaum) then
      RETURN( &Chi(kbaum),
              &chi(kbaum)
            )
#####
    elif type(kbaum,function) and op(0,kbaum)='&C' then
      if nops(kbaum)=0 then
        ERROR('&C benoetigt mindestens ein Argument ',kbaum)
      fi;
      kanten:=op(1,kbaum);
      if not( type(kanten,list) and nops(kanten)=2 and
              'coxpoly/is_nat_number_expr'(kanten[1]) and
              'coxpoly/is_nat_number_expr'(kanten[2])
            )
      then
        ERROR('Das erste Argument zu &C muss eine Liste'.
              ' aus zwei natuerlichen Zahlen sein.')
      fi;
      if nops(kbaum)=1 then
        RETURN( (T^kanten[1]-1)*(T^kanten[2]-1),
                V(kanten[1]+kanten[2],T)
              )
      elif type(nops(kbaum),odd) then
        ERROR('&C benoetigt ein einziges oder eine gerade Anzahl '.

```

```

        ' von Argumenten.')
fi;
t:=nops(kbaum)/2-1;
# Es ist t die Anzahl der an den Kreis geklebten Koecher.
#
# Bestimme nun für i=t..1 das Coxeterpolynom u[i] des linearen
# Graphen von der Wurzel von kbaum bis zur Wurzel des i-ten
# angeklebten Koechers (ausschliesslich):
u[t+1]:=0;
pkte:=-1;
for j from t by -1 to 1 do
    k:=op(2*j+2,kbaum);
    if ( type(k,integer) and k<=1 ) or
        not 'coxpoly/is_number_expr'(k)
    then
        ERROR('Die Argumente von &C, beginnend mit dem zweiten, '
            'muessen abwechselnd Zahlen >=2 und Symbole fuer '
            'fuer Kreisebaeume sein ',
            kbaum)
    fi;
    u[j]:=(T*u[j+1]+1)*V(k-1,T)+u[j+1]*V(k,T)-V(2,T)*u[j+1]*V(k-1,T);
    pkte:=pkte+k-1
od;
#
result:=(T^kanten[1]-1)*(T^kanten[2]-1);
# result ist zunaechst das Coxeterpolynom des Kreises, an dem noch
# gar kein Koecher haengt. Es werden nun sukzessive die Koecher
# angehaengt und dabei wird result mitveraendert.
n:=op(2,kbaum);
# Es ist n stets der Punkteabstand des letzten zum aktuellen am
# Kreis haengenden Teilkoechers
if ( type(n,integer) and n<=1 )
    or not 'coxpoly/is_number_expr'(n)
then
    ERROR('Die Argumente von &C, beginnend mit dem zweiten, muessen '
        'abwechselnd Zahlen >=2 und Symbole fuer Kreisebaeume sein ',
        kbaum)
fi;
if normal(pkte+n-kanten[1]-kanten[2]) <> 0 then
    ERROR('Die numerischen Daten im &C-Ausdruck sind nicht '
        'konsistent ',kbaum)
fi;
p[1]:=V(n+1,T);
p[2]:=V(n,T);

```

[illegible]

```

# umgangen werden.
dummy_p1:=p[1]*r[2]+p[2]*r[1]-V(2,T)*p[2]*r[2];
dummy_q1:=q[1]*r[2]+q[2]*r[1]-V(2,T)*q[2]*r[2];
r:='coxpoly/coxpoly1'([G,n-1],T,V); # s.o.
p[2]:=p[1]*r[2]+p[2]*r[1]-V(2,T)*p[2]*r[2];
q[2]:=q[1]*r[2]+q[2]*r[1]-V(2,T)*q[2]*r[2];
p[1]:=dummy_p1;
q[1]:=dummy_q1;
od;
RETURN( result,
        q[2]
      )
#####
elif type(kbaum,function) and op(0,kbaum)='$' then
  if nops(kbaum)<>2 then
    ERROR('Der Operator $ braucht zwei Argumente',kbaum)
  fi;
  p:='coxpoly/coxpoly1'(op(1,kbaum),T,V);
  zweit_opnd:=op(2,kbaum);
  if 'coxpoly/is_nat_number_expr'(zweit_opnd) then
    RETURN( p[2]^(zweit_opnd - 1)*
            (zweit_opnd * p[1]-(zweit_opnd - 1)*V(2,T)* p[2]),
            p[2]^zweit_opnd
          )
  elif type(zweit_opnd,'=') and
        # Die Laufvariable muss mit einem Kleinbuchstaben beginnen!
        'coxpoly/is_number_expr'(op(1,zweit_opnd)) and
        type(op(1,zweit_opnd),name) and
        type(op(2,zweit_opnd),range)
  then
    # Es wird hier Sum statt sum und Product statt product
    # zurueckgegeben; dies bedeutet eine riesige
    # Rechenzeiteinsparung, denn sum und product wuerden
    # versuchen, die entstehende Summe zu vereinfachen; das geht
    # hier jedoch sicher nicht.
    RETURN( Product(p[2],zweit_opnd)*
            (Sum(p[1]/p[2],zweit_opnd)-
              (op(2,op(2,zweit_opnd))-op(1,op(2,zweit_opnd)))*V(2,T)),
            Product(p[2],zweit_opnd)
          )
  else
    ERROR('Das zweite Argument zu $ sollte eine natuerliche Zahl '.
          'oder eine Gleichung der Form name=range sein',kbaum)
  fi

```

```
#####
elif type(kbaum,function) and op(0,kbaum)='&K' then
    if not( nops(kbaum)=1 and 'coxpoly/is_nat_number_expr'(op(1,kbaum))
        )
    then
        ERROR('Der Operator &K benoetigt als Argument '.
            'eine natuerliche Zahl',
            kbaum)
    fi;
    RETURN( V(2,T)^2-op(1,kbaum)^2*T,
        V(2,T)
    )
#####
else
    ERROR('Dieses ist kein gueltiges Symbol fuer einen '.
        'Wurzel-Kreisebaum; als Operatoren sind &*, &K, &C '.
        'und [...] zugelassen'
        ,kbaum)
fi

end;

'help/text/coxpoly':=TEXT(
'FUNCTION: coxpoly - compute the Coxeterpolynomial of a cycletree ',
',
'CALLING SEQUENCE: ',
'    coxpoly(cyctree,T,V); ',
',
'PARAMETERS: ',
'    cyctree - an expression denoting a cycletree as described below ',
'    T       - an expression ',
'    V       - an optional name ',
',
'SYNOPSIS: ',
'- cyctree denotes the equivalence class of an orientation of a rooted ',
'  cycletree without oriented cycles. The value of the corresponding ',
'  Coxeterpolynomial (which ist the characteristic polynomial of the ',
'  Coxetermatrix) at T is returned. ',
',
'- if the third parameter V is present, T and V must be names. In the ',
'  result, V(j) stands for (T^j-1)/(T-1) (this term appears often). ',
',
',

```

‘- a cycletree is an undirected, connected graph every two ‘,
 ‘ distinct simple cycles of which are edge-disjoint. Multiple edges ‘,
 ‘ are allowed (but not in cycles). ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- two orientations of a cycletree are said to be equivalent if the ‘,
 ‘ first can be transformed to the second using only reflections at ‘,
 ‘ sinks or sources. ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- the linear graph with n points is denoted by n . (The root is one ‘,
 ‘ end.) ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- the graph with two points and a n -fold edge between them is denoted ‘,
 ‘ by $\&K(n)$ ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- if u is the symbol of a linear graph or a multiple edge and S is ‘,
 ‘ any symbol denoting a rooted cycletree, then $u*S$ stands for the ‘,
 ‘ identification of one end of u with the root of S . The root of $u*S$ ‘,
 ‘ is the other end of u . ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- if S_1, \dots, S_t are symbols, then $[S_1, \dots, S_t]$ denotes the class of the ‘,
 ‘ graph resulting from identifying the roots of S_1, \dots, S_t to one ‘,
 ‘ point, the root of $[S_1, \dots, S_t]$. ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- if S_1, \dots, S_t are symbols and $p, q, n_1, \dots, n_{(t+1)}$ are natural ‘,
 ‘ numbers with $n_i \geq 2$ and $n_1 + \dots + n_{(t+1)} = p + q + t + 1$, then ‘,
 ‘ $\&C([p, q], n_1, S_1, n_2, S_2, \dots, S_t, n_{(t+1)})$ stands for the graph ‘,
 ‘ resulting from identifying the root of n_1 with the free end of ‘,
 ‘ $n_{(t+1)}$ to a new root in $n_1 \&*[S_1, n_2 \&*[\dots n_t \&*[S_t, n_{(t+1)}] \dots]]$. ‘,
 ‘ Of the $p+q$ edges of the cycle, p are oriented clockwise and q ‘,
 ‘ counterclockwise. ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- $\&C([p, q])$ is an abbreviation for $\&C([p, q], p+q+1)$ ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- in the above, the S, S_1, \dots, S_t are allowed to be unevaluated ‘,
 ‘ (perhaps indexed) names beginning with capital letters. The ‘,
 ‘ Coxeterpolynomial is then computed symbolically using $\&\chi(S)$ for ‘,
 ‘ the Coxeterpolynomial of S and $\&\chi(S)$ for the Coxeterpolynomial ‘,
 ‘ of the quiver resulting from deletion of the root of S . ‘,
 ‘ ‘,
 ‘- in the above, $n, p, q, n_1, \dots, n_{(t+1)}$ are allowed to be ‘,
 ‘ expressions containing unevaluated (perhaps indexed) names all of ‘,
 ‘ which have to begin with lower case letters. The Coxeterpolynomial ‘,
 ‘ is then computed symbolically using these names as parameters. ‘,
 ‘ ‘,


```

'- you can use (possibly nested) $-expressions in lists: [A(i)$i=1..t] ',
' is the same as [A(1),...,A(t)], even if t is an unevaluated name. ',
' ',
'- you may have to substitute "sum" for "Sum" in the result if you ',
' want to evaluate it for concrete values of the parameters.',
' ',
'EXAMPLES: ',
'> coxpoly([B1,B2],T); ',
' ',
'> coxpoly(4 &* [ 3, &C( [4,5], 4, &K(3), 3, &C([3,3]), 5) ], U); ',
' ',
'> coxpoly([ p(i)&*[2,2] $ i=1..t ],1); ',
' ',
'SEE ALSO: coxmat'
);

```

2. Das Programm cycfactor

```
# LAST EDIT: Sat Jun 27 02:05:07 1992 by Axel Boldt (axel@uni-paderborn.de)
```

```
'cycfactor/suchgrenze' := proc(d)

# liefert ein m, so dass fuer jedes q > m gilt: phi(q) > d.
# Die Daten im Programm wurden mit folgender Routine ermittelt:
#
# p:=1; r:=0; l:=1;
# for k from 2 to 8 do
#   while (p >= 1/k) do
#     r:=r+1;
#     l:=l*(ithprime(r)-1);
#     p:=p*(1-1/ithprime(r));
#   od;
#   print(k,r-1,l/(ithprime(r)-1));
# od;
#
# sie liefert die Ausgabe
#
#                                     2, 1, 1
#
#                                     3, 2, 2
#
#                                     4, 3, 8
#
#                                     5, 5, 480
#
#                                     6, 8, 1658880
#
#                                     7, 13, 44144787456000
#
#                                     8, 21, 5133855159158901099724800000
#
# und die (k-1).Zeile k,r(k),l(k) ist so zu interpretieren
# (p(1),p(2),... seien die geordneten Primzahlen): Es ist
# l(k) = (p(1)-1) * ... * (p(r(k))-1), und fuer jedes d <= l(k)
# und jedes q > k*d gilt phi(q) > d.

option remember;
```

```

    if d<=8 then RETURN(4*d)
    elif d<=480 then RETURN(5*d)
    elif d<=1658880 then RETURN(6*d)
    else ERROR('argument too big',d)
  fi
end;

# Hier sind die cyclotomischen Polynome definiert:
with(numtheory,cyclotomic,phi):

cycfactor:=proc(F)

# F ist ein Polynom mit ganzen Koeffizienten in einer
# Unbestimmten. Zurueckgegeben wird eine Liste
# [[n1,..,nk],[[G1,m1],...,[G1,ml]],r], so dass gilt:
#  $F = \Phi(n_1) \cdot \dots \cdot \Phi(n_k) \cdot G_1^{m_1} \cdot \dots \cdot G_l^{m_l}$  und die  $G_i$  sind
# nicht-assoziiert und irreduzibel.
# Es ist  $r=m_1+\dots+m_l$ .

  local N,n,d,f,T,r,vars,cyclolist,elem,wert,factorlist;

  vars:=indets(F);
  T:=op(vars);
  if not ( nops(vars)=1 and type(F,polynomial(integer,T)) ) then
    ERROR('Das erste Argument muss ein Polynom in einer Unbestimmten'.
      ' mit rationalen Koeffizienten sein.')
  fi;
  f:=F;
  wert:=subs(T=2,f);
  d:=degree(f);
  N:='cycfactor/suchgrenze'(d);
  cyclolist:=NULL;
  n:=1;
  while n <= N do
    if phi(n) <= d and
       irem(wert,cyclotomic(n,2))=0 and
       divide(f,cyclotomic(n,T),'f')
    then
      cyclolist:=cyclolist,n;
      d:=degree(f);
      N:='cycfactor/suchgrenze'(d)
    fi
  end
end

```

```

    else
        n:=n+1
    fi
od;
factorlist:=convert(factor(f),multiset);
r:=0;
for elem in factorlist do
    r := r + op(2,elem)
od;
RETURN([[cyclolist],factorlist,r])
end;

'help/text/cycfactor':=TEXT(
'FUNCTION: cycfactor - factor polynomial and distinguish between ',
'               cyclotomic and non-cyclotomic factors ',
' ',
'CALLING SEQUENCE: ',
'   cycfactor(F); ',
' ',
'PARAMETERS: ',
'   F - a polynomial with integer coefficients in one indeterminate ',
' ',
'SYNOPSIS: ',
'- returns a list [[n1,...,nk],[[G1,m1],...,[Gl,ml]],r] with natural ',
'   numbers n1,...,nk,m1,...,ml,r and non-associated irreducible ',
'   polynomials G1,...,Gl, such that ',
'    $F = \text{Phi}(n1) \cdot \dots \cdot \text{Phi}(nk) \cdot G1^{m1} \cdot \dots \cdot Gl^{ml}$  and  $r=m1+\dots+ml$ . ',
' ',
'- Here,  $\text{Phi}(k)$  is the  $k^{\text{th}}$  cyclotomic polynomial. ',
' ',
'EXAMPLES: ',
'> cycfactor(T^6-3*T+1); ',
' ',
'SEE ALSO: factor, convert[multiset], numtheory[cyclotomic] '
);

```

3. Das Programm coxmat

```
# LAST EDIT: Sat Jun 27 17:06:19 1992 by Axel Boldt (axel@uni-paderborn.de)
```

```
coxmat:=proc(tree)
# Bestimmt die Konjugationsklasse der Coxetermatrix des Baumes mit der
# Notation tree. Es wird die Hilfsprozedur 'coxmat/coxmat1' benutzt.
# Diese arbeitet rekursiv die Baumstruktur von tree ab; die
# Cartanmatrix wird nicht berechnet. Dem Baum wird eine
# bipartite Orientierung gegeben, in der die Wurzel eine Senke ist.
#
# Aufwand: quadratisch in der Punktzahl von tree.
#
# Verarbeitete Symbole:
# -----
#
# ** Ist t >= 1 und sind S1,...,St Symbole fuer die gewurzelten
# Koecher (B1,v1),...,(Bt,vt), so symbolisiert
#                               [S1,...,St]
# den Wurzel-Kreisebaum (B,v), der aus den Bi durch Identifizierung
# der Wurzeln v1,...,vt zu einer neuen Wurzel v entsteht.
#
#
# ** Fuer eine natuerliche Zahl n bezeichnet
#                               n
# den linearen Graphen A(n) mit n Punkten und
#                               &K(n)
# eine n-fache Kante, jeweils mit einem Randpunkt als Wurzel.
#
#
# ** Ist k ein Symbol der Form n oder &K(n) und ist S das Symbol
# eines beliebigen Wurzel-Kreisebaum (B,v), so bezeichnet
#                               k&*S
# den Wurzel-Kreisebaum, der aus dem Identifizieren von v mit einem
# Ende von k entsteht und das andere Ende von k als Wurzel hat.
#

local A,nodes,alist,aalist;

A:=table(sparse);
# Trick: coxmat1 bestimmt nur die Coxetermatrix des durch Entfernung
# der Wurzel entstehenden Koechers. Also wird einfach an die Wurzel
```

```

# von tree eine Kante angeklebt:
'coxmat/coxmat1'(&K(1)&*(tree),A,1,false,'nodes','alist','aalist');
convert(A,array,sparse)
end;

####
#### Nun folgt die Hilfsprozedur fuer coxmat:
####

'coxmat/coxmat1':=proc(tree, A, start_ind, up,
                        nodes_out, alist_out, aalist_out)

# start_ind gibt den Index in A an, ab dem die Coxetermatrix des aus
# tree durch Entfernung der Wurzel entstehenden Koechers abgelegt
# werden soll (der Multibaum erhaelt eine bipartite Orientierung).
# up ist genau dann true, wenn die Wurzel von tree eine Senke werden
# soll.
# In nodes_out wird die Knotenanzahl von tree zurueckgegeben.
# In alist_out wird eine Liste von Listen zurueckgegeben. Jedes Element
# enthaelt als ersten Eintrag den Index eines zur Wurzel adjazenten
# Knotens und als zweiten die Anzahl der Kanten zwischen diesem Knoten
# und der Wurzel.
# In aalist_out wird eine Liste von Listen zurueckgegeben. Jedes
# Element enthaelt den Index eines Knotens von tree, von dem aus es
# einen Twist-Weg der Laenge 2 zur Wurzel gibt, und die Anzahl dieser
# Twist-Wege.

local  alist,aalist,elem,k,n,p1,p2,subaalist,s,
        subalist,subnodes,substart,subtree,subup,point ;

#####
if type(tree,list) then
  substart:=start_ind;
  alist:=NULL;
  aalist:=NULL;
  for subtree in tree do
    'coxmat/coxmat1'(subtree,A,substart,up,
                    'subnodes','subalist','subaalist');
    alist:=alist,subalist;
    aalist:=aalist,subaalist;
    substart:=substart+subnodes-1
  od;

```

```

alist_out:=alist;
aalist_out:=aalist;
nodes_out:=substart - start_ind+1;
RETURN()
#####
elif type(tree,function) and op(0,tree)='&K' then
  if not(nops(tree)=1 and type(op(1,tree),posint)) then
    ERROR('&K verlangt als Argument eine natuerliche Zahl',tree)
  fi;
  nodes_out:=2;
  alist_out:=[start_ind,op(1,tree)];
  aalist_out:=NULL;
  A[start_ind,start_ind]:=-1;
  RETURN()
#####
elif type(tree,function) and op(0,tree)='&*' then
  # Erzwingen rechtsassoziative Klammerung bei &*:
  if type(op(1,tree),function) and op(0,op(1,tree))='&*' then
    'coxmat/coxmat1'(op(1,op(1,tree))&*(op(2,op(1,tree))&*op(2,tree)),
      A, start_ind, up, 'nodes_out', 'alist_out', 'aalist_out');
    RETURN()
  elif type(op(1,tree),function) and op(0,op(1,tree))='&K' then
    k:=op(1,op(1,tree));
    subtree:=op(2,tree);
    if not(nops(op(1,tree))=1 and type(k,posint)) then
      ERROR('&K verlangt als Argument eine natuerliche Zahl',tree)
    fi;
    # Es ist jetzt tree = &K(k) &* subtree
    'coxmat/coxmat1'(subtree,A,start_ind+1,not up,
      'subnodes','subalist','subaalist');
    nodes_out:=subnodes+1;
    alist_out:=[start_ind,k];
    if up then
      s:=0;
      for elem in [subalist] do
        aalist:=aalist,[elem[1],k*elem[2]];
        A[start_ind,elem[1]]:=-elem[2];
        A[elem[1],start_ind]:=elem[2];
        s:=s+elem[2]^2
      od;
      # Es gibt s Twistwege der Laenge 2 von start_ind nach
      # start_ind und eine Weg (der Laenge 0):
      A[start_ind,start_ind]:=s-1;
      # Beachte die Twistwege der Laenge 2 von start_ind in subtree:

```

```

    for elem in [subaalist] do
        A[start_ind,elem[1]]:=elem[2];
        A[elem[1],start_ind]:=elem[2]
    od;
    aalist_out:=NULL
else
    # Die zu start_ind in subtree adjazenten Punkte liefern
    # Twistwege von tree zu seiner Wurzel:
    aalist:=NULL;
    for elem in [subalist] do
        aalist:=aalist,[elem[1],k*elem[2]];
        # Hier werden die Kanten von start_ind in subtree
        # abgearbeitet:
        A[start_ind,elem[1]] := elem[2];
        A[elem[1],start_ind] := -elem[2];
    od;
    aalist_out:=aalist;
    A[start_ind,start_ind]:=-1;
    # Durch das Ankleben der Wurzel entstehen in subtree
    # neue Twistwege:
    for p1 in [subalist] do
        for p2 in [subalist] do
            A[p1[1],p2[1]]:=A[p1[1],p2[1]]+p1[2]*p2[2]
        od
    od
    fi;
    RETURN()
elif type(op(1,tree),posint) then
    n:=op(1,tree);
    subtree:=op(2,tree)
else
    ERROR('Das erste Argument eines &*-Ausdrucks muss eine '.
        'natuerliche Zahl oder ein &K-Ausdruck sein',tree)
fi
#####
    elif type(tree,posint) then
        n:=tree;
        subtree:=[]
    else
        #####
        ERROR('Hier ist als Argument nur eine natuerliche Zahl, eine Liste, '.
            ' ein &*- oder ein &K-Ausdruck erlaubt',tree)
    fi;
#####

```



```

### Nun hat tree die Gestalt n*&subtree.
#####
if n=1 then
  # Es gilt 1*&subtree = subtree.
  'coxmat/coxmat1'(subtree,A,start_ind,up,
    'nodes_out','alist_out','aalist_out');
  RETURN()
fi;
if n=2 then
  # Es gilt 2*&subtree = &K(1)&subtree
  'coxmat/coxmat1'(&K(1)&*(subtree),A,start_ind,up,
    'nodes_out','alist_out','aalist_out');
  RETURN()
fi;
# substart ist der Index, ab dem die Coxetermatrix des aus subtree
# durch Entfernen der Wurzel entstehenden Koechers abgelegt wird.
substart:=start_ind+n-1;
# subup gibt an, ob die Wurzel von subtree eine Wurzel wird oder
# nicht:
subup:=evalb(up=type(n,odd));
'coxmat/coxmat1'(subtree,A,substart,subup,
  'subnodes','subalist','subaalist');
if subup then
  # substart-1 ist der Index der Wurzel von subtree. Die zu dieser
  # Wurzel in subtree adjazenten Punkte ergeben in tree Wege der
  # Laenge 1 und Twistwege der Laenge 2:
  for elem in [subalist] do
    A[substart-1,elem[1]]:=elem[2];
    A[elem[1],substart-1]:=-elem[2];
    A[substart-2,elem[1]]:=elem[2];
    A[elem[1],substart-2]:=elem[2]
  od;
  # In subtree ergeben sich durch das Ankleben der Wurzel neue
  # Twistwege:
  for p1 in [subalist] do
    for p2 in [subalist] do
      A[p1[1],p2[1]]:=A[p1[1],p2[1]]+p1[2]*p2[2]
    od
  od;
  A[substart-1,substart-1]:=-1;
  A[substart-2,substart-1]:=-1;
  A[substart-1,substart-2]:=1
else
  s:=0;

```

```

for elem in [subalist] do
  s:=s+elem[2]^2;
  # substart-1 ist der Index der Wurzel von subtree. Die zu dieser
  # Wurzel in subtree adjazenten Punkte ergeben in tree Wege der
  # Laenge 1:
  A[substart-1,elem[1]]:=-elem[2];
  A[elem[1],substart-1]:=elem[2]
od;
# s ist die Anzahl der Twistwege von substart-1 in subtree hinein;
# ausserdem einen Weg der Laenge 0 von substart-1 zu sich selbst
# und einen Twistweg der Laenge 2 ueber substart-2:
A[substart-1,substart-1]:=s;
A[substart-2,substart-2]:=-1;
A[substart-2,substart-1]:=1;
A[substart-1,substart-2]:=-1;
# Hier werden die Twistwege von substart-1 in subtree hinein
# gezaehlt:
for elem in [subalist] do
  A[substart-1,elem[1]]:=elem[2];
  A[elem[1],substart-1]:=elem[2]
od
fi;
# Trage nun den bipartit orientierten linearen Graphen in A ein:
for point from n-4 by -1 to 0 do
  if evalb(up=type(point,odd)) then
    A[start_ind+point,start_ind+point]:=-1;
    A[start_ind+point,start_ind+point+1]:=1;
    A[start_ind+point+1,start_ind+point]:=-1;
    A[start_ind+point+1,start_ind+point+1]:=1;
  else
    A[start_ind+point,start_ind+point+1]:=-1;
    A[start_ind+point,start_ind+point+2]:=1;
    A[start_ind+point+1,start_ind+point]:=1;
    A[start_ind+point+2,start_ind+point]:=1
  fi
od;
nodes_out:=n-1+subnodes;
alist_out:=[start_ind,1];
if up then
  aalist_out:=NULL
else
  aalist_out:=[start_ind+1,1]
fi
end;

```

```

'help/text/coxmat':=TEXT(
'FUNCTION: coxmat - compute the Conjugacy-Class of the Coxetermatrix of ',
'          a Multitree ',
' ',
'CALLING SEQUENCE: ',
'  coxmat(tree); ',
' ',
'PARAMETERS: ',
'  tree - an expression denoting a multitree as described below ',
' ',
'SYNOPSIS: ',
'- the Coxetermatrix belonging to a bipartite orientation of the ',
'  multitree tree is returned. Every two Coxetermatrices of different ',
'  orientations of a multitree are conjugate. ',
' ',
'- a rooted multitree is a tree with possible multiple edges and one ',
'  distinguished point, the root. The notation for rooted multitrees ',
'  is as follows: ',
' ',
'- the linear graph with n points is denoted by n. (The root is one ',
'  end.) ',
' ',
'- the graph with two points and a n-fold edge between them is denoted ',
'  by &K(n) ',
' ',
'- if u is the symbol of a linear graph or a multiple edge and S is any ',
'  symbol denoting a rooted cycletree, then u*S stands for the ',
'  identification of one end of u with the root of S. The root of u*S ',
'  is the other end of u. ',
' ',
'- if S1,...,St are symbols, then [S1,...,St] denotes the class of the ',
'  graph resulting from identifying the roots of S1,...,St to one ',
'  point, the root of [S1,...,St]. ',
' ',
'- This is the same notation as is understood by the routine coxpoly. ',
'  But here, no cycles and no symbolic entries are allowed. ',
'  If you wish to compute the coxeterpolynomial of tree, use coxpoly. ',
' ',
'EXAMPLES: ',
'> coxmat(&K(3)&*[3,4&K(2),[3,&K(2)&*[2,3]]]); ',
' ',
'SEE ALSO:  coxpoly'

```

);

Literaturverzeichnis

- [A'Campo] N. A'Campo: *Sur les valeurs propres de la transformation de Coxeter*, Invent. Math. 33 (1976), S. 61-67
- [AndFull] F. W. Anderson, K. R. Fuller: *Rings and Categories of Modules*, Springer 1974
- [Auslander] M. Auslander: *Morphisms determined by Objects*, Representation Theory of Algebras, Proceedings of the Philadelphia Conference 1976, Hrsg: R. Gordon, Dekker 1978
- [AuslBridg] M. Auslander, I. Bridger: *Stable module Theory*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 94, 1969
- [AuslPlatz] M. Auslander, M. I. Platzek: *Representation Theory of hereditary artin algebras*, Representation Theory of Algebras, Proceedings of the Philadelphia Conference 1976, Hrsg: R. Gordon, Dekker 1978
- [AuslReit] M. Auslander, I. Reiten: *Representation theory of Artin Algebras IV*, Communications in Algebra (1977), S. 443-518
- [BGP] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, V. A. Ponomarev: *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem*, Russian Mathematical Surveys 28 (1973), Teil 2, S. 17-32
- [Bourbaki] Bourbaki: *Eléments de Mathématique, Chap. 10: Algèbre homologique*, Masson 1980
- [CDS] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs: *Spectra of Graphs*, Academic Press 1979
- [CollSin] L. Collatz, U. Sinogowitz: *Spektren endlicher Graphen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957), S. 64-77
- [Gabriel1] P. Gabriel: *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. math. France 90 (1962), S. 323-447
- [Gabriel2] P. Gabriel: *Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras*, Proceedings of the conference on representation theory 1979 in Ottawa, Hrsg: V. Dlab und P. Gabriel, Lecture Notes in Mathematics 831, Springer 1980

- [GHJ] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones: *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Springer 1989.
- [HiltRees] P. J. Hilton, D. Rees: *Natural Maps of Extension Functors and a Theorem of R. G. Swan*, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 57 (1961), S. 489-502
- [HiltStam] P. J. Hilton, U. Stammbach: *A Course in Homological Algebra*, Springer 1971
- [JensLenz] C. U. Jensen, H. Lenzing: *Model Theoretic Algebra*, Gordon and Breach 1989.
- [LenzPena] H. Lenzing, J.A. de la Peña: *Wild canonical algebras*, Preprint
- [Lenzing] H. Lenzing: *Zur Existenz fast zerfallender Folgen (Nachlese)*, 1980
- [Mitchell1] B. Mitchell: *Theory of Categories*, Academic Press 1965
- [Mitchell2] B. Mitchell: *Rings with several objects*, Advances in Math. 8 (1972), S.1-161
- [Pierce] R. S. Pierce: *Associative Algebras*, Springer 1982
- [Popescu] N. Popescu: *Abelian Categories with Applications to Rings and Modules*, Academic Press 1973
- [Ringel] C. M. Ringel: *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1099, Springer 1984
- [Schwenk] A. Schwenk: *Computing the characteristic polynomial of a graph*, Graphs and Combinatorics, Hrsg: R. Bari und F. Harary, Lecture Notes in Mathematics 406, S.153-172, Springer 1974

Axel Boldt
 Universität-Gesamthochschule Paderborn
 Fachbereich Mathematik/Informatik
 Postfach 1621
 D-W-4790 Paderborn
 EMAIL: axel@uni-paderborn.de