

## Equations aux Dérivées Partielles

### TP Matlab

#### Exercice 1 : Equation de la chaleur

- 1) On considère une fonction à deux variable  $f(x, t)$ . En considérant un développement de Taylor d'ordre 2 selon la variable  $x$  et en deux points judicieusement choisies, montrer qu'une approximation de la dérivée seconde de  $f$  par rapport  $x$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{h^2} [f(x+h, t) - 2f(x, t) + f(x-h, t)]$$

- 2) On rappelle l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), & x \in [0; L] \text{ et } t > 0 \\ f(0, t) = f_1(t), & f(L, t) = f_2(t) : \text{conditions aux limites} \\ f(x, 0) = g(x) : \text{condition initiale} \end{cases} \quad (1)$$

On introduit les notations suivantes :

- $x_j = jh, j \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$
- $t_i = i\tau, i \in \llbracket 0; m \rrbracket$
- $f(x_j, t_i) = f_j^{(i)}$

Montrer que la discrétisation de l'équation de la chaleur mène à l'expression suivante :

$$f_j^{(i+1)} \simeq r f_{j-1}^{(i)} + (1-2r) f_j^{(i)} + r f_{j+1}^{(i)} \quad (2)$$

où  $r$  est un paramètre que l'on précisera.

- 3) Montrer à partir de la formule (2) que la discrétisation du problème différentiel (1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^{(i+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{(i)} + r \tilde{\mathbf{F}}^{(i)}$$

où :

$$\mathbf{F}^{(i)} = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_n^{(i)})^T, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(i)} = (f_0^{(i)}, 0, \dots, 0, f_{n+1}^{(i)})^T, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & & & \\ r & 1-2r & r & & & 0 \\ 0 & r & \ddots & & & \\ & & \ddots & r & 0 & \\ & 0 & & r & 1-2r & r \\ & & & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

- 4) On s'intéresse à l'évolution dans le temps de la distribution de température le long d'une barre de longueur  $L = 1 \text{ m}$ . On connaît la distribution de température à l'instant initial, et on suppose que la température aux extrémités de la barre est constante et nulle au cours du temps. Ce problème est modélisé à l'aide d'une équation aux dérivées partielles appelée « équation de diffusion de la chaleur » étudiée à la question précédente :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), & x \in [0, 1], \quad t \geq 0 \\ f(0, t) = f(1, t) = 0 : \text{conditions aux limites} \\ f(x, 0) = 1 - |2x - 1| : \text{condition initiale} \end{cases}$$

où  $f(x, t)$  est la température au point  $x$  et à l'instant  $t$ .

- a. Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre la version discrétisée de l'équation de la chaleur (cf. cours) et de visualiser l'évolution temporelle du profil de température le long de la barre (cf. Fig.1). On travaillera sur l'intervalle temporel  $[0, t_{max}]$  avec  $t_{max} = 0,13$  s.

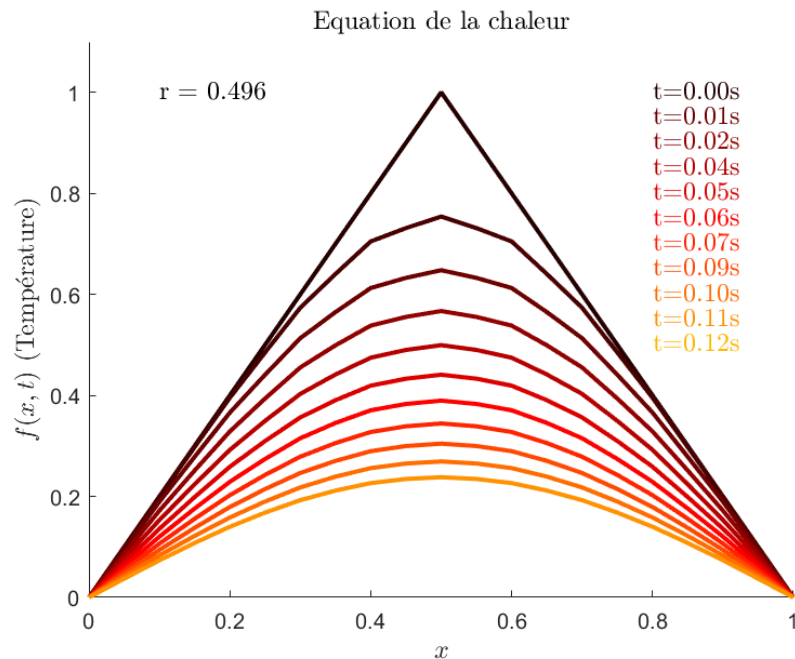


Figure 1 : Solution stable

- b. Proposer des valeurs spécifiques du pas temporel  $\tau$  et du pas spatial  $h$  qui mettent en évidence la stabilité ou l'instabilité de la méthode de résolution (cf. cours). On insistera sur la sensibilité du critère qui permet d'obtenir, selon les valeurs de  $\tau$  et  $h$ , des solutions stables ou au contraire des solutions instables (cf. Fig. 2).

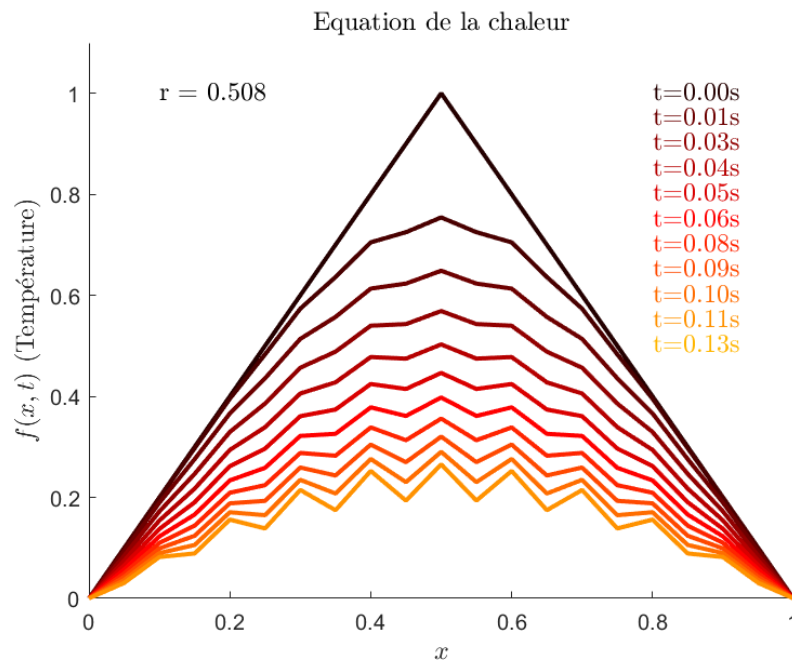


Figure 2 : Solution instable

- c. Proposer un autre profil de températures initiales et afficher les résultats (on gardera les mêmes conditions aux limites).

## Exercice 2 : Equation d'onde

On considère l'équation d'ondes en dimension 1 et sans second membre ( $u = 0$ ) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0 \quad (1)$$

où  $f(x, t)$  représente l'amplitude de l'onde au point  $x$  et à l'instant  $t$ .

- 1) En considérant un développement de Taylor d'ordre 2 de  $f$  selon la variable  $t$ , en deux points différents judicieusement choisis, montrer qu'une approximation de la dérivée seconde de  $f$  par rapport à la variable  $t$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \simeq \frac{f(x, t + \tau) - 2f(x, t) + f(x, t - \tau)}{\tau^2}$$

- 2) On introduit les notations suivantes :

- $x_j = jh, j \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$
- $t_i = i\tau, i \in \llbracket 0; m \rrbracket$
- $f(x_j, t_i) = f_j^{(i)}$

Montrer que la discrétisation de l'équation d'onde mène à l'expression suivante :

$$f_j^{(i+1)} = 2(1-r)f_j^{(i)} + r(f_{j+1}^{(i)} + f_{j-1}^{(i)}) - f_j^{(i-1)} \quad (2)$$

où  $r$  est un paramètre que l'on précisera.

- 3) On considère le problème différentiel composé de l'équation d'ondes (1) à laquelle on ajoute :

- les conditions initiales :  $f(x, 0) = g(x)$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = k(x), \quad x \in [0, L]$
- les conditions aux limites :  $f(0, t) = f(L, t) = 0, \quad t > 0$

où  $g$  et  $k$  sont des fonctions supposées connues.

Montrer à partir de la formule (2) que la discrétisation du problème différentiel peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{F}^{(i+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{(i)} - \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3)$$

où :

$$\mathbf{F}^{(i)} = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_n^{(i)})^T \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2(1-r) & r & 0 & & & \\ r & 2(1-r) & r & & & 0 \\ 0 & r & \ddots & & & \\ & 0 & & r & 2(1-r) & r \\ & & & 0 & r & 2(1-r) \end{pmatrix}$$

- 4) Montrer la formule de la condition CFL (condition de stabilité pour la résolution numérique de l'équation d'onde).

Indication : s'inspirer de la condition de stabilité de l'équation de la chaleur (cf. cours EDP).

- 5) La solution analytique du problème différentiel ci-dessus est donnée par :

$$f(x, t) = \frac{1}{2}(g(x-t) + g(x+t))$$

Cela signifie que deux ondes se propagent dans des directions opposées jusqu'à ce qu'elles atteignent les bords du domaine. Les conditions aux limites imposent l'apparition d'ondes symétriques dues à la réflexion des ondes incidentes sur les bords. Les deux ondes continuent alors de se propager indéfiniment en se réfléchissant sur les bords.

- Ecrire un programme Matlab permettant de résoudre la version discrétisée de l'équation de propagation des ondes (cf. cours) et de visualiser des deux ondes évoquées ci-dessus. On prendra  $L = 5 \text{ m}$  et on travaillera sur l'intervalle temporel  $[0, t_{\max}]$  avec  $t_{\max} = 10 \text{ s}$ . On supposera que l'onde initiale  $g$  possède un profil gaussien centré sur l'origine du domaine spatial, et que la fonction  $k$  est nulle.
- Proposer des valeurs spécifiques du pas temporel  $\tau$  et du pas spatial  $h$  qui mettent en évidence la stabilité ou l'instabilité de la méthode de résolution (« condition CFL »). On insistera sur la sensibilité du critère qui permet d'obtenir, selon les valeurs de  $\tau$  et  $h$ , des solutions stables ou au contraire des solutions instables.
- Proposer des profils initiaux  $g$  autres que le profil gaussien centrée sur l'origine.

### Exercice 3 : Débruitage d'image (méthode de l'équation de la chaleur et méthode de Perona-Malik)

L'objectif de cet exercice est d'implémenter les méthodes de débruitage d'image étudiées au chapitre IV du cours sur les Equations aux Dérivées Partielles (EDP), à savoir la méthode de l'équation de la chaleur et la méthode de Perona-Malik. Pour cela, écrire un programme Matlab permettant d'obtenir les figures des pages 45 et 46 du cours.

Pour la figure de la page 45, on pourra utiliser la fonction suivante :

```
function I=make_your_image()
    n=100;
    w1=floor(n/3);
    w2=floor(n/2);
    bw=floor(n/50);
    vp=255;
    imagemat=vp*ones(n,n);
    imagemat(:,w2-bw:w2+bw)=0;
    imagemat(w1-bw:w1+bw,:)=0;
    imagemat(2*w1-bw:2*w1+bw,:)=0;
    I=double(imagemat);
```

### Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de résoudre numériquement l'équation d'onde bidimensionnelle. Cette équation décrit la propagation d'une onde dans une cavité à deux dimensions (comme par exemple une onde à la surface de l'eau). Si on note  $f(x, y, t)$  l'amplitude de l'onde alors celle-ci est régie par l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, y, t) - c^2 \Delta f(x, y, t) = s(x, y, t) \quad (1)$$

où  $s(x, y, t)$  représente la source émettrice de l'onde. On s'intéresse ici au cas où cette source est ponctuelle, localisée au point  $(x_s, y_s)$ , et sinusoïdale de fréquence  $\nu_0$ , c'est-à-dire :

$$s(x, y, t) = \begin{cases} \sin(2\pi\nu_0 t), & x = x_s, \ y = y_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

On suppose que l'onde se propage dans le domaine rectangulaire de cotés  $L_x$  et  $L_y$  pendant une durée  $T$ , c'est-à-dire :

$$x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y], \quad t \in [0, T]$$

On ajoute à l'équation (1) les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} f(x, y, 0) = 0 \\ \left. \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Cela signifie qu'à l'instant initial  $t = 0$  le milieu est au repos et que la vitesse de l'onde est nulle.

Afin de résoudre numériquement l'équation d'onde, le domaine de spatio-temporel est découpé de la façon suivante (voir Fig. 1) :

$$\begin{cases} x_i = ih_x, & i \in \llbracket 0, n_x \rrbracket \\ y_j = jh_y, & j \in \llbracket 0, n_y \rrbracket \\ t_k = k\tau, & k \in \llbracket 0, m \rrbracket \end{cases} \quad (4)$$

L'intervalle  $[0, L_x]$  (resp.  $[0, L_y]$ , resp.  $[0, T]$ ) est décomposé en  $n_x$  (resp.  $n_y$ , resp.  $m$ ) sous-intervalles d'amplitude  $h_x$  (resp.  $h_y$ , resp.  $\tau$ ). On a alors (voir Fig. 1) :

$$L_x = n_x \times h_x, \quad L_y = n_y \times h_y, \quad T = m \times \tau$$

L'objectif est de calculer l'amplitude de l'onde en tout point de l'espace  $(x_i, y_j)$  et à chaque instant  $t_k$ . Pour simplifier on introduit la notation :

$$f(x_i, y_j, t_k) = f_{i,j}^{(k)} \quad (5)$$

On note  $i_s$  et  $j_s$  les indices correspondant à la position de la source (c'est-à-dire  $x_s = i_s h_x$  et  $y_s = j_s h_y$ ).

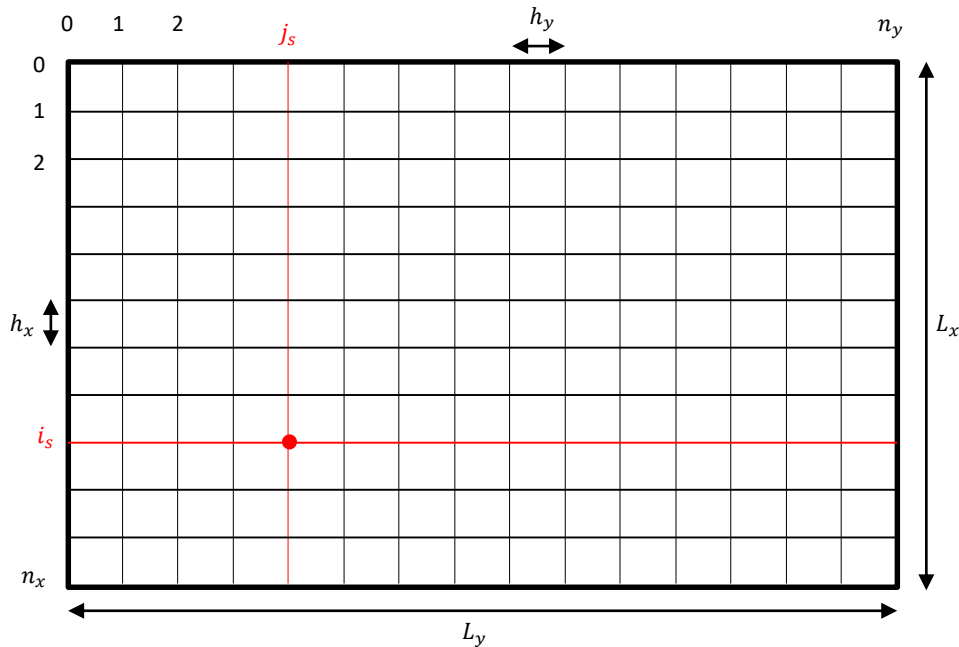


Figure 1 : Grille de calcul sur le domaine spatial avec localisation (en rouge) de la source

**Attention** : l'indice  $i$  fait référence à la variable  $x$  qui est ici, contrairement aux habitudes, sur la dimension verticale.

1) Montrer que la discrétisation des conditions initiales implique que :

$$f_{i,j}^{(0)} = f_{i,j}^{(1)} = 0, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n_x \rrbracket \times \llbracket 0, n_y \rrbracket \quad (6)$$

2) Montrer que la discrétisation de l'équation d'onde mène à la relation de récurrence suivante :

$$f_{i,j}^{(k+1)} = 2f_{i,j}^{(k)} - f_{i,j}^{(k-1)} + r_x[f_{i+1,j}^{(k)} - 2f_{i,j}^{(k)} + f_{i-1,j}^{(k)}] + r_y[f_{i,j+1}^{(k)} - 2f_{i,j}^{(k)} + f_{i,j-1}^{(k)}] + \tau^2 \begin{cases} \sin(2\pi\nu_0 k\tau), & i = i_s, j = j_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

avec :

$$k \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket, \quad (i, j) \in \llbracket 1, n_x-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n_y-1 \rrbracket, \quad r_x = \left(\frac{c\tau}{h_x}\right)^2, \quad r_y = \left(\frac{c\tau}{h_y}\right)^2$$

### 3) Résolution numérique

On propose de calculer toutes les valeurs de  $f_{i,j}^{(k+1)}$  données par la formule (7) à l'aide de trois boucles `for` imbriquées, la première sur l'indice  $k$  (le temps), la deuxième sur l'indice  $i$  (la largeur) et la troisième sur l'indice  $j$  (la longueur). Vous utiliserez obligatoirement les notations suivantes dans votre programme (les valeurs numériques sont données à titre d'exemple, il est même conseillé d'en essayer de nouvelles) :

```
% espace
Lx=15;hx=0.1;x=0:hx:Lx;nx=length(x);
Ly=15;hy=0.1;y=0:hy:Ly;ny=length(y);

% temps
T=2;tau=0.002;t=0:tau:T;m=length(t);

% celerité de l'onde
c=7;

% coefficients rx et ry
rx=(c*tau/hx)^2;
ry=(c*tau/hy)^2;

% conditions CFL (non explicitement utilisées, juste pour vérification)
CFL_x=hx/(c*tau)
CFL_y=hy/(c*tau)

% indices correspondant à la position de la source
i_s=floor(nx/3);
j_s=floor(ny/2);

% fréquence de la source
nu=8;

% condition initiale (le milieu est au repos à l'instant initial)
f=zeros(nx,ny,m);
```

- a. Résoudre l'équation d'onde dans le cas d'une onde se propageant librement dans le domaine  $[0, L_x] \times [0, L_y]$ , et dont la source se situe, par exemple, au tiers de la largeur et à la moitié de la longueur (voir Fig. 2).

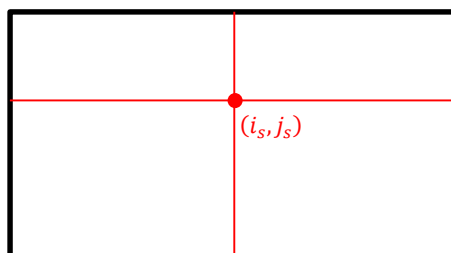


Figure 2 : Position de la source située au tiers de la largeur et à la moitié de la longueur

Afficher la propagation de l'onde une fois que les calculs sont finis (c'est-à-dire à la suite des 3 boucles `for` imbriquées) à l'aide du code suivant :

```
figure(1);
f=f/max(max(max(f)));
[X,Y]=meshgrid(y,x);
for k=1:m-1
    surf(X,Y,f(:,:,k));
    xlabel('$y$', 'interpreter', 'latex');
    ylabel('$x$', 'interpreter', 'latex');
    zlb=zlabel('$f(x,y,t)$', 'interpreter', 'latex'); zlb.Rotation=0;
    view(-30,50);
    caxis([-1,1]); % échelle des couleurs
    zlim([-1,1]);
    pause(0.001);
end
```

- b. Résoudre l'équation d'onde dans le cas de la présence d'une fente d'une épaisseur égale à 2 pixels, et présentant une ou deux ouvertures d'une largeur égale à 6 pixels. On pourra situer la fente aux trois quarts de la largeur et l'ouverture de la fente au milieu de la longueur (voir Fig. 3a), ou au quart et aux trois quarts de la longueur dans le cas de deux ouvertures (voir Fig. 3b). Ajoutez à votre code les lignes suivantes et les compléter (`i_slit` et `j_slit` sont les indices correspondant à la zone occupée par la fente) :

```
% présence ou pas d'une fente
slit=1; % 0 -> pas de fente, 1 -> 1 ouverture, 2 -> 2 ouvertures

% indices correspondant à l'épaisseur de la fente
i_slit=_____

% indices correspondant à la longueur de la fente
switch slit
    case 1 % 1 ouverture
        j_slit=_____
    case 2 % 2 ouvertures
        j_slit=_____
end
```

Dans ce cas, à chaque instant, il faut mettre à zéro les valeurs de `f` sur la zone occupée par la fente, c'est-à-dire :

```
f(i_slit,j_slit,k)=0;
```

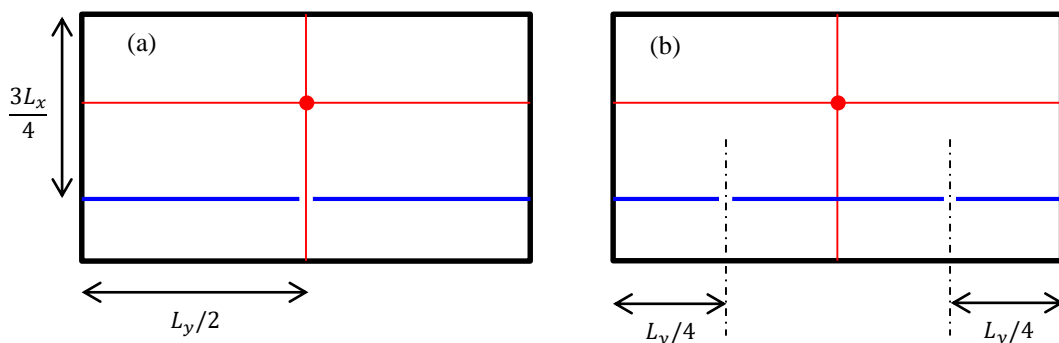


Figure 3 : Position de la fente située aux trois quarts de la largeur avec (a) une ouverture située au centre de la longueur, et (b) deux ouvertures situées au quart et aux trois quarts de la largeur

- 4) Proposez d'éventuellement améliorations et de nouvelles configurations en laissant libre choix à votre imagination tout en restant clair et rigoureux dans le codage mais aussi dans la description et l'interprétation des nouveaux résultats !