Majeure Image – S8

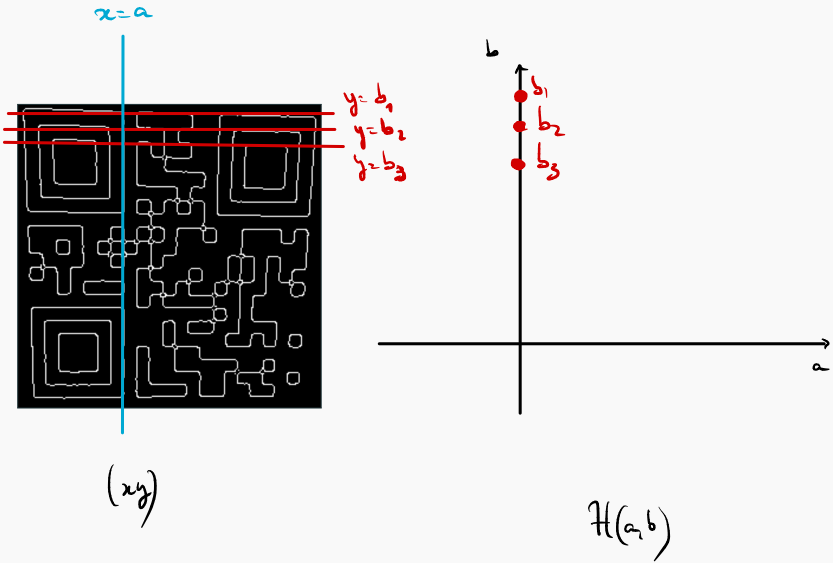
Analyse d'Image

Transformée de Hough

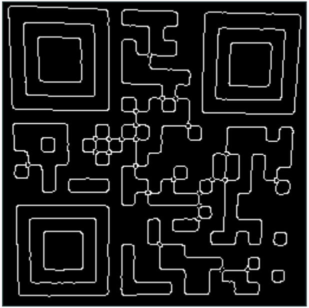
Marion Foare (CPE/LIP ENSL)
Bureau B126A – marion.foare@cpe.fr

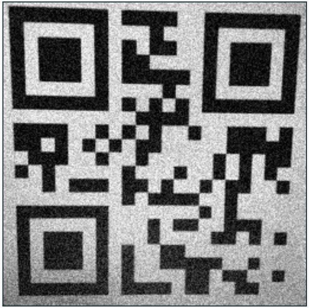
Introduction

Des images structurées



Des images structurées

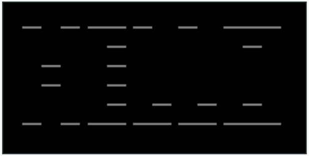




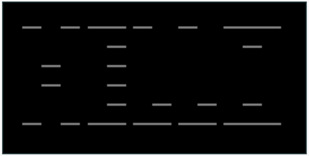
Des images structurées

Des images structurées

Des images structurées

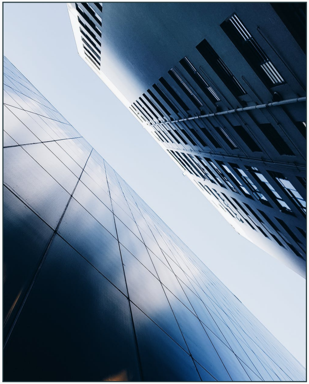


Des images structurées



Des images structurées

Des images structurées



Transformée de Hough

Outil standard pour la **reconnaissance de droites, cercles, ellipses**...
et de toute courbe paramétrée (avec peu de paramètres).

⚠ Ne permet pas de définir un contour !

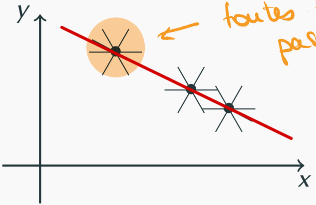
Un peu d'histoire...

- développée par P. Hough en 1962...
- ... et généralisée (forme actuelle) par R. Duda et P. Hart en 1972
- méthode brevetée par IBM

Détection de droites

Principe

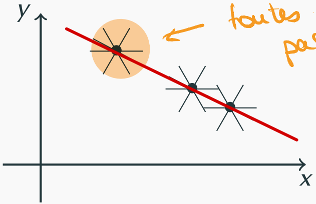
Pour chaque point de "l'objet", on considère toutes les droites qui passent par ce point.



toutes les droites passant par ce point

Principe

💡 Pour chaque point de "l'objet", on considère toutes les droites qui passent par ce point.



toutes les droites passant par ce point

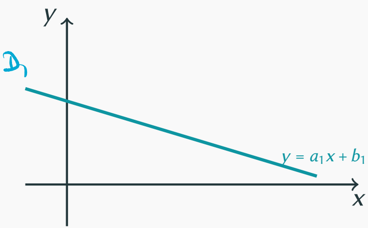
(décrite 3 fois)

Décision

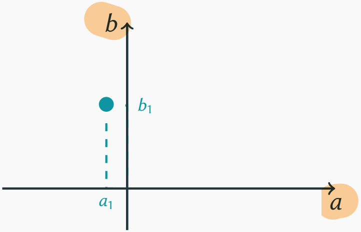
Les droites les plus décrites sont celles présentes sur l'image.

Changement de repère

Une droite $D_i : y = a_i x + b_i$ dans l'espace image correspond au point (a_i, b_i) dans l'espace des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$



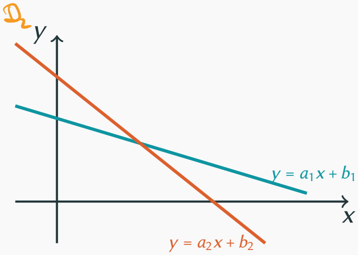
Plan image xy



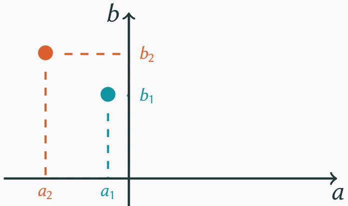
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Changement de repère

Une droite $D_i : y = a_i x + b_i$ dans l'espace image correspond au point (a_i, b_i) dans l'espace des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$



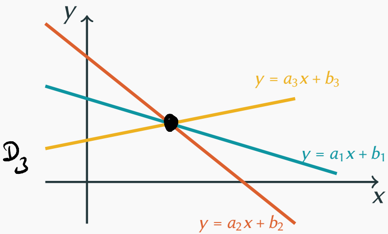
Plan image xy



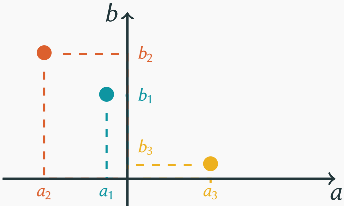
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Changement de repère

Une droite $D_i : y = a_i x + b_i$ dans l'espace image correspond au point (a_i, b_i) dans l'espace des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$



Plan image xy



Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Changement de repère

Une droite $D_i : y = a_i x + b_i$ dans l'espace image correspond au point (a_i, b_i) dans l'espace des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par (X, Y) sont représentées par l'**unique droite** $D : b = -Xa + Y$

(x,y) vérifie: $(X,Y) \in D_1 \Rightarrow Y = a_1 X + b_1$

$(X,Y) \in D_2 \Rightarrow Y = a_2 X + b_2$

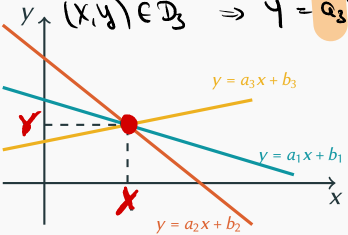
$(X,Y) \in D_3 \Rightarrow Y = a_3 X + b_3$

$a = (a_1, \cdots, a_N)$

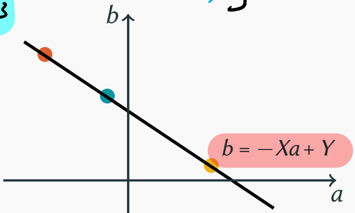
$b = (b_1, \cdots, b_N)$

$Y = aX + b \quad (xy)$

$b = -Xa + Y \quad \mathcal{H}(a,b)$

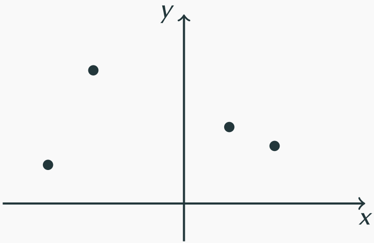


Plan image xy

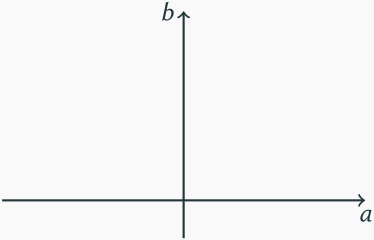


Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche



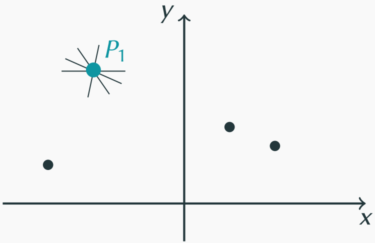
Plan image xy



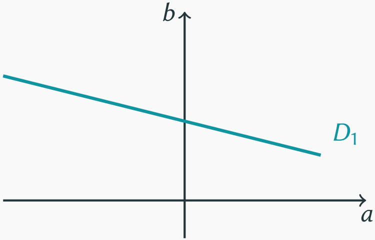
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



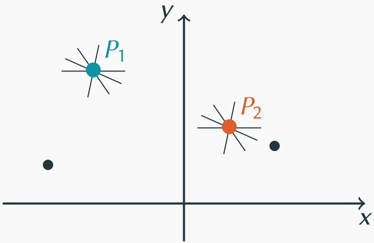
Plan image xy



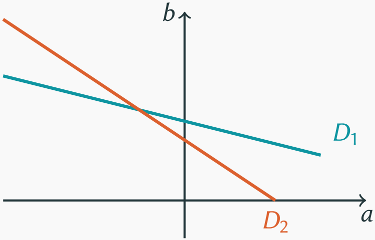
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



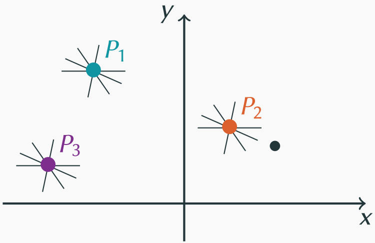
Plan image xy



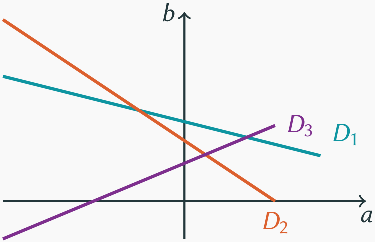
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



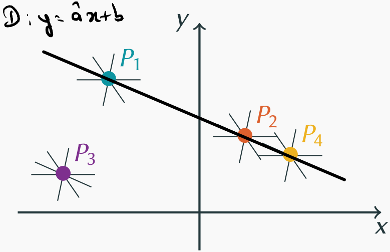
Plan image xy



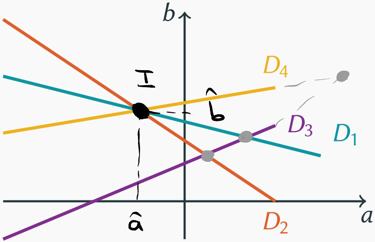
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



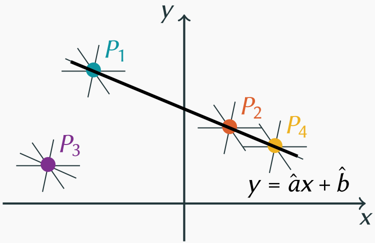
Plan image xy



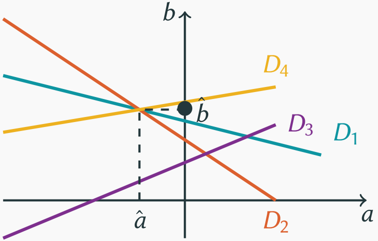
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : 1ère approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



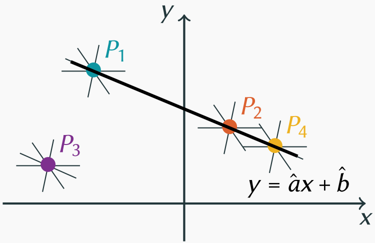
Plan image xy



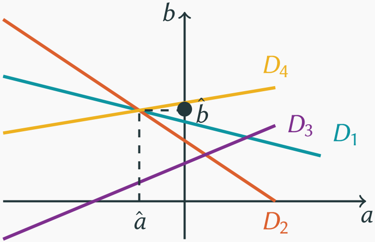
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Transformée de Hough : $1^{\text{ère}}$ approche

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par l'**unique droite** $D_i : b = -ax_i + y_i$



Plan image xy



Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

- impossible de traiter les droites verticales ($a = \infty$) !

Equation cartésienne en paramétrisation polaire

On représente une droite par sa distance (signée) à l'origine ρ et l'angle de sa normale θ

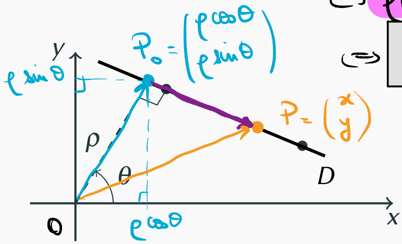
$$(OP_0) \perp (PP_0) \iff \vec{OP_0} \cdot \underbrace{\vec{P_0P}}_{\substack{= \vec{P_0O} + \vec{OP} \\ = \vec{OP} - \vec{OP_0}}} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \rho\cos\theta \\ y - \rho\sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff x\rho\cos\theta - \rho^2\cos^2\theta + y\rho\sin\theta - \rho^2\sin^2\theta = 0$$

$$\iff \rho(x\cos\theta + y\sin\theta) = \rho^2$$

$$\iff \boxed{\rho = x\cos\theta + y\sin\theta}$$

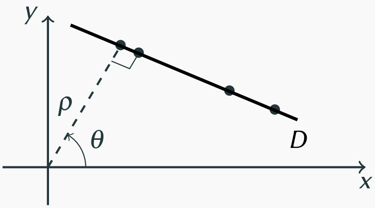


Plan image xy

Equation cartésienne en paramétrisation polaire

On représente une droite par sa distance (signée) à l'origine ρ et l'angle de sa normale θ

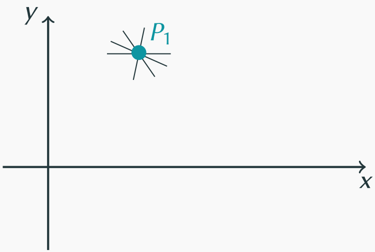
- $D : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = x\cos\theta + y\sin\theta}$



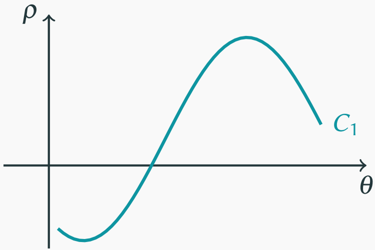
Plan image xy

Transformée de Hough généralisée

- dans le plan $\mathcal{H}(\theta, \rho)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par $C_i : \rho = x_i \cos\theta + y_i \sin\theta$



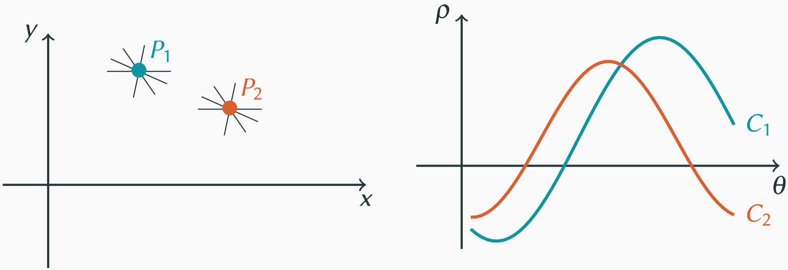
Plan image xy



Plan des paramètres $\mathcal{H}(\theta, \rho)$

Transformée de Hough généralisée

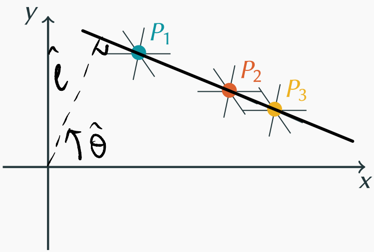
- dans le plan $\mathcal{H}(\theta, \rho)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par $C_i : \rho = x_i \cos\theta + y_i \sin\theta$



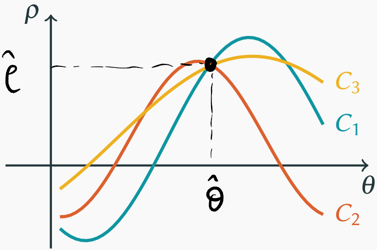
Plan image xy

Plan des paramètres $\mathcal{H}(\theta, \rho)$

- dans le plan $\mathcal{H}(\theta, \rho)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par $C_i : \rho = x_i \cos\theta + y_i \sin\theta$



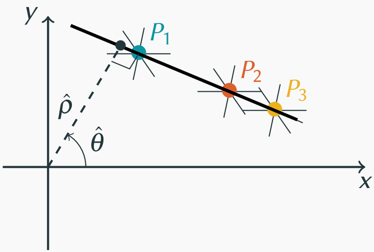
Plan image xy



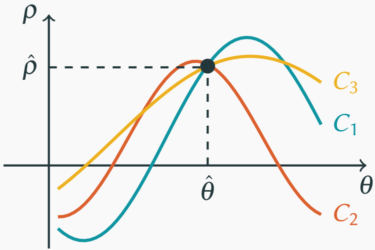
Plan des paramètres $\mathcal{H}(\theta, \rho)$

Transformée de Hough généralisée

- dans le plan $\mathcal{H}(\theta, \rho)$, toutes les droites passant par P_i sont représentées par $C_i : \rho = x_i \cos\theta + y_i \sin\theta$



Plan image xy



Plan des paramètres $\mathcal{H}(\theta, \rho)$

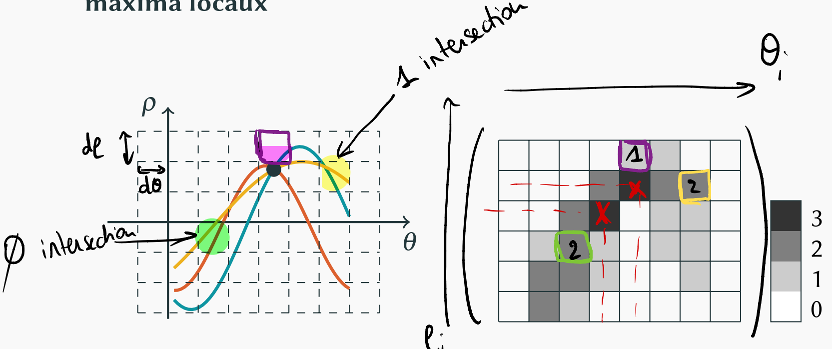
Matrice d’accumulation

Comment trouver numériquement les points où s’intersectent le plus grand nombre de courbes ?

Matrice d'accumulation

Comment trouver numériquement les points où s'intersectent le plus grand nombre de courbes ?

- ▷ on construit une **matrice d'accumulation** dont on cherchera les **maxima locaux**

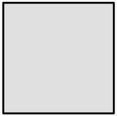


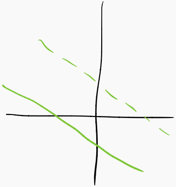
Plan des paramètres $\mathcal{H}(\theta, \rho)$

Matrice d'accumulation H

Algorithme

- Création de la matrice d'accumulation H :
  - objet : image de contours (binaire) $N_1 \times N_2$
  - $\rho \in [-\ell_{max}, \ell_{max}]$, $\ell_{max} = \sqrt{(N_1-1)^2+(N_2-1)^2}$
  - $\theta \in [0,\pi[$





Algorithme

- Création de la matrice d'accumulation H :
  - ▷ objet : image des contours de taille $N_1 \times N_2$
  - ▷ $\rho \in [-\rho_{max}, \rho_{max}]$ avec $\rho_{max} = \sqrt{(N_1 - 1)^2 + (N_2 - 1)^2}$
  - ▷ $\theta \in [0, \pi[$

1- Pour chaque point P de l'objet
$\lfloor H = H + \text{sinusoide}(P)$

Algorithme

- Création de la matrice d'accumulation H :
  - objet : image des contours de taille $N_1 \times N_2$
  - $\rho \in [-\rho_{max}, \rho_{max}]$ avec $\rho_{max} = \sqrt{(N_1-1)^2 + (N_2-1)^2}$
  - $\theta \in [0, \pi]$

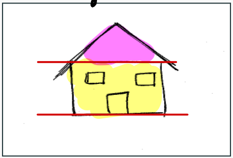
1- Pour chaque point P de l'objet
$\lfloor H = H + \text{sinusoide}(P)$

- Détermination des maxima locaux :
  - seuillage : $H(\theta, \rho) \geq$ seuil
  - n plus grandes valeurs de $H(\theta, \rho)$
  - filtre max sur $H(\theta, \rho)$
  - ...

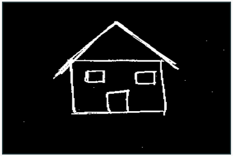
2- Pour chaque (θ, ρ) t.q. $H(\theta, \rho)$ est un maximum local
$\lfloor$ tracer la droite (θ, ρ) dans l'espace image

Exemples

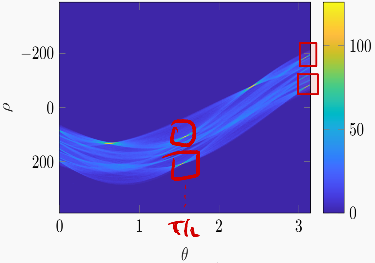
image



contours

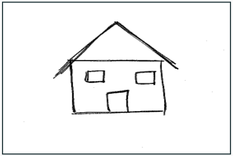


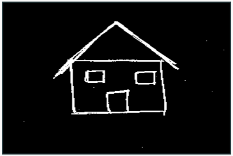
H

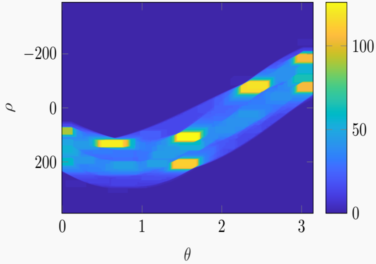


imagesc(H)

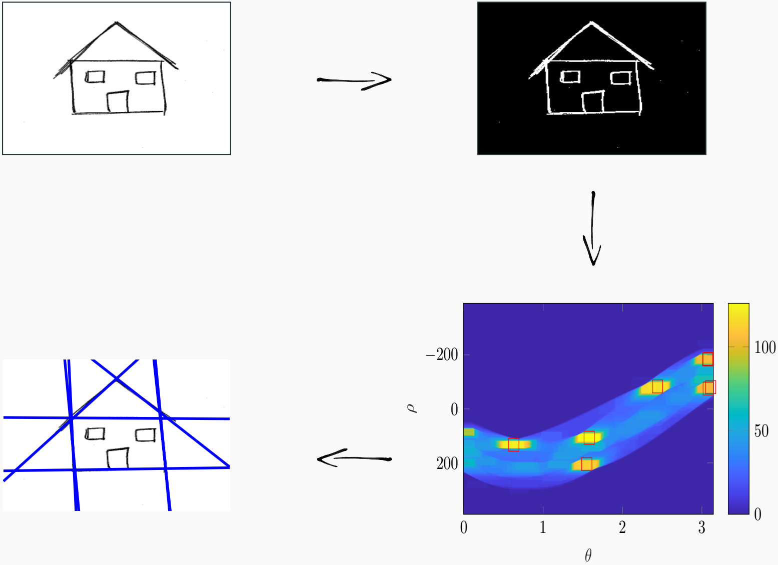
Exemples



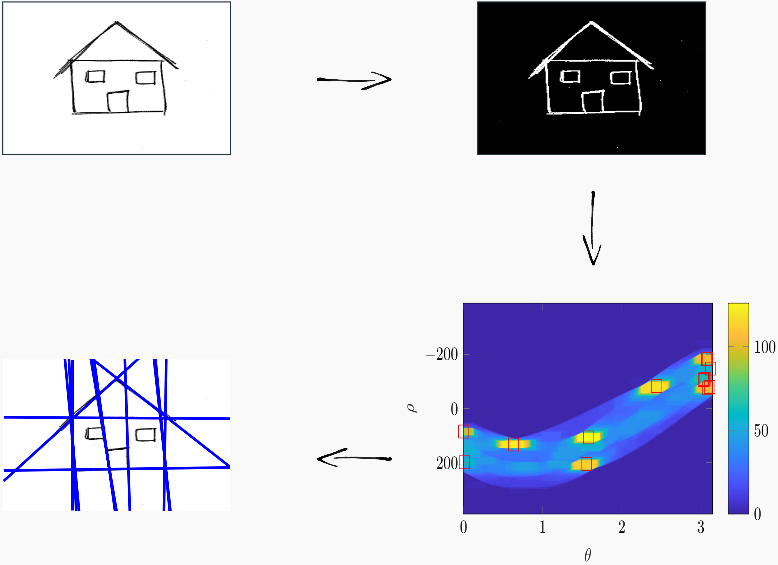




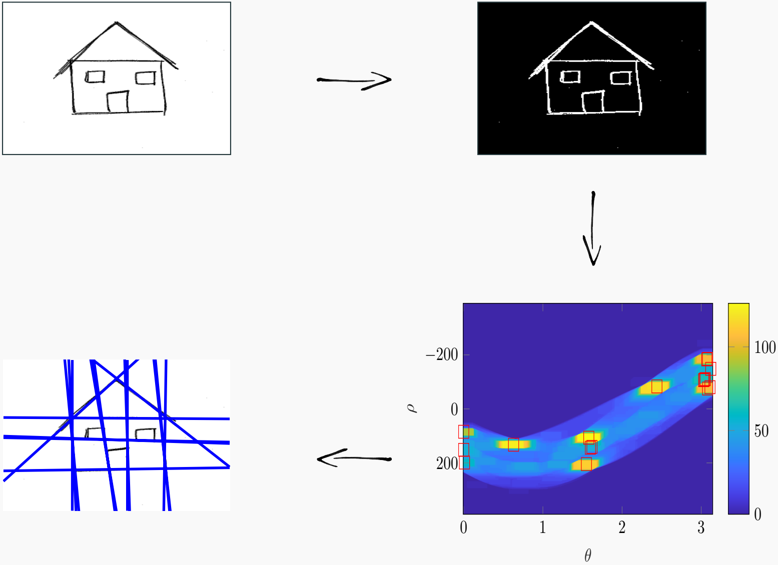
Exemples



Exemples

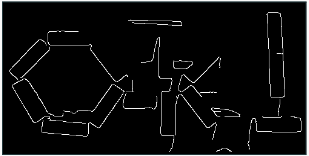


Exemples

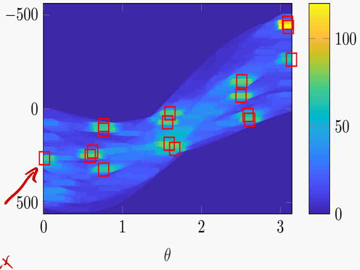


Exemples

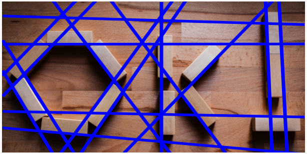
contours



H



max locaux



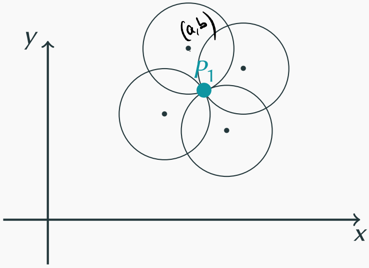
Détection de cercles

Principe (rayon r connu)

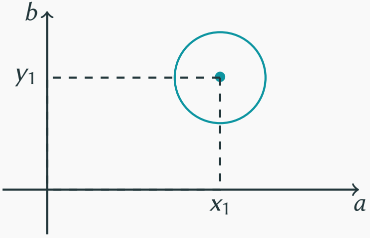
En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon r (fixé) qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cercle de centre (x_i, y_i) et de rayon r

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$



Plan image xy



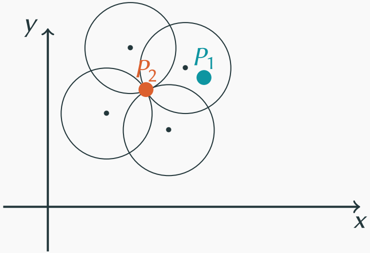
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Principe (rayon r connu)

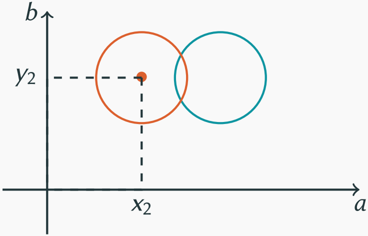
En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon r (fixé) qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cercle de centre (x_i, y_i) et de rayon r

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$



Plan image xy



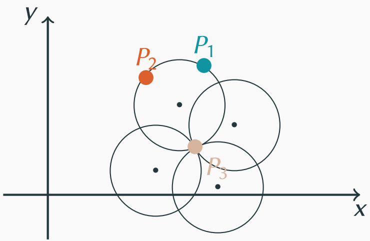
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Principe (rayon r connu)

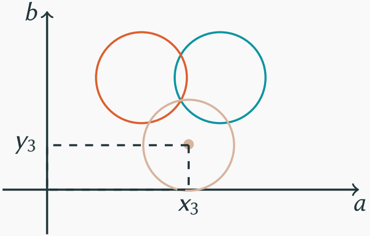
En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon r (fixé) qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cercle de centre (x_i, y_i) et de rayon r

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$



Plan image xy



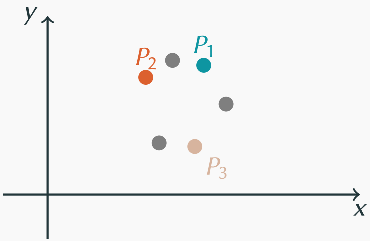
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Principe (rayon r connu)

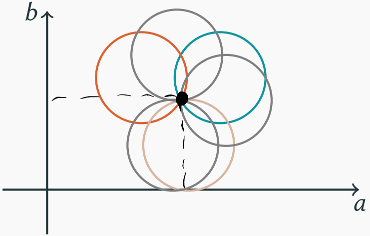
En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon r (fixé) qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cercle de centre (x_i, y_i) et de rayon r

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$



Plan image xy



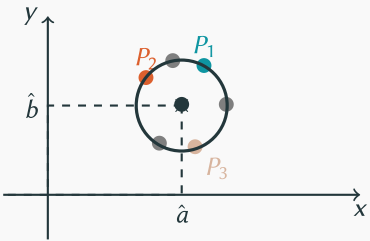
Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

Principe (rayon r connu)

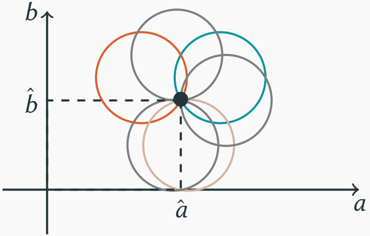
En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon r (fixé) qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cercle de centre (x_i, y_i) et de rayon r

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$$



Plan image xy

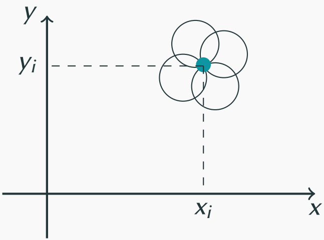


Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b)$

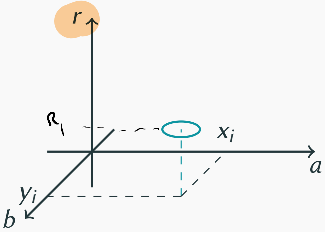
Principe (rayon r inconnu)

En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon $r \in [r_{min}, r_{max}]$ qui passent par P_i

- ▷ dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cône



Plan image xy

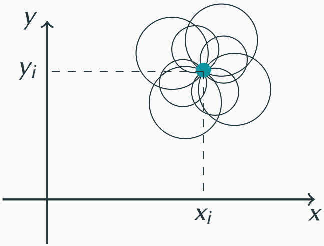


Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b, r)$

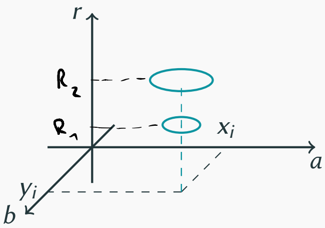
Principe (rayon r inconnu)

En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon $r \in [r_{min}, r_{max}]$ qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b)$: cône



Plan image xy

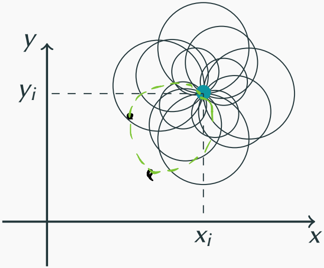


Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b, r)$

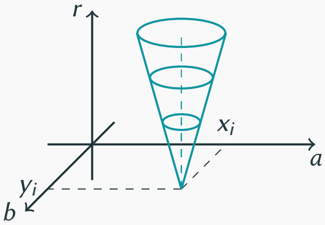
Principe (rayon r inconnu)

En chaque point $P_i(x_i, y_i)$, on considère tous les cercles de centre (a, b) et de rayon $r \in [r_{min}, r_{max}]$ qui passent par P_i

- dans le plan $\mathcal{H}(a, b, r)$ cône

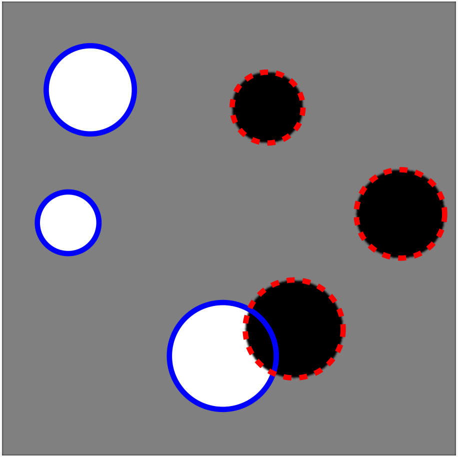


Plan image xy



Plan des paramètres $\mathcal{H}(a, b, r)$

Exemples



Exemples

Remarques et discussions

Généralisations

- Détection d'ellipses : 5 paramètres (centre, axes et orientation)
  - ▷ explosion du temps de calcul et de l'espace mémoire nécessaire
- Détection d'une courbe paramétrée (par D. Ballard en 1981)
  - ▷ connaissant l'objet, on retrouve sa position, son orientation et son échelle dans l'image

Améliorations

- Gradient based Hough transform
  - but : limiter l'espace de recherche
  - on limite les angles à $\pm 20°$ autour de la direction du gradient

orthogonale ou

- Randomized Hough transform
  - certaines courbes paramétriques peuvent être complètement définies par un nombre limité de points
  - on sélectionne des n-uplets de points aléatoires
  - sur le contour, on ne prend finalement que quelques points

Avantages et inconvénients

Avantages

- robuste au bruit
- robuste aux occlusions partielles et aux déformations faibles

Incovénients

- coûteux en temps et en mémoire
- pas d'interprétation
- reconnaissance d'un type d'objet à la fois