Operaciones con Conjuntos y Diagramas de Venn

A partir del universo y subconjuntos, encontrar por extensión y graficar los diagramas de Venn los siguientes incisos

Sea:

- U = {X ∈ letras del abecedario } Nota: No se incluye "ñ" ni "LL"
- I = {X ∈ vocales }
- II = {X = h; X = j; o < X ≤ s }
- III = {a ≤ X < k; X = o; X = u }
- IV = {f ≤ X < i; j ≤ X < o p ≤ X ≤ s }

Hallar por extensión y generar el diagrama de Venn para cada caso:

a) (I - II') ∪ (III' ∩ II)'
b) (II ∩ III) - (IV' ∪ I')
c) (III ∪ II) ∩ (II' ∩ IV)'
d) (II ∩ III)' ∩ (I ∪ II')'
e) (III ∪ II)' ∩ (II' ∩ I)'
f) (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)' - (IV' - III)

Solución:

Como primer paso se debe de encontrar todos los subconjuntos y sus complementos, por lo tanto quedan como:

- U = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z }
- I = {a, e, i, o, u}
- I' = { b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z }
- II = { h, j, p, q, r, s }
- II' = { a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z }
- III = { a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u }
- III' = { k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z }
- IV = { f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s }
- IV' = { a, b, c, d, e, i, o, t, u, v, w, x, y, z }

a) Analizando paso por paso el primer inciso a), se puede resolver en dos partes **(I - II')** y **(III' ∩ II)'** para así unir ambos subconjuntos

Resolviendo **(I - II')**

$$\begin{aligned}(I - I') &= \{a, e, i, o, u\} - \{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\}\\ &= \{\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(III' ∩ II)'**

$$\begin{aligned}(III' \cap II)' &= \{k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\} \cap (\{h, j, p, q, r, s\})'\\ &= (\{p, q, r, s\})'\end{aligned}$$

Juntando ambos lados para armar (I - II') ∪ (III' ∩ II)':

$$\begin{aligned}(I - II') \cup (III' \cap II)' &= (\{\} \cup \{p, q, r, s\})'\\ &= \{p, q, r, s\}'\\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es

$$\boxed{(I - II') \cup (III' \cap II)' = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(I - II'):

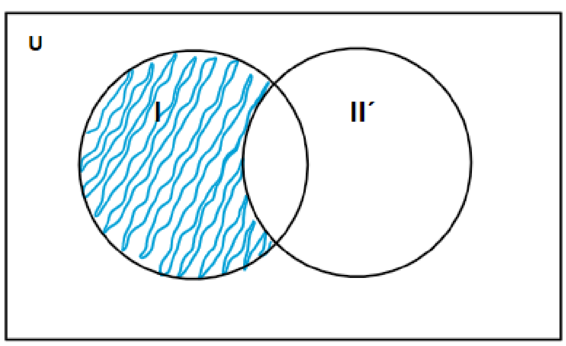

Figure 1: Diagrama de Venn de (I - II')

(III' ∩ II)':

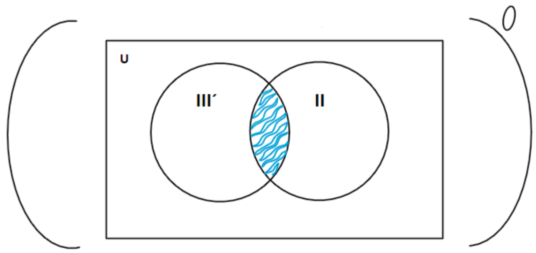

Figure 2: Diagrama de Venn de (III' ∩ II)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

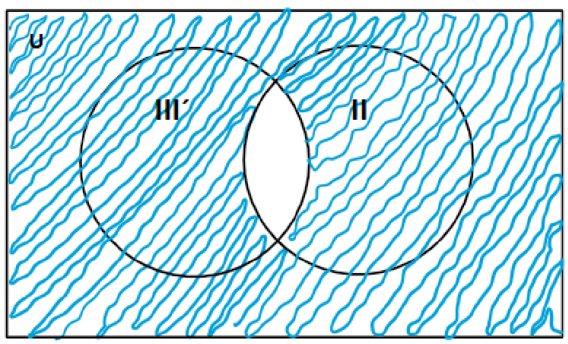

Figure 3: Diagrama de Venn de (III' ∩ II)'

Haciendo la unión de ambos lados para armar (I - II') ∪ (III' ∩ II)', quedando así el diagrama de Venn:

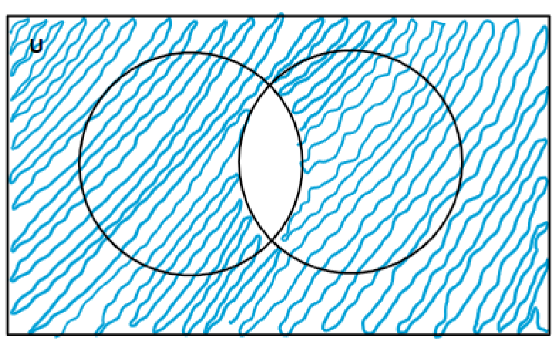

Figure 4: Diagrama de Venn de (I - II') ∪ (III' ∩ II)'

b) Analizando paso por paso el segundo inciso b), se puede resolver en dos partes **(II ∩ III)** y **(IV' ∪ I')** para así unir ambos subconjuntos

Resolviendo **(II ∩ III)**

$$\begin{aligned}(II \cap III) &= \{h, j, p, q, r, s\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\} \\ &= \{h, j\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(IV' ∪ I')**

$$\begin{aligned}(IV' \cup I') &= \{a, b, c, d, e, i, o, t, u, v, w, x, y, z\} \cup \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Juntando ambos lados para armar (II ∩ III) - (IV' ∪ I'):

$$\begin{aligned}(II \cap III) - (IV' \cup I') &= \{h, j\} - \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es un subconjunto vacío:

$$\boxed{(I - I') \cup (III' \cap II)' = \{\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(II ∩ III):

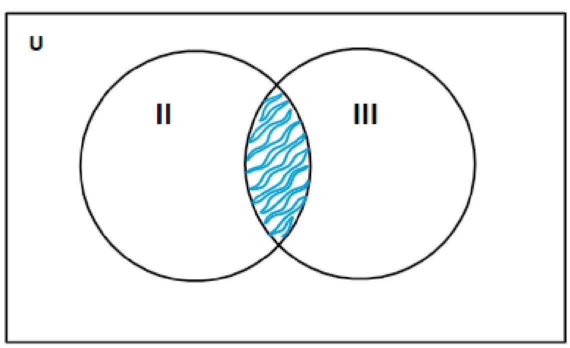

Figure 5: Diagrama de Venn de (II ∩ III)

(IV' ∪ I'):

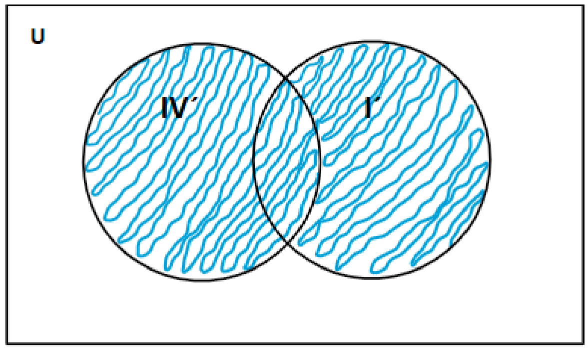

Figure 6: Diagrama de Venn de (IV' ∪ I')

Sacando la diferencia, (II ∩ III) - (IV' ∪ I'), queda que no existe ningún diagrama representativo, ya que es un subconjunto vacío

c) Analizando paso por paso el segundo inciso c), se puede resolver en dos partes **(III ∪ II)** y **((II' ∩ IV)')** para así unir ambos subconjuntos

Resolviendo **(III ∪ II)**

$$\begin{aligned}(III \cup II) &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\} \cup \{h, j, p, q, r, s\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, p, q, r, s, u\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(II' ∩ IV)'**

$$\begin{aligned}(II' \cap IV)' &= (\{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\} \cap \{f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s\})' \\ &= (\{f, g, k, l, m, n, \})' \\ &= \{a, b, c, d, e, h, i, j, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Juntando ambos lados para armar (III ∪ II) ∩ (II' ∩ IV)':

$$\begin{aligned}(III \cup II) \cap (II' \cap IV)' &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, p, q, r, s, u\} \cap \{a, b, c, d, e, h, i, j, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \\ &= \{a, b, c, d, e, h, i, j, o, p, q, r, s, u\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es:

$$\boxed{(III \cup II) \cap (II' \cap IV)' = \{a, b, c, d, e, h, i, j, o, p, q, r, s, u\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(III ∪ II):

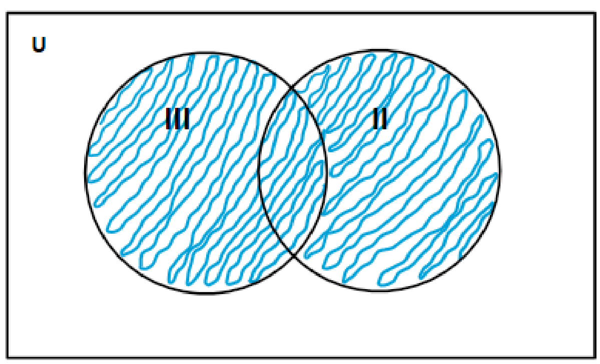

Figure 7: Diagrama de Venn de (III ∪ II)

(II' ∩ IV)':

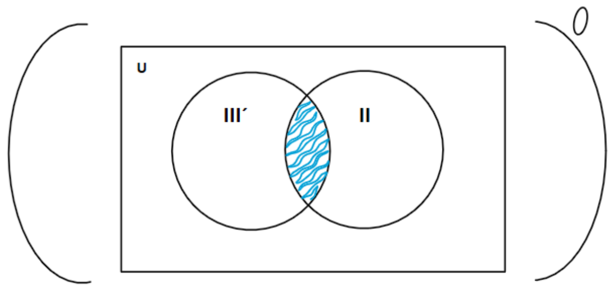

Figure 8: Diagrama de Venn de (II' ∩ IV)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

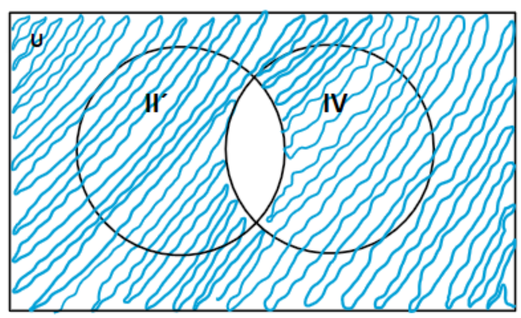

Figure 9: Diagrama de Venn de (II' ∩ IV)'

Haciendo la intersección de ambos lados para armar (III ∪ II) ∩ (II' ∩ IV)', quedando así el diagrama de Venn:

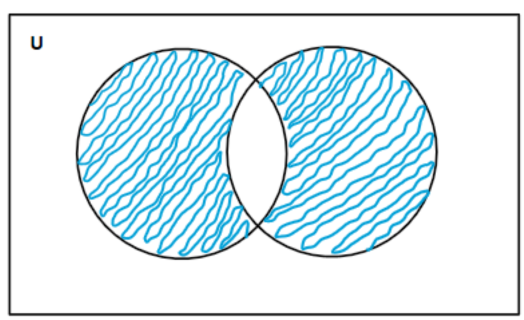

Figure 10: Diagrama de Venn de (III ∪ II) ∩ (II' ∩ IV)'

d) Analizando paso por paso el segundo inciso d), se puede resolver en dos partes **(II ∩ III)'** y **(I ∪ II')'** para así unir ambos subconjuntos

Resolviendo **(II ∩ III)'**

$$\begin{aligned}(II \cap III)' &= (\{h, j, p, q, r, s\} \cap \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\})' \\ &= (\{h, j\})' \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(I ∪ II')'**

$$\begin{aligned}(I \cup II')' &= (\{a, e, i, o, u\} \cup \{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\})' \\ &= (\{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, t, u, v, w, x, y, z\})' \\ &= \{h, j, p, q, r, s\}\end{aligned}$$

Juntando ambos lados para armar (II ∩ III)' ∩ (I ∪ II')':

$$\begin{aligned}(II \cap III)' \cap (I \cup II')' &= \{a, b, c, d, e, f, g, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} \cap \{h, j, p, q, r, s\} \\ &= \{p, q, r, s\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es:

$$\boxed{(II \cap III)' \cap (I \cup II')' = \{p, q, r, s\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(II ∩ III)':

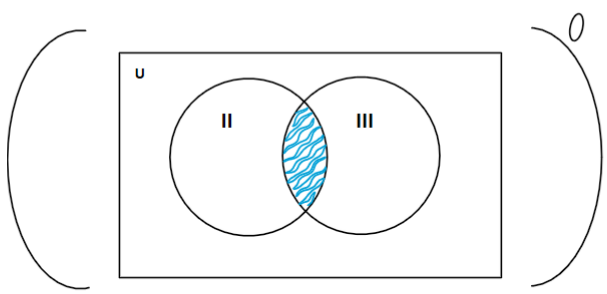

Figure 11: Diagrama de Venn de (II ∩ III)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

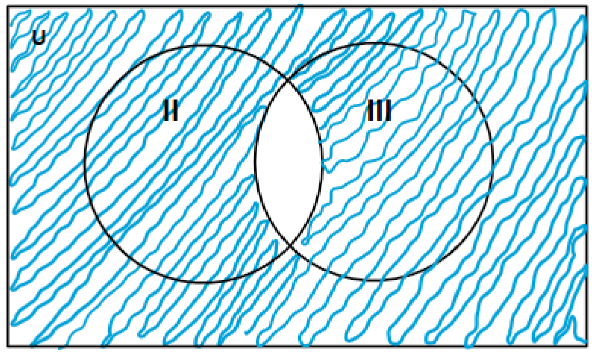

Figure 12: Diagrama de Venn de (II ∩ III)'

(I ∪ II')':

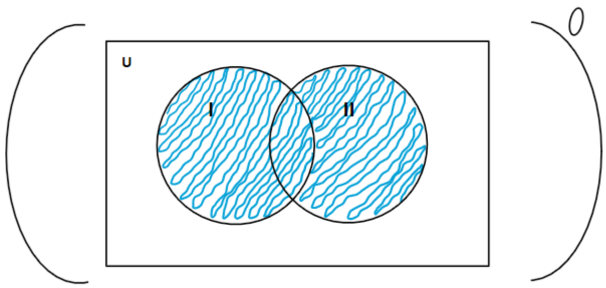

Figure 13: Diagrama de Venn de (I ∪ II')'

Sacando el complemento, queda el diagrama

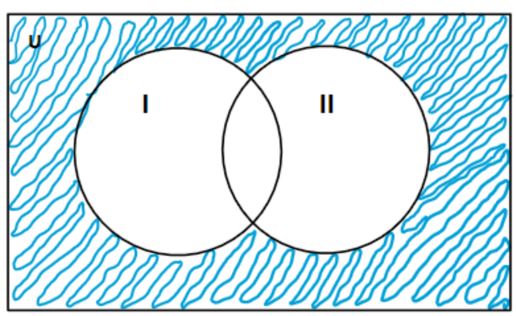

Figure 14: Diagrama de Venn de (I ∪ II')'

Haciendo la intersección de ambos lados para armar (II ∩ III)' ∩ (I ∪ II')', quedando así el diagrama de Venn:

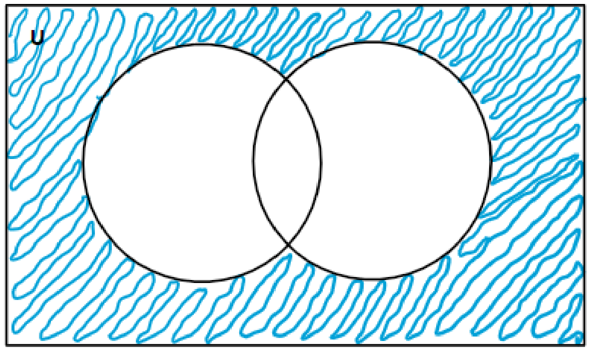

Figure 15: Diagrama de Venn de (II ∩ III)' ∩ (I ∪ II')'

e) Analizando paso por paso el segundo inciso e), se puede resolver en dos partes **(III ∪ II)'** y **(II' ∩ I)'** para así unir ambos subconjuntos

Resolviendo **(III ∪ II)'**

$$\begin{aligned}(III \cup II)' &= (\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,o,u\} \cup \{h,j,p,q,r,s\})' \\ &= (\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,o,p,q,r,s,u,\})' \\ &= \{k,l,m,n,t,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(II' ∩ I)'**

$$\begin{aligned}(II' \cap I)' &= (\{a,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,n,o,t,u,v,w,x,y,z\} \cap \{a,e,i,o,u\})' \\ &= (\{a,e,i,o,u\})' \\ &= \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Juntando ambos lados para armar (III ∪ II)' ∩ (II' ∩ I)':

$$\begin{aligned}(III \cup II)' \cap (II' \cap I)' &= \{k,l,m,n,t,v,w,x,y,z\} \cap \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\} \\ &= \{k,l,m,n,t,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es:

$$\boxed{(III \cup II)' \cap (II' \cap I)' = \{k,l,m,n,t,v,w,x,y,z\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(III ∪ II)':

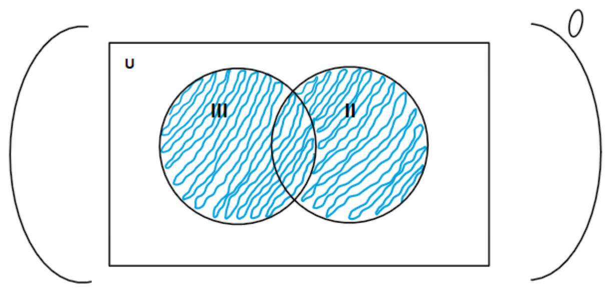

Figure 16: Diagrama de Venn de (III ∪ II)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

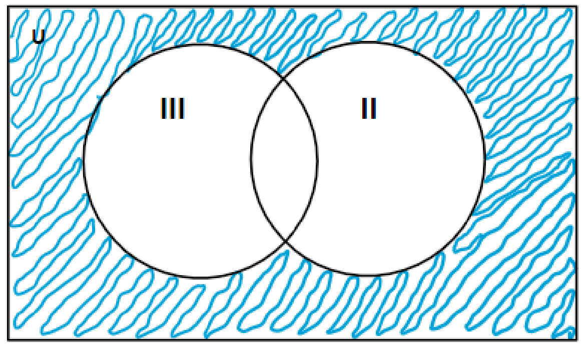

Figure 17: Diagrama de Venn de (III ∪ II)'

(II' ∩ I)':

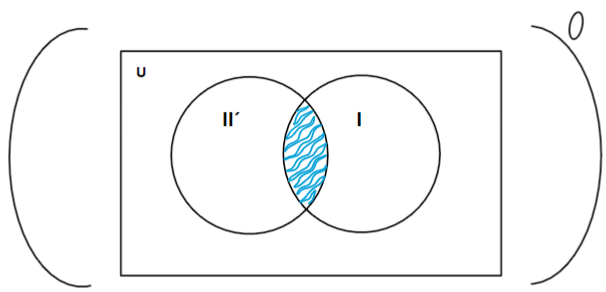

Figure 18: Diagrama de Venn de (II' ∩ I)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

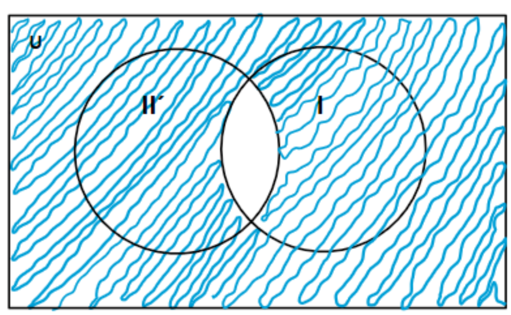

Figure 19: Diagrama de Venn de (II' ∩ I)'

Haciendo la intersección de ambos lados para armar (III ∪ II)' ∩ (II' ∩ I)' , quedando así el diagrama de Venn:

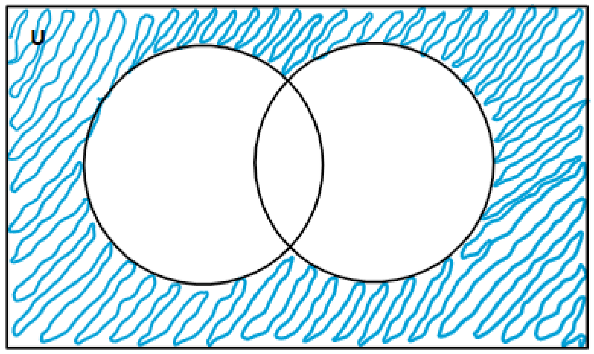

Figure 20: Diagrama de Venn de (III ∪ II)' ∩ (II' ∩ I)'

f) Analizando paso por paso el segundo inciso f), se puede resolver en tres partes , y para así unir los tres subconjuntos

Resolviendo **(III' ∪ II')**

$$\begin{aligned}(III' \cup II') &= \{k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\} \cup \{a,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,n,o,t,u,v,w,x,y,z\} \\ &= \{a,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(II' ∩ I)'**

$$\begin{aligned}(II' \cap I)' &= (\{a,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,n,o,t,u,v,w,x,y,z\} \cap \{a,e,i,o,u\})' \\ &= (\{a,e,i,o,u\})' \\ &= \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Resolviendo **(IV' - III)**

$$\begin{aligned}(IV' - III) &= \{a,b,c,d,e,i,o,t,u,v,w,x,y,z\} - \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,o,u\} \\ &= \{t,v,w,x,y,z\}\end{aligned}$$

Juntando los tres lados para armar (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)' - (IV' - III):

$$\begin{aligned}(III' \cup II') \cap (II' \cap I)' - (IV' - III) &= \{a,b,c,d,e,f,g,i,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\} \\ &\cap \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\} - \{t,v,w,x,y,z\} \\ &= \{b,c,d,f,g,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\} - \{t,v,w,x,y,z\} \\ &= \{b,c,d,f,g,k,l,m,n,p,q,r,s\}\end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado es:

$$\boxed{(III' \cup II') \cap (II' \cap I)' - (IV' - III) = \{b,c,d,f,g,k,l,m,n,p,q,r,s\}}$$

Para obtener el diagrama de Venn, se puede hacer por partes, el lado derecho y lado izquierdo, quedando:

(III' ∪ II'):

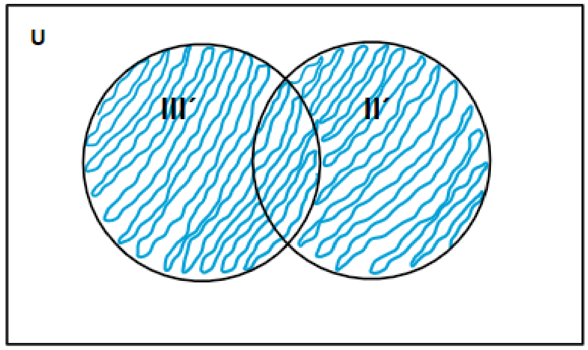

Figure 21: Diagrama de Venn de (III' ∪ II')

(II' ∩ I)':

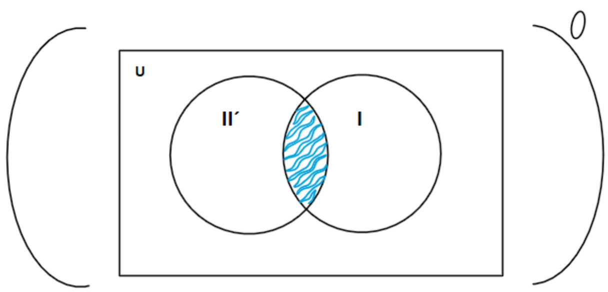

Figure 22: Diagrama de Venn de (II' ∩ I)'

Sacando el complemento, queda el diagrama

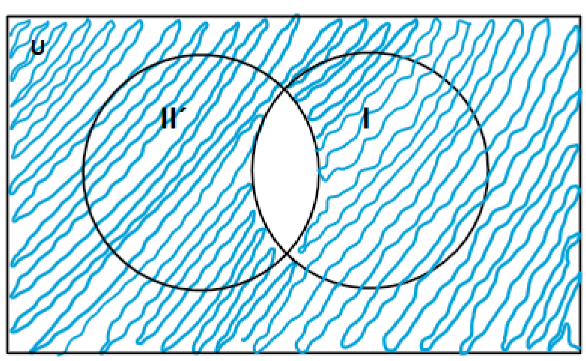

Figure 23: Diagrama de Venn de (II' ∩ I)'

(IV' - III):

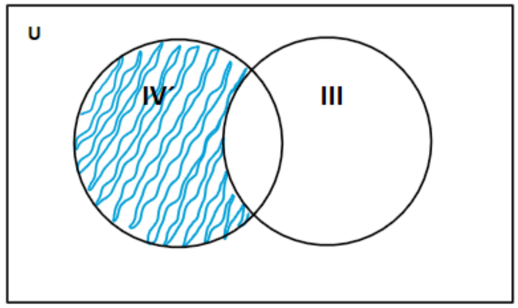

Figure 24: Diagrama de Venn de (IV' - III)

Haciendo la intersección de (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)', quedando así:

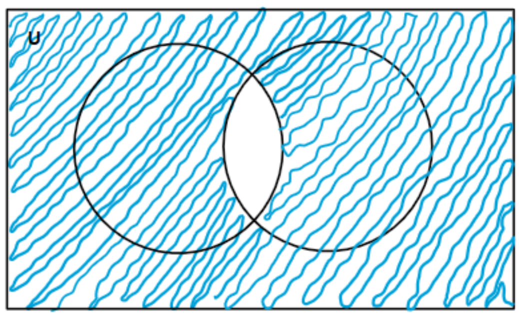

Figure 25: Diagrama de Venn de (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)'

Haciendo la diferencia de (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)' - (IV' - III), quedando así:

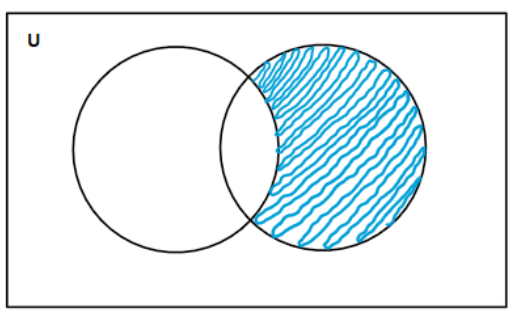

Figure 26: Diagrama de Venn de (III' ∪ II') ∩ (II' ∩ I)' - (IV' - III)