Probabilidades axiomáticas

Resuelve los siguientes ejercicios, con su respectivo análisis:

1. La probabilidad de que un jugador de tenis gane un torneo es de 2/5 y la probabilidad de que gane otro de los jugadores es de 1/4. Calcula cuál es la probabilidad de que uno o el otro tenista gane el torneo.
2. Si A y B son sucesos en los que $P(A) = \dfrac{3}{8}, \quad P(B) = \dfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$

   Calcular:

   a) $P(A \cup B)$
   b) $P(A')$
   c) $P(B')$
3. En una urna hay pelotas rojas numeradas del 1 al 10 y pelotas azules numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer al azar una pelota sea roja y no tenga el número 5?
4. La probabilidad de que Antonio gane un juego de tenis es de 2/5 y la probabilidad de que Juan gane es de 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que Antonio gane el torneo en que participa si en el juego final se enfrenta a Juan?
5. Sean las probabilidades de los sucesos A y B:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

   Calcular:

   a) $P(A' \cap B)$
   b) $P(A \cap B')$
   c) $P(A' \cap B')$
   d) $P(A' \cup B)$

Solución ejercicio 1:

El ejercicio menciona la probabilidad de ambos jugadores, por lo tanto se tiene que

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

En un torneo, solo puede existir un solo ganador, entonces, se dice que son eventos mutuamente excluyentes, es decir:

$$(A \cap B) = 0$$

Por lo tanto a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{20} = 0.65 \end{aligned}$$

Donde, se tiene un 65% de probabilidades de que alguno de los jugadores A o B, ganen el torneo.

Solución ejercicio 2:

a) Con los datos iniciales, se observa que los eventos son mutuamente excluyentes, o sea, que solo pueden ocurrir uno al mismo tiempo, entonces la ecuacion queda de la forma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Despejando con los datos iniciales:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{13}{24} = 0.54 \end{aligned}$$

Quedando un porcentaje de:

$$\boxed{P(A \cup B) = 54\%}$$

b) El ejercicio indica la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que el ejercicio pregunta P(A'), se dice que se busca la probabilidad de que no ocurra el evento A.

Como la probabilidad de evento seguro, E, es igual a uno:

$$P(E) = 1$$

Entonces se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} P(A') &= 1 - \frac{3}{8} \\ &= \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

Quedando un porcentaje de:

$$\boxed{P(A') = 62.5\%}$$

c) El ejercicio indica la probabilidad de que ocurra el evento B, dado que el ejercicio pregunta P(B'), se dice que se busca la probabilidad de que no ocurra el evento B.

Como la probabilidad de evento seguro, E, es igual a uno:

$$P(E) = 1$$

Entonces se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} P(B') &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

Quedando un porcentaje de:

$$\boxed{P(B') = 50\%}$$

Solución ejercicio 3:

En este ejercicio, el evento es mutuamente excluyente, ya que solo se puede extraer una pelota, por lo tanto, la ecuación es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Primero, se puede obtener la probabilidad de extraer una pelota roja simple. La probabilidad de que ocurra un evento esta dado por el numero de casos favorables y el numero de casos posibles, entonces:

$$P(A) = \frac{\textbf{\# de casos favorables}}{\textbf{\# de casos posibles}}$$

Quedando la probabilidad de extraer una pelota roja como:

$$P(A) = \frac{10}{15} = 0.66 = 66\%$$

Pero como son 10 pelotas y una tiene el numero 5, entonces son 9 pelotas

$$P(A) = \frac{9}{15} = 0.6 = 60\%$$

Por lo tanto, la probabilidad de extraer una pelota roja, que no contenga el numero 5 es del 60%

Solución ejercicio 4:

Las probabilidades de ambos jugadores de ganar un torneo esta dada de:

$$P(A) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de que alguno de ellos gane un juego es de:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{20} = 0.65 = 65\% \end{aligned}$$

Pero esto implica que puede existir algun otro jugador diferente a Juan y Antonio de ganar, por lo tanto la probabilidad de este evento es:

$$\begin{aligned} P(A \cup B)' &= 1 - \frac{13}{20} \\ &= \frac{7}{20} = 0.35 = 35\% \end{aligned}$$

Pero como ya es la final del torneo y solo esta participando Antonio contra Juan, entonces, justo en ese momento Antonio cuenta con mas ventaja de ganar dado que la probabilidad al inicio de Antonio es mayor a la de Juan, entonces queda:

$$P(A) = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$$

Solución ejercicio 5:

Los datos mencionan que:

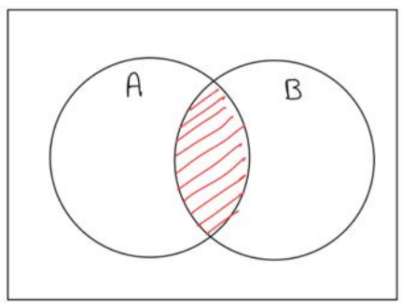
$$P(A) = \frac{3}{4} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Como los incisos piden la probabilidad de que no ocurran esos eventos, es necesario obtener primero todas las probabilidades faltantes:

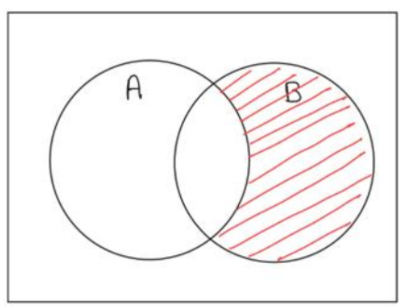
$$P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(B') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Para obtener las formulas de los incisos se puede partir del siguiente diagrama de Venn base, cuando no son mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Para el inciso **a)** se usa la probabilidad de que no suceda el evento A, por lo tanto, con ayuda del siguiente diagrama, se puede ver que se esta excluyendo el evento A



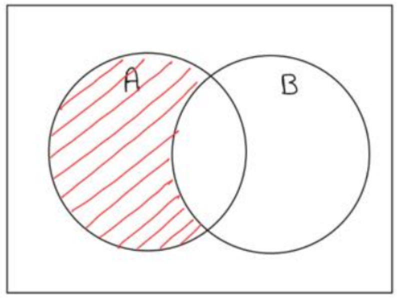
Para obtener el valor de P(B) se requiere sumar el pedazo de la intersección de A con B, y el evento B restante:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

Despejando $P(A' \cap B)$ para la formula del inciso **a)**

$$P(B) - P(A \cap B) = P(A' \cap B)$$

Para el inciso **b)** se usa la probabilidad de que no suceda el evento B, por lo tanto, con ayuda del siguiente diagrama, se puede ver que se esta excluyendo el evento B



Para obtener el valor de P(A) se requiere sumar el pedazo de la intersección de A con B, y el evento A restante:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

Despejando $P(A \cap B')$ para la formula del inciso **B)**

$$P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$$

Para el inciso **c)** se busca la probabilidad de que no suceda ni el evento A ni el evento B, por lo tanto se puede partir de la probabilidad de un evento seguro, E, es P(E) = 1

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

Para el inciso **d)** se busca la probabilidad de que no ocurra A o B, por lo tanto se puede partir de la ecuación base de eventos no mutuamente excluyentes,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Quedando la siguiente

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

Dado que ya se tienen las ecuaciones necesarias para cada inciso, basta con despejar los valores:

a) $P(A' \cap B)$

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} = 0.25 = 25\% \end{aligned}$$

b) $P(A \cap B')$

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\% \end{aligned}$$

c) $P(A' \cap B')$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

En este caso se requiere $P(A \cup B)$, calculándolo primero

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Quedando así la ecuación

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) $P(A' \cup B)$

$$\begin{aligned} P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\% \end{aligned}$$