Analysis 1 Recap

Axel Montini
amontini@student.ethz.ch

August 7, 2021 `master`, 87e5e4c97a5ab5dabbc2be3ddbbb2a89e36a189f

1 Start

Korollar 1.16. *$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dann*

- *B nach oben beschraenkt* $\implies \sup A \leq \sup B$
- *B nach unten beschraenkt* $\implies \inf B \leq \inf A$

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.4.

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[\} \implies (a_n)_{n\geq 1} \text{ heisst } \textbf{konvergent}$$

Definition 2.4+. *Grenzwert oder Limes der Folge:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Lemma E. *quivalent Aussagen:*

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert gegen* $l = \lim_{n\to\infty} a_n$
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ (|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N)$

Satz 2.8. *Konvergente Folgen* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1. $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ *auch konvergent und* $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$
2. $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert und* $a \cdot b = \lim \ldots$
3. $\forall n \geq 1\ (b_n \neq 0)$ *and* $b \neq 0$. *Dann* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ *konvergent und* $\frac{a}{b} = \lim \ldots$
4. $\exists K \geq 1\ (\forall n \geq K\ (a_n \leq b_n)) \implies a \leq b$

Definition 2.10.

$$\forall n \geq 1\ (a_n \leq a_{n+1}) \implies (a_n)_{n\geq 1} \text{ ist } \textbf{monoton wachsend}$$

$$\forall n \geq 1\ (a_n \geq a_{n+1}) \implies (a_n)_{n\geq 1} \text{ ist } \textbf{monoton fallend}$$

Satz 2.11 (Weierstrass).

- $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert es mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

- $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert es mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$$

Lemma (Bernoulli Ungleichung). $(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N},\ x > -1$

Definition [. *Limes superior und limes inferior] Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ + *Weierstrass, definiert man zwei monotone Folgen* $(b_n)_{n\geq 1}$ *und* $(c_n)_{n\geq 1}$. *Fuer jedes* $n \geq 1$: $b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$ *und* $c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$. *Dann folgt aus Korollar 1.16:* $b_n \leq b_{n+1}\ \forall n \geq 1$ *und* $c_n \geq c_{n+1}\ \forall n \geq 1$ *(beide konvergieren).*

- *Limes inferior:* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$
- *Limes superior:* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$

Aus $b_n \leq c_n$ *folgt* $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

Lemma 2.19.

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konv.} \iff (a_n)_{n\geq 1} \text{ besch. und } \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Satz 2.20 (Cauchy Criterium).

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ (\forall n, m \geq N\ (|a_n - a_m| < \epsilon))$$

Definition 2.21. *Abgeschlossenes Intervall (Teilmenge* $I \subseteq \mathbb{R}$*) Form* $[a,b]$ *oder* $[a, +\infty[$ *oder* $]-\infty, a]$ *oder* $]-\infty, +\infty[$ *mit* $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Laenge der intervalls: $\mathcal{L}(I) = b - a$ *in Fall 1,* $\mathcal{L}(I) = +\infty$ *anderfalls.*

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor). $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \ldots$ *Folge abgeschlossener Intervalle mit* $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. *Dann gilt* $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$.
Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ *enthaelt* $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ *genau einer punkt.*

Definition 2.27 (Teilfolge). *Eine Teilfolge von* $(a_n)_{n\geq 1}$ *ist* $(b_n)_{n\geq 1}$ *wobei* $b_n = a_{l(n)}$ *und* $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *satisfies* $l(n) \leq l(n+1)\ \forall n \geq 1$

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschraenkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

2.2 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Begriff der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ stuetzt sich auf die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Definition 2.37. *Die reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist* ***konvergent****, falls die Folge* $(S_n)_{n\geq 1}$ *der Partialsummen konvergiert. Definieren wir* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$

Satz 2.40. *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *konvergent, sowie* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Dann:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$ *ist konvergent.*
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent.*

Satz 2.41. *Cauchy Criterium, konvergente Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \left(\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon,\ \forall m \geq n \geq N\right)$$

Satz 2.42.

$$(a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff (S_n)_{n\geq 1} \text{ nach oben beschr.}$$

Korollar 2.43 (Vergleichssatz).

$$b_k \geq a_k \geq 0\ \forall k \geq 1$$

$$\implies \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} & \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} & \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \end{cases}$$

Definition 2.45.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ konvergiert absolut}$$

Satz 2.46. *Eine absolut kovergente Reihe ist auch konvergent und es gilt* $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.48 (Leibniz 1682).

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton fallend}, a_n \geq 0, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\implies S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ konvergiert und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Definition 2.50 (Umordnung).

$$\exists \phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \ \ (\phi \text{ bijek.}, a'_n = a_{\phi(n)})$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \textbf{ Umordnung} \text{ von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Satz 2.52 (Dirichlet 1837). *Falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, denn konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.*

Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821).

$$(a_n)_{n\geq 1}, a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821).

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Korollar 2.57. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *konvergiert absolut fuer alle* $|z| < \rho$ *und divergiert fuer alle* $|z| > \rho$, *mit* $\rho := \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\right)$ *(oder* $\rho = +\infty$ *wenn denominatore 0).*

Korollar . *Die zeta funktion konvergiert,* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Definition 2.58. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *ist eine* ***lineare Anordnung*** *der Doppelreihe* $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ *falls es eine Bijektion* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *gibt mit* $b_k = a_{\sigma(k)}$

Satz 2.59 (Cauchy 1821)**.** *Wir nehmen an dass* $\exists B \geq 0$ *so dass*

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \ \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \ \forall i \geq 0, U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \ \forall j \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} S_i, \sum_{j=0}^{\infty} U_j,$$

und es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} U_j = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$*. Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut, mit selbem Grenzwert.*

Definition 2.60. *Das* ***Cauchy Produkt*** *der Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

Satz 2.62. *Falls zwei Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. *Sei* $f \in \mathbb{R}^D$*.* f *ist nach* ***(oben/unten) beschränkt****, falls* $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ *nach (oben/unten) beschränkt ist.*

Definition 3.2. *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}$ *ist*

1. ***monoton wachsend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$
2. ***streng m. wachsend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x < y \implies f(x) < f(y))$
3. ***monoton fallend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$
4. ***streng m. fallend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x < y \implies f(x) > f(y))$
5. ***monoton****, falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend ist.*
6. ***streng monoton****, falls* f *streg monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Definition 3.4. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R},\ x_o \in D$*. Die funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist* ***in*** x_0 ***stetig****, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Definition 3.5. *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist* ***stetig****, falls sie in jedem Punkt von* D *stetig ist.*

Satz 3.7. *Sei* $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$*.* f *ist genau dann in* x_0 *stetig, falls für jede Folge* $(a_n)_{n \geq 1}$ *in* D *folgende Implikation gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Definition 3.9. *Eine* ***polynomiale Funktion*** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist eine Funktion der Form*

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Falls $a_n \neq 0$ *ist* n *der* ***Grad*** *von* P

Korollar 3.11. *Seien* $P, Q \neq \mathbf{0}$ *poly. Funk. auf* $\mathbb{R}$*. Seien* $x_1, \ldots, x_m$ *die Nullstellen von* Q*. Dann ist die folgende Funktion stetig.*

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Satz 3.12 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $a, b \in R$*.*

$$\forall c \in \mathbb{R} \ \exists z \in I \ \ (f(a) \leq c \leq f(b) \implies a \leq z \leq b)$$

Korollar 3.13. *Sei* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ *ein Polynom mit* $a_n \neq 0$ *und* n *ungerade. Dann besitzt* P *mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$*.*

Definition 3.16. *Ein intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ist* ***kompakt****, falls es von der Form* $I = [a, b],\ a \leq b$ *ist.*

Satz 3.19 (Min-Max)**.** *Sei* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf einem kompakten Intervall* I*. Dann gibt es* $u, v \in I$ *mit*

$$f(u) \leq f(x) \leq v \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f *beschränkt*

Satz 3.20 (Umkehrabbildung)**.** *Seien* $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Teilmenger,* $f : D_1 \to D_2,\ g : D_2 \to \mathbb{R}$ *Funktionen und* $x_0 \in D_1$*. Falls* f *in* x_0 *und* g *in* $f(x_0)$ *stetig sind, so ist* $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ *in* x_0 *stetig*

Satz 3.22. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig, streng monoton. Dann ist* $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f^{-1} : J \to I$ *ist stetig, streng monoton.*

Satz 3.24 (Exponentialfunktion)**.** $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

Korollar 3.27.

$$\exp(x) \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{und} \ \exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Korollar 3.28. $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion.* $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$

3.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.30 (Konvergenz von Funktionenfolgen)**.** *Die Funk.folge* $(f_n)_{n\geq 0}$ ***konvergiert punktweise*** *gegen eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$*, falls für alle* $x \in D$*:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Definition 3.32 (Weierstrass 1841)**.** *Die folge* $f_n : D \to \mathbb{R}$ ***konvergier gleichmässig*** *in* D *gegen* $f : D \to \mathbb{R}$ *falls gilt*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \ (\forall n \geq N \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Satz 3.33. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktionenfolge bestehend aus in* D *stetigen Funktionen die in* D *gleichmässig eine FUnktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert. Dann ist* f *in* D *auch stetig.*

Definition 3.34. *Eine Funktionenfolge* f_n *ist* ***gleichmässig konvergent*** *falls für alle* $x \in D$ *der Grenzwert* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existiert und die Folge* $(f_n)_{n\geq 0}$ *gleichmässig gegen* f *konvergiert.*

Definition 3.37. *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *konvergiert gleichmässig in* D *falls die durch* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.*

Satz 3.38. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass* $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in D$ *und, dass* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergiert. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmässig in* D *und deren Grenzwert*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D *stetige Funktion.*

Definition 3.39. *Die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *hat* ***positiven Konvergenzradius*** *falls* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ *existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:*

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.40. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und sei* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\ |x| < \rho$*.*
Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ *konvergiert*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$*, insbesondere ist* $f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ *stetig.*

3.2 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.42.

1. $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $\cos z = \cos(-z)$ *und* $\sin(-z) = \sin(z) \quad \forall z \in C$
3. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ *und* $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43.

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$
$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

Satz 3.44. $\pi := \{t > 0 : \sin t = 0\} \dots$

Satz .

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

3.3 Grenzwerte

Definition 3.47. *$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein* ***Häufungspunkt*** *der Menge D falls $\forall \delta > 0$:*

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.49. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit*

$$\text{"} \lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{"}$$

falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| \leq \epsilon$$

Satz 3.52. *$D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \to E$ eine Funktion, $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $g : E \to \mathbb{R}$ stetig in y_0 ist. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Definition (Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte)**.**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \forall \epsilon\ \exists \delta,\ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \dots$$

Analogous for $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1. *f ist* ***in*** *x_0* ***differenzierbar*** *falls der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Satz 4.3 (Weierstrass 1861)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist in x_0 differenzierbar*
2. *Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit:*
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) *$r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0.*

   Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindetig bestimmt

Satz 4.7. *$f : D \to \mathbb{R}$ ist* ***in D differenzierbar****, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.*

Satz 4.9. *$D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann*

1. *$f + g$ in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
2. *$f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*
3. *Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$*

Satz 4.11. *Seien $D, E \subseteq R$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ in x_0 differenzierbar so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \to \mathbb{R}$ in y_0 differenzierbar.*
Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

4.1 Zentrale Sätze

Definition 4.14. *$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$*

1. *f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls*
$$\exists \delta > 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D\ \ (f(x) \leq f(x_0))$$
2. *f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls*
$$\exists \delta > 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D\ \ (f(x) \geq f(x_0))$$
3. *f besitzt ein* ***lokales Extremum*** *in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.*

Satz 4.16 (Rolle 1690)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.*

$$f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in]a, b[\ \big(f'(\xi) = 0\big)$$

Satz 4.17 (Lagrange 1797)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Satz 4.22 (Cauchy)**.** *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differezierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

falls $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz 4.23 (l'Hôpital 1696)**.** *$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[$. Falls*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Definition 4.26.
1. *f ist* ***konvex*** *auf I falls für alle $x \leq y,\ x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$*
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$
gilt.
2. *f ist* ***streng konvex*** *auf I falls für alle $x < y,\ x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$*
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$
gilt.

Satz 4.29. *$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.*

4.2 Höhere Ableitungen

Definition 4.32.
1. *Für $n \geq 2$ ist f* ***n-mal differenzierbar in*** *D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f.*
2. *Die funktion f ist* ***n-mal stetig differenzierbar in*** *D, falls die n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.*
3. *Die funktion f ist in D* ***glatt****, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist.*

Satz 4.34. *$f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D, dann:*

1. *$f + g$ n-mal diff. ist und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$*
2. *$f \cdot g$ n-mal diff. ist und*
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

4.3 Taylor

Satz 4.39. *Seien $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine Funk.folge wobei f_n einmal in $]a,b[$ stetig differenzierbar ist $\forall n \geq 1$. Wir nehmen an, dass sowohl die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ wie $(f_n')_{n\geq 1}$ gleichmässig in $]a,b[$ konvergieren (siehe Def. 3.34) mit $\lim_{n\to\infty} f_n =: f$ und $\lim_{n\to\infty} f_n' =: p$.*

Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = p$.

Satz 4.40. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a,x[$ mit:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Korollar 4.44 (Taylor Approximation)**.** *Sei $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]c,d[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei $c < a < d$. Für alle $x \in [c,d]$ gibt es ξ zwischen x und a so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Satz Boh (Simpler?)**.** *Ignoring ξ.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x - a^n$$

5 Riemann Integral

Definition 5.1. *Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a,b]$ wobei $\{a,b\} \subseteq P$.*

Definition (Untersumme, Obersumme)**.**

$$\begin{aligned}
&\text{Partition } P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \text{ mit } x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b \\
&\delta_i = x_i - x_{i-1}, && i \geq 1 \\
&s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, && f_i = \inf_{x_{i-1}\leq x \leq x_i} f(x) \\
&S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, && F_i = \sup_{x_{i-1}\leq x \leq x_i} f(x)
\end{aligned}$$

Lemma 5.2.
1. *Sei P' eine Vereinfachung von P, dann gilt $s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$*
2. *Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$*

Definition . *Sei $\mathcal{P}(I)$ der Menge der Partitionen von I.*

$$\begin{aligned}
s(f) &:= \sup_{P\in\mathcal{P}(I)} s(f,P) \\
S(f) &:= \inf_{P\in\mathcal{P}(I)} S(f,P)
\end{aligned}$$

Satz 5.3. *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** (oder kurz: integrierbar) falls*

$$s(f) = S(f)$$

In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Satz 5.4. *Eine beschränkte Funkiton ist genau dann integrierbar falls*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon$$

Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875)**.** *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass*

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I),\ S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Satz 5.10. *Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in R$. Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0\ \forall x \in [a,b]$) integrierbar*

Definition E. *ine funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in D\ \ (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Example: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht nicht gleichmässig stetig.

Satz 5.15 (Heine)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.*

Satz 5.16 (Integrierbar/Stetig)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Satz 5.17. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.*

Satz 5.19. *Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a,b sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) | \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

Satz 5.20. *$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$. Dann folgt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859)**.** *Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

5.1 Differentialrechnung

Satz 5.26. *Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist int $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x, \quad \forall x \in [a,b])$$

Definition 5.27. *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.*

Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differenzialrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Satz 5.30 (Partielle Integration)**.** *Seie $a < b$ relle Zahlen und $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Satz 5.31 (Substitution)**.** *sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

5.2 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.34. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

5.3 Euler-McLaurinSummationsformel

maybe useful?

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

5.4 Stirling'sche Formel

Satz 5.47.
$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$
wobei
$$|R_3(n)| \le \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \ge 1$$

Satz (Approx $n!$).
$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}$$
and
$$\lim_{n\to\infty} n! \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} = 1$$

5.5 Uneigentliche Integrale

Definition S. *ei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls*
$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$
existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit
$$\int_a^\infty f(x)dx$$
und sagen, dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.

Satz 5.53 (McLaurin 1742). *Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe*
$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$
konvergiert genau dann, wenn
$$\int_a^\infty f(x)dx$$
konvergiert.

Definition 5.56 (NATO caliber). *In dieser Situation ist $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, falls*
$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$
existiert. In diesem Fall wird den Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

5.6 Die Gamma Funktion

Definition 5.59. *Für $s > 0$ definieren wir*
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$
Konvergiert für alle $s > 0$

Satz 5.60 (Bohr-Mollerup). *1. Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen*

(a) $\Gamma(1) = 1$

(b) $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)\ \forall s > 0$

(c) Γ ist logarithmisch konvex, das heisst $\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \le \lambda \le 1$

2. Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\to]0, \infty[$, die die drei Relationen erfüllt. Darüber hinaus gilt:
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x + 1)...(x + n)}\ \forall x > 0$$

Lemma 5.61. *Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \ge 0$*
$$a \cdot b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Satz 5.62 (Hölder Ungleichung). *Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt*
$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le ||f||_p||g||_q$$
Wobei
$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

5.7 Das unbestimmte Integral

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f. Wir schreiben
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

5.7.1 Stammfunktionen von rationalen Funktionen

6 Binomialsatz

Satz A.1 (Binomialsatz). *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$, $n \ge 1$ gilt:*
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

7 Limit Cheat Sheet

$$x \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ if $a > 1$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$	$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ if $0 < a < 1$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ if $a > 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^b(x)}{x^a} = 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$	$\lim_{x\to 0} x^a \ln^b(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$

8 Derivative Cheat Sheet

Properties

$$(cf)' = cf'(x) \qquad (f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \ne 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\|x\|$	$x > 0 \implies 1$, or $x < 0 \implies -1, x \ne 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1 + x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$
$\text{asinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\text{acosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\text{atanh}(x)$	$\frac{1}{1 - x^2}$

9 Integral Cheat Sheet

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Per parti	$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
Per sostituzione immediata	$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C$
Per sostituzione (cambiamento di variabile)	$\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt$ with $x = f(t)$
Integrale logaritmico	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left\lvert f(x)\right\rvert + C$

$f(x)$	$F(X)(without + C)$
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x-b}\right\rvert$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\log_a(x)$	$x(\log_a(x) - \log_a(e))$
xe^{ax}	$\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$
$x\ln(ax)$	$\frac{x^2}{4}(2\ln(ax)-1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\arccos(x)$	$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$\arctan(x)$	$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$
$\operatorname{arccot}(x)$	$x\operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$
$\sqrt{x^2+a}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$
$\sqrt{r^2-x^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$

More?