Analysis 1 Recap

Axel Montini
amontini@student.ethz.ch

July 31, 2021

1 Start

Korollar 1.16. *$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dann*

- *B nach oben beschraenkt $\Rightarrow \sup A \leq \sup B$*
- *B nach unten beschraenkt $\Rightarrow \inf B \leq \inf A$*

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.4. $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[\} \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ *heisst **konvergent***

Definition 2.4+. *Grenzwert oder Limes der Folge:* $\lim_{n\to\infty} a_n$

Lemma E. *quivalent Aussagen:*

1. *$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n\to\infty} a_n$*
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \ (|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N)$

Satz 2.8. *Konvergente Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$*

1. *$(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ auch konvergent und $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$*
2. *$(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $a \cdot b = \lim \dots$*
3. *$\forall n \geq 1$ $(b_n \neq 0)$ and $b \neq 0$. Dann $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent und $\frac{a}{b} = \lim \dots$*
4. $\exists K \geq 1\ \ (\forall n \geq K\ (a_n \leq b_n)) \Rightarrow a \leq b$

Definition 2.10.

$$\forall n \geq 1\ (a_n \leq a_{n+1}) \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ ist } \textbf{monoton wachsend}$$

$$\forall n \geq 1\ (a_n \geq a_{n+1}) \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ ist } \textbf{monoton fallend}$$

Satz 2.11 (Weierstrass).

- *$(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschraenkt. Dann konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$*
- *$(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschraenkt. Dann konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$*

Lemma (Bernoulli Ungleichung). $(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N},\ x > -1$

Definition [. *Limes superior und limes inferior] Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ + Weierstrass, definiert man zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$. Fuer jedes $n \geq 1$: $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ und $c_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Dann folgt aus Korollar 1.16: $b_n \leq b_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ und $c_n \geq c_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ (beide konvergieren).*

- *Limes inferior:* $\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$
- *Limes superior:* $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$

Aus $b_n \leq c_n$ folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

Lemma 2.19.

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konv.} \Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ besch. und } \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Satz 2.20 (Cauchy Criterium).

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \ (\forall n, m \geq N\ (|a_n - a_m| < \epsilon))$$

Definition 2.21. *Abgeschlossenes Intervall (Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$) Form $[a,b]$ oder $[a,+\infty[$ oder $]-\infty,a]$ oder $]-\infty,+\infty[$ mit $a \leq b$, $a,b \in \mathbb{R}$. Laenge der intervalls: $\mathcal{L}(I) = b - a$ in Fall 1, $\mathcal{L}(I) = +\infty$ anderfalls.*

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor). *$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \dots$ Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$. Falls $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthaelt $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ genau einer punkt.*

Definition 2.27 (Teilfolge). *Eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist $(b_n)_{n\geq 1}$ wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ satisfies $l(n) \leq l(n+1)$ $\forall n \geq 1$*

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschraenkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

2.2 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Begriff der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ stuetzt sich auf die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Definition 2.37. *Die reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. Definieren wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$*

Satz 2.40. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:*

1. *$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right)$ ist konvergent.*
2. *$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.*

Satz 2.41. *Cauchy Criterium, konvergente Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1\ \left(\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon,\ \forall m \geq n \geq N\right)$$

Satz 2.42.

$$(a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow (S_n)_{n\geq 1} \text{ nachoben beschraenkt}$$

Korollar 2.43 (Vergleichssatz).

$$b_k \geq a_k \geq 0\ \forall k \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \end{cases}$$

Definition 2.45.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textbf{ konvergiert absolut}$$

Satz 2.46. *Eine absolut kovergente Reihe ist auch konvergent und es gilt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$*

Satz 2.48 (Leibniz 1682).

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ monoton fallend}, a_n \geq 0, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\Rightarrow S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ konvergiert und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Definition 2.50 (Umordnung).

$$\exists \phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \ \left(\phi \text{ bijek.}, a'_n = a_{\phi(n)}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \textbf{ Umordnung} \text{ von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Satz 2.52 (Dirichlet 1837). *Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, denn konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.*

Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821).

$$(a_n)_{n\geq 1}, a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821).

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Korollar 2.57. *$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut fuer alle $|z| < \rho$ und divergiert fuer alle $|z| > \rho$, mit $\rho := \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\right)$ (oder $\rho = +\infty$ wenn denominatore 0).*

Korollar . *Die zeta funktion konvergiert, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$*

Definition 2.58. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *ist eine* ***lineare Anordnung*** *der Doppelreihe* $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$ *falls es eine Bijektion* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *gibt mit* $b_k = a_{\sigma(k)}$

Satz 2.59 (Cauchy 1821)**.** *Wir nehmen an dass* $\exists B \geq 0$ *so dass*

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \ \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \ \forall i \geq 0, U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \ \forall j \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} S_i, \sum_{j=0}^{\infty} U_j,$$

und es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} U_j = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$. *Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut, mit selbem Grenzwert.*

Definition 2.60. *Das* ***Cauchy Produkt*** *der Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + ...$$

Satz 2.62. *Falls zwei Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. *Sei* $f \in \mathbb{R}^D$. f *ist nach* ***(oben/unten) beschränkt****, falls* $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ *nach (oben/unten) beschränkt ist.*

Definition 3.2. *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}$ *ist*

1. ***monoton wachsend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
2. ***streng monoton wachsend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$
3. ***monoton fallend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$
4. ***streng monoton fallend****, falls* $\forall x, y \in D \ \ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$
5. ***monoton****, falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend ist.*
6. ***streng monoton****, falls* f *streg monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Definition 3.4. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R},\ x_o \in D$. *Die funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist* ***in*** x_0 ***stetig****, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Definition 3.5. *Die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist* ***stetig****, falls sie in jedem Punkt von* D *stetig ist.*

Satz 3.7. *Sei* $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$. f *ist genau dann in* x_0 *stetig, falls für jede Folge* $(a_n)_{n\geq 1}$ *in* D *folgende Implikation gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Definition 3.9. *Eine* ***polynomiale Funktion*** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist eine Funktion der Form*

$$P(x) = a_nx^n + ... + a_0, \quad a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Falls $a_n \neq 0$ *ist* n *der* ***Grad*** *von* P

Korollar 3.11. *Seien* $P, Q \neq \mathbf{0}$ *poly. Funk. auf* $\mathbb{R}$. *Seien* $x_1, ..., x_m$ *die Nullstellen von* Q. *Dann ist die folgende Funktion stetig.*

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_m\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Satz 3.12 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $a, b \in R$.

$$\forall c \in \mathbb{R} \ \exists z \in I \ \ (f(a) \leq c \leq f(b) \implies a \leq z \leq b)$$

Korollar 3.13. *Sei* $P(x) = a_nx^n + ... + a_0$ *ein Polynom mit* $a_n \neq 0$ *und* n *ungerade. Dann besitzt* P *mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$.

Definition 3.16. *Ein intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ist* ***kompakt****, falls es von der Form* $I = [a, b],\ a \leq b$ *ist.*

Satz 3.19 (Min-Max)**.** *Sei* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf einem kompakten Intervall* I. *Dann gibt es* $u, v \in I$ *mit*

$$f(u) \leq f(x) \leq v \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

Satz 3.20 (Umkehrabbildung)**.** *Seien* $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ *zwei Teilmenger,* $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *Funktionen und* $x_0 \in D_1$. *Falls* f *in* x_0 *und* g *in* $f(x_0)$ *stetig sind, so ist* $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ *in* x_0 *stetig*

Satz 3.22. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig, streng monoton. Dann ist* $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f^{-1} : J \to I$ *ist stetig, streng monoton.*

Satz 3.24 (Exponentialfunktion)**.** $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

Korollar 3.27.

$$\exp(x) \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R} \ \textit{und} \ \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Korollar 3.28. $\ln\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion.* $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$

3.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.30 (Konvergenz von Funktionenfolgen)**.** *Die Funk.folge* $(f_n)_{n\geq 0}$ ***konvergiert punktweise*** *gegen eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$, *falls für alle* $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Definition 3.32 (Weierstrass 1841)**.** *Die folge* $f_n : D \to \mathbb{R}$ ***konvergier gleichmässig*** *in* D *gegen* $f : D \to \mathbb{R}$ *falls gilt*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \ (\forall n \geq N \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Satz 3.33. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktionenfolge bestehend aus in* D *stetigen Funktionen die in* D *gleichmässig eine FUnktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *konvergiert. Dann ist* f *in* D *auch stetig.*

Definition 3.34. *Eine Funktionenfolge* f_n *ist* ***gleichmässig konvergent*** *falls für alle* $x \in D$ *der Grenzwert* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existiert und die Folge* $(f_n)_{n\geq 0}$ *gleichmässig gegen* f *konvergiert.*

Definition 3.37. *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *konvergiert gleichmässig in* D *falls die durch* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ *definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.*

Satz 3.38. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass* $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in D$ *und, dass* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergiert. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmässig in* D *und deren Grenzwert*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D *stetige Funktion.*

Definition 3.39. *Die Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$ *hat* ***positiven Konvergenzradius*** *falls* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ *existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:*

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \textit{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \textit{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.40. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$ *eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius* $\rho > 0$ *und sei* $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k,\ |x| < \rho$.
Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ *konvergiert*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, *insbesondere ist* $f :] - \rho, \rho[\to \mathbb{R}$ *stetig.*

3.2 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.42.

1. $\exp iz = \cos(z) + i\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2. $\cos z = \cos(-z)$ *und* $\sin(-z) = \sin(z) \quad \forall z \in C$
3. $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
4. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ *und* $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43.

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$$
$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

Satz 3.44. $\pi := \{t > 0 : \sin t = 0\}$ ...

Satz .

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

3.3 Grenzwerte

Definition 3.47. *$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:*

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.49. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit*

$$\text{"} \lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{"}$$

falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\}) : |f(x) - A| \leq \epsilon$$

Satz 3.52. *$D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \to E$ eine Funktion, $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und $g : E \to \mathbb{R}$ stetig in y_0 ist. Dann*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Definition (Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte)**.**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \forall \epsilon\ \exists \delta,\ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \ldots$$

Analogous for $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1. *f ist **in x_0 differenzierbar** falls der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Satz 4.3 (Weierstrass 1861)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist in x_0 differenzierbar*
2. *Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit:*
   (a) *$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$*
   (b) *$r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0.*

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindetig bestimmt

Satz 4.7. *$f : D \to \mathbb{R}$ ist **in D differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.*

Satz 4.9. *$D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann*

1. *$f + g$ in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
2. *$f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*
3. *Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$*

Satz 4.11. *Seien $D, E \subseteq R$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ in x_0 differenzierbar so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \to \mathbb{R}$ in y_0 differenzierbar.*
Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

4.1 Zentrale Sätze

Definition 4.14. *$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$*

1. *f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls*
$$\exists \delta > 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D\ \ (f(x) \leq f(x_0))$$
2. *f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls*
$$\exists \delta > 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D\ \ (f(x) \geq f(x_0))$$
3. *f besitzt ein **lokales Extremum** in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.*

Satz 4.16 (Rolle 1690)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.*

$$f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in]a, b[\ (f'(\xi) = 0)$$

Satz 4.17 (Lagrange 1797)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Satz 4.22 (Cauchy)**.** *$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differezierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

falls $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b)$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz 4.23 (l'Hôpital 1696)**.** *$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a, b[$. Falls*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Definition 4.26.

1. *f ist **konvex** auf I falls für alle $x \leq y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$*
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$
gilt.
2. *f ist **streng konvex** auf I falls für alle $x < y$, $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$*
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$
gilt.

Satz 4.29. *$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.*

4.2 Höhere Ableitungen

Definition 4.32.

1. *Für $n \geq 2$ ist f **n-mal differenzierbar in** D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(}n) := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f.*
2. *Die funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar in** D, falls die n-mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.*
3. *Die funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal differenzierbar ist.*

Satz 4.34. *$f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D, dann:*

1. *$f + g$ n-mal diff. ist und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$*
2. *$f \cdot g$ n-mal diff. ist und*
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

4.3 Taylor

Maybe?

5 Riemann Integral

Definition 5.1. *Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subsetneq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$.*

Definition (Untersumme, Obersumme)**.**

$$\text{Partition } P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \text{ mit } x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$$
$$\delta_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i \geq 1$$
$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \qquad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$
$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \qquad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Lemma 5.2.

1. *Sei P' eine Vereinfachung von P, dann gilt $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$*
2. *Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$*

Definition . *Sei $\mathcal{P}(I)$ der Menge der Partitionen von I.*

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$$
$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Satz 5.3. *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** (oder kurz: integrierbar) falls*

$$s(f) = S(f)$$

In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Satz 5.4. *Eine beschränkte Funkiton ist genau dann integrierbar falls*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon$$

Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875)**.** *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass*

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \ S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Satz 5.10. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in R$. Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \ \forall x \in [a,b]$) integrierbar*

Definition E. *ine funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D \ \ (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Example: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht nicht gleichmässig stetig.

Satz 5.15 (Heine)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.*

Satz 5.16 (Integrierbar/Stetig)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.*

Satz 5.17. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.*

Satz 5.19. *Sei $I \subsetneq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) | \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Satz 5.20. *$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$. Dann folgt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

5.1 Differentialrechnung

Satz 5.26. *Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist int $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x, \quad \forall x \in [a,b])$$

Definition 5.27. *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.*

Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differenzialrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Satz 5.30 (Partielle Integration)**.** *Seie $a < b$ relle Zahlen und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Satz 5.31 (Substitution)**.** *sei $a < b$, $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subseteq I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

5.2 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.34. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

5.3 Euler-McLaurinSummationsformel

maybe useful? maybe not?

5.4 Uneigentliche Integrale

Definition S. *ei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$ für alle $b > a$. Falls*

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

und sagen, dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.

Satz 5.53 (McLaurin 1742)**.** *Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konvergiert.

Definition 5.56 (NATO caliber)**.** *In dieser Situation ist $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, falls*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existiert. In diesem Fall wird den Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

5.5 Die Gamma Funktion

Definition 5.59. *Für $s > 0$ definieren wir*

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

Konvergiert für alle $s > 0$

Satz 5.60 (Bohr-Mollerup)**.**

1. *Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen*
   (a) $\Gamma(1) = 1$
   (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \ \forall s > 0$
   (c) *Γ ist logarithmisch konvex, das heisst $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$*
2. *Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\to]0, \infty[$, die die drei Relationen erfüllt. Darüber hinaus gilt:*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)} \ \forall x > 0$$

Lemma 5.61. *Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geq 0$*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Satz 5.62 (Hölder Ungleichung)**.** *Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig gilt*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Wobei

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

5.6 Das unbestimmte Integral

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f. Wir schreiben

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

5.6.1 Stammfunktionen von rationalen Funktionen

6 Derivative Cheat Sheet

Properties

$$(cf)' = cf'(x) \qquad (f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x},\ x > 0$
$\ln(\|x\|)$	$\frac{1}{x},\ x \neq 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln a},\ x > 0$

7 Integral Cheat Sheet

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$	$F(X)$ (without $+C$)
x^s	$\frac{x^{s+1}}{s+1},\ s \neq -1$
x^s	$\ln x,\ x \geq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{asinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{acosh} x$

More?