

Analysis 1 Recap

Axel Montini
amontini@student.ethz.ch

July 31, 2021

master, 842ec1132f8b8aa4a822511932144bf4903ff1f8

1 Start

Korollar 1.16. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dann

- B nach oben beschränkt $\implies \sup A \leq \sup B$
- B nach unten beschränkt $\implies \inf B \leq \inf A$

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.4.

$\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\} \implies (a_n)_{n \geq 1}$ heisst **konvergent**

Definition 2.4+. Grenzwert oder Limes der Folge: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Lemma E. äquivalent Aussagen:

1. $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 (|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N)$

Satz 2.8. Konvergente Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

1. $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ auch konvergent und $a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
2. $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ konvergiert und $a \cdot b = \lim \dots$
3. $\forall n \geq 1 (b_n \neq 0)$ and $b \neq 0$. Dann $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ konvergent und $\frac{a}{b} = \lim \dots$
4. $\exists K \geq 1 (\forall n \geq K (a_n \leq b_n)) \implies a \leq b$

Definition 2.10.

$\forall n \geq 1 (a_n \leq a_{n+1}) \implies (a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend**

$\forall n \geq 1 (a_n \geq a_{n+1}) \implies (a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton fallend**

Satz 2.11 (Weierstrass). • $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert es mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$$

- $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert es mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$$

Lemma (Bernoulli Ungleichung). $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Definition [. Limes superior und limes inferior] Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ + Weierstrass, definiert man zwei monotone Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$. Für jedes $n \geq 1$: $b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$ und $c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$. Dann folgt aus Korollar 1.16: $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ und $c_n \geq c_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ (beide konvergieren).

- Limes inferior: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- Limes superior: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Aus $b_n \leq c_n$ folgt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Lemma 2.19.

$(a_n)_{n \geq 1}$ konv. $\iff (a_n)_{n \geq 1}$ besch. und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Satz 2.20 (Cauchy Kriterium).

$(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent $\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 (\forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < \epsilon))$

Definition 2.21. Abgeschlossenes Intervall (Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$) Form $[a, b]$ oder $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, a]$ oder $]-\infty, +\infty[$ mit $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Länge der intervalls: $\mathcal{L}(I) = b - a$ in Fall 1, $\mathcal{L}(I) = +\infty$ andrerfalls.

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor). $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \dots$ Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthaelt $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einer punkt.

Definition 2.27 (Teilfolge). Eine Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ ist $(b_n)_{n \geq 1}$ wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ satisfies $l(n) \leq l(n+1) \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass). Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.2 Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Der Begriff der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ stuetzt sich auf die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen $\sum_{k=1}^n a_k$

Definition 2.37. Die reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. Definieren wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Satz 2.40. Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$ ist konvergent.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Satz 2.41. Cauchy Kriterium, konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \left(\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon, \quad \forall m \geq n \geq N \right)$$

Satz 2.42.

$$(a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff (S_n)_{n \geq 1} \text{ nach oben beschr.}$$

Korollar 2.43 (Vergleichssatz).

$$\begin{aligned} & b_k \geq a_k \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \\ \implies & \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} & \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} & \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \end{cases} \end{aligned}$$

Definition 2.45.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut}$$

Satz 2.46. Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent und es gilt $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.48 (Leibniz 1682).

$(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend, $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\implies S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ konvergiert und es gilt } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Definition 2.50 (Umordnung).

$$\begin{aligned} & \exists \phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \quad (\phi \text{ bijek.}, a'_n = a_{\phi(n)}) \\ \implies & \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \text{ Umordnung von } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

Satz 2.52 (Dirichlet 1837). Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, denn konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821).

$(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821).

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ divergieren}$$

Korollar 2.57. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut fuer alle $|z| < \rho$ und divergiert fuer alle $|z| > \rho$, mit $\rho := \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \right)$ (oder $\rho = +\infty$ wenn denominatore 0).

Korollar . Die zeta funktion konvergiert, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Definition 2.58. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

Satz 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an dass $\exists B \geq 0$ so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0, U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} S_i, \sum_{j=0}^{\infty} U_j,$$

und es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} U_j = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$. Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut, mit selbem Grenzwert.

Definition 2.60. Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Satz 2.62. Falls zwei Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. Sei $f \in \mathbb{R}^D$. f ist nach (**oben/unten**) **beschränkt**, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach (**oben/unten**) beschränkt ist.

Definition 3.2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ist

- 1. **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D \ (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$
- 2. **streng m. wachsend**, falls $\forall x, y \in D \ (x < y \implies f(x) < f(y))$
- 3. **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D \ (x \leq y \implies f(x) \geq f(y))$
- 4. **streng m. fallend**, falls $\forall x, y \in D \ (x < y \implies f(x) > f(y))$
- 5. **monoton**, falls f **monoton wachsend** oder **monoton fallend** ist.
- 6. **streng monoton**, falls f **streg monoton wachsend** oder **streng monoton fallend** ist.

Definition 3.4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_o \in D$. Die funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **in** x_o **stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ (|x - x_o| < \delta \implies |f(x) - f(x_o)| < \epsilon)$$

Definition 3.5. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 3.7. Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Definition 3.9. Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P

Korollar 3.11. Seien $P, Q \neq 0$ poly. Funk. auf \mathbb{R} . Seien x_1, \dots, x_m die Nullstellen von Q . Dann ist die folgende Funktion stetig.

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Satz 3.12 (Zwischenwertsatz). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\forall c \in \mathbb{R} \ \exists z \in I \ (f(a) \leq c \leq f(b) \implies a \leq z \leq b)$$

Korollar 3.13. Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in \mathbb{R} .

Definition 3.16. Ein intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von der Form $I = [a, b], a \leq b$ ist.

Satz 3.19 (Min-Max). Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq v \quad \forall x \in I$$

Insbesondere ist f beschränkt

Satz 3.20 (Umkehrabbildung). Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmenger, $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig

Satz 3.22. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

Satz 3.24 (Exponentialfunktion). $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Korollar 3.27.

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Korollar 3.28. $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$

3.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.30 (Konvergenz von Funktionenfolgen). Die Funk.folge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktwiese** gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Definition 3.32 (Weierstrass 1841). Die folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergier gleichmässig** in D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \ (\forall n \geq N \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Satz 3.33. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus in D stetigen Funktionen die in D gleichmässig eine FUnktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f in D auch stetig.

Definition 3.34. Eine Funktionenfolge f_n ist **gleichmässig konvergent** falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Definition 3.37. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in D falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.38. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.

Definition 3.39. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hat **positiven Konvergenzradius** falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.40. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$. Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

3.2 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.42. 1. $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2. $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

4. $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$ und $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$

5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43.

sin(2z) = 2sin(z) cos(z)
cos(2z) = cos(z)^2 - sin(z)^2

Satz 3.44. π := {t > 0 : sin t = 0} ...

Satz .

sin(x) = sum_{n=0}^inf (-1)^n x^{2n+1} / (2n+1)! = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...
cos(x) = sum_{n=0}^inf (-1)^n x^{2n} / (2n)! = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + ...

3.3 Grenzwerte

Definition 3.47. x0 ∈ ℝ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls ∀δ > 0:

(]x0 - δ, x0 + δ[\ {x0}) ∩ D ≠ ∅

Definition 3.49. Sei f : D → ℝ, x0 ∈ ℝ ein Häufungspunkt von D. Dann ist A ∈ ℝ der Grenzwert von f(x) für x → x0, bezeichnet mit

” lim_{x→x0} f(x) = A ”

falls ∀ε > 0 ∃δ > 0 so dass

∀x ∈ D ∩ (]x0 - δ, x0 + δ[\ {x0}) : |f(x) - A| ≤ ε

Satz 3.52. D, E ⊆ ℝ, x0 Häufungspunkt von D, f : D → E eine Funktion, y0 := lim_{x→x0} f(x) existiert und g : E → ℝ stetig in y0 ist. Dann

lim_{x→x0} g(f(x)) = g(y0)

Definition (Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte).

lim_{x→x0+} f(x) ∀ε ∃δ, ∀x ∈ D ∩]x0, x0 + δ[: ...

Analogous for lim_{x→x0-} f(x).

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1. f ist in x0 differenzierbar falls der Grenzwert

f'(x0) = lim_{x→x0} (f(x) - f(x0)) / (x - x0)

existiert.

Satz 4.3 (Weierstrass 1861). Sei f : D → ℝ, x0 ∈ D Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1. f ist in x0 differenzierbar
- 2. Es gibt c ∈ ℝ und r : D → ℝ mit:

- (a) f(x) = f(x0) + c(x - x0) + r(x)(x - x0)
- (b) r(x0) = 0 und r ist stetig in x0.

Falls dies zutrifft ist c = f'(x0) eindeutig bestimmt

Satz 4.7. f : D → ℝ ist in D differenzierbar, falls für jeden Häufungspunkt x0 ∈ D, f in x0 differenzierbar ist.

Satz 4.9. D ⊆ ℝ, x0 ∈ D Häufungspunkt von D und f, g : D → ℝ in x0 differenzierbar. Dann

- 1. f + g in x0 differenzierbar und (f + g)'(x0) = f'(x0) + g'(x0)
- 2. f · g in x0 differenzierbar und (f · g)'(x0) = f'(x0)g(x0) + f(x0)g'(x0)
- 3. Falls g(x0) ≠ 0 ist f/g in x0 differenzierbar und (f/g)'(x0) = (f'(x0)g(x0) - f(x0)g'(x0)) / g(x0)^2

Satz 4.11. Seien D, E ⊆ ℝ und sei x0 ∈ D ein Häufungspunkt. Sei f : D → E in x0 differenzierbar so dass y0 := f(x0) ein Häufungspunkt von E ist und sei g : E → ℝ in y0 differenzierbar. Dann ist g ∘ f : D → ℝ in x0 differenzierbar und

(g ∘ f)'(x0) = g'(f(x0))f'(x0)

4.1 Zentrale Sätze

Definition 4.14. f : D → ℝ, D ⊆ ℝ und x0 ∈ D

- 1. f besitzt ein lokales Maximum in x0 falls

∃δ > 0 ∀x ∈]x0 - δ, x0 + δ[∩ D (f(x) ≤ f(x0))

- 2. f besitzt ein lokales Minimum in x0 falls

∃δ > 0 ∀x ∈]x0 - δ, x0 + δ[∩ D (f(x) ≥ f(x0))

- 3. f besitzt ein lokales Extremum in x0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.

Satz 4.16 (Rolle 1690). f : [a, b] → ℝ stetig und in]a, b[differenzierbar.

f(a) = f(b) ⇒ ∃ξ ∈]a, b[(f'(ξ) = 0)

Satz 4.17 (Lagrange 1797). f : [a, b] → ℝ stetig und in]a, b[differenzierbar. Dann gibt es ξ ∈]a, b[mit

f(b) - f(a) = f'(ξ)(b - a)

Satz 4.22 (Cauchy). f, g : [a, b] → ℝ stetig und in]a, b[differenzierbar. Dann gibt es ξ ∈]a, b[mit

g'(ξ)(f(b) - f(a)) = f'(ξ)(g(b) - g(a))

falls g'(x) ≠ 0 ∀x ∈]a, b[folgt

g(a) ≠ g(b)
f(b) - f(a) / g(b) - g(a) = f'(ξ) / g'(ξ)

Satz 4.23 (l'Hôpital 1696). f, g :]a, b[→ ℝ differenzierbar mit g'(x) ≠ 0 ∀x ∈]a, b[. Falls

lim_{x→b-} f(x) = 0, lim_{x→b-} g(x) = 0

und

lim_{x→b-} f'(x) / g'(x) =: λ

existiert, folgt

lim_{x→b-} f(x) / g(x) = λ

Definition 4.26. 1. f ist konvex auf I falls für alle x ≤ y, x, y ∈ I und λ ∈ [0, 1]

f(λx + (1 - λ)y) ≤ λf(x) + (1 - λ)f(y)

gilt.

- 2. f ist streng konvex auf I falls für alle x < y, x, y ∈ I und λ ∈ [0, 1]

f(λx + (1 - λ)y) < λf(x) + (1 - λ)f(y)

gilt.

Satz 4.29. f :]a, b[→ ℝ in]a, b[differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

4.2 Höhere Ableitungen

Definition 4.32. 1. Für n ≥ 2 ist f n-mal differenzierbar in D falls f^{(n-1)} in D differenzierbar ist. Dann ist f^{(n)} := (f^{(n-1)})' und nennt sich die n-te Ableitung von f.

- 2. Die funktion f ist n-mal stetig differenzierbar in D, falls die n-mal differenzierbar ist und falls f^{(n)} in D stetig ist.
- 3. Die funktion f ist in D glatt, falls sie ∀n ≥ 1 n-mal differenzierbar ist.

Satz 4.34. f, g : D → ℝ n-mal differenzierbar in D, dann:

- 1. f + g n-mal diff. ist und (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}
- 2. f · g n-mal diff. ist und

(f · g)^{(n)} = sum_{k=0}^n (n choose k) f^{(k)} g^{(n-k)}

4.3 Taylor

Maybe?

5 Riemann Integral

Definition 5.1. Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subseteq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$.

Definition (Untersumme, Obersumme).

$$\text{Partition } P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ mit } x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$$
$$\delta_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i \geq 1$$
$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \qquad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$
$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \qquad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Lemma 5.2. 1. Sei P' eine Vereinfachung von P , dann gilt $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

2. Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

Definition . Sei $\mathcal{P}(I)$ der Menge der Partitionen von I .

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$
$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Satz 5.3. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** (oder kurz: integrierbar) falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Satz 5.4. Eine beschränkte Funkiton ist genau dann integrierbar falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$$

Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875). Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \ S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

Satz 5.10. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \ \forall x \in [a, b]$) integrierbar

Definition E. ine funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D \ (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Example: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht nicht gleichmässig stetig.

Satz 5.15 (Heine). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

Satz 5.16 (Integrierbar/Stetig). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.17. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.19. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) | \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Satz 5.20. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a, b]$. Dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

5.1 Differentialrechnung

Satz 5.26. Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist int $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Definition 5.27. Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differenzialrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Satz 5.30 (Partielle Integration). Seie $a < b$ relle Zahlen und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Satz 5.31 (Substitution). sei $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

5.2 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.34. Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

5.3 Euler-McLaurinSummationsformel

maybe useful? maybe not?

5.4 Uneigentliche Integrale

Definition S. ei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

und sagen, dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.

Satz 5.53 (McLaurin 1742). Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

konvergiert.

Definition 5.56 (NATO caliber). In dieser Situation ist $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

existiert. In diesem Fall wird den Grenzwert mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet

5.5 Die Gamma Funktion

Definition 5.59. Für $s > 0$ definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

Konvergiert für alle $s > 0$

Satz 5.60 (Bohr-Mollerup). 1. Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen

- (a) $\Gamma(1) = 1$
- (b) $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
- (c) Γ ist logarithmisch konvex, das heisst $\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

2. Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die die drei Relationen erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

Lemma 5.61. Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Satz 5.62 (Hölder Ungleichung). Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Wobei

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

5.6 Das unbestimmte Integral

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f . Wir schreiben

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

5.6.1 Stammfunktionen von rationalen Funktionen

6 Derivative Cheat Sheet

Properties

$$\begin{aligned} (cf)' &= cf'(x) & (f \pm g)' &= f'(x) \pm g'(x) \\ (fg)' &= f'g + fg' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \frac{d}{dx}(c) &= 0 & \frac{d}{dx}(g(f(x))) &= g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}, \quad x > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$

7 Integral Cheat Sheet

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$f(x)$	$F(X)$ (without $+C$)
x^s	$\frac{x^{s+1}}{s+1}, \quad s \neq -1$
x^s	$\ln x, \quad x \geq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{asinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{acosh} x$

More?