

Analysis 1 Recap

Axel Montini
amontini@student.ethz.ch

July 31, 2021

master, 4e83ffe46bc75d91839af4d35a470e44a99522be

1 Start

Korollar 1.16. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, dann

- B nach oben beschränkt $\Rightarrow \sup A \leq \sup B$
- B nach unten beschränkt $\Rightarrow \inf B \leq \inf A$

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.4. $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\} \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ heisst **konvergent**

Definition 2.4+. Grenzwert oder Limes der Folge: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Lemma E. äquivalent Aussagen:

1. $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 (|a_n - l| < \epsilon \quad \forall n \geq N)$

Satz 2.8. Konvergente Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

1. $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ auch konvergent und $a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
2. $(a_n \cdot b_n)_{n \geq 1}$ konvergiert und $a \cdot b = \lim \dots$
3. $\forall n \geq 1 (b_n \neq 0)$ and $b \neq 0$. Dann $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ konvergent und $\frac{a}{b} = \lim \dots$
4. $\exists K \geq 1 (\forall n \geq K (a_n \leq b_n)) \Rightarrow a \leq b$

Definition 2.10.

$\forall n \geq 1 (a_n \leq a_{n+1}) \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton wachsend**

$\forall n \geq 1 (a_n \geq a_{n+1}) \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ ist **monoton fallend**

Satz 2.11 (Weierstrass). • $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \geq 1\}$

- $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$

Lemma (Bernoulli Ungleichung). $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$

Definition [. Limes superior und limes inferior] Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ + Weierstrass, definiert man zwei monotone Folgen $(b_n)_{n \geq 1}$ und $(c_n)_{n \geq 1}$. Für jedes $n \geq 1$: $b_n = \inf \{a_k : k \geq n\}$ und $c_n = \sup \{a_k : k \geq n\}$. Dann folgt aus Korollar 1.16: $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ und $c_n \geq c_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ (beide konvergieren).

- Limes inferior: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- Limes superior: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

Aus $b_n \leq c_n$ folgt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Lemma 2.19.

$(a_n)_{n \geq 1}$ konv. $\Leftrightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ besch. und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

Satz 2.20 (Cauchy Kriterium).

$(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 (\forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < \epsilon))$

Definition 2.21. Abgeschlossenes Intervall (Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$) Form $[a, b]$ oder $[a, +\infty[$ oder $]-\infty, a]$ oder $]-\infty, +\infty[$ mit $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Länge der intervalls: $\mathcal{L}(I) = b - a$ in Fall 1, $\mathcal{L}(I) = +\infty$ andrerfalls.

Satz 2.25 (Cauchy-Cantor). $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \dots$ Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$ enthaelt $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einer punkt.

Definition 2.27 (Teilfolge). Eine Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ ist $(b_n)_{n \geq 1}$ wobei $b_n = a_{l(n)}$ und $l: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ satisfies $l(n) \leq l(n+1) \quad \forall n \geq 1$

Satz 2.29 (Bolzano-Weierstrass). Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

2.2 Reihen

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Der Begriff der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ stuetzt sich auf die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen $\sum_{k=1}^n a_k$

Definition 2.37. Die reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. Definieren wir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Satz 2.40. Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j)$ ist konvergent.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Satz 2.41. Cauchy Kriterium, konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \left(\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon, \quad \forall m \geq n \geq N \right)$$

Satz 2.42.

$(a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow (S_n)_{n \geq 1} \text{ nachoben beschränkt}$

Korollar 2.43 (Vergleichssatz).

$$b_k \geq a_k \geq 0 \quad \forall k \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent} \end{cases}$$

Definition 2.45.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut}$$

Satz 2.46. Eine absolut kovergente Reihe ist auch konvergent und es gilt $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Satz 2.48 (Leibniz 1682).

$(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend, $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\Rightarrow S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ konvergiert und es gilt $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$

Definition 2.50 (Umordnung).

$\exists \phi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \quad (\phi \text{ bijek.}, a'_n = a_{\phi(n)}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ **Umordnung** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Satz 2.52 (Dirichlet 1837). Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, denn konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Satz 2.53 (Quotientenkriterium, Cauchy 1821).

$(a_n)_{n \geq 1}, a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

Satz 2.56 (Wurzelkriterium, Cauchy 1821).

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergieren

Korollar 2.57. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut fuer alle $|z| < \rho$ und divergiert fuer alle $|z| > \rho$, mit $\rho := \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \right)$ (oder $\rho = +\infty$ wenn denominatore 0).

Korollar . Die zeta funktion konvergiert, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Definition 2.58. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine **lineare Anordnung** der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = a_{\sigma(k)}$

Satz 2.59 (Cauchy 1821). Wir nehmen an dass $\exists B \geq 0$ so dass

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

Dann konvergieren absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0, U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0, \sum_{i=0}^{\infty} S_i, \sum_{j=0}^{\infty} U_j,$$

und es gilt $\sum_{j=0}^{\infty} U_j = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$. Jede lineare Anordnung der Doppelreihe konvergiert absolut, mit selbem Grenzwert.

Definition 2.60. Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Satz 2.62. Falls zwei Reihen absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} \cdot b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. Sei $f \in \mathbb{R}^D$. f ist nach (**oben/unten**) **beschränkt**, falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ nach (**oben/unten**) beschränkt ist.

Definition 3.2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ist

1. **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
2. **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$
3. **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$
4. **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$
5. **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist.
6. **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Definition 3.4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in D$. Die funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **in** x_0 **stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Definition 3.5. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig**, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Satz 3.7. Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Definition 3.9. Eine **polynomiale Funktion** $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Falls $a_n \neq 0$ ist n der **Grad** von P

Korollar 3.11. Seien $P, Q \neq 0$ poly. Funk. auf \mathbb{R} . Seien x_1, \dots, x_m die Nullstellen von Q . Dann ist die folgende Funktion stetig.

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Satz 3.12 (Zwischenwertsatz). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\forall c \in \mathbb{R} \exists z \in I \quad (f(a) \leq c \leq f(b) \implies a \leq z \leq b)$$

Korollar 3.13. Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in \mathbb{R} .

Definition 3.16. Ein intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist **kompakt**, falls es von der Form $I = [a, b], a \leq b$ ist.

Satz 3.19 (Min-Max). Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq v \quad \forall x \in I$$

Inbesondere ist f beschränkt

Satz 3.20 (Umkehrabbildung). Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmenger, $f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig

Satz 3.22. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

Satz 3.24 (Exponentialfunktion). $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

Korollar 3.27.

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Korollar 3.28. $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist eine streng monoton wachsende, stetige, bijektive Funktion. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$

3.1 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 3.30 (Konvergenz von Funktionenfolgen). Die Funk.folge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Definition 3.32 (Weierstrass 1841). Die folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmässig** in D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ falls gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \quad (\forall n \geq N \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Satz 3.33. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus in D stetigen Funktionen die in D gleichmässig eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f in D auch stetig.

Definition 3.34. Eine Funktionenfolge f_n ist **gleichmässig konvergent** falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Definition 3.37. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig in D falls die durch $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz 3.38. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D und deren Grenzwert

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.

Definition 3.39. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ hat **positiven Konvergenzradius** falls $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert. Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Satz 3.40. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$. Dann gilt: $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmässig auf $[-r, r]$, insbesondere ist $f :]-\rho, \rho[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

3.2 Trigonometrische Funktionen

Satz 3.42. 1. $\exp iz = \cos(z) + i \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2. $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

4. $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$ und $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$

5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Korollar 3.43.

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

Satz 3.44. $\pi := \{t > 0 : \sin t = 0\} \dots$

Satz .

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

3.3 Grenzwerte

Definition 3.47. $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein **Häufungspunkt** der Menge D falls $\forall \delta > 0$:

$$(\]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \backslash \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Definition 3.49. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D . Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$, bezeichnet mit

$$”\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A”$$

falls $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap (\]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ \backslash \{x_0\}) : |f(x) - A| \leq \epsilon$$

Satz 3.52. $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D , $f : D \rightarrow E$ eine Funktion, $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in y_0 ist. Dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Definition (Linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte).

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \forall \epsilon \ \exists \delta, \ \forall x \in D \cap]x_0, x_0 + \delta[: \dots$$

Analogous for $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 4.1. f ist in x_0 **differenzierbar** falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Satz 4.3 (Weierstrass 1861). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1. f ist in x_0 differenzierbar
- 2. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

- (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
- (b) $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0 .

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt

Satz 4.7. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in D **differenzierbar**, falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.

Satz 4.9. $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann

- 1. $f + g$ in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- 2. $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- 3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Satz 4.11. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \rightarrow E$ in x_0 differenzierbar so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist und sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ in y_0 differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

4.1 Zentrale Sätze

Definition 4.14. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

- 1. f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D \ (f(x) \leq f(x_0))$$

- 2. f besitzt ein lokales Minimum in x_0 falls

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D \ (f(x) \geq f(x_0))$$

- 3. f besitzt ein **lokales Extremum** in x_0 falls es entweder ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.

Satz 4.16 (Rolle 1690). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

$$f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in]a, b[\ (f'(\xi) = 0)$$

Satz 4.17 (Lagrange 1797). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Satz 4.22 (Cauchy). $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

falls $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$ folgt

$$\begin{aligned} g(a) &\neq g(b) \\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \end{aligned}$$

Satz 4.23 (l'Hôpital 1696). $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a, b[$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

existiert, folgt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Definition 4.26. 1. f ist **konvex** auf I falls für alle $x \leq y, \ x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

gilt.

- 2. f ist **streng konvex** auf I falls für alle $x < y, \ x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

gilt.

Satz 4.29. $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ in $]a, b[$ differenzierbar. f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) monoton wachsend ist.

4.2 Höhere Ableitungen

Definition 4.32. 1. Für $n \geq 2$ ist f **n-mal differenzierbar** in D falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n -te Ableitung von f .

- 2. Die funktion f ist **n-mal stetig differenzierbar** in D , falls die n -mal differenzierbar ist und falls $f^{(n)}$ in D stetig ist.

- 3. Die funktion f ist in D **glatt**, falls sie $\forall n \geq 1$ n -mal differenzierbar ist.

Satz 4.34. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in D , dann:

- 1. $f + g$ n -mal diff. ist und $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- 2. $f \cdot g$ n -mal diff. ist und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

4.3 Taylor

Maybe?

5 Riemann Integral

Definition 5.1. Eine **Partition** von I ist eine endliche Teilmenge $P \subseteq [a, b]$ wobei $\{a, b\} \subseteq P$.

Definition (Untersumme, Obersumme).

Partition $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad i \geq 1$$

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

Lemma 5.2. 1. Sei P' eine Vereinfachung von P , dann gilt $s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$

- 2. Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

Definition . Sei $\mathcal{P}(I)$ der Menge der Partitionen von I .

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$
$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Satz 5.3. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **Riemann integrierbar** (oder kurz: integrierbar) falls

$$s(f) = S(f)$$

In diesem fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

Satz 5.4. Eine beschränkte Funkiton ist genau dann integrierbar falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I) \text{ mit } S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$$

Satz 5.8 (Du Bois-Reymond 1875, Darboux 1875). Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \quad S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

Satz 5.10. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g, |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ und $\frac{f}{g}$ (falls $|g(x)| \geq \beta > 0 \forall x \in [a, b]$) integrierbar

Definition E. ine funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D \quad (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Example: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht nicht gleichmässig stetig.

Satz 5.15 (Heine). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in dem kompakten Intervall $[a, b]$. Dann ist f in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

Satz 5.16 (Integrierbar/Stetig). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.17. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.

Satz 5.19. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten a, b sowie $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Satz 5.20. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, und $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$. Dann folgt

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Satz 5.22 (Cauchy 1821, Schwarz 1885, Bunjakovski 1859). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Satz 5.23 (Mittelwertsatz, Cauchy 1821). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

5.1 Differentialrechnung

Satz 5.26. Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist int $[a, b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Definition 5.27. Sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Stammfunktion** von f , falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

Satz 5.28 (Fundamentalsatz der Differenzialrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion F von f , die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Satz 5.30 (Partielle Integration). Seie $a < b$ relle Zahlen und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Satz 5.31 (Substitution). sei $a < b, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

5.2 Integration konvergenter Reihen

Satz 5.34. Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

5.3 Euler-McLaurinSummationsformel

maybe useful? maybe not?

5.4 Uneigentliche Integrale

Definition S. ei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b > a$. Falls

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

existiert, bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

und sagen, dass f auf $[a, \infty[$ integrierbar ist.

Satz 5.53 (McLaurin 1742). Sei $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

konvergiert.

Definition 5.56 (NATO caliber). In dieser Situation ist $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, falls

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existiert. In diesem Fall wird den Grenzwert mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

5.5 Die Gamma Funktion

Definition 5.59. Für $s > 0$ definieren wir

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

Konvergiert für alle $s > 0$

Satz 5.60 (Bohr-Mollerup). 1. Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen

- (a) $\Gamma(1) = 1$
- (b) $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
- (c) Γ ist logarithmisch konver, das heisst $\Gamma(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}$ für alle $x, y > 0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

2. Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, die die drei Relationen erfüllt. Darüber hinaus gilt:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$$

Lemma 5.61. Sei $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt $\forall a, b \geq 0$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Satz 5.62 (Hölder Ungleichung). Seien $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

Wobei

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

5.6 Das unbestimmte Integral

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Falls f stetig ist, gibt es eine Stammfunktion F für f . Wir schreiben

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

6 Derivative Cheat Sheet

Properties

$(cf)' = cf'(x)$ $(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$

$(fg)' = f'g + fg'$ $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\frac{d}{dx}(c) = 0$ $\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}, \ x > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}, \ x \neq 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln a}, \ x > 0$

7 Integral Cheat Sheet

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$f(x)$	$F(X)$ (without $+C$)
x^s	$\frac{x^{s+1}}{s+1}, \ s \neq -1$
x^s	$\ln x, \ x \geq 0$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{asinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{acosh} x$

More?