Chapitre 22

Espaces de dimension finie

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Propostion 22.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$P(k) : \text{"}E \text{ est engendré par } n-k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}\text{"}$$

Pour $k = 0$, la famille convient.
On suppose que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E = Vect(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in L})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i l_j$.
Comme $\mathcal{L}$ est libre, $l_{k+1} \notin Vect(l1, \dots, l_k)$.
Donc il existe $i \in [\![1, n-k]\!], \alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i, on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_n + 1)$$

Ainsi :

$$E = Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in [\![0, n]\!]$, en particulier, $P(n)$ est vraie.
$(l1, \dots, l_n)$ est une base de E. Or $l_{n+1} \in E$ et $(l_1, \dots, l_{n+1})$ libre. Absurde.

22.5 Algroithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et de certains vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$.

On utilise l'algorithme suivant :
On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$:
- Si $x_k \in Vect(\mathcal{F})$, on laisse $\mathcal{F}$ invariant.
- Si $x_k \notin Vect(\mathcal{F})$, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.
La famille $\mathcal{F}$ obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in Vect(\mathcal{F})$$

Donc $E = Vect(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \subset Vect(\mathcal{F}) \subset E$. Donc $\mathcal{F}$ est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.
1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant $\mathcal{L}$.

2. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de $\mathcal{G}$ et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
   La base obtenue est bien constituée de vecteurs de $\mathcal{G}$.

Remarque

Remarque

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

Corollaire 22.11

Soit E un espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de E est de cardinal fini.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose E de dimension finie. Donc E possède une famille génératrice à n vecteurs.
Donc les familles libres de E ont un cardinal inférieur à n.
Elles sont finies.

$\boxed{\Leftarrow}$

Par contraposée, on suppose E de dimension infinie.
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
On pose $x_1 = x$. Comme E est de dimension infinie, on choisit $x_2 \in E \backslash Vect(x_1)$.
On poursuit les raisonnement par récurrence pour obtenir une famille libre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

22.12 Théorème de la dimension

Théorème 22.12

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et sont de même cardinal.

Soit B et B' deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 22.18

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$. Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit $\mathcal{F}$ une famille avec $|\mathcal{F}| = \dim E = n$.

— On suppose que $\mathcal{F}$ est libre.
  On applique sur $\mathcal{F}$ le théorème de la base incomplète.
  On obtient alors une base B de E avec :

$$\mathcal{F} \subset E$$

Or $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$.
Donc $\mathcal{F} = B$.
— On suppose $\mathcal{F}$ génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

Propostion 22.20

On a

$$rg(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit $Vect((x_i)_{i \leq k})$ possède un système fini de k vecteurs générateurs.

$$\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$, alors (22.18), $(x_1, \dots, x_k)$ est une base, donc est libre.
— Si la famille est libre, c'est une base de $Vect(x_1, \dots, x_k)$, donc $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$.

22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propostion 22.22

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, avec E de dimension finie.
Ainsi, F est lui-même de dimension finie (22.11).
Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de F :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim E$$

Donc (il suffit de prendre pour $\mathcal{L}$ une base de F) :

$$\dim F \leq \dim E$$

Si $\dim F = \dim E$, alors une base de F est aussi une base de E (22.18).
Ainsi :

$$F = Vect(B) = E$$

22.23 Formule de Grassmann

Théorème 22.23

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $F + G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$F \cap G \subset F$, donc $F \cap G$ est de dimension finie.
On note $n = \dim F \cap G$.
On choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F \cap G$.
On complète cette famille libre en :
— une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ de F
— une base $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ de G

Montrons que $(E_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F+G$.

$$\begin{aligned} F+G &= Vect(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) + Vect(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q) \\ &= Vect(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

La famille génératrice. On suppose :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i g_i = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{q} \gamma_i g_i = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i \in F \cap G$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$) :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (0, \dots, 0)$$

Puis :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i f_i = 0$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$) :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \\ (\beta_1, \dots, \beta_p) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= n+p+q \\ &= n+p+n+q-n \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propostion 22.27

Soit E un espace de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de F. Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

si et seulement si :

$$F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires } &\text{ssi } F \oplus G = E \\ &\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E \\ (\boxed{\Rightarrow}\ 22.26\ \boxed{\Leftarrow}\ 22.26,\ 22.22)\ &\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \\ (\boxed{\Rightarrow}\ 22.26\ \boxed{\Leftarrow}\ 22.23)\ &\text{ssi } F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \end{aligned}$$

22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

Théorème 22.28

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E. Alors il existe un supplémentaire S de F et :

$$\dim S = \dim E - \dim F$$

— Si $F = \{0\}$, E convient.
— Si $F \neq \{0\}$, on choisit une base de F $(f_1, \ldots, f_p)$ que l'on complète en une base $(f_1, \ldots, f_p, s_1, \ldots, s_q)$ de E $(\dim E = p + q)$.
$S = Vect(s_1, \ldots, s_q)$ convient.

22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$

Propostion 22.30

Si E et F sont de dimension finie, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ décrite dans l'exemple précédent est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

— Montrons que $(u_{i,j})$ est libre.
On suppose $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$.

$$\begin{aligned} \forall k \in I, \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j}(b_k) &= 0 \\ \text{donc } \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} c_j &= 0 \\ \text{donc } \sum_{j\in J} \lambda_{k,j} c_j &= 0 \end{aligned}$$

Par liberté des (c_j), on a :

$$\forall k \in I, \forall j \in J, \lambda_{k,j} = 0$$

— Montrons que $(u_{i,j})$ est génératrice.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout $k \in I$, $f(b_k) = \sum\limits_{j\in J} \lambda_{k,j} c_j$ ((c_j) est une base de F).
Alors :

$$f = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} \text{ (théorème de rigidité)}$$

22.32 Dimension d'espaces isomorphes

Propostion 22.32

Soit E et F deux espaces isomorphes. Si l'un des deux est de dimension finie, alors les deux le sont et :

$$\dim E = \dim F$$

Réciproquement, si E et F sont de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, alors E et F sont isomorphes.

— Si $\dim E = n$, on choisit B une base de E.
Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f(B)$ est une base de F.
Donc F est de dimension finie et $\dim F = |f(B)| = |B| = n = \dim E$.

— On suppose que $\dim E = n = \dim F$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
On définit (théorème de rigidité) $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i$$

D'après (21.70), u est un isomorphisme.

22.35 Rang d'une famille génératrice

Propostion 22.35

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Le rang de u, s'il existe est égal au rang de la famille $(u(x_i))_{i \in I}$.

$$\begin{aligned} rg(u) &= \dim(Im(u)) \\ &= \dim(Vect(u(x_i))_{i \in I}) \text{ (21.21)} \\ &= rg(u(x_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie

Propostion 22.36

— Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E ou F sont de dimension finie, alors $Im(u)$ est également de dimension finie et (avec les conditions adéquates) :

$$rg(u) \leq \dim E \text{ ou } rg(u) \leq \dim F$$

— Avec les conditions appropriées :
  — $rg(u) = \dim E$ si et seulement si u est injective
  — $rg(u) = \dim F$ si et seulement si u est surjective

On suppose E et F de dimension finie.
— $Im(u) \subset F$ et $\dim(Im(u)) \leq \dim F$ et $rg(u) = \dim F$ si et seulement si (22.22) $Im(u) = F$ si et seulement si u est surjective.
— Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Comme $(e_1, \dots, e_n)$ engendre E :

$$\begin{aligned} rg(u) &= rg(u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ (22.35)} \\ &\leq n = \dim E \text{ (22.20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg(u(e_1), \dots, u(e_n)) = n &\text{ ssi } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ &\text{(21.68) ssi } u \text{ est injective} \end{aligned}$$

22.39 Effet d'une composition sur le rang

Théorème 22.39

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $rg(v \circ u) \leq \min(rg(u), rg(v))$
2. si v est injective, alors $rg(v \circ u) = rg(u)$
3. si u est surjective, alors $rg(v \circ u) = rg(v)$

1. $Im(v \circ u) \subset Im(v)$ donc $rg(v \circ u) \leq rg(v)$ et $Im(v \circ u) = Im(v|_{Im(u)})$ donc :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_{Im(u)}) \leq \dim(Im(u)) = rg(u)$$

2. Si v est injective, alors (22.36), $rg(v|_{Im(u)}) = \dim(Im(u)) = rg(u)$
3. Si u est surjective, alors $Im(u) = F$, et d'aprè (22.39.1) :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_F) = rg(v)$$

22.40 Noyau et image d'une restriction

Lemme 22.40

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un sous-espace vectoriel de E. Soit $v \in \mathcal{L}(E', F)$ la restriction de u à E'. Alors :
- $\ker v = \ker u \cap E'$
- Si $\ker u + E' = E$, alors $Im(v) = Im(u)$

Soit $x \in E$.
-

$$\begin{aligned} x \in \ker v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ v(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \cap E' \end{aligned}$$

- Supposons que $\ker u + E' = E$. On a toujours $Im(v) \subset Im(u)$.
  Soit $y \in Im(u)$. On choisit $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
  On écrit $x = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \ker u$ et $\beta \in E'$.
  Ainsi :

$$y = u(x) = u(\alpha + \beta) = u(\alpha) + u(\beta) = 0 + v(\beta) \in Im(v)$$

22.41 Restriction de u à un supplémentaire de $\ker u$

Corollaire 22.41

Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $Im(u)$.

Soit $v : S \to Im(u); x \mapsto u(x)$.
D'après (22.40), v est injective et surjective, donc fournit bien un isomorphisme de S sur $Im(u)$.

22.43 Théorème du rang

Théorème 22.43

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim \ker f + rg(f) = \dim E$$

Comme E est de dimension finie, $\ker f$ et $Im(f)$ sont de dimension finie.
D'après (22.28), on choisit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E.
D'après (22.41), S et $Im(f)$ sont isomorphes.
Donc $rg(f) = \dim S = \dim E - \dim \ker f$ (22.28).

22.53 Caractérisation par les supplémentaires

Théorème 22.53

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si H admet une droite de E comme supplémentaire.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que H est un hyperplan de E.
Soit $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$ tel que :

$$H = \ker \varphi$$

Comme $\varphi \neq 0$, on choisit $x \in E \backslash \ker \varphi$.
On a clairement $H \cap Vect(x) = \{0\}$.
On rappelle que $\varphi(x) \in \mathbb{K}^*$. Soit $v \in E$.
On a :

$$\varphi(v) = \frac{1}{\varphi(x)} \varphi(\varphi(x)v)$$

On écrit $v = \underbrace{v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(x)} x}_{\in \ker \varphi} + \underbrace{\frac{\varphi(v)}{\varphi(x)} x}_{\in Vect(x)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que $E = H \oplus Vect(x)$.
Soit $v \in E$. On écrit $v = h + \lambda x$.
On lui associe $\varphi(v) = \lambda$. L'application φ est bien définie car la décomposition est unique.
Cette application est bien linéaire, dont le noyau est H.
Par définition, H est un hyperplan.

22.54 Comparaison de deux équations de H

Propostion 22.54

Soit H un hyperplan de E d'équation $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $\psi \in E^*, \psi(x) \neq 0$ est une équation de H si et seulement si $\psi \neq 0$ et $\psi \in Vect(\varphi)$.

On note $H = \ker \varphi$ avec $\varphi \in E^*$ non nulle.
$\boxed{\Rightarrow}$
Soit $\psi \in E^*$ non nulle. On suppose $H = \ker \psi$.
Comme ψ est non nulle, on choisit $\alpha \in E$ tel que :

$$\psi(\alpha) = 0 \text{ dans } \mathbb{K}$$

Comme $\alpha \notin \ker \psi$, $\varphi(\alpha) \neq 0$.
On écrit :

$$\psi(\alpha) = \lambda \psi(x) \text{ avec } \lambda = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(x)} \neq 0$$

D'après (22.53) :

$$E = H \oplus Vect(\alpha)$$

Soit $x \in E, x = h + \mu\alpha$ $(h \in H, \mu \in \mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(h) + \mu\psi(\alpha) \\ &= \mu\lambda\varphi(x) \\ &= \lambda\varphi(h + \mu\alpha) \\ &= \lambda\varphi(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi = \lambda\varphi \in Vect(\varphi)$$

$\boxed{\Leftarrow}$
si $\psi \in Vect(\varphi)$, on écrit $\psi = \lambda\varphi, \lambda \neq 0$.
Pour $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in H &\Leftrightarrow x \in \ker \varphi \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\varphi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker \psi \end{aligned}$$

22.55 Intersection d'hyperplans

Théorème 22.55

Soit E un espace de dimension finie n.

1. L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n - m$.
2. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel F de E de dimension $n - m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.

1. Le résulat est vrai pour $m = 1$ (avec égalité).
   Soit H_1 et H_2 deux hyperplans.
   On a :

   $$\dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$$

   D'après la formule de Grassmann :

   $$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2) &= \underbrace{-\dim(H_1 + H_2)}_{\in\{n-1,n\}} + \dim H_1 + \dim H_2 \\ &\geq 2n - 2 - n \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

   On poursuit le résultat par récurrence.
2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$.
   On fixe une base $(f_1, \dots, f_{n-m})$ de F. On la complète en $(f_1, \dots, f_{n-m}, f_{n-m+1}, \dots, f_n)$ une base de E.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note p_k la projection canonique sur la k-ième coordonnée.

   $$p_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) = \alpha_k$$

   Par construction, p_k est une forme linéaire, non nulle.

   $$F = \bigcap_{i=n-m+1}^{n} \ker p_i$$