Chapitre 32

Espaces probabilisés finis

32.19 Exemple

Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroter les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.
On note X la variable alétoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1,8]\!])$$

En notant A "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned}
A &= (X \in P_4[\![4,8]\!]) \\
P(A) &= P(X \in P_4[\![4,8]\!]) \\
&= \frac{|P_4[\![4,8]\!]|}{|P_4[\![1,8]\!]|} \\
&= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}}
\end{aligned}$$

32.25 Exemple

Exemple 32.25

On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Quelle est la loi de la variable X^2+1 ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$$

$$(X^2+1)(\omega) = \{1,2,5,10\}$$

Et :

$$\begin{aligned}
P(X^2+1=1) &= P(X=0) \\
&= \frac{1}{7} \\
P(X^2+1=2) &= P(X=-1)+P(X=1) \\
&= \frac{2}{7} \\
P(X^2+1=5) &= P(X=-2)+P(X=2) \\
&= \frac{2}{7} \\
P(X^2+1=10) &= P(X=-3)+P(X=3) \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

32.26 Exemple

Exemple 32.26

On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de $(-1)^X$?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

Théorème 32.28

Soit $E = \{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble et $p_1, \dots, p_r \in [0,1]$ des réels pour lesquels $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω, d'image E, pour lesquels pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de P.

32.30 Probabilité conditionnelle

Théorème 32.30

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de A sachant B. L'application P_B est alors une probabilité sur Ω, appelée sa probabilité conditionnelle sachant B.

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned}
P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\
&= P_B(A) + P_B(C)
\end{aligned}$$

32.31 Formule des probabilités totales

Théorème 32.31

Soit $(\ \Omega, P\ )$ un espace probabilisé fini et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P\left(A_i\right)$$

Soit $B \in P(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

Avec $P(A_i) > 0$ pour définir les probabilités conditionnelles.

32.32 Exemple

Exemple 32.32

Dans une classe de 40 étudiants (25 filles et 15 garçons), le professeur principal se propose de désigner brutalement deux délégués provisoires. Il prend une liste de la classe, ferme les yeux et pointe au hasard un premier nom avec la pointe du stylo puis de même avec un deuxième. Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est celui d'un garçon ?

On note G_i : "le i-ème nom tiré est celui d'un garçon".
$\{G_1, \overline{G_1}\}$ forme un système complet d'évènements de probabilités strictement positives.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \mid G_1) \times P(G_1) + P(G_2 \mid \overline{G_1}) \times P(\overline{G_1}) \\ &= \frac{14}{39} \times \frac{3}{8} + \frac{15}{39} \times \frac{5}{8} \end{aligned}$$

32.33 Formule de Bayes

Théorème 32.33

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, si $P(A) > 0$, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)}$$

2. Soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_B\left(A_j\right) = \frac{P_{A_j}(B) P\left(A_j\right)}{\sum\limits_{i=1} P_{A_i}(B) P\left(A_i\right)}$$

1.
$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

2.
$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)} \text{ (probas totales)}$$

32.35 Exemple

Exemple 32.35

Juge au tribunal, je dois juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. Un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit, puis a pris la fuite. Un témoin affirme que le taxi était bien bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies de taxis se partagent le marché. La compagnie des taxis bleus et la compagnie des taxis verts. Toutefois, les taxis vert dominent le marché au sens où 90% des taxis dans la ville sont verts. On demande au témoin d'effectuer des tests de reconnaissance des couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90% des cas pour la couleur bleue et 80% des cas pour la couleur verte. Dois-je condamner ou non la compagnie des taxis bleus ?

— On note B : "le taxi coupable est bleu"
— On note T_B : "le témoin pense que le taxi coupable est bleu"

On souhaite calculer $P(B \mid T_B)$.

— $P(B) = 0.1$
— $P(T_B \mid B) = 0.9$
— $P(\overline{T_B} \mid \overline{B}) = 0.8$

On a :

$$\begin{aligned} P(B \mid T_B) &= \frac{P(T_B \mid B) \times P(B)}{P(T_B \mid B)P(B) + P(T_B \mid \overline{B})P(\overline{B})} \\ &= \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + (1 - 0.8) \times 0.9} \\ &= \frac{9}{9 + 2 \times 9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

32.37 Formule des probabilités composées

Théorème 32.37

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ pour lesquels $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} P(A_k \mid A_1 \ldots A_{k-1}) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{p(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})} \\ &= P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

32.43 Indépendance et complémentarité

Théorème 32.43

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, les évènements $A_1^0, \ldots, A_n^0$ le sont aussi, pour tout $A_1^0 \in \{A_1, \overline{A_1}\}, \ldots, A_n^0 \in \{A_n, \overline{A_n}\}$.

- On s'occupe du cas $n = 2$.
  On généralise ensuite par récurrence.
- Soit A, B deux évènements indépendants.

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A \setminus B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

  Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants.

32.44 Exemple

Exemple 32.44

Le concept d'indépendance va maintenant nous permettre de définir une loi usuelle très importante en pratique : la loi binomiale. Intéressons-nous pour cela à la répétition n fois indépendamment d'une expérience aléatoire à deux issues, disons « favorable » et « défavorable » de probabilité p pour la première. Quelle est la loi du nombre X d'issues favorables ?

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!], F_i$: "la i-ème issue est favorable".
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned} (X = k) &= \bigsqcup_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \left(\bigcap_{i \in I} F_i \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\ P(X = k) &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} P\left(\bigcap_{i \in I} F_i \cap \bigcap_{i \notin I} \overline{F_i} \right) \\ &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} P(F_i) \prod_{i \notin I} P(\overline{F_i}) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{I \in P_k([\![1,n]\!])} p^{|I|}(1-p)^{n-|I|} \\ &= p^k(1-p)^{n-k} |P_k([\![1, n]\!])| \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$