Chapitre 3

Ensembles et applications

3.12 Propriétés du produit cartésien

Soit x et y. On a :

1.

$$\begin{aligned}(x,y) \in E \times F &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F\\ \text{Donc } (x,y) \notin E \times F &\Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin F\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}E \times F \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in E \times F\\ &\Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F\\ &\Leftrightarrow E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset\\ &\Leftrightarrow \text{non } (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}E \times F = F \times E &\Leftrightarrow \begin{cases} E \times F = F \times E \text{ et } E = \emptyset\\ E \times F = F \times E \text{ et } F = \emptyset\\ E \times F = F \times E \text{ et } E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset\\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall (x,y) \in E \times F, (x,y) \in F \times E \text{ et } \forall (a,b) \in F \times E, (a,b) \in E \times F\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset\\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall y \in F, y \in E\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset\\ E = F\end{cases}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(x,y) \in (E \times F) \cup (F \times G) &\Leftrightarrow (x,y) \in E \times F \text{ ou } (x,y) \in F \times G\\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } y \in G)\\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \cup G\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}(x,y) \in (E \times F) \cap (G \times H) &\Leftrightarrow (x,y) \in E \times F \text{ et } (x,y) \in G \times H\\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } x \in G \text{ et } y \in H\\ &\Leftrightarrow x \in E \cap G \text{ et } y \in F \cap H\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (E \cap G) \times (F \cap H)\end{aligned}$$

3.18 Associativité des relations

Les ensembles de départ et d'arrivée sont bien égaux (à E et H respectivement). Soit $(x,y) \in E \times H$

$$\begin{aligned}x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}y &\Leftrightarrow \exists z \in F, x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})z \text{ et } z\mathcal{R}y\\ &\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, (x\mathcal{T}v \text{ et } v\mathcal{S}z) \text{ et } z\mathcal{R}y\\ &\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } (v\mathcal{S}z \text{ et } z\mathcal{R}y)\\ &\Leftrightarrow \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } v(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y\\ &\Leftrightarrow x\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y\end{aligned}$$

3.20 Propriétés des relations réciproques

— RAF

— Les ensembles de départ sont égaux respectivement à E et à G.
Soit $(x, y) \in G \times E$. On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1} y &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, x\mathcal{S}^{-1}\alpha \text{ et } \alpha\mathcal{R}^{-1}y \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \alpha\mathcal{S}x \text{ et } y\mathcal{R}\alpha \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x \\ &\Leftrightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}y \end{aligned}$$

3.23 Composition de fonctions

Soit f une fonction de E vers F.
Soit g une fonction de E vers G.

$$g \circ f \text{ est une relation de } E \text{ vers } G$$

Soit $(x, y, y') \in E \times G \times G$. On suppose

$$\begin{cases} x(g \circ f)y \\ x(g \circ f)y' \end{cases}$$

Donc on choisit α dans F tel que :

$$xf\alpha \text{ et } \alpha gy$$

et β dans F tel que :

$$xf\beta \text{ et } \beta gy'$$

Or f est une fonction, donc $\alpha = \beta$.
Donc αgy et $\alpha gy'$, or g est une fonction, donc $y = y'$. Par définition, $g \circ f$ est une fonction.

3.30 Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijectivité

Injectivité :
Soit $(x, x') \in E^2$.
On suppose que $f(x) = f(x')$.
$\vdots$
Donc $x = x'$.

Surjectivité :
Soit $y \in F$.
$\vdots$
On choisit … tel que :
$\vdots$
Donc$f(x) = y$

Bijectivité :
Pour la bijectivité, on montre l'injectivité et la surjectivité séparément.

3.35 Composée d'injections/surjections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

— On suppose que f et g sont injectives.
Soit $(x, x') \in E^2$.

$$\begin{aligned} \text{On suppose que } g \circ f(x) &= g \circ f(x') \\ \text{Donc } g(f(x)) &= g(f(x')) \\ \text{Donc } f(x) &= f(x') && \text{(g est injective)} \\ \text{Donc } x &= x' && \text{(f est injective)} \end{aligned}$$

— On suppose que f et g sont surjectives.
Soit $y \in G$.
Par surjectivité de g, on choisit $\alpha \in F$ tel que $g(\alpha) = y$.
Par surjectivité de f, on choisit $x \in E$ tel que $f(x) = \alpha$.
Donc $g \circ f(x) = y$.
Donc $g \circ f$ est surjective.

3.36 Condition nécessaire pour une composition injective/surjective

— Soit $(x, x') \in E^2$ tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x') \\ \text{Donc } g(f(x)) &= g(f(x')) \\ \text{Donc } x &= x' \end{aligned}$$

Donc f est injective.

— On suppose $g \circ f$ surjective.
Soit $y \in G$. Soit $\alpha \in E$ tel que $g \circ f(\alpha) = y$.
On pose $x = f(\alpha) \in F$.
Donc $g(x) = y$ Donc g est surjective.

3.37 Réciproque et bijection

Soit $f : E \to F$ et f^{-1} la relation réciproque de f
— f^{-1} est une fonction si et seulement si f est injective.
— Si f^{-1} est une fonction, c'est une application.
ssi. $Def(f^{-1}) = F$
ssi. f est surjective.

3.38 Inverse d'une composée de bijections

Propositions (3.35), (3.27) et (3.20)

3.39 Condition nécessaire et suffisante de bijectivité

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que f est bijective.
On pose $g = f^{-1}$ sa bijection réciproque.
On a bien $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $g : F \to E$ vérifiant $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.
En particulier, $g \circ f$ est injective, donc f est injective.
En particulier, $f \circ g$ est surjective, donc f est surjective.
Donc f est bijective.
Or $f \circ g = id_F$.
Donc $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_F$.
Soit $g = f^{-1}$.