

Chapitre 27

Séries numériques

27 Séries numériques	1
27.6 Série géométrique	2
27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout	2
27.12 CN de convergence portant sur le terme général	2
27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs	2
27.20 Convergence absolue entraîne convergence	3
27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité	3

27.6 Série géométrique

Théorème 27.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$$

La série converge et $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

Proposition 27.11

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.

D'après les hypothèses, A est majoré donc possède un maximum N d'après la propriété fondamentale de \mathbb{N} .

On note (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Pour $n \geq N$:

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k \in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge.

27.12 CN de convergence portant sur le terme général

Théorème 27.12

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. De manière équivalente, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théorème de comparaison sur les suites.

27.20 Convergence absolue entraîne convergence

Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
Or, pour tout n :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n^+ &\leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- &\leq |u_n| \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent et par linéarité (27.16) $\sum u_n$ converge.

- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| &\leq |u_n| \\ |Im(u_n)| &\leq |u_n| \end{aligned}$$

Donc, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16) $\sum u_n$ converge.

27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

Théorème 27.33

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :

- La convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
- La divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

On suppose $u_n = O(v_n)$ avec $v_n \geq 0$.

- On suppose que $\sum v_n$ converge. On a $|u_n| = O(v_n)$ donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq |u_n| \leq M v_n$$

D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge.

- Si $\sum |u_n|$ diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.