

Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25 Comparaison locale des fonctions	1
25.6 Caractérisation séquentielle	2
25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f	2
25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a	2

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f =_a O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ à valeurs dans X , alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f =_a o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ à valeurs dans X , alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$f =_a O(g)$ ssi il existe h bornée au voisinage de a tel que $f = g \cdot h$

ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \rightarrow a$, $f(u_n) = g(u_n) \times w_n$ où (w_n) est une suite bornée.

\Rightarrow $w_n = h(u_n)$ ssi bornée \Leftarrow Par l'absurde avec (25.5).

ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \rightarrow a$, $f(u_n) = O(g(u_n))$.

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0 . Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ Alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \sum_{k=0}^0 \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a, b], \mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [a, b], f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\
 \text{(IPP)} &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt
 \end{aligned}$$