Chapitre 28

Matrice d'une application linéaire

28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

Théorème 28.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.
On note $M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre (car $|\mathcal{F}| = \dim E$), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0$$

Or pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, n]\!], \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M \end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\ker M = \{0\}$, si et seulement si M est inversible.

28.6 Exemple

Exemple 28.6

Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc libre.

28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyeu de leur lignes et colonnes

Théorème 28.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est inversible
- la famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A, $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
A est inersible si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (28.8).
Si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (28.5).
Si et seulement si ${}^tA$ est inversible (11.42).
Si et seulement si $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

28.13 Exemple

Exemple 28.13

On note T l'endomorphisme $P \mapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_3}(T)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\
T(1) &= 1 \\
T(X) &= 1 \\
T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\
T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\
Mat_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

28.15 Exemple

Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$

28.18 Exemple

Exemple 28.18

On note φ l'application canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_2'$ la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_3'$ la base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_2',\mathcal{B}_3'}(\varphi)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x+y, -x+y)$.
$\varphi(1,0) = (1,1,-1) = -(1,1,1) + 2(1,1,.)$
$\varphi(0,1) = (0,1,1) = (1,1,1) - (1,1,0)$

$$Mat_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$