Chapitre 33

Variables aléatoires réelles finies

33.3 Exemple

Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1,2 et 3 tombent avec une probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec une probabilité $\frac{1}{12}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

33.4 Espérance des lois usuelles

Théorème 33.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1. Variable aléatoire constante : si X est constante de valeur m, alors $\mathrm{E}(X) = m$.
2. Loi uniforme : si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, alors $\mathrm{E}(X)$ est la moyenne naturelle des valeurs $x_1, \dots, x_n$ de X :
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
3. Loi de Bernoulli : soit $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
4. Exemple fondamental : pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.

1. Si $X(\Omega) = \{m\}, P(X = m) = 1$ et $E(X) = 1 \times m = m$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\}$ alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$
Donc :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :
$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$
4. Si $A \subset \Omega$, alors :
$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \text{ (32.21)}$$
Donc (3) $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Par définition :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :
Soit $Q = (1-p+Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k \text{donc } Q' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^{k-1}$$
$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}Y^k$$

Par ailleurs $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$.
En évaluant les deux expressions en p, on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :
On poursuit le calcul de $E(X)$ en utilisant la formule du capitaine.
Troisième méthode :
En utilisant la linéarité de l'espérance.

33.5 Propriétés de l'espérance

Propostion 33.5

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Reformulation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.
2. Linéarité : pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathrm{E}(X) + \mu\mathrm{E}(Y)$.
3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
4. Croissance : si $X \leq Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$.
5. Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$.

1. On rappelle qe $\{(X=x)\}_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE.
Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega\in(X=x)} P(X=\omega)\right] x \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \\ &= \lambda \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})Y(\omega) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y) \end{aligned}$$

3. Si $X \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0}\underbrace{X(\omega)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned} |E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) \right| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})|X(\omega)| \\ &= E(|X|) \end{aligned}$$

33.6 Exemple

Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P([\![1, 6]\!]))$.

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \\ &= 2 \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k \\ &= 7 \end{aligned}$$

33.7 Formule de transfert

Théorème 33.8

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et la loi de X :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$$

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un SCE.

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X=x)} P(\{w\}) f(X(\omega)) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X=x)} P(\{w\}) \right) f(x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x) \end{aligned}$$

33.10 Exemple

Exemple 33.10

Soit X une variable aléatoire suivant une loi unifore sur $[\![1, n]\!]$. Donner un équivalent simple de $E(X)$ et de $E(X^2)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

—

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n+1}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3} \end{aligned}$$

33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Théorème 33.11

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned} E(x)E(Y) &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)y\right) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\ &= E(XY) \end{aligned}$$