Chapitre 36

Fonctions de deux variables

36.15 Exemple

Exemple 36.15

Les projections $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} p_1 : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto x \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout $(x,y) \in B(a,\epsilon)$.

$$|p_1(x,y) - p_1(x_0,y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x,y) - (x_0,y_0)\|$$

Donc p_1 est bien continue en a, donc sur $\mathbb{R}^2$.

36.17 Exemple

Exemple 36.17

Soi tI et J deux intervalles et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. Alors :

$$I \times J \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto f(x) + g(y) \quad \text{et} \quad I \times J \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto f(x)g(y)$$

sont continues sur $I \times J$.

- Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Par continuité de f et g on choisit $\alpha > 0$ tel que :
  - $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  - $\forall y \in J, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$

  Soit $(x,y) \in B((x_0,y_0),\alpha)$.

$$|f(x) + g(y) - f(x_0) - g(y_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(y) - g(y_0)|$$

- De la même manière (voir le produit de fonctions de $\mathcal{C}^0$, chap. 15).