

# Chapitre 22

## Espaces de dimension finie

<b>22 Espaces de dimension finie</b>	<b>1</b>
22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants	2
22.5 Algorithme de la base incomplète	2
22.8 Théorème de la base incomplète	2
22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres	3
22.12 Théorème de la dimension	3
22.18 Caractérisation des bases en dimension finie	3
22.20 Majoration du rang et cas d'égalité	4
22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel	4
22.23 Formule de Grassmann	4
22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires	5
22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie	6
22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$	6
22.32 Dimension d'espaces isomorphes	6
22.35 Rang d'une famille génératrice	7
22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie	7
22.39 Effet d'une composition sur le rang	7
22.40 Noyau et image d'une restriction	8
22.41 Restriction de $u$ à un supplémentaire de $\ker u$	8
22.43 Théorème du rang	8

## 22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

### Proposition 22.3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie engendré par  $n$  éléments. Alors toute partie libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.

Soit  $G$  une famille génératrice de  $E$  avec  $G = (g_1, \dots, g_n)$ . Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ .

Supposons par l'absurde que  $|\mathcal{L}| > n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

$$P(k) : "E \text{ est engendré par } n - k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}"$$

Pour  $k = 0$ , la famille convient.

On suppose que pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $E = \text{Vect}(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in \mathcal{L}})$

Comme  $l_{k+1} \in E$ , on écrit  $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$ .

Comme  $\mathcal{L}$  est libre,  $l_{k+1} \notin \text{Vect}(l_1, \dots, l_k)$ .

Donc il existe  $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$ ,  $\alpha_i \neq 0$  et quitte à renommer les  $g_i$ , on peut supposer  $\alpha_{n-k} \neq 0$  et ainsi :

$$g_{n-k} \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence,  $P(k)$  est vraie pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , en particulier,  $P(n)$  est vraie.

$(l_1, \dots, l_n)$  est une base de  $E$ . Or  $l_{n+1} \in E$  et  $(l_1, \dots, l_{n+1})$  libre. Absurde.

## 22.5 Algorithme de la base incomplète

### Théorème 22.5

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une partie génératrice de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions,  $E$  possède une base constituée des vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  et de certains vecteurs  $x_{p+1}, \dots, x_n$ .

On utilise l'algorithme suivant :

On initialise  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ . Pour tout  $k \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$  :

- Si  $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on laisse  $\mathcal{F}$  invariant.
- Si  $x_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on remplace  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$ .

L'algorithme s'arrête en temps fini.

La famille  $\mathcal{F}$  obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc  $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$ . Donc  $\mathcal{F}$  est une base.

## 22.8 Théorème de la base incomplète

### Théorème 22.8

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base finie de  $E$ .
2. De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base finie de  $E$ .

En particulier,  $E$  possède une base finie.

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie.

1. Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$  qui fournit une base  $B$  de  $E$  contenant  $\mathcal{L}$ .

2. Comme  $\mathcal{G}$  est génératrice, on fixe  $x \neq 0 \in \mathcal{G}$  comme premier vecteur de  $\mathcal{G}$  et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.  
La base obtenue est bien constituée de vecteurs de  $\mathcal{G}$ .

## Remarque

### Remarque

Si  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

## 22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

### Corollaire 22.11

Soit  $E$  un espace vectoriel. Alors  $E$  est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de  $E$  est de cardinal fini.



On suppose  $E$  de dimension finie. Donc  $E$  possède une famille génératrice à  $n$  vecteurs.  
Donc les familles libres de  $E$  ont un cardinal inférieur à  $n$ .  
Elles sont finies.



Par contraposée, on suppose  $E$  de dimension infinie.  
Soit  $x \in E$  avec  $x \neq 0$ .  
On pose  $x_1 = x$ . Comme  $E$  est de dimension infinie, on choisit  $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1)$ .  
On poursuit les raisonnements par récurrence pour obtenir une famille libre  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## 22.12 Théorème de la dimension

### Théorème 22.12

Soit  $E \neq \{0\}$  un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  sont finies et sont de même cardinal.

Soit  $B$  et  $B'$  deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

## 22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

### Théorème 22.18

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \neq 0$ . Une famille de  $n$  vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille avec  $|\mathcal{F}| = \dim E = n$ .

- On suppose que  $\mathcal{F}$  est libre.  
On applique sur  $\mathcal{F}$  le théorème de la base incomplète.  
On obtient alors une base  $B$  de  $E$  avec :

$$\mathcal{F} \subset B$$

Or  $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$ .

Donc  $\mathcal{F} = B$ .

— On suppose  $\mathcal{F}$  génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

## 22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

### Proposition 22.20

On a

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit  $\text{Vect}((x_i)_{i \leq k})$  possède un système fini de  $k$  vecteurs générateurs.

$$\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si  $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$ , alors (22.18),  $(x_1, \dots, x_k)$  est une base, donc est libre.

— Si la famille est libre, c'est une base de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ , donc  $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$ .

## 22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel

### Proposition 22.22

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ , avec égalité si et seulement si  $F = E$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , avec  $E$  de dimension finie.

Ainsi,  $F$  est lui-même de dimension finie (22.11).

Si  $\mathcal{L}$  est une famille libre de  $F$  :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim E$$

Donc (il suffit de prendre pour  $\mathcal{L}$  une base de  $F$ ) :

$$\dim F \leq \dim E$$

Si  $\dim F = \dim E$ , alors une base de  $F$  est aussi une base de  $E$  (22.18).

Ainsi :

$$F = \text{Vect}(B) = E$$

## 22.23 Formule de Grassmann

### Théorème 22.23

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors  $F + G$  est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$F \cap G \subset F$ , donc  $F \cap G$  est de dimension finie.

On note  $n = \dim F \cap G$ .

On choisit une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $F \cap G$ .

On complète cette famille libre en :

— une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$  de  $F$

— une base  $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$  de  $G$

Montrons que  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$  est une base de  $F + G$ .

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

La famille génératrice. On suppose :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i + \sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i f_i \in F \cap G$$

Donc (liberté de  $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ ) :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (0, \dots, 0)$$

Puis :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i = 0$$

Donc (liberté de  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ ) :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \\ (\beta_1, \dots, \beta_p) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= n + p + q \\ &= n + p + n + q - n \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

## 22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

### Proposition 22.27

Soit  $E$  un espace de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

si et seulement si :

$$F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

$F$  et  $G$  sont supplémentaires ssi  $F \oplus G = E$

$$\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E$$

( $\Rightarrow$ ) 22.26 ( $\Leftarrow$ ) 22.26, 22.22) ssi  $F \cap G = \{0\}$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$

( $\Rightarrow$ ) 22.26 ( $\Leftarrow$ ) 22.23) ssi  $F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = \dim E$

## 22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

### Théorème 22.28

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Alors il existe un supplémentaire  $S$  de  $F$  et :

$$\dim S = \dim E - \dim F$$

- Si  $F = \{0\}$ ,  $E$  convient.
- Si  $F \neq \{0\}$ , on choisit une base de  $F$   $(f_1, \dots, f_p)$  que l'on complète en une base  $(f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q)$  de  $E$  ( $\dim E = p + q$ ).  
 $S = \text{Vect}(s_1, \dots, s_q)$  convient.

## 22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$

### Proposition 22.30

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, la famille  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  décrite dans l'exemple précédent est une base de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

- Montrons que  $(u_{i,j})$  est libre.  
 On suppose  $\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$ .

$$\begin{aligned} \forall k \in I, \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j}(b_k) &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} c_j &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j &= 0 \end{aligned}$$

Par liberté des  $(c_j)$ , on a :

$$\forall k \in I, \forall j \in J, \lambda_{k,j} = 0$$

- Montrons que  $(u_{i,j})$  est génératrice.  
 Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
 Pour tout  $k \in I$ ,  $f(b_k) = \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j$  ( $(c_j)$  est une base de  $F$ ).  
 Alors :

$$f = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} \text{ (théorème de rigidité)}$$

## 22.32 Dimension d'espaces isomorphes

### Proposition 22.32

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces isomorphes. Si l'un des deux est de dimension finie, alors les deux le sont et :

$$\dim E = \dim F$$

Réciproquement, si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie avec  $\dim E = \dim F$ , alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

- Si  $\dim E = n$ , on choisit  $B$  une base de  $E$ .  
 Si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme, alors  $f(B)$  est une base de  $F$ .  
 Donc  $F$  est de dimension finie et  $\dim F = |f(B)| = |B| = n = \dim E$ .

- On suppose que  $\dim E = n = \dim F$ .  
Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ .  
On définit (théorème de rigidité)  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$$

D'après (21.70),  $u$  est un isomorphisme.

## 22.35 Rang d'une famille génératrice

### Proposition 22.35

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$ . Le rang de  $u$ , s'il existe est égal au rang de la famille  $(u(x_i))_{i \in I}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \dim(\operatorname{Im}(u)) \\ &= \dim(\operatorname{Vect}(u(x_i))_{i \in I}) \quad (21.21) \\ &= \operatorname{rg}(u(x_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

## 22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie

### Proposition 22.36

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  ou  $F$  sont de dimension finie, alors  $\operatorname{Im}(u)$  est également de dimension finie et (avec les conditions adéquates) :

$$\operatorname{rg}(u) \leq \dim E \text{ ou } \operatorname{rg}(u) \leq \dim F$$

- Avec les conditions appropriées :
  - $\operatorname{rg}(u) = \dim E$  si et seulement si  $u$  est injective
  - $\operatorname{rg}(u) = \dim F$  si et seulement si  $u$  est surjective

On suppose  $E$  et  $F$  de dimension finie.

- $\operatorname{Im}(u) \subset F$  et  $\dim(\operatorname{Im}(u)) \leq \dim F$  et  $\operatorname{rg}(u) = \dim F$  si et seulement si (22.22)  $\operatorname{Im}(u) = F$  si et seulement si  $u$  est surjective.
- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .  
Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  engendre  $E$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad (22.35) \\ &\leq n = \dim E \quad (22.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) &= n \text{ ssi } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ &\quad (21.68) \text{ ssi } u \text{ est injective} \end{aligned}$$

## 22.39 Effet d'une composition sur le rang

### Théorème 22.39

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

1.  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$
2. si  $v$  est injective, alors  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$
3. si  $u$  est surjective, alors  $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

1.  $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$  donc  $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(v)$  et  $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im}(v|_{\operatorname{Im}(u)})$  donc :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v|_{\operatorname{Im}(u)}) \leq \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u)$$

2. Si  $v$  est injective, alors (22.36),  $rg(v|_{Im(u)}) = \dim(Im(u)) = rg(u)$
3. Si  $u$  est surjective, alors  $Im(u) = F$ , et d'après (22.39.1) :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_F) = rg(v)$$

## 22.40 Noyau et image d'une restriction

### Lemme 22.40

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $E'$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $v \in \mathcal{L}(E', F)$  la restriction de  $u$  à  $E'$ . Alors :

- $\ker v = \ker u \cap E'$
- Si  $\ker u + E' = E$ , alors  $Im(v) = Im(u)$

Soit  $x \in E$ .

—

$$\begin{aligned} x \in \ker v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ v(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \cap E' \end{aligned}$$

- Supposons que  $\ker u + E' = E$ . On a toujours  $Im(v) \subset Im(u)$ .  
Soit  $y \in Im(u)$ . On choisit  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$ .  
On écrit  $x = \alpha + \beta$  avec  $\alpha \in \ker u$  et  $\beta \in E'$ .  
Ainsi :

$$y = u(x) = u(\alpha + \beta) = u(\alpha) + u(\beta) = 0 + v(\beta) \in Im(v)$$

## 22.41 Restriction de $u$ à un supplémentaire de $\ker u$

### Corollaire 22.41

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ . Alors  $u$  induit un isomorphisme de  $S$  sur  $Im(u)$ .

Soit  $v : S \rightarrow Im(u); x \mapsto u(x)$ .

D'après (22.40),  $v$  est injective et surjective, donc fournit bien un isomorphisme de  $S$  sur  $Im(u)$ .

## 22.43 Théorème du rang

### Théorème 22.43

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un espace vectoriel quelconque. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim \ker f + rg(f) = \dim E$$

Comme  $E$  est de dimension finie,  $\ker f$  et  $Im(f)$  sont de dimension finie.

D'après (22.28), on choisit  $S$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$ .

D'après (22.41),  $S$  et  $Im(f)$  sont isomorphes.

Donc  $rg(f) = \dim S = \dim E - \dim \ker f$  (22.28).