# Chapitre 17

# Fractions rationnelles

## 17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

**Définition 17.2**

Soit $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \ \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \text{ et } \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.
Soit $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ dans $\mathbb{K}(X)$.
Montrons que :

$$\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1 S + Q_1 R}{Q_1 S}$$

On a :

$$\begin{aligned}(PS + QR)Q_1 S - (P_1 S + Q_1 R)QS &= S^2 (\underbrace{PQ_1 - P_1 Q}_{=0}) + RS(\underbrace{QQ_1 - Q_1 Q}_{=0}) \\ &= 0\end{aligned}$$

On raisonne de la même manière pour $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$ et ainsi, l'opération est bien définie.

## 17.10 Degré d'une fraction

**Définition 17.10**

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction. On pose $\deg(F) = -\infty$ si $F = 0$ et $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$ sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Si $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$, alors :

$$\begin{aligned} P_1 Q &= PQ_1 \\ \text{donc } \ \deg(P_1 Q) &= \deg(PQ_1) \\ \text{donc } \ \deg(P_1) + \deg(Q) &= \deg(P) + \deg(Q_1) \ (\mathbb{K} \text{ intègre}) \\ \text{donc } \ \deg(P_1) - \deg Q_1 &= \deg(P) - \deg(Q) \end{aligned}$$