Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

— ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$

— bilinéarité : RAF

— ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire usuel.

— bilinéarité : RAF

— Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2, {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t\left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y\right) \\ &= {}^tY {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2+xy+y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.
La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Propostion 34.14

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \text{ (bilinéarité)} \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.