Chapitre 30

Déterminant

30.4 Exemple

Exemple 30.4

On considrèe l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}; ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix}\right) \\
&= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\
&= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\
&= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

Propostion 30.11

Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ une base de E_i et pour tout $(j_1, \ldots, j_n) \in [\![1, d_1]\!] \times \cdots \times [\![1, d_n]\!]$, $f_{j_1,\ldots,j_n} \in F$.
Alors il existe une unique application n-linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ telle que :

$$\forall (j_1, \ldots, j_n) \in [\![1, d_1]\!] \times \cdots \times [\![1, d_n]\!], \varphi(e_{1,j_1}, \ldots, e_{n,j_n}) = f_{j_1,\ldots,j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ est une base de E_i alors $((e_{1,2}, 0, \ldots, 0, \ldots, e_{1,d}, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, e_{n,1}, \ldots, (0, \ldots, 0, e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.

30.18 Caractérisation par les transpositions

Lemme 30.18

Pour qu'une forme f soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si τ est une transposition alors $\varphi(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)(x_1, \ldots, x_n)$.
Soit $\sigma \in S_n$. On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ avec τ_i des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(1)}, \ldots, x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varphi(x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(1)}, \ldots, x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k)\varphi(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

Lemme 30.19

Soit φ une forme alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, alors φ est alternée.

Soit φ alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

On suppose que carac$(\mathbb{K}) \neq 2$.
On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

Propostion 30.21

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée et φ une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, \dots x_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

30.22 Forme n-linéaire d'un espace de dimension n

Théorème 30.22

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Il existe une unique forme n-linéaire φ sur E telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.
2. Cette forme n-linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\boxed{1, 2}$

On utilise le théorème de rigidité des applications n-linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ avec $(i_1, \dots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n$.

— $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ s'il existe $i_j - i_k$ avec $j \neq k$.

— $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1,\dots,i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma\in\mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1,\dots,e_n)}$.

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

$\boxed{3}$

Soit ψ une forme n-linéaire alternée. On pose $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$.

— si $\lambda = 0$, par alternance (et anitsymétrie) on a $\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_n$.
Par rigidité, $\psi = 0 = 0 \times \varphi$.

— si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}\psi(1, \dots, e_n) = 1$.
Par unicité (1), $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$.
Donc $\psi = \lambda\varphi$.

30.25 Exemple

Exemple 30.25

On considère $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$. Soit $((a, b), (c, d)) \in E^2$. Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$.
$((a, b), (c, d)) \in (E)^2$.

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

30.26 Description du déterminant par les coordonnées

Théorème 30.26

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E, dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (multilinéarité)} \\
&= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = [\![1,n]\!]} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (alternance)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \text{ (reformulation)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}
\end{aligned}$$

30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

Propostion 30.28

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

Propostion 30.30

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $\mathcal{F}$ de cardinal n est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

D'après (30.29), si $\mathcal{F}$ est une base alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base, alors elle est liée ($|\mathcal{F}| = n$)
Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$ (30.21).

30.36 Déterminant d'un produit

Théorème 30.36

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de B.
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

φ est une forme n-linéaire alternée.
On choisit donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\
&= \lambda \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi = \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\
&= \det(AB)
\end{aligned}$$

30.40 Expression des déterminants classiques

Propostion 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2. $\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

30.41 Invariance du déterminant par transposée

Théorème 30.41

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

30.42 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 30.42

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est une espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépnd pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de** f et est noté $\det(f)$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

30.44 Déterminant et conjugaison

Propostion 30.44

Soit $\psi : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit e une base de E et f une base de F.

$$\begin{aligned}
\det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\text{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1})) \text{ (30.42)} \\
&= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi) \times \text{Mat}_e(u) \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \text{ (28.42)} \\
&= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \times \det(\text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \text{ (30.36)} \\
&= \det(\underbrace{\text{Mat}_\psi \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \text{ (30.36)} \\
&= \det(\text{Mat}_e(u))
\end{aligned}$$

30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

Propostion 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit T une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).
Ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$

D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n,\sigma(i)\leq i\equiv\mathrm{id}} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i}\\ &= \sigma(\mathrm{id})\prod_{i=1}^{n} t_{ii}\end{aligned}$$

30.47 Détrminant des matrices de codage des opérations

Lemme 30.47

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$ et $R_{ij}(\lambda)$ sont triangulaires.
D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}\det(Q_i(\lambda)) &= \lambda\\ \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1\\ \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)\\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)},\dots,C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix}\\ &= \varepsilon(\tau_{ij})\det_{\mathcal{B}_C}(C_1,\dots,C_n)\\ &= -1\end{aligned}$$

30.50 Exemple

Exemple 30.50

Calculer :

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

30.51 Exemple

Exemple 30.51

Calculer pour $a \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
&= (a+n-1)(a-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Propostion 30.52

Soit T une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les A_i sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i)$$

On montre le résultat dans le cas où $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
On généralisera alors par récurrence et transposée.
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ les colonnes de A et $(B_1, \ldots, B_p)$ les lignes de B.
On définit :

$$\begin{aligned} \varphi :& (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K} \\ & (X_1, \ldots, X_n) \mapsto \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n & C \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

φ est une forme n-linéaire alternée.
Donc on choisit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\varphi = \lambda \det{}_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_n) &= \lambda \det{}_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\varphi(\mathcal{B}_n) = \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi :& (\mathbb{K}^p)^p \to \mathbb{K} \\ & (Y_1, \ldots, Y_p) \mapsto \begin{vmatrix} 1 & & & C \\ & \ddots & & \\ & & 1 & Y_1 \\ & & & \vdots \\ & & & Y_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ψ est une forme p-linéaire alternée donc on choisit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\psi = \alpha \det{}_{\mathcal{B}_p}$$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha &= \psi(\mathcal{B}_p)\\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi = \det_{\mathbb{B}_p}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda &= \varphi(\mathcal{B}_n)\\ &= \psi(B_1, \dots, B_p)\\ &= \det(B)\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \det(B) \times \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}_n}(A_1, \dots, A_n)$$

Soit :

$$\det(T) = \det(B) \det(A)$$

30.57 Exemple

Exemple 30.57

Déterminer la comatrice de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\Delta_{11}(M) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\\ \Delta_{12}(M) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\\ \Delta_{13}(M) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\\ \Delta_{21}(M) &= \cdots\\ \mathrm{Com}(M) &= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

30.58 Développement suivant une colonne

Théorème 30.58

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On note $M_1, \dots, M_n$ les colonnes de M.
Par hypothèses :

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} E_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, M_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left(M_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} m_{ij} E_i, \dots, M_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, E_i, \dots, M_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(E_i, \dots, M_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & M_1 & \cdots & M_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 1 & m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ 0 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ 0 & m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} m_{ij} \Delta_{ij}
\end{aligned}$$

30.59 Développement selon une ligne

Théorème 30.59

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $j \in [\![1, n]\!]$, alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

$\det(M) = \det({}^t M)$ et on utilise (30.58).

30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley

Corollaire 30.61

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$M^t\,\mathrm{Com}(M) = {}^t\,\mathrm{Com}(M) M \det(M) I_n$$

En particulier, M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t\,\mathrm{Com}(M)$$

On montre seulement $M^t\,\mathrm{Com}(M) = \det(M) I_n$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
[M^t\,\mathrm{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} M_{ik}[{}^t\mathrm{Com}(M)]_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\,\mathrm{Com}(M)_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} M_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(M) \\
&= \det(M) \text{ (formule du développement)}
\end{aligned}$$

On suppose que $i \neq j$. En reprenant les étapes précédentes :

$$\begin{aligned}
[M^t\,\mathrm{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\,\mathrm{Com}(M)_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} M_{ik}\Delta_{jk}(M)
\end{aligned}$$

On considère le déterminant suivant (on a remplacé la ligne j par i) :

$$\begin{vmatrix}
m_{11} & \cdots & m_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{i1} & \cdots & m_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{i1} & \cdots & m_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
m_{n1} & \cdots & m_{nn}
\end{vmatrix} \underset{\text{développement de la ligne } j}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} m_{ik}\Delta_{jk}(M)$$

30.63 Cramer

Corollaire 30.63

Le système $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont les colonnes de A, cette solution est donnée par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \ldots, A_n)}{\det(A)}$$

— Le système admet une unique solution si et seulement si A est inversible, c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$.

— On suppose A inversible. Si $AX = B$, alors $X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}{}^t\operatorname{Com}(A)B$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
x_k &= X_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det(A)}[{}^t\operatorname{Com}(A)B]_{k,1} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}[{}^t\operatorname{Com}(A)]_{k,i}B_{i,1} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Com}(A)_{ik}b_i \\
&= \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}b_i\Delta_{ik}(A) \\
&= \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)} \text{ (développement de la } k\text{-ième colonne)}
\end{aligned}$$

30.64 Exemple

Exemple 30.64

Calculer le déterminant de la matrice suivante, avec $a \neq b$ dans $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Convention : $\Delta_1 = a + b$.
On a $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$.
Soit $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= (a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - b\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1} \\
&= (a+b)\Delta_{n-1} - ba\Delta_{n-2}
\end{aligned}$$

$(\Delta_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - (a+b)r + ab = 0$$

Cette équation admet a et b comme racines distinctes.
D'après le cours, on choisit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \geq 0, \Delta_n = \alpha a^n + \beta b^n$$

Les conditions initiales imposent $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha a + \beta b = a + b$.
Donc $\alpha = \frac{a}{a-b}$ et $\beta = \frac{b}{b-a}$.