Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f =_a O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f =_a o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$$\begin{aligned}
f =_a O(g) &\text{ ssi il existe } h \text{ bornée au voisinage de } a \text{ tel que } f = g\cdot h \\
&\text{ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = g(u_n)\times w_n \text{ où } (w_n) \text{ est une suite bornée.} \\
&\boxed{\Rightarrow}\quad w_n = h(u_n) \text{ ssi bornée } \quad \boxed{\Leftarrow}\quad \text{Par l'absurde avec (25.5).} \\
&\text{ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = O(g(u_n)).
\end{aligned}$$

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ Alors :

$$\forall x \in [a,b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\, dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
\text{(IPP)} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme

Théorème 25.22

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que $g(b) = f(b)$.
On choisit A de telle sorte que $g(a) = f(b)$.
On pose :

$$A = \frac{-(n+1!)}{(b-a)^{n+1}} \left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f(b)\right]$$

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]a,b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - A\frac{(b-x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$$

Or $c \neq b$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.
On conclut avec $f(b) = g(b)$.