15.2 Exercice

$$0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \times \frac{1}{x}$$
$$\text{donc } 0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

1. Quand $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, on remarque que $\lim\limits_{x} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq \lim\limits_{x} \frac{1}{x}$.
   Ainsi, par théorème d'opérations on a :
   $$\lim_{x\to 0} x \times \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \lim_{x\to 0} x \times \frac{1}{x}$$
   Donc d'après le théorème d'encadrement :
   $$\boxed{\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1}$$

2. Quand $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
   Donc :
   $$\forall x > 1, x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$
   Donc :
   $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0}$$

15.6 Exercice

1. Soit $x > 0$, d'après le TLM :
   $$\begin{aligned} &\lim_{x^-} f \geq f(x) \geq \lim_{x^+} f \\ \text{et } &\lim_{t\to x^-} tf(t) \leq xf(x) \leq \lim_{t\to x^+} tf(t) \\ \text{donc } &x \lim_{x^-} f \leq xf(x) \leq x \lim_{x^+} f \text{ (théorème d'opérations + TLM)} \\ \text{et } &\lim_{x^-} f \geq f(x) \geq \lim_{x^+} f \ (x>0) \\ \text{donc } &\boxed{\lim_{x^-} f = f(x) = \lim_{x^+} f} \end{aligned}$$

2. Soit $x \leq y$.
   On a :
   $$f(x) - f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} - \sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}^{\geq 0 \text{ car } u \mapsto \sqrt{\cos^2 t + u^2 \sin^2 t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}}{\underbrace{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}\sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}_{>0}} \, dt$$
   Donc f est décroissante.
   Par ailleurs :
   $$\begin{aligned} xf(x) - yf(y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} - y\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}{\Delta} \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\cos^2(t)(x^2 - y^2)}^{\leq 0}}{\underbrace{\Delta[x\sqrt{\dots} + y\sqrt{\dots}]}_{>0}} \, dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

15.8 Exercice

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{n+1}(x)+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\varphi_n(x)+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)(k+x)}+\frac{1}{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+x)}-\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1+x)}+\frac{1}{(n+1)n}\\
&= \frac{n(n+1)-(n+2)(n+1+x)}{\underbrace{n(n+1)(n+2)(n+1+x)}_{\geq 0}}
\end{aligned}$$

En outre :

$$n \leq n+1 \text{ et } n+1 \leq n+1+x$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
n(n+1) \leq (n+2)(n+1+x) &\Leftrightarrow n(n+1)-(n+2)(n+1+x)\\
&\Leftrightarrow \left(\varphi_{n+1}(x)+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\varphi_n(x)+\frac{1}{n}\right) \leq 0\\
&\Leftrightarrow \text{La suite est décroissante.}
\end{aligned}$$

(b)

15.10 Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x)^2 = 1 &\Leftrightarrow f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\\
&\Leftrightarrow f : x \mapsto 1 \text{ ou } f : x \mapsto -1 \text{ (car } f \in \mathcal{C})
\end{aligned}$$