Chapitre 13

Polynômes

13.6 Produit de deux polynômes

Définition 13.6

Soit $P = (a_n)$ et $Q = (b_n)$ deux polynômes de $\mathbb{A}[X]$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme. On définit alors $PQ = (c_n)$. La suite $c = (c_n)$ est appelée **produit de convolution** (ou **produit de Cauchy**) des suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ et est parfois noté $c = a \star b$.

Montrons que (c_n) est un polynôme.
Soit N te M dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M, b_n = 0 \end{cases}$$

Soit $n \geq M + N$, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

— Si $k \geq N$, $a_k = 0$.
— Si $k \leq N$, $n - k \geq M$, donc $b_{n-k} = 0$.

Donc $c_n = 0$.

13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$

Théorème 13.7

La somme et le produit définis ci-dessus munissent $\mathbb{A}[X]$ d'une structure d'anneau commutatif.

— $(\mathbb{A}[X], +)$ est un sous-groupe de $(\overbrace{\mathbb{A}^{\mathbb{N}}}^{\text{suites d'éléments de } \mathbb{A}}, +)$ abélien donc est bien un sous-groupe abélien.
— Montrons que $\times$ est associative. Soit $(P, R, Q) \in \mathbb{A}[X]$.
On note $P = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $R = (r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $Q = (q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (P \times (RQ))_n &= \sum_{k=0}^{n} p_k (RQ)_{n-k} \\ &= \sum_{i+j=n} p_i (RQ)_j \\ &= \sum_{i+j=n} \left(p_i \sum_{k+l=j} r_k q_l \right) \\ &= \sum_{i+k+l=n} p_i r_k q_l \\ &= ((PR) \times Q)_n \end{aligned}$$

— Notons $E = (1, 0, \ldots) = (\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (E \times P)_n &= \sum_{i+j=n} E_i \times P_j \\ &= \sum_{i+j=n} \delta_{0i} \times P_j \\ &= P_n \ (i = 0, \ j = n) \\ &= (P \times E)_n \end{aligned}$$

Donc E est l'élément neutre de $\mathbb{A}[X]$.

—

$$\begin{aligned}
[P \times (R+Q)]_n &= \sum_{i+j=n} p_i (R+q)_j \\
&= \sum_{i+j=n} p_i (r_j + a_j) \\
&= \sum_{i+j=n} p_i r_j + \sum_{i+j=n} p_i q_j \\
&= (PR)_n + (PQ)_n \\
&= [PR + PQ]_n
\end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive sur $+$.

— Comme $\mathbb{A}$ est commutatif :

$$\sum_{i+j=n} p_i q_j = \sum_{i+j=n} q_j p_i$$

Donc $\times$ est commutatif.

13.11 Monômes

Propostion 13.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X^n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ zéros}}, 1, 0, \ldots)$, le 1 est donc à l'indice n (soit $X^n = (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$)

Pour $n = 0$, on a bien $X^0 = (1, 0, \ldots)$
Pour $n = 1$, RAF
On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left[X^{n+1}\right]_k &= [X^n \times X] \\
&= \sum_{i+j=k} [X^n]_i X_j \\
&= \sum_{i+j=k} \delta_{n,i} \times \delta_{j,1} \\
&= \delta_{k,n+1}
\end{aligned}$$

13.12 Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle

Corollaire 13.12

Soit $P = (a_n)$ un polynôme de $\mathbb{A}[X]$. Alors $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, cette somme ayant un sens puisqu'elle est en fait finie, les a_k étant nuls à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}
P &= (a_n)_{n \geq 0} \\
&= (a_0, a_1, a_2, \ldots \\
&= a_0(1, 0, 0, \ldots) + a_1(0, 1, 0, \ldots) + a_2(0, 0, 1, \ldots) + \ldots \\
&= a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \ldots
\end{aligned}$$

13.26 Dérivée de produits

Propostion 13.26

— Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$. Alors
$$(PQ)' = P'Q + Q'P.$$

— Soit $P_1, \ldots, P_n$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$, alors
$$(P_1 \ldots P_n)' = \sum_{i=1}^{n} P_1 \ldots P_{i-1} P_i' P_{i+1} \ldots P_n.$$

— **Formule de Leibniz** : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Soit $P = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k, P' = \sum\limits_{k \geq 1} k a_k X^{k-1}$ et $Q = \sum\limits_{k \geq 0} b_k X^k, Q' = \sum\limits_{k \geq 1} k b_k X^{k-1}$.
On a :
$$PQ = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Donc :
$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \sum_{n\{geq1} \left[n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right] X^{n-1} \\
\text{et } P'Q &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n \\
\text{et } PQ' &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \right] X^n \\
\text{donc } P'Q + Q'P &= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[\sum_{k=0}^{n} (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left[(n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^{n} (n+1) a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_0 b_{n+1} \right] X^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \left[(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} \right] X^n
\end{aligned}$$

13.28 Dérivée d'une composition

Propostion 13.28

Soit P et Q dans $\mathbb{A}[X]$, alors
$$(Q \circ P)' = P' \times (Q' \circ P)$$

Soit $Q = \sum\limits_{k \geq 0} a_k X^k$.
Ainsi $Q \circ P = \sum\limits_{k \geq 0} a_k p^k$.

Donc :

$$\begin{aligned}(Q \circ P)' &= \sum_{k \geq 0} a_k (p_k)' \ (13.24)\\ &= \sum_{k \geq 1} k a_k p' p^{k-1} \ (13.27)\\ &= P' \times \sum_{k \geq 1} k a_k p^{k-1}\\ &= P' \times Q' \circ P\end{aligned}$$

13.34 Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée

Propostion 13.34

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{A}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{A}$.

1. On a $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
2. Si $\mathbb{A}$ est intègre et si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3. Si $\mathbb{A}$ est intègre alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. On a $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$.
5. Si $\mathbb{A}$ est intègre alors $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) + \deg(P)$, sauf si $P = 0$ ou si $Q = 0$ et $P \in \mathbb{A}_0[X]$.

1. On note $p = \deg(P), q = \deg(Q)$.

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

   Supposons $p \geq q$.
   On écrit alors :

$$\begin{aligned}Q &= \sum_{k=0}^{p} b_k X^k\\ \text{et ainsi } P+Q &= \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k\\ \text{et donc } \deg(P+Q) &\leq p\end{aligned}$$

   Si de plus $p > q$, alors :

$$\begin{aligned}P + Q &= a_p X^p + \sum_{k=0}^{p-1} (a_k + b_k) X^k \ (b_p = 0)\\ \text{donc } (a_p \neq 0),\ \deg(P+Q) &= p\end{aligned}$$

2.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$$

   Or $\lambda a_p \neq 0$ car $a_p \neq 0$ et $\mathbb{A}$ intègre.

3.

$$P.Q = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) X^n$$

   Si $n > p + q$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k bn - k = 0 \text{ (preuve (13.6))}$$

Or :

$$\begin{aligned}(PQ)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\ &= \underbrace{a_p}_{\neq 0}\underbrace{b_q}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \text{ car } \mathbb{A} \text{ intègre}\end{aligned}$$

4. Si $P \in \mathbb{A}_0[X]$, l'inégalité est vérifiée.
   Sinon :

$$p' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)a_{k+1}X^k$$

$$\text{et } \deg(P') \leq d - 1 = \deg(P) - 1$$

5. On a :

$$Q \circ P = \sum_{k=0}^{q} b_k p_k$$

   Or, pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, $\deg(b_k p^k) < \deg(\underbrace{b_q}_{\neq 0} p^q)$ ((13.34.2) et (13.34.3) avec $\mathbb{A}$ intègre)

   Donc :

$$\begin{aligned}deg(Q \circ P) &= \deg(b_q p^q) \\ &= q \times \deg(P) \\ &= \deg(Q) \times \deg(P)\end{aligned}$$

13.36 Théorème de permanence de l'intégrité

Corollaire 13.36

Si $\mathbb{A}$ est intègre, alors $\mathbb{A}[X]$ est intègre.

Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

$$\begin{aligned}\deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \ (\mathbb{A} \text{ est intègre}) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

13.39 Propriété de stabilité

Corollaire 13.39

- $\mathbb{A}_n[X]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{A}[X]$.
- La dérivation $D : \mathbb{A}[X] \to \mathbb{A}[X]$ induit un homomorphisme de groupe $D_n : \mathbb{A}_n[X] \to \mathbb{A}_{n-1}[X]$.
- Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, D_n est une surjection. Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est primitivable formellement dans $\mathbb{K}_n[X]$.

- RAF
- RAF
- $\text{carac}(\mathbb{K}) = 0$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
  Pour $k \in [\![1, n]\!], k = k \times 1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ car $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
  Donc k^{-1} est bien défini dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$Q = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} q_{k-1} X^k$$

  Alors :

$$Q' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+1)^{-1} a_k X^k = P.$$

13.42 Corollaire du degré d'une dérivée dans $\mathbb{K}[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Corollaire 13.42

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P' = Q'$ si et seulement si P et Q diffèrent d'une constante.

Soit $P \in \ker(D)$, où $D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$.
Donc $P' = 0$.
Si $\deg(P) > 0$, alors $\deg(P') \geq 0$ (13.41).
Donc nécessairement, $\mathbb{K}_0[X] \subset \ker(D)$.
Donc $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$.