# Chapitre 30

# Déterminant

## 30.4 Exemple

**Exemple 30.4**

On considrèe l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}; ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix}\right) \\
&= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\
&= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\
&= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

## 30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

**Propostion 30.11**

Soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ une base de $E_i$ et pour tout $(j_1, \dots, j_n) \in [\![1, d_1]\!] \times \cdots \times [\![1, d_n]\!]$, $f_{j_1,\dots,j_n} \in F$.
Alors il existe une unique application $n$-linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in [\![1, d_1]\!] \times \cdots \times [\![1, d_n]\!], \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1,\dots,j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ est une base de $E_i$ alors $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \cdots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.

## 30.18 Caractérisation par les transpositions

**Lemme 30.18**

Pour qu'une forme $f$ soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si $\tau$ est une transposition alors $\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)(x_1, \dots, x_n)$.
Soit $\sigma \in S_n$. On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ avec $\tau_i$ des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varphi(x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k)\varphi(x_1, \dots, x_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

## 30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

**Lemme 30.19**

Soit $\varphi$ une forme alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, alors $\varphi$ est alternée.

Soit $\varphi$ alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

On suppose que carac$(\mathbb{K}) \neq 2$.
On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

## 30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

**Propostion 30.21**

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée et $\varphi$ une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, \dots x_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

## 30.22 Forme $n$-linéaire d'un espace de dimension $n$

**Théorème 30.22**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ non nulle et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

1. Il existe une unique forme $n$-linéaire $\varphi$ sur $E$ telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.
2. Cette forme $n$-linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme $n$-linéaire alternée sur $E$ est de la forme $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\boxed{1, 2}$
On utilise le théorème de rigidité des applications $n$-linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ avec $(i_1, \dots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n$.

— $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ s'il existe $i_j - i_k$ avec $j \neq k$.
— $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1,\dots,i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma\in\mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1,\dots,e_n)}$.

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

$\boxed{3}$
Soit $\psi$ une forme $n$-linéaire alternée. On pose $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$.

— si $\lambda = 0$, par alternance (et anitsymétrie) on a $\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_n$.
Par rigidité, $\psi = 0 = 0 \times \varphi$.
— si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}\psi(_1, \dots, e_n) = 1$.
Par unicité (1), $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$.
Donc $\psi = \lambda\varphi$.

## 30.25 Exemple

**Exemple 30.25**

On considère $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$. Soit $((a, b), (c, d)) \in E^2$. Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$.
$((a, b), (c, d)) \in (E)^2$.

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

## 30.26 Description du déterminant par les coordonnées

**Théorème 30.26**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de $E$, dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n} \right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (multilinéarité)} \\
&= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = [\![1,n]\!]} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \text{ (alternance)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \text{ (reformulation)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}
\end{aligned}$$

## 30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

**Propostion 30.28**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

## 30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

**Propostion 30.30**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ non nulle, muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $\mathcal{F}$ de cardinal $n$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

D'après (30.29), si $\mathcal{F}$ est une base alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base, alors elle est liée ($|\mathcal{F}| = n$)
Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$ (30.21).

## 30.36 Déterminant d'un produit

**Théorème 30.36**

Soit $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

Soit $A, B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_1, \dots, A_n$ les colonnes de $A$ et $B_1, \dots, B_n$ les colonnes de $B$.
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

$\varphi$ est une forme $n$-linéaire alternée.
On choisit donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\
&= \lambda \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left( A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi = \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\
&= \det(AB)
\end{aligned}$$

## 30.40 Expression des déterminants classiques

**Propostion 30.40**

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2. $\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$

## 30.41 Invariance du déterminant par transposée

Théorème 30.41

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

## 30.42 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 30.42

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $E$ est une espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. Le scalaire $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépnd pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de** $f$ et est noté $\det(f)$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $E$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

## 30.44 Déterminant et conjugaison

Propostion 30.44

Soit $\psi : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit $e$ une base de $E$ et $f$ une base de $F$.

$$\begin{aligned}
\det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\mathrm{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1}))\ (30.42) \\
&= \det(\mathrm{Mat}_{e,f}(\psi) \times \mathrm{Mat}_e(u) \times \mathrm{Mat}_{f,e}(\psi^{-1}))\ (28.42) \\
&= \det(\mathrm{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\mathrm{Mat}_e(u)) \times \det(\mathrm{Mat}_{f,e}(\psi^{-1}))\ (30.36) \\
&= \det(\underbrace{\mathrm{Mat}_{\psi} \times \mathrm{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\mathrm{Mat}_e(u))\ (30.36) \\
&= \det(\mathrm{Mat}_e(u))
\end{aligned}$$

## 30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

Propostion 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit $T$ une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).
Ainsi :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$

D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) \leq i \equiv \mathrm{id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{\sigma(i),i} \\ &= \sigma(\mathrm{id}) \prod_{i=1}^{n} t_{ii}\end{aligned}$$

## 30.47 Détrminant des matrices de codage des opérations

**Lemme 30.47**

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$ et $R_{ij}(\lambda)$ sont triangulaires.
D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}\det(Q_i(\lambda)) &= \lambda \\ \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1 \\ \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)}, \dots, C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon(\tau_{ij}) \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_n) \\ &= -1\end{aligned}$$

## 30.50 Exemple

**Exemple 30.50**

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1
\end{aligned}$$