Chapitre 11

Matrices

11.11 Produit matriciel

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 6 & -10 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

11.12 Produit matriciel, lignes par colonnes

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} (AC_i)_{k,1} &= \sum_{l=1}^{p} a_{kl}(C_i)_{l,1} \\ &= \sum_{l=1}^{p} a_{kl}\delta_{il} \\ &= a_{ki} \end{aligned}$$

— $L_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ji})_{1\leq i\leq n}$

$$\begin{aligned} (L_jA)_{1k} &= \sum_{l=1}^{n} (L_j)_{1,e} \times a_{ek} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{je}a_{lk} \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

— On note $A = \begin{pmatrix} C_1 & |\dots| & C_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_{kC_k}$$

11.16 Produit de deux matrices élémentaires

Soit $1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} (E_{ij} \times E_{rs})_{k,l} &= \sum_{p=1}^{t} (E_{ij})_{kp} \times (E_{rs})_{pl} \\ &= \sum_{p=1}^{t} \delta_{ik}\delta_{pj}\delta_{rp}\delta_{sl} \\ &= \delta_{rj}\delta_{ik}\delta_{sl} \\ &= \delta_{rj}(E_{is})_{kl} \end{aligned}$$

Donc $E_{ij} \times E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$

11.17 Propriétés du produit matriciel, matrice identité

— Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{i,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} \\
[(AB)C]_{il} &= \sum_{t=1}^{q} (AB)_{it}C_{tl} \\
&= \sum_{t=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kt}C_{tl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}\sum_{t=1}^{q} B_{kt}C_{tl} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}(BC)_{kl} \\
&= (A(BC))_{il}
\end{aligned}$$

— RAF
— RAF

11.24 Exemple

On écrit $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme I_3 et N commutent,

$$\begin{aligned}
A^k &= (I_3 + N)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i && \text{(Binôme de Newton)} \\
&= I_3 + \binom{k}{1} N && (N^2 = 0) \\
&= I_3 + kN \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

11.25 Produit par bloc

On le fait pour un bloc. Soit $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq s$.

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}\right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik}\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik}\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik}\begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}A'_{kj} + \sum_{k=1}^{q} C_{ik}B_{kj} \\
&= (AA' + CB')_{ij}
\end{aligned}$$

11.27 Propriétés de la transposition

— RAF
— RAF
— Soit $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
[{}^t(AB)]_{ij} &= (AB)_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{p} A_{jk}B_{ki} \\
&= \sum_{k=i}^{p} [{}^tB]_{ik}[{}^tA]_{kj} \\
&= [{}^tB{}^tA]_{ij}
\end{aligned}$$

11.31 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
— Trace d'une somme de matrices :

$$\begin{aligned}
tr(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (A + B)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + B_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} \\
&= tr(A) + tr(B)
\end{aligned}$$

— Trace d'un produit par un scalaire :

$$\begin{aligned}
tr(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \\
&= \lambda tr(A)
\end{aligned}$$

— Trace d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned}
tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki}A_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \\
&= tr(BA)
\end{aligned}$$

11.33 Exemple

On suppose A et B solutions.
Donc $AB - BA = I_n$
Donc $tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$
Or $tr(AB - BA) = 0$
Absurde.

11.37 Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires

On montre le résultat pour les matrices triangulaires supérieures (ensemble noté $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$).
Soit $(A,B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$. On a bien $A+B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et aussi $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$
Soit $i > j$, on a :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

— Si $i > j$, $A_{ik} = 0$.
— Si $i = j$, $B_{kj} = 0$.
Donc $(AB)_{ij} = 0$.
Donc $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

Si $(AB) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, alors ${}^t(AB) = \underbrace{{}^tB}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times \underbrace{{}^tA}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$
Donc $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Le résultat est vrai pour les matrices diagonales, à la fois triangulaires supérieures et inférieures.

11.41 Nilpotence des matrices triangulaires

Soit $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$.
On va montrer par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ que :

$$\text{"}\ T^k = \begin{pmatrix} O & - & O & - & \triangle \\ & & & & | \\ & & & & O \\ & & & & | \\ & & & & O \end{pmatrix}\ \text{"}$$

C'est-à-dire que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i+k-1 \geq j \Rightarrow T_{ij}^k = 0$.
On suppose le résultat vrai pour $k \in [\![1,n-1]\!]$.
Soit $i+k \geq j$.

$$\begin{aligned} (T^{k+1})_{ij} &= (T^kT)_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^{n} T_{ip}^k T_{pj} \end{aligned}$$

— Si $p \leq i+k-1$, $T_{ip}^k = 0$
— Si $p \geq i+k$, $T_{pj} = 0$
Donc $(T^{k+1})_{ij} = 0$.
Par réccurence, $P(k)$ est vrai pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. En particulier, pour $k=n$, on obtient $T^n = 0$.

11.44 Opérations

— ${}^tA \times^t (A^{-1}) =^t (A^{-1}A) =^t I_n = I_n$
— ${}^t(A^{-1}) \times^t A =^t (AA^{-1}) =^t I_n = I_n$
Donc$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$

11.48 Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$

On note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M.N &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= det(M) I_2 \end{aligned}$$

— Si $det(M) \neq 0$, alors $M \times \left(\frac{1}{det(M)} N\right) = I_2$. Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N$.
— Si $det(M) = 0$, alors $M.N = 0$ donc M n'est pas inversible.

11.49 Matrices diagonales inversibles

Soit $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} D \times Diag(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}) &= Diag(\lambda_1 \times \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n \times \lambda_n^{-1}) \\ &= Diag(1, \ldots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc D est inversible et

$$D^{-1} = Diag(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$$

$\boxed{\Rightarrow}$
Par contraposée, soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = 0$.

$$D \times Diag(0, \ldots, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, \ldots, 0) = 0$$

Donc D est un diviseur de 0, donc D n'est pas inversible.

11.50 Exemple

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

11.51 Matrices triangulaires inversibles

On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$ RAF.

Pour $n = 2$, RAS (11.48).
On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soi $T \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$. Donc T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mathcal{U} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}),\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } a \in \mathbb{K}$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que la diagonale de T ne contient aucun 0.
Donc $\mathcal{U}$ est inversible d'après l'hypothèse de réccurence.
On choisit $V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ tel que (Hypothèse de récurrence).

$$\mathcal{U}V = I_n$$

On a :

$$\begin{aligned} T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \underbrace{a^{-1}}_{a\neq 0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_n & a^{-1}X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc (11.50) :

$$T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -a^{-1}X \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc T est inversible d'inverse dans $\mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que la diagonale de T contient un 0.

— Si $T_{11} = 0$, alors $T = \begin{pmatrix} 0 & L \\ & W \end{pmatrix}$
  Et $T \times \underbrace{E_{11}}_{\neq 0} = 0$
  Donc $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$

— On suppose que le premier 0 apparait à T_{kk} avec $k \geq 2$.
  Donc
  $$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F \in \mathcal{T}_{k-1}^+(\mathbb{K})$$
  La diagonale de F ne contient aucun 0 donc $F \in GL_{k-1}(\mathbb{K})$ et :
  $$\begin{aligned} A \times \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  Alors :
  $$T \times \underbrace{\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$
  Donc $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$.

11.54 Exemple

Soit $X \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} X \in \ker A &\Leftrightarrow AX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ker A = \{0\}$.

$$\begin{aligned} X \in \ker B &\Leftrightarrow BX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} \\ &\Leftrightarrow X \in \mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\ker B = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11.61 Exemple

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x - a = 1 - 2y \\ 3x = 3 - 7y \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -3z = y \\ x = 1 - \frac{7}{3}y \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases} \\ \Leftrightarrow X = &\begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{3}y \\ y \\ -\frac{1}{3}y \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11.65 Caractérisation des matrices inversibles par les sytèmes linaires

$\boxed{\Rightarrow}$
RAF : (11.63)

$\boxed{\Leftarrow}$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, on choisit $X_i \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$AX_i = Y_i$$

On pose $B = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \end{pmatrix}$ et on remarque que :

$$\begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix} = I_n$$

Par construction :

$$AB = I_n$$

11.74 Système équivalents et opérations élémentaires

Soit Σ un système et Σ' un système obtenu après avoir effectué une opération élémentaire.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice du système Σ et $B \in \mathbb{K}^n$ son second membre.
Soit $X \in \mathbb{K}^p$. Effectuer une opération élémentaire revient à choisir une matrice P de la forme P_{ij}, $Q_i(\lambda)$, $R_{ij}(\lambda)$.
Ainsi :

$$X \in \mathcal{S}(\Sigma) \Leftrightarrow AX = B$$
$$\underset{P \in GL_n(\mathbb{K})}{\Leftrightarrow} PAX = PB$$
$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}(\Sigma')$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}(\Sigma) = \mathcal{S}(\Sigma')}$.