Chapitre 31

Dénombrement

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p+2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B.
Pour constuire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B.
On a $p+1$ choix pour le premier B.
Pour chaque choix de position $k \in [\![1, p+1]\!]$, il reste $p+2-k$ choix pour le second B.
Le nombbre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1}(p+2-k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2}\end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $x \neq y$?

Etape 1 : On choisit $x \in [\![1, n]\!]$, soit n choix.
Etape 2 : On choisit $y \in [\![1, n]\!] \setminus \{x\}$, soit $n-1$ choix.
Au total $n(n-1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Etape 1 : On choisit la première lettre : p possibilités.
Etape 2 : On choisit la deuxième lettre : $p-1$ possibilités.
Etape 3 : On choisit la troisième lettre : $p-1$ possibilités.
...
Au total : $p(p-1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.
Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.
Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.
Aut total : 4×26^3 possibilités.

31.32 Exemple

Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit $\frac{52!}{(52-5)!}$.

31.33 Exemple

Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de n-arrangements d'un ensemble de cardinal n, soit $n!$ choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un $(n-1)$-arrangement d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit $(n-1)!$ choix.

31.38 Nombre de combinaisons

Propostion 31.38

Soit $p \in \mathbb{N}$ et notons $n = |E|$. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.

Pour construire une p-combinaison :
- On choisit un p-arrangement de E : $\frac{n!}{(n-p)!}$ possiblités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.
  Or toute permutation du p-arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc $|S_p| = p!$ arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).
  On a donc $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ p-combinaisons.

31.40 Exemple

Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.

31.41 k-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$

Théorème 31.41

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1, \ldots, i_k)$ pour lesquelles $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Pour tout ensemble à k éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout k-uplet $(i_1, \ldots, i_k)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ fournit un sous-ensemble à k eléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc en tout $\binom{n}{k}$ familles recherchées.

31.43 Exemple

Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.
Etape 1 : $\binom{7}{1}$ choix pour la place de B.
Etape 2 : $\binom{6}{3}$ choix pour la place des O.
Etape 3 : $\binom{3}{2}$ choix pour la place des R.
Etape 4 : $\binom{1}{1}$ choix pour la place de S.
Au total :

$$\begin{aligned}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!} \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3\end{aligned}$$

31.45 Exemple

Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :
- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ?
Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

- Pour construire une telle main :
  Etape 1 : $\binom{21}{2}$ choix pour les atouts.
  Etape 2 : $\binom{14}{4}$ choix pour les trèfles.
  Au total $\binom{21}{2}\binom{14}{4}$ mains possibles.
- $\binom{21}{1}\binom{4}{3}\binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1}\binom{4}{4}\binom{78-21-4}{1}$.

31.48 Exemple

Exemple 31.48

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de A ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\binom{1}{1}$ de A ?

1. Disjonctions de cas : Si on extrait par rapport à la deuxième ligne : $\binom{5}{3}$.
   Si on extrait par rapport à la troisième ligne : $\binom{4}{3}$.
   Au total : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$ choix possibles.
2. Avec le même principe :

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

31.49 Nombre de parties d'un ensemble fini

Théorème 31.49

On a :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}(E)| &= \sum_{k=0}^{|E|} |\mathcal{P}_k(E)| \\ &= \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} \\ &= 2^{|E|} \text{ (binôme)}\end{aligned}$$

Méthode 2 :
On liste les éléments de $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.
Toute partie de E peut-être codée de mainère unique par un mot de n lettres à partir de l'alphabet $\{0, 1\}$ de manière suivante :

$$\underbrace{0}_{e_1 \notin A} \underbrace{1}_{e_2 \in A} \cdots \quad \underbrace{\_}_{1 \text{ si } e_i \in A, 0 \text{ sinon}} \quad \cdots$$

Donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

31.51 Exemple : formule du capitaine

Exemple 31.51

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, on a :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

Dans une classe de n élèves, on décide de composer des équipes de p élèbes dont un capitaine désigné.
Méthode 1 :

$$\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{choix du capitaine}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix des autres élèves}}$$

Méthode 2 :

$$\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de l'équipe}} \times \underbrace{\binom{p}{1}}_{\text{choix du capitaine}}$$

On a par double comptage :

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}\binom{p}{1}$$

Soit :

$$n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$$

31.53 Exemple : formule de Pascal

Exemple 31.53

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Pour construire une partie à p éléments, on peut commencer par fixer un élément quelconque $e \in E$. Puis :

- constuire une partie contenant e : $\binom{n}{p-1}$ possibilités.
- construrie une partie qui ne contient pas e : $\binom{n}{p}$ possibilités.

Par double comptage :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$