

# Chapitre 17

## Fractions rationnelles

|  |          |
|--|----------|
| <b>17 Fractions rationnelles</b>                                   | <b>1</b> |
| 17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire . . . . . | 2        |
| 17.10Degré d'une fraction . . . . .                                | 2        |
| 17.13Propriété du degré . . . . .                                  | 2        |

## 17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

### Définition 17.2

Soit  $\frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  deux fractions rationnelles et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \quad \text{et} \quad \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.

Soit  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

Montrons que :

$$\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1S + Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$(PS + QR)Q_1S - (P_1S + Q_1R)QS = S^2 \underbrace{(PQ_1 - P_1Q)}_{=0} + RS \underbrace{(QQ_1 - Q_1Q)}_{=0} = 0$$

On raisonne de la même manière pour  $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$  et ainsi, l'opération est bien définie.

## 17.10 Degré d'une fraction

### Définition 17.10

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  une fraction. On pose  $\deg(F) = -\infty$  si  $F = 0$  et  $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$  sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

Si  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ , alors :

$$P_1Q = PQ_1$$

$$\text{donc } \deg(P_1Q) = \deg(PQ_1)$$

$$\text{donc } \deg(P_1) + \deg(Q) = \deg(P) + \deg(Q_1) \quad (\mathbb{K} \text{ int\`egre})$$

$$\text{donc } \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(P) - \deg(Q)$$

## 17.13 Propriété du degré

### Théorème 17.13

Soit  $F$  et  $G$  deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \quad \text{et} \quad \deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$ .

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg\left(\frac{PS + QR}{QS}\right) \\ &= \deg(PS + QR) - \deg(QS) \\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(QS) \\ &= \max(\deg(PS) - \deg(QS), \deg(QR) - \deg(QS)) \\ &= \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right), \deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \\ &= \max(\deg(F), \deg(G)) \end{aligned}$$

— RAS