

Chapitre 20

Espace Vectoriels

20 Espace Vectoriels	1
20.2 Propriétés du 0, régularité	2
20.10Espace vectoriel de référence	2
20.11Transfert de structure	2
20.16Caractérisation des sous-espaces vectoriels	3
20.22Proposition 20.22	3
20.27Intersection de sous-espaces vectoriels	4
20.34Description de $Vect(X)$	4
20.36Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés	4
20.41Somme de sous-espaces vectoriels engendrés	5
20.43Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels	5

20.2 Propriétés du 0, régularité

Proposition 20.2

Soit E un \mathbb{K} -ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. $(-1).x = -x$
4. si $x \neq 0_E$,

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Proposition 20.10

1. \mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

1. RAF.
2. Soit E un \mathbb{K} -ev et F un ensemble quelconque.
 E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
 Le produit externe est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$

Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , G un ensemble quelconque et $\varphi : E \rightarrow G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et une loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{ et } \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
 (x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi(z)) \\
 &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
 &= x + (y+z) \\
 x + \varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + 0) = x \quad (\varphi \text{ neutre}) \\
 x + \varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
 x + y &= y + x
 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
 &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
 &= (\lambda\mu).x \\
 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\
 &= x \\
 (\mu + \lambda).x &= \varphi((\mu + \lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \mu.x + \lambda.x
 \end{aligned}$$

De même pour la dernière.

20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 20.16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$;
2. $0 \in F$;
3. F est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

\Rightarrow

1. Oui.
2. F est un sous-groupe de E donc $0_E \in F$.
3. Pour tout $(x, y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ et $y \in F$. Donc $\lambda x + y \in F$.

\Leftarrow

D'après (3) avec :

- $y = 0$: \times est LCE.
- $\lambda = 1$: $+$ est LCI.

$0 \in F$ et $\lambda = -1$, F est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

20.22 Propostion 20.22

Propostion 20.22

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, D_1 et D_2 deux droites vectorielles. Alors soit $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, soit $D_1 = D_2$.

Par définition, $0_E \in D_1 \cap D_2$.

Supposons $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$ et fixons $x \in D_1 \cap D_2$ avec $x \neq 0_E$.

Soit $v \in D_1$. Par définition, on écrit $D_1 = \mathbb{K}x_1$ et $D_2 = \mathbb{K}x_2$.

On a donc $v = \alpha x_1$, $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Ainsi :

$$v = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_1 = \alpha \lambda_1^{-1} x = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc $D_1 \subset D_2$ et par symétrie, $D_1 = D_2$.

20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.27

Soit E un espace vectoriel et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

- $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$.
- $\forall i \in I, 0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$.
- Soit $(x, y) \in \left[\bigcap_{i \in I} E_i \right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

$$\text{Donc } \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

20.34 Description de $\text{Vect}(X)$

Proposition 20.34

Soit E un \mathbb{K} -ev et X un sous-ensemble de E . Alors $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

On note F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X .

F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X .

Par définition, $\text{Vect}(X) \subset F$.

Or $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel qui contient X . Il doit donc contenir les combinaisons linéaires de X soit F .

Donc $F = \text{Vect}(X)$.

20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.36

Soit A et B deux ensembles. On a

1. $A \subset \text{Vect}(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. $A = \text{Vect}(A)$ si et seulement si A est un espace vectoriel.
4. $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
5. $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$ si et seulement si $x \in \text{Vect}(A)$.

1. RAF

2. RAF (20.24)

3. Si $A = \underbrace{\text{Vect}(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$, alors A est un sous-espace vectoriel.

Si A est un espace vectoriel, par minimalité, $A = \text{Vect}(A)$.

4. RAF (20.36.3)

5. On a toujours $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$ (20.36.2) si $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$.

Or $x \in Vect(A \cup \{x\})$.

Donc $x \in Vect(A)$.

Réciproquement, si $x \in Vect(A)$, d'après (20.34) :

$$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$

Si $u \in Vect(A \cup \{x\})$, alors :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} (\mu_1 a'_1 + \dots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.41

Soit X et Y deux sous-ensembles de E . Alors

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :

$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.43

Soit E_1, \dots, E_n et F des sous-espaces vectoriels de E . Sont équivalentes :

1. $F = E_1 + \dots + E_n$;
2. $F = (\dots((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1}) + E_n$;
3. $F = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}$.

1. Associativité fournie par la définition.
2. (20.39) + (20.43.2)