

# Chapitre 26

## Intégration sur un segment

<b>26 Intégration sur un segment</b>	<b>1</b>
26.12Image d'une fonction en escalier . . . . .	2
26.14Subdivision commune . . . . .	2
26.15Structure de l'ensemble des fonctions en escalier . . . . .	2
26.17Théorème . . . . .	2
26.23Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout . . . . .	3
26.24Positivité ou croissance de l'intégrale . . . . .	3
26.26Inéglité triangulaire intégrale . . . . .	4
26.36Théorème . . . . .	4
26.42Intégrabilité des fonctions monotones . . . . .	5
26.43Intégrabilité des fonctions continues . . . . .	5
26.46Relation de Chasles . . . . .	6
26.49Croissance et positivité de l'intégrale . . . . .	6
26.51Inégalité triangulaire intégrale . . . . .	6
26.56Bornitude des fonctions continues par morceaux . . . . .	7
26.58Intégrabilité des fonctions continues par morceaux . . . . .	7
26.61Norme . . . . .	7
26.63Densité . . . . .	8
26.64Théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	8
26.66Limite . . . . .	9

## 26.12 Image d'une fonction en escalier

### Proposition 26.12

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Si  $v = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  est une subdivision associée à  $f$ , alors :

$$|Im(f)| \leq \underbrace{n}_{\text{valeurs sur chaque intervalle ouvert}} + \underbrace{n+1}_{\text{valeurs de } f(v_i)} = 2n+1$$

## 26.14 Subdivision commune

### Lemme 26.14

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

Si  $\sigma$  est une subdivision associée à  $f$  et  $\tau$  est une subdivision associée à  $g$  :

$$\begin{aligned} \sigma \cup \tau &\leq \sigma \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

Donc  $\sigma \cup \tau$  est une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

## 26.15 Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

### Théorème 26.15

L'ensemble  $Esc([a, b])$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[a, b]$  (c'est même une sous-algèbre).

PRAS (26.14)

## 26.17 Théorème

### Théorème 26.17

Pour toutes subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  associées à  $f$ , on a :

$$I(f, \sigma) = I(f, \tau)$$

Autrement dit, la quantité  $I(f, \sigma)$  est indépendante du choix de la subdivision associée.

Dans un premier temps, on suppose  $\tau \subset \sigma$ .

Notons :

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \\ &= \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \end{aligned}$$

On note  $f_k$  la valeur constante de  $f$  sur  $] \tau_k, \tau_{k+1}[$  et ainsi :

$$\begin{aligned} I(f, \tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{i_{k+1}} - \sigma_{i_k}) f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) \right] f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\ &= \sum_{p=0}^{i_n-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\ &= I(f, \sigma) \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$I(f, \tau) = I(f, \tau \cup \sigma) = I(f, \sigma)$$

#### Proposition 26.21

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  et soit  $c \in ]a, b[$ , alors  $f$  est en escalier sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Soit  $\sigma$  associée à  $f$ ,  $\sigma \cup \{c\}$  est toujours associée à  $f$ , alors  $\sigma \cup \{c\} \cap [a, c]$  est associée à  $f|_{[a, c]}$ .  
RAS pour la suite.

## 26.23 Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout

#### Proposition 26.23

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Dans ce cas,  $f - g$  est nulle presque partout et on utilise la linéarité et (26.20).

## 26.24 Positivité ou croissance de l'intégrale

#### Proposition 26.24

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  (avec  $a \leq b$ ) telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier, si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  et positive, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

En reprenant la notation du (20.18), pour tout  $i$ ,  $f_i \geq 0$ . Donc :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

On obtient la croissance par linéarité.

## 26.26 Inégalité triangulaire intégrale

### Proposition 26.26

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  (avec toujours  $a \leq b$ ) à valeurs réelles. Alors  $|f|$  est aussi en escalier sur  $[a, b]$  et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Si  $\sigma$  est associée à  $f$ , elle reste associée à  $|f|$  et ensuite on utilise l'inégalité triangulaire classique avec (26.20).

## 26.36 Théorème

### Théorème 26.36

$f$  est intégrable si et seulement si  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  existent et si  $I_-(f) = I_+(f)$ .

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  intégrable. Donc  $Esc_+(f)$  et  $Esc_-(f)$  ne sont pas vides.

En particulier  $A_+(f) \neq \emptyset$  est minoré et  $A_-(f) \neq \emptyset$  est majoré.

D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $I_-(f)$  et  $I_+(f)$  sont bien définis.

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $(h, g) \in Esc_-(f) \times Esc_+(f)$  tel que :

$$\int_a^b (g - h)(x) dx < \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq \int_a^b g(x) dx < \int_a^b h(x) dx + \epsilon \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_-$$

Donc :

$$I_+ = I_-$$

$\Leftarrow$

On suppose  $I_+ = I_-$ .

Soit  $\epsilon > 0$ .

$I_+ + \frac{\epsilon}{2}$  ne minore pas  $A_+$ .

$I_- - \frac{\epsilon}{2}$  ne majore pas  $A_-$ .

On choisit donc  $h \in Esc_-$  et  $g \in Esc_+$  telles que :

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &< I_+ + \frac{\epsilon}{2} \\ \int_a^b h(x) dx &> I_- - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_a^b (g(x) - h(x)) dx < I_+ - I_- + \epsilon = \epsilon$$

## 26.42 Intégrabilité des fonctions monotones

### Théorème 26.42

Soit  $f$  une fonction monotone sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

On suppose  $f$  croissante. Alors  $f$  est bornée (minorée par  $f(a)$ , majorée par  $f(b)$ ).  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\sigma_n$  la subdivision régulière de  $[a, b]$  à  $n$  pas.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sigma_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)}{n}k$$

On définit  $h_n \in Esc_-(f)$  et  $g_n \in Esc_+(f)$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in ]\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}], g_n(x) = f(\sigma_{k+1}^{(n)}) \\ g_n(a) = f(a) \\ \forall x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = f(\sigma_k^{(n)}) \\ h_n(b) = f(b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_n - h_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times (f(\sigma_{k+1}^{(n)}) - f(\sigma_k^{(n)})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'après (26.41),  $f$  est intégrable.

## 26.43 Intégrabilité des fonctions continues

### Théorème 26.43

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Comme  $[a, b]$  est un segment,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$  d'après le théorème de Heine.

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit  $\sigma^{(n)}$  la subdivision régulière de  $[a, b]$  à  $n$  pas ( $n \geq 1$ ).

On choisit  $n$  tel que  $\frac{b-a}{n} < \eta$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  donc  $y$  atteint ses bornes ( $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  est compact/théorème des bornes atteintes).

On note alors  $m_k$  et  $M_k$  respectivement les minimum et maximum sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ .

On pose alors  $h_n$  et  $g_n$ .

— Pour  $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = m_k$  et  $g_n(x) = M_k$ .

—  $h_n(b) = g_n(b) = f(b)$

Par construction,  $h_n \in Esc_-(f)$  et  $g_n \in Esc_+(f)$ , et :

$$\int_a^b (g_n - h_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) (M_k - m_k) < \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) \times \epsilon = \epsilon \times (b-a)$$

Par définition :

$$\int_a^b (g_n - h_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

## 26.46 Relation de Chasles

### Proposition 26.46

Soit une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  et  $c \in ]a, b[$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

cf. annexe

## 26.49 Croissance et positivité de l'intégrale

### Proposition 20.49

Soit  $f$  et  $g$  deux fonction intégrables sur  $[a, b]$  (avec  $a \leq b$ ) telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier, si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et positive, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Si  $f \geq 0$ , alors  $0 \in Esc_-(f)$ .

$$\int_a^b 0 = 0 \in A_-(f)$$

Donc :

$$I_-(f) = \int_a^b f \geq 0$$

## 26.51 Inégalité triangulaire intégrale

### Proposition 26.51

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ , alors  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$  et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

On suppose  $f$  intégrable sur  $[a, b]$ .

On choisit  $(\varphi_n, \theta_n)$  associé à  $f$  (26.39).

Comme :

$$\forall x \in [a, b], ||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$$

Alors  $(|\varphi_n|, \theta_n)$  est associée à  $|f|$ . Par conséquent,  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ . On a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$$

Or, d'après (26.26) :

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)| dx$$

Donc, d'après le TCILPPL :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

## 26.56 Bornitude des fonctions continues par morceaux

### Proposition 26.56

Les fonctions continues par morceaux sur un segment  $[a, b]$  sont bornées.

Soit  $f$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

Soit  $\sigma$  une subdivision associée.

Comme  $f$  est continue sur  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$  et que  $f$  possède des limites finies en  $\sigma_i^+$  et  $\sigma_{i+1}^-$ ,  $f$  se prolonge par continuité en  $f_i$  sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

D'après le théorème des bornes atteintes,  $f_i$  est bornée.

Donc  $f|_{] \sigma_i, \sigma_{i+1}[}$  est également bornée.

Donc  $f|_{[a, b] \setminus \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}}$  est bornée.

Donc  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  car  $f$  est définie sur chaque  $\sigma_i$ .

## 26.58 Intégrabilité des fonctions continues par morceaux

### Théorème 26.58

Toute fonction continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$  est intégrable.

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ .

Soit  $\sigma$  une subdivision associée à  $f$ .

Sur chaque intervalle  $]\sigma_i, \sigma_{i+1}[$ ,  $f$  se prolonge par continuité en  $f_i$  sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

Donc  $f_i$  est intégrable sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$  et  $f_i$  et  $f|_{[\sigma_i, \sigma_{i+1}]}$  sont égales presque partout, donc  $f|_{[\sigma_i, \sigma_{i+1}]}$  est intégrable sur  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

D'après la relation de Chasles,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

## 26.61 Norme

### Proposition 26.61

Pour toute fonction  $f$  et  $g$  bornées sur un même segment  $[a, b]$ , on a :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$$

Enfin :

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

— D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall x[a, b], |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Par définition :

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

- RAF
- Si  $f = 0$ ,  $\|f\|_\infty = 0$ .  
Si  $\|f\|_\infty = 0$ , alors  $\forall x \in [a, b], |f(x)| = 0$ .  
Donc  $f = 0$ .

## 26.63 Densité

### Théorème 26.63

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors il existe une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  alors il existe une suite de fonctions en escalier  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ , donc  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .  
Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $\eta > 0$  module de continuité uniforme associé à  $\epsilon$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on introduit la subdivision régulière  $\sigma^{(n)}$  de  $[a, b]$ .  
On choisit  $n$  tel que  $\frac{b-a}{n} < \eta$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$  donc y atteint ses bornes (max)  $M_k$ . On définit  $\varphi_n \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$  par :  
— si  $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[$ , alors  $\varphi_n(x) = M_k$   
  
—  $\varphi_n(b) = f(b)$   
Par construction, pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon$$

Donc :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \leq \epsilon$$

Par définition :

$$\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Si  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ , et  $\sigma$  une subdivision associée à  $f$ , on applique le résultat précédent sur chaque intervalle  $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ .

## 26.64 Théorème fondamental du calcul intégral

### Théorème 26.64

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $x_0 \in I$ . Alors l'application :

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $x_0$ .

Notons  $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ , bien définie car  $f$  est continue sur  $I$ .

$F(x_0) = 0$ .

Montrons que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Soit  $a \in I$  et soit  $x \neq a$ .

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) dt$$



Donc :

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) &= \frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{x - a} \int_a^x f(a) dt \\ &= \frac{1}{x - a} \int_a^x (f(t) - f(a)) dt\end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ , par continuité de  $f$  en  $a$ , on choisit  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On suppose  $x > a$  et  $x - a < \eta$ , d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\left| \frac{F(x) - F(a)}{x - a} - f(a) \right| &\leq \frac{1}{x - a} \int_a^x |f(t) - f(a)| dt \\ &\leq \frac{1}{x - a} \int_a^x \epsilon dt \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Cela reste valable si  $x < a$  et  $|x - a| < \eta$ .

Donc :

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$$

## 26.66 Limite

### Proposition 26.66

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

On fixe  $a$  et on pose  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ .

Donc  $F \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Donc  $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ .