Chapitre 31

Dénombrement

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p+2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B.
Pour constuire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B.
On a $p+1$ choix pour le premier B.
Pour chaque choix de position $k \in [\![1, p+1]\!]$, il reste $p+2-k$ choix pour le second B.
Le nombbre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p+1}(p+2-k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2}\end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $x \neq y$?

<u>Etape 1 :</u> On choisit $x \in [\![1, n]\!]$, soit n choix.
<u>Etape 2 :</u> On choisit $y \in [\![1, n]\!] \setminus \{x\}$, soit $n-1$ choix.
<u>Au total</u> $n(n-1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

<u>Etape 1 :</u> On choisit la première lettre : p possibilités.
<u>Etape 2 :</u> On choisit la deuxième lettre : $p-1$ possibilités.
<u>Etape 3 :</u> On choisit la troisième lettre : $p-1$ possibilités.
...
Au total : $p(p-1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.
Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.
Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.
Aut total : 4×26^3 possibilités.

31.32 Exemple

Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit $\frac{52!}{(52-5)!}$.

31.33 Exemple

Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de n-arrangements d'un ensemble de cardinal n, soit $n!$ choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un $(n-1)$-arrangement d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit $(n-1)!$ choix.

31.38 Nombre de combinaisons

Propostion 31.38

Soit $p \in \mathbb{N}$ et notons $n = |E|$. Il y a $\binom{n}{p}$ p-combinaisons de E.

Pour construire une p-combinaison :
- On choisit un p-arrangement de E : $\frac{n!}{(n-p)!}$ possiblités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.
  Or toute permutation du p-arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc $|S_p| = p!$ arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).
  On a donc $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ p-combinaisons.

31.40 Exemple

Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.

31.41 k-listes strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$

Théorème 31.41

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers $(i_1, \dots, i_k)$ pour lesquelles $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Pour tout ensemble à k éléments de $[\![1, n]\!]$ distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout k-uplet $(i_1, \dots, i_k)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ fournit un sous-ensemble à k eléments distincts de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc en tout $\binom{n}{k}$ familles recherchées.

31.43 Exemple

Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.
Etape 1 : $\binom{7}{1}$ choix pour la place de B.
Etape 2 : $\binom{6}{3}$ choix pour la place des O.
Etape 3 : $\binom{3}{2}$ choix pour la place des R.
Etape 4 : $\binom{1}{1}$ choix pour la place de S.
Au total :

$$\begin{aligned}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!} \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3\end{aligned}$$

31.45 Exemple

Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :
- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ? Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

- Pour construire une telle main :
  Etape 1 : $\binom{21}{2}$ choix pour les atouts.
  Etape 2 : $\binom{14}{4}$ choix pour les trèfles.
  Au total $\binom{21}{2}\binom{14}{4}$ mains possibles.
- $\binom{21}{1}\binom{4}{3}\binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1}\binom{4}{4}\binom{78-21-4}{1}$.