

# Chapitre 19

## Convexité

<b>19 Convexité</b>	<b>1</b>
19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes . . . . .	2
19.8 Inégalités des pentes . . . . .	2
19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes . . . . .	3
19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée . . . . .	4
19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes . . . . .	4
19.17 Somme de fonctions convexes . . . . .	5
19.18 Composition de fonctions convexes . . . . .	5
19.19 Réciproque de fonctions convexes . . . . .	5
19.20 Extrema des fonctions convexes . . . . .	6
19.24 Inégalité de Jensen . . . . .	6
19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique . . . . .	7

## 19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

### Proposition 19.7

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ .

Le graphe de  $f$  est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle  $[x, y]$  et au-dessus à l'extérieur, soit sur  $I \cap ]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$ .

On pose  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$ .

$g$  paramètre la sécante passant par les points  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$ .

— Sur  $[x, y]$ , RAF car  $f$  est convexe.

— Soit  $t > y$ . On pose  $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned} \lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y)}{t-x} \\ &= y \end{aligned}$$

Par convexité de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{\lambda}f(y) - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x}f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si  $t \leq x < y$ .

## 19.8 Inégalités des pentes

### Proposition 19.8

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est convexe si et seulement si pour tout  $a \in I$ , la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .
- Si  $f$  est convexe, alors pour tout  $(a, b, c) \in I^3$  avec  $a < b < c$ ,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

1.  $\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $a \in I$  et  $x < y$  dans  $I \setminus \{a\}$ .

— On suppose  $x < a < y$ . D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Si  $x < a < y$ , d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.



On suppose que pour tout  $a \in I$ ,  $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante.

Soit  $x < y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . On pose  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$ .

$g_a$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ , donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x - a &< 0 \text{ et } y - a > 0 \\ (f(x) - f(a))(y - a) &\leq (f(y) - f(a))(x - a) \\ \text{donc } f(a)(y - x) &\leq f(x)(y - a) - f(y)(x - a) \\ \text{soit } f(a) &\leq f(x) \frac{y - a}{y - x} + f(y) \frac{a - x}{y - x} \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

2. Soit  $a < b < c$ .

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

## 19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

### Théorème 19.9

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$  ouvert. La fonction  $f$  est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites sont envisageables). Pour tout  $a \in I$ , on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour  $a \in I$ , on note encore  $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

Comme  $g$  est définie à gauche et à droite de  $a$  ( $I$  est ouvert) et que  $g$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ , d'après le TLM  $g$  admet des limites finies à gauche et à droite de  $a$  et :

$$\begin{aligned} \lim_{a^+} g &= f'_d(a) \geq f'_g(a) = \lim_{a^-} g \\ \forall x \neq a, f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a) \end{aligned}$$

## 19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

### Théorème 19.11

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante.

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $x < y$ . Soit  $a$  tel que  $x < a < y$ .

D'après l'inégalité des pentes ( $f$  est convexe), on a :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

En considérant les limiets  $a \rightarrow x^+$  et  $a \rightarrow y^-$  et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc  $f'$  est croissante.

$\Leftarrow$

On suppose  $f'$  croissante sur  $I$ . Soit  $x < y$ . Soit  $a \in ]x, y[$ .

On applique deux fois le TAF : on choisit  $\alpha \in ]x, a[$  et  $\beta \in ]a, y[$  tels que :

$$\frac{f(a) - f(x)}{-x + a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\beta)$$

Comme  $f'$  est croissante, on a  $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{a - x}{y - x} f(y) + \frac{y - a}{y - x} f(x) \end{aligned}$$

Comme  $a \in ]x, y[$ ,  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$  et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$$

Donc  $f$  est convexe (sur  $I$ ).

## 19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes

### Proposition 19.13

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Alors  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si le graphe de  $f$  est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

$\Rightarrow$

On suppose  $f$  convexe. Soit  $a \in I$  et soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f'(a)(t - a) + f(a)$ .

On pose  $h = f - \varphi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$  et  $h' = f' - f'(a)$ .

Or  $f$  est convexe donc  $f'$  est croissante sur  $I$ . Donc :

$a$	
$h'$	$- \quad 0 \quad +$
$h$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$
$h$	$+$

$\Leftarrow$

Soit  $x < y$  et  $a = \lambda y + (1 - \lambda)x \in ]x, y[$ .

Par hypothèse, le graphe de  $f$  est situé au-dessus de sa tangente en  $a$ .

$$\forall t \in I, f(t) \geq f'(a)(t - a) + f(a)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(a)(x-a) + f(a) \\ f(y) &\geq f'(a)(y-a) + f(a) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (y-a)f(x) + (a-x)f(y) &\geq (y-a)f(a) \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y) \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

## 19.17 Somme de fonctions convexes

### Proposition 19.17

La somme de deux fonctions convexes est convexe.

Soit  $f$  et  $g$  convexes. Soit  $x < y$  et  $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in ]x, y[$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(a) &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$(f+g)(a) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

Donc  $f+g$  est convexe.

## 19.18 Composition de fonctions convexes

### Proposition 19.18

Soit  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes avec  $g$  croissante. Alors  $g \circ f$  est convexe sur  $I$ .

Soit  $x < y$  et  $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in ]x, y[$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \text{donc } g \circ f(a) &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f(x)) + (1-\lambda)(g \circ f(y)) \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f$  est convexe.

## 19.19 Réciproque de fonctions convexes

### Proposition 19.19

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction convexe bijective avec  $I$  ouvert. Alors  $g = f^{-1}$  est soit concave, soit convexe sur  $J$ .

Comme  $f$  est convexe sur  $I$  ouvert,  $f$  est continue sur  $I$  (19.9).

Or  $f$  est bijective, donc  $f$  est strictement monotone sur  $I$  (15.72).

— Supposons  $f$  strictement croissante sur  $I$ . Soit  $x < y$  dans  $J = f(I)$ . Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Alors  $g$  est strictement croissante.

On pose  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &\leq \lambda x + (1-\lambda)y \end{aligned}$$

Or  $g$  est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) &= \lambda a + (1 - \lambda)b \\ &\leq g(\lambda x + (1 - \lambda)y)\end{aligned}$$

Donc  $g$  est concave sur  $J$ .

— Si  $f$  est strictement décroissante (et donc  $g$  strictement décroissante), alors  $g$  est concave sur  $J$ .

## 19.20 Extrema des fonctions convexes

### Proposition 19.20

Soit  $f$  une fonction convexe définie par un intervalle  $I$  ouvert. Alors  $f$  admet un minimum global en un point  $a$  si et seulement si  $a$  est un point critique.

$\Rightarrow$

RAF

$\Leftarrow$

On suppose que  $a$  est un point critique. Donc  $f'(a) = 0$ .

Or le graphe de  $f$  est situé au-dessus de sa tangente en  $a$ , soit :

$$\forall x \in I, f(x) \geq \underbrace{f'(a)(x - a)}_0 + f(a) = f(a)$$

Donc  $f(a)$  est un minimum global de  $f$ .

## 19.24 Inégalité de Jensen

### Théorème 19.24

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$  avec  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ , alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Par récurrence.

— Pour  $n = 2$ , RAF (cf. définition)

— On suppose la propriété vraie au rang  $n$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$  avec  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ .

Si  $\lambda_{n+1} = 0$ , on applique directement l'hypothèse au rang  $n$  (RAF).

On suppose  $\lambda_{n+1} \neq 0$ . On a :

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\end{aligned}$$

## 19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique

### Exemple 19.25

Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

La fonction logarithme est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

On remarque que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ . D'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{k=1}^n x_k \right) \\ &= \ln \left( \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \right) \end{aligned}$$

On compose alors par exp (strictement croissante).

D'après le résultat précédent appliqué à  $\left( \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right)$  :

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$$

Donc  $(x \mapsto \frac{1}{x})$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$