

# Chapitre 32

## Espaces probabilisés finis

<b>32 Espaces probabilisés finis</b>	<b>1</b>
32.19Exemple . . . . .	2
32.25Exemple . . . . .	2
32.26Exemple . . . . .	2
32.28Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire . . . . .	3
32.30Probabilité conditionnelle . . . . .	3
32.31Formule des probabilités totales . . . . .	4
32.32Exemple . . . . .	4

### 32.19 Exemple

#### Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroté les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[[1, 8]])$$

En notant  $A$  "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \in P_4[[4, 8]]) \\ P(A) &= P(X \in P_4[[4, 8]]) \\ &= \frac{|P_4[[4, 8]]|}{|P_4[[1, 8]]|} \\ &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

### 32.25 Exemple

#### Exemple 32.25

On choisit un entier  $X$  au hasard entre  $-3$  et  $3$ . Quelle est la loi de la variable  $X^2 + 1$  ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-3, 3])$$

$$(X^2 + 1)(\omega) = \{1, 2, 5, 10\}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X^2 + 1 = 1) &= P(X = 0) \\ &= \frac{1}{7} \\ P(X^2 + 1 = 2) &= P(X = -1) + P(X = 1) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2 + 1 = 5) &= P(X = -2) + P(X = 2) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2 + 1 = 10) &= P(X = -3) + P(X = 3) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

### 32.26 Exemple

#### Exemple 32.26

On choisit un entier  $X$  au hasard entre 1 et  $2n$ . Quelle est la loi de  $(-1)^X$  ?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

### 32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

#### Théorème 32.28

Soit  $E = \{x_1, \dots, x_r\}$  un ensemble et  $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$  des réels pour lesquels  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ . Il existe alors un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  et une variable aléatoire  $X$  sur  $\Omega$ , d'image  $E$ , pour lesquels pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  :

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de  $P$ .

### 32.30 Probabilité conditionnelle

#### Théorème 32.30

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  pour lequel  $P(B) > 0$ . Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , le réel

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ . L'application  $P_B$  est alors une probabilité sur  $\Omega$ , appelée sa probabilité conditionnelle sachant  $B$ .

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned}
P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\
&= P_B(A) + P_B(C)
\end{aligned}$$

### 32.31 Formule des probabilités totales

#### Théorème 32.31

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini et  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de  $\Omega$  de probabilités strictement positives. Alors, pour tout  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Soit  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ . On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^n A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^n (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \mid A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Avec  $P(A_i) > 0$  pour définir les probabilités conditionnelles.

### 32.32 Exemple

#### Exemple 32.32

Dans une classe de 40 étudiants (25 filles et 15 garçons), le professeur principal se propose de désigner brutalement deux délégués provisoires. Il prend une liste de la classe, ferme les yeux et pointe au hasard un premier nom avec la pointe du stylo puis de même avec un deuxième. Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est celui d'un garçon ?

On note  $G_i$  : "le  $i$ -ème nom tiré est celui d'un garçon".

$\{G_1, \overline{G_1}\}$  forme un système complet d'événements de probabilités strictement positives.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \mid G_1) \times P(G_1) + P(G_2 \mid \overline{G_1}) \times P(\overline{G_1}) \\ &= \frac{14}{39} \times \frac{3}{8} + \frac{15}{39} \times \frac{5}{8} \end{aligned}$$