Chapitre 23

Sous-espaces affines

23.1 Sous-espace affine

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **sous-espace affine de** E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme :

$$\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$$

où F est un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.

- Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique. On l'appelle **direction de** $\mathcal{F}$ et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs de** $\mathcal{F}$.

On suppose que $\mathcal{F} = x_1 + F_1 = x_2 + F_2$.
Soit $y \in F_1$.
On a $y + x_1 \in \mathcal{F}$ donc $y + x_1 = x_2 + y_2$ avec $y_2 \in F_2$.
Or $x_1 \in \mathcal{F}$ donc $x_1 = x_2 + g_2$ avec $g_2 \in F_2$.
Donc :

$$\begin{aligned} y &= x_2 - x_1 + y_2 \\ &= y_2 - g_2 \\ &\in F_2 \end{aligned}$$

avec $F_1 \subset F_2$.
Par symétrie :

$$F_1 = F_2$$

23.8 Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et leur point

Théorème 23.8

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et $A \in \mathcal{F}$, alors :

$$\mathcal{F} = A + F$$

$\mathcal{F} = x + F$. Soit $A \in \mathcal{F}$.
Donc $A = x + f, f \in F$.
Donc $A - x \in F$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= x + F \\ &= (x - A) + A + F \\ &= A + F \end{aligned}$$

23.11 Fibre d'une application linéaire

Théorème 23.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$. Alors $u^{-1}(\{y\})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E et de direction $\ker u$.

On suppose que $u^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Fixons $x_0 \in u^{-1}(\{y\})$.

Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(\{y\}) &\Leftrightarrow u(x) = y \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \ker u \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + \ker u \end{aligned}$$

Donc :

$$u^{-1}(\{y\}) = x_0 + \ker u$$