

15.2 Exercice

$$0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \times \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } 0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

1. Quand $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on remarque que $\lim_x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq \lim_x \frac{1}{x}$.
Ainsi, par théorème d'opérations on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{1}{x}$$

Donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

2. Quand $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
Donc :

$$\forall x > 1, x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

15.6 Exercice

1. Soit $x > 0$, d'après le TLM :

$$\lim_{x^-} f \geq f(x) \geq \lim_{x^+} f$$

et $\lim_{t \rightarrow x^-} tf(t) \leq xf(x) \leq \lim_{t \rightarrow x^+} tf(t)$

donc $x \lim_{x^-} f \leq xf(x) \leq x \lim_{x^+} f$ (théorème d'opérations + TLM)

et $\lim_{x^-} f \geq f(x) \geq \lim_{x^+} f$ ($x > 0$)

donc $\lim_{x^-} f = f(x) = \lim_{x^+} f$

2. Soit $x \leq y$.
On a :

$$f(x) - f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} - \sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}^{\geq 0 \text{ car } u \mapsto \sqrt{\cos^2 t + u^2 \sin^2 t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}}{\underbrace{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t} \sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}_{> 0}} dt$$

Donc f est décroissante.
Par ailleurs :

$$xf(x) - yf(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sqrt{\cos^2 t + y^2 \sin^2 t} - y \sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}{\Delta} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{\cos^2(t)(x^2 - y^2)}^{\leq 0}}{\underbrace{\Delta[x\sqrt{\dots} + y\sqrt{\dots}]}_{> 0}} dt$$

$$\leq 0$$

15.10 Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x)^2 = 1 &\Leftrightarrow f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1 \\ &\Leftrightarrow f : x \mapsto 1 \text{ ou } f : x \mapsto -1 \text{ (car } f \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$