

# Chapitre 31

## Dénombrement

<b>31 Dénombrement</b>	<b>1</b>
31.12Exemple : parcours d'une fourmi . . . . .	2
31.19Exemple . . . . .	2
31.20Exemple . . . . .	2
31.27Exemple . . . . .	2
31.28Exemple . . . . .	2
31.32Exemple . . . . .	3
31.33Exemple . . . . .	3
31.38Nombre de combinaisons . . . . .	3
31.40Exemple . . . . .	3
31.41 $k$ -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ . . . . .	3
31.43Exemple . . . . .	4
31.45Exemple . . . . .	4
31.48Exemple . . . . .	4

### 31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

#### Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille  $2 \times p$  dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de  $p + 2$  lettres contenant exactement  $p$  lettres  $D$  et 2 lettres  $B$ .

Pour construire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux  $B$ .

On a  $p + 1$  choix pour le premier  $B$ .

Pour chaque choix de position  $k \in \llbracket 1, p + 1 \rrbracket$ , il reste  $p + 2 - k$  choix pour le second  $B$ .

Le nombre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p + 2 - k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} \end{aligned}$$

### 31.19 Exemple

#### Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples  $(x, y)$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $x \neq y$  ?

Étape 1 : On choisit  $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $n$  choix.

Étape 2 : On choisit  $y \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$ , soit  $n - 1$  choix.

Au total  $n(n - 1)$  choix (principe des bergers).

### 31.20 Exemple

#### Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de  $p$  lettres, combien de mots de  $n$  lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Étape 1 : On choisit la première lettre :  $p$  possibilités.

Étape 2 : On choisit la deuxième lettre :  $p - 1$  possibilités.

Étape 3 : On choisit la troisième lettre :  $p - 1$  possibilités.

...

Au total :  $p(p - 1)^{n-1}$  possibilités.

### 31.27 Exemple

#### Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit  $52^5$  possibilités.

### 31.28 Exemple

#### Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.

Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.

Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments :  $26^3$  possibilités.

Aut total :  $4 \times 26^3$  possibilités.

### 31.32 Exemple

#### Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit  $\frac{52!}{(52-5)!}$ .

### 31.33 Exemple

#### Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir  $n$  personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de  $n$ -arrangements d'un ensemble de cardinal  $n$ , soit  $n!$  choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un  $(n-1)$ -arrangement d'un ensemble à  $n-1$  éléments, soit  $(n-1)!$  choix.

### 31.38 Nombre de combinaisons

#### Proposition 31.38

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et notons  $n = |E|$ . Il y a  $\binom{n}{p}$   $p$ -combinaisons de  $E$ .

Pour construire une  $p$ -combinaison :

- On choisit un  $p$ -arrangement de  $E$  :  $\frac{n!}{(n-p)!}$  possibilités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.  
Or toute permutation du  $p$ -arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc  $|S_p| = p!$  arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).  
On a donc  $\frac{n!}{(n-p)!p!}$   $p$ -combinaisons.

### 31.40 Exemple

#### Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a  $\binom{52}{5}$ .

### 31.41 $k$ -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$

#### Théorème 31.41

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\binom{n}{k}$  familles d'entiers  $(i_1, \dots, i_k)$  pour lesquelles  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

Pour tout ensemble à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout  $k$ -uplet  $(i_1, \dots, i_k)$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  fournit un sous-ensemble à  $k$  éléments distincts de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Il y a donc en tout  $\binom{n}{k}$  familles recherchées.

### 31.43 Exemple

#### Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.

Etape 1 :  $\binom{7}{1}$  choix pour la place de B.

Etape 2 :  $\binom{6}{3}$  choix pour la place des O.

Etape 3 :  $\binom{3}{2}$  choix pour la place des R.

Etape 4 :  $\binom{1}{1}$  choix pour la place de S.

Au total :

$$\begin{aligned} \binom{7}{1} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!} \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3 \end{aligned}$$

### 31.45 Exemple

#### Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :

- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ?  
Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

— Pour construire une telle main :

Etape 1 :  $\binom{21}{2}$  choix pour les atouts.

Etape 2 :  $\binom{14}{4}$  choix pour les trèfles.

Au total  $\binom{21}{2} \binom{14}{4}$  mains possibles.

—  $\binom{21}{1} \binom{4}{3} \binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1} \binom{4}{4} \binom{78-21-4}{1}$ .

### 31.48 Exemple

#### Exemple 31.48

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . De combien de façons peut-on extraire la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de  $A$  ?

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . De combien de façons peut-on extraire la matrice  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $A$  ?

1. Disjonctions de cas : Si on extrait par rapport à la deuxième ligne :  $\binom{5}{3}$ .

Si on extrait par rapport à la troisième ligne :  $\binom{4}{3}$ .

Au total :  $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$  choix possibles.

2. Avec le même principe :

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$