

Chapitre 31

Dénombrement

31 Dénombrement	1
31.12Exemple : parcours d’une fourmi	2
31.19Exemple	2
31.20Exemple	2
31.27Exemple	2

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p + 2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B .

Pour construire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B .

On a $p + 1$ choix pour le premier B .

Pour chaque choix de position $k \in \llbracket 1, p + 1 \rrbracket$, il reste $p + 2 - k$ choix pour le second B .

Le nombre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p + 2 - k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} \end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $x \neq y$?

Etape 1 : On choisit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit n choix.

Etape 2 : On choisit $y \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$, soit $n - 1$ choix.

Au total $n(n - 1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Etape 1 : On choisit la première lettre : p possibilités.

Etape 2 : On choisit la deuxième lettre : $p - 1$ possibilités.

Etape 3 : On choisit la troisième lettre : $p - 1$ possibilités.

...

Au total : $p(p - 1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.