

Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25 Comparaison locale des fonctions	1
25.6 Caractérisation séquentielle	2
25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f	2
25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a	2
25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme	3
25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0	3
25.28 Développement limité de l'exponentielle	4
25.29 Développement limité du logarithme	4
25.30 Développement limité de cosinus et sinus	5
25.40 Unicité du DL	5
25.41 DL de fonctions paires ou impaires	6
25.42 Remarque	6
25.43 Exemple	7
25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0	7
25.56 Produit de DL	8
25.57 Exemple	8
25.58 Exemple	8
25.59 Composition de DL	9
25.60 Exemple	9
25.61 Exemple	10
25.63 Exemple	10
25.65 DL d'un inverse	11
25.67 Exemple	12
25.70 Primitiver un DL	12
25.72 Exemple	13
25.74 Dérivation d'un DL	14
25.75 Exemple	14
25.78 Exemple	14
25.85 Exemple	15

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ à valeurs dans X , alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ à valeurs dans X , alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$f \underset{a}{=} O(g)$ ssi il existe h bornée au voisinage de a tel que $f = g \cdot h$

ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \rightarrow a$, $f(u_n) = g(u_n) \times w_n$ où (w_n) est une suite bornée.

\Rightarrow $w_n = h(u_n)$ ssi bornée \Leftarrow Par l'absurde avec (25.5).

ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \rightarrow a$, $f(u_n) = O(g(u_n))$.

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0 . Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ Alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \sum_{k=0}^0 \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a, b], \mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ (\text{IPP}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme

Théorème 25.22

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que $g(b) = f(b)$.

On choisit A de telle sorte que $g(a) = f(b)$.

On pose :

$$A = \frac{-(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[-\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f(b) \right]$$

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$.

D'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or :

$$\begin{aligned} \forall x \in]a, b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n$$

Or $c \neq b$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.

On conclut avec $f(b) = g(a)$.

25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0

Théorème 25.27

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 . Alors au voisinage de x_0 , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I, \mathbb{R})$.

D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \underset{x \rightarrow x_0}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $v \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathcal{V}, x > x_0$. On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \right| &\leq \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{\varepsilon(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour $x \leq x_0$.

Par définition (avec les ε), on a le résultat souhaité.

25.28 Développement limité de l'exponentielle

Proposition 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

25.29 Développement limité du logarithme

Proposition 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n]-1, \infty[, \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} \forall x > -1, f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \\ f^{(k+1)}(0) &= (-1)^k k! \end{aligned}$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

25.30 Développement limité de cosinus et sinus

Proposition 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ pour le sinus et à l'ordre $2n+1$ pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Idem pour cos.

25.40 Unicité du DL

Théorème 25.40

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 , alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.

On note $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$.

Or :

$$\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n a_k (x - x_0)^k &\underset{x \rightarrow x_0}{=} o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^k &\underset{x \rightarrow x_0}{=} b_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p &\underset{x \rightarrow x_0}{=} b_p (x - x_0)^p + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p &= b_p + o(1) \end{aligned}$$

Absurde car $a_p \neq b_p$.

25.41 DL de fonctions paires ou impaires

Proposition 25.41

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0. Alors :

- si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

— On suppose f paire et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Donc :

$$f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du DL :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = (-1)^k a_k$$

Donc pour k impair :

$$a_k = 0$$

— Même raisonnement pour f impaire.

25.42 Remarque

Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n -ième de f en x_0 . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si f admet un DL₀ en x_0 , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Donc :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

Nécessairement, $a = f(x_0)$ et f est continue en x_0 .

Si f admet un DL_1 en x_0 , on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \rightarrow x_0}{=} a + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

25.43 Exemple

Exemple 25.43.2

2. La fonction $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$ admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc f admet bien un DL_2 en 0, donc un DL_1 en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur \mathbb{R} par théorème d'opérations).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \\ \frac{f'(x)}{x} &= -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

Proposition 25.50

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 , admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que pour h au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{x \rightarrow x_0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0 .

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=m}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &\underset{x \rightarrow x_0}{=} (x - x_0)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changement de variable : $x = x_0 + h$.

25.56 Produit de DL

Proposition 25.56

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et P et Q deux polynômes de degré au plus n .
Si au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

25.57 Exemple

Exemple 25.57

1. $\frac{\cos x}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2. $(e^x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (e^x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

25.58 Exemple

Exemple 25.58

1. $(\sin x - x)(\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.

$$\begin{aligned}
 (\sin x - x)(\cos x - 1) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} + \left(\frac{-1}{2 \times 5!} - \frac{1}{3!4!} \right) x^7 + o(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{1}{5 \times 3 \times 3!} x^7 + o(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)
 \end{aligned}$$

25.59 Composition de DL

Proposition 25.59

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n , alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 de $g \circ f$ à l'ordre n :

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n)$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
 f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\
 g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)
 \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on a $P(0) = 0$.

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(f(x)) + o(x^n)$$

Avec la notation $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned}
 g \circ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k f(x)^k + o(f(x)^n) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (P(x) + o(x^n))^k + o((P(x) + o(x^n))^n) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \left[b_k (P(x))^k + \underbrace{o(x^n)}_{P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)} \right] + o\left(\underbrace{P(x)^k}_{P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)} \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k P(x)^k + o(x^n) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} Q \circ P(x) + o(x^n) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n)
 \end{aligned}$$

25.60 Exemple

Exemple 25.59

1. $e^{\sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
2. $e^{\cos x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} & \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} (x + O(x^3))^2 + \frac{1}{6} (x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x - 1} & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

25.61 Exemple

Exemple 25.61

1. $\ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$
3. $\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{2} + o(x^9)$

1.

$$\begin{aligned}
\ln \cos x & \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o(x^4) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} & \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + o(x^{10}) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3 + O(x^{10}) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 (1 - x^2 + O(x^4))^3 + O(x^{10}) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 (1 - 3x^2 + O(x^4)) + O(x^{10}) \\
& \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^8 + o(x^9)
\end{aligned}$$

25.63 Exemple

Exemple 25.63

Montrer que $f : x \mapsto x \cos x$ est injective sur un voisinage de 0 et trouver un DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (on doit trouver $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$).

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

En particulier, $f'(0) = 1$, donc $f' > 0$ sur un voisinage de 0 car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc f est strictement croissante sur un voisinage de 0, où elle est surjective.

f induit une bijection $\tilde{f} : u \rightarrow f(u)$. On note $f^{-1} : f(u) \rightarrow u$ la bijection réciproque induite par \tilde{f} . Comme \tilde{f} ne s'annule pas sur u , d'après le théorème de la bijection dérivable, $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(f(u), u)$. Donc en particulier f^{-1} possède un $\text{DL}_3(f(0))$.

On a :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$$

Comme $f^{-1}(f(0)) = 0$, $a_0 = 0$.

Enfin :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1} \circ f(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) + a_2(x + O(x^3))^2 + a_3(x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} a_1x + a_2x^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3 \right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité des DL :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

25.65 DL d'un inverse

Proposition 25.65

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant pas en 0. Si g admet un DL donné par le polynôme P en 0 à l'ordre n , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ aussi et les DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ sont identiques. Autrement dit, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $g(0) \neq 0$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$, alors :

$$\frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \Leftrightarrow \frac{A}{P(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{P(x)} &= \frac{P(x) - g(x)}{P(x)g(x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \times O(1) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.67 Exemple

Exemple 25.67

1. (archi classique) : $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$
2. (archi classique) : $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8) \right] + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) \right]^2 - \left[-\frac{x^2}{2} + O(x^4) \right]^3 + O(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \left[-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} \right] x^4 + \left[\frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{8} \right] x^6 + O(x^8) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + O(x^8)
 \end{aligned}$$

2. A l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
 \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{5}{4!} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!} \right) x^5 + o(x^5) \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
 \end{aligned}$$

25.70 Primitiver un DL

Proposition 25.70

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$$

On pose $g : x \mapsto f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ avec $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(0)$.

on remarque que $g(0) = 0$ et en appliquant le TAF sur \mathcal{U} :

Pour $x \in \mathcal{U}$, il existe c_x tel que : $\begin{cases} 0 < c_x < x \\ \text{OU} \\ x < c_x < 0 \end{cases}$ vérifiant :

$$g(x) = g(x) - g(0) = x \times g'(c_x)$$

Par théorème d'encadrement :

$$c_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} g'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-1}) \\ \text{donc } g'(c_x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(c_x^{n-1}) \\ &= o(x^{n-1}) \text{ car } c_x \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \times o(x^{n-1}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.72 Exemple

Exemple 25.72

1. Donner le DL de $\arctan x$ et $\arccos x$ à tout ordre.
2. On peut faire la même chose avec $\operatorname{Argth}(x)$, $\operatorname{Argsh}(x)$ et $\operatorname{Argch}(x)$.
3. Montrer que $\arctan\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\arctan \frac{1}{2} - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$.
4. Voir l'exercice E-2 pour arcsin.

1. On pose $f = \arctan$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ donc } f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

On pose $f = \arccos \in \mathcal{D}^1(]-1, 1[, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{donc } f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \sum_{k=0}^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \underbrace{f(0)}_{\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

25.74 Dérivation d'un DL

Proposition 25.74

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors f' admet un DL à l'ordre $n-1$ en 0, égal à :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

On applique la formule de Taylor-Young à f et f' :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^k) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

En posant $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, on obtient le résultat souhaité.

25.75 Exemple

Exemple 25.75

On a :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} &= \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left[1 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

25.78 Exemple

Exemple 25.78

$$1. \quad \frac{e^x - 1}{\cos x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$$

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 1}{\cos x - 1} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \times \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)} \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \times \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] \left[1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right] \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right] \\
 &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)
 \end{aligned}$$

25.85 Exemple

Exemple

Montrer que la parabole d'équation $y = ex^2 + \frac{e}{2}x + \frac{e}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ et que la courbe de f est située au-dessus de sa courbe asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{e}{48}$).

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \\
 &= x^2 \exp\left((x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \exp\left((x+1) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \exp\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex^2 \left[1 + \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{12x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]^2 + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\
 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} ex^2 + \frac{e}{2}x - \frac{e}{24} + \frac{e}{48x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$