

# Chapitre 27

## Séries numériques

<b>27 Séries numériques</b>	<b>1</b>
27.6 Série géométrique . . . . .	2
27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout . . . . .	2
27.12 CN de convergence portant sur le terme général . . . . .	2
27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs . . . . .	2
27.20 Convergence absolue entraîne convergence . . . . .	3
27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité . . . . .	3
27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence . . . . .	3
27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale . . . . .	4

## 27.6 Série géométrique

### Théorème 27.6

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$ . Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$$

La série converge et  $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

## 27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

### Proposition 27.11

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

On note  $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$ . Supposons  $A \neq \emptyset$ .

D'après les hypothèses,  $A$  est majoré donc possède un maximum  $N$  d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ .

On note  $(S_n)$  et  $(S'_n)$  les sommes partielles associée à  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$ .

Pour  $n \geq N$  :

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k \in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi  $(S_n)$  converge si et seulement si  $(S'_n)$  converge.

## 27.12 CN de convergence portant sur le terme général

### Théorème 27.12

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $(u_n)$  converge vers 0. De manière équivalente, si  $(u_n)$  ne tend pas vers 0, la série  $\sum u_n$  diverge.

On suppose que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ .

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

## 27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

### Théorème 27.16

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi.
- Si  $\sum u_n$  diverge (vers  $+\infty$  donc), alors  $\sum v_n$  diverge aussi (vers  $+\infty$  donc).

De plus, si la divergence est grossière pour  $\sum u_n$ , elle l'est aussi pour  $\sum v_n$ .

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théorème de comparaison sur les suites.

## 27.20 Convergence absolue entraîne convergence

### Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

- On suppose que  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , avec  $\sum |u_n|$  convergente.  
On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

Ainsi,  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ .

Or, pour tout  $n$  :

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$

$$0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent et par linéarité (27.16)  $\sum u_n$  converge.

- On suppose que  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , avec  $\sum |u_n|$  convergente.  
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| \leq |u_n|$$

$$|Im(u_n)| \leq |u_n|$$

Donc,  $\sum Re(u_n)$  et  $\sum Im(u_n)$  sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16)  $\sum u_n$  converge.

## 27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

### Théorème 27.23

Soit  $\sum u_n$  une série à termes quelconques et  $\sum v_n$  une série à termes positifs telles que  $u_n = O(v_n)$  (ou  $u_n = o(v_n)$ ). Alors :

- La convergence de  $\sum v_n$  entraîne la convergence absolue de  $\sum u_n$ .
- La divergence de  $\sum u_n$  (celle de  $\sum |u_n|$  suffit) entraîne la divergence de  $\sum v_n$ .

On suppose  $u_n = O(v_n)$  avec  $v_n \geq 0$ .

- On suppose que  $\sum v_n$  converge. On a  $|u_n| = O(v_n)$  donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq |u_n| \leq Mv_n$$

D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs,  $\sum |u_n|$  converge donc  $\sum u_n$  converge.

- Si  $\sum |u_n|$  diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs,  $\sum v_n$  diverge.

## 27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence

### Théorème 27.24

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  et  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ .

On conclut avec (27.23).

## 27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale

### Théorème 27.25

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et soit  $f : [a; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante et positive. Alors  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge aussi (i.e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe et est finie).

D'après le TLM ( $f \geq 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  existe dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(t) dt$$

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  avec  $n_0 \geq a$ .  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature. Comme  $f$  est décroissante, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$$

Donc par Chasles :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^n f(k+1)}_{\sum_{k=n_0}^{n+1} f(k) - f(n_0)} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

D'après le TLM :

- Si  $\sum(f_n)$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \in \mathbb{R}_+$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \in \mathbb{R}_+$ , alors  $\sum(f_n)$  converge.

## Exercice 1

### Exercice 27.1

En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{o(1)} \\ &\geq \frac{1}{2n} \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.

## Exercice 2

### Exercice 27.2

En utilisant un théorème de comparaison par domination ou négligabilité, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n}$$

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{O(1) + n} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - e \times \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e - e\left(1 - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)}
 \end{aligned}$$

Par comparaison par  $\sim$ ,  $\sum u_n$  est convergent.