

Chapitre 24

Comparaison locale des suites

24 Comparaison locale des suites	1
24.18Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité	2
24.20Equivalent d'un polynôme	2
24.31Exemple	3

24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Proposition 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

\Rightarrow

Si $u_n \sim v_n$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &=_{n \rightarrow +\infty} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

\Leftarrow

Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

24.20 Equivalent d'un polynôme

Proposition 24.20

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$.

Pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$:

$$n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(n^d) \text{ et } a_k n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

24.31 Exemple

Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sqrt{3n+1}}$$

On note u_n l'expression de l'exemple.

But : trouver un équivalent (simple) de u_n .

—

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

—

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{3}{n^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—

$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3} \times \frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{9}{n^4} \times \sqrt{3n}} \\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$