

Chapitre 31

Dénombrement

31 Dénombrement	1
31.12Exemple : parcours d'une fourmi	2
31.19Exemple	2
31.20Exemple	2
31.27Exemple	2
31.28Exemple	2
31.32Exemple	3
31.33Exemple	3
31.38Nombre de combinaisons	3

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p + 2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B .

Pour construire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B .

On a $p + 1$ choix pour le premier B .

Pour chaque choix de position $k \in \llbracket 1, p + 1 \rrbracket$, il reste $p + 2 - k$ choix pour le second B .

Le nombre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p + 2 - k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} \end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $x \neq y$?

Étape 1 : On choisit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit n choix.

Étape 2 : On choisit $y \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$, soit $n - 1$ choix.

Au total $n(n - 1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Étape 1 : On choisit la première lettre : p possibilités.

Étape 2 : On choisit la deuxième lettre : $p - 1$ possibilités.

Étape 3 : On choisit la troisième lettre : $p - 1$ possibilités.

...

Au total : $p(p - 1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.

Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.

Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.

Aut total : 4×26^3 possibilités.

31.32 Exemple

Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit $\frac{52!}{(52-5)!}$.

31.33 Exemple

Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de n -arrangements d'un ensemble de cardinal n , soit $n!$ choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un $(n-1)$ -arrangement d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit $(n-1)!$ choix.

31.38 Nombre de combinaisons

Proposition 31.38

Soit $p \in \mathbb{N}$ et notons $n = |E|$. Il y a $\binom{n}{p}$ p -combinaisons de E .

Pour construire une p -combinaison :

- On choisit un p -arrangement de E : $\frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.
Or toute permutation du p -arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc $|S_p| = p!$ arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).
On a donc $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ p -combinaisons.

31.40 Exemple

Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.