

# Chapitre 33

## Variables aléatoires réelles finies

<b>33 Variables aléatoires réelles finies</b>	<b>1</b>
33.3 Exemple . . . . .	2
33.4 Espérance des lois usuelles . . . . .	2
33.5 Propriétés de l'espérance . . . . .	3
33.6 Exemple . . . . .	4
33.7 Formule de transfert . . . . .	4
33.10Exemple . . . . .	4
33.11Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes . . . . .	5
33.13Propriétés de la variance . . . . .	5

### 33.3 Exemple

#### Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1, 2 et 3 tombent avec une probabilité  $\frac{1}{6}$ , les faces 4 et 5 avec une probabilité  $\frac{1}{12}$  et 6 avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$ . Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

### 33.4 Espérance des lois usuelles

#### Théorème 33.4

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle sur  $\Omega$ .

1. Variable aléatoire constante : si  $X$  est constante de valeur  $m$ , alors  $E(X) = m$ .
2. Loi uniforme : si  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  et si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ , alors  $E(X)$  est la moyenne naturelle des valeurs  $x_1, \dots, x_n$  de  $X$  :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

3. Loi de Bernoulli : soit  $p \in [0; 1]$ . Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$ .
4. Exemple fondamental : pour tout événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .
5. Loi binomiale : soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$ . Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$ .

1. Si  $X(\Omega) = \{m\}$ ,  $P(X = m) = 1$  et  $E(X) = 1 \times m = m$ .
2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$  alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

3. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

4. Si  $A \subset \Omega$ , alors :

$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \quad (32.21)$$

Donc (3)  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .

5. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :

Soit  $Q = (1 - p + Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$ .

$$Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k \text{ donc } Q' = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^{k-1}$$

$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k$$

Par ailleurs  $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$ .

En évaluant les deux expressions en  $p$ , on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :

On poursuit le calcul de  $E(X)$  en utilisant la formule du capitaine.

Troisième méthode :

En utilisant la linéarité de l'espérance.

### 33.5 Propriétés de l'espérance

#### Proposition 33.5

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

1. Reformulation :  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$ .
2. Linéarité : pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ .
3. Positivité : si  $X \geq 0$ , alors  $E(X) \geq 0$ .
4. Croissance : si  $X \leq Y$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .
5. Inégalité triangulaire :  $|E(X)| \leq E(|X|)$ .

1. On rappelle que  $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$  est un SCE.

Ainsi :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[ \sum_{\omega \in (X=x)} P(X = \omega) \right] x$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

2.

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega))$$

$$= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})Y(\omega)$$

$$= \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

3. Si  $X \geq 0$ , alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned}
|E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \right| \\
&\leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)| \\
&= E(|X|)
\end{aligned}$$

### 33.6 Exemple

#### Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P(\llbracket 1, 6 \rrbracket))$ .

$$\begin{aligned}
E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \\
&= 2 \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k \\
&= 7
\end{aligned}$$

### 33.7 Formule de transfert

#### Théorème 33.8

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. L'espérance de  $f(X)$  est entièrement déterminée par  $f$  et la loi de  $X$  :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$$

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$  est un SCE.

$$\begin{aligned}
E(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \right) f(x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)
\end{aligned}$$

### 33.10 Exemple

#### Exemple 33.10

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Donner un équivalent simple de  $E(X)$  et de  $E(X^2)$ .

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n+1}{2} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}
 \end{aligned}$$

### 33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

#### Théorème 33.11

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned}
 E(X)E(Y) &= \left( \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x \right) \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)y \right) \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\
 &= E(XY)
 \end{aligned}$$

### 33.13 Propriétés de la variance

#### Proposition 33.13

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

1.  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .
2.  $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$ . On dit dans ce cas que  $X$  est presque sûrement constante.
3. Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

En particulier, si  $\sigma(X) > 0$ , la variable  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

1.

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E((X - E(X))^2) \\
 &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
 &= E(X^2) - E(X)^2
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} V(X) = 0 &\Leftrightarrow E((X - E(X))^2) = 0 \\ \text{(fonction de transfert)} \quad &\Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)(x - E(X))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega) \setminus \{E(X)\}, P(X = x) = 0 \\ &= P(X = E(X)) = 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \quad (\text{linéarité}) \\ &= a^2 V(X) \quad (\text{linéarité}) \end{aligned}$$