Chapitre 16

Arithmétique des polynômes

16.1 Division euclidienne

Théorème 16.1

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Le polynôme Q est appelé **quotient** et R le **reste**.

Existence :
On raisonne par récurrence sur le degré de A.

— Pour $n = \deg A = 0$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.
  — Si $\deg B > 0$, alors $(0, A)$ convient.
  — Si $\deg B = 0$, le couple $(B^{-1} \times A, 0)$ convient (comme B est constant et non nul), alors $B \in \mathbb{K}^*$ donc inversible).

— On suppose le résultat vrai pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$.
Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ avec $\deg A = n + 1$.
On écrit $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$.
  — Si $\deg A < \deg B$, le couple $(0, A)$ convient.
  — Si $\deg A \geq \deg B$ et on note b le coefficient dominant de B :

$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$.
Donc :

$$A = \left[Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}\right] \times B + R$$

Unicité :
On suppose que $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$.
Donc :

$$\begin{aligned} B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\ \text{donc } \underbrace{\deg\left(B(Q - Q_1)\right)}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg\left(R_1 - R\right) \\ &\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\ &< \deg B \\ \text{donc } \deg\left(Q - Q_1\right) &< 0 \\ \text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\ \text{puis } R_1 - R &= 0 \end{aligned}$$

16.7 Proposition 16.7

Propostion 16.7

On a :

1. Soit A et P deux polynômes non nuls. Si $A|P$ et si $P|A$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha A$. (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si $A|B$ et si $B|C$, alors $A|C$. La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $A|A$. La relation de divisibilité est réflexive.

1. $P \neq 0$, $A \neq 0$. Si $A|P$ et $P|A$, alors (16.6.2) :

$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$

Donc :

$$\deg P = \deg A$$

Or $A|P$, alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \ (\mathbb{K} \text{ est intègre})$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS
3. RAS

16.15 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 16.15

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Il existe un unique polynôme unitaire D tel que

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

Existence :
Soit $I \neq \{0\}$ un idéal.
On note $A = \{\deg P, P \in I\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{N}$.
$A \neq \emptyset$ ($I \neq \{0\}$), d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, A possède un plus petit élément noté $n \geq 0$.
Comme $n \in A$, on choisit $D \in I$ tel que $\deg D = n$.
Comme I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha D \in I$$

On peut donc supposer D unitaire. Comme I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$D \times \mathbb{K}[X] \subset I$$

Soit $P \in I$. On effectue la division euclidienne de P par D ($\neq 0$) :

$$P = BD + R$$

avec $\deg R \subset \deg D$.
Or :

$$R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{BD}_{\in I}$$
$$\in I$$

Par définition de $\deg D = n$, $R = 0$.

Unicité :

$$I = D\mathbb{K}[X] = J\mathbb{K}[X]$$

avec D et J unitaires.
Or ils sont associés, donc égaux.

16.17 Existence de *pgcd*

Propostion 16.17

Si A et B sont deux polynômes non nuls, de tels PGCD existent.

Soit A, B dans $\mathbb{K}[X]$, $(A, B) \neq (0, 0)$.
On note $\mathcal{C} = \{\deg P, P|A \text{ et } P|B \text{ et } P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.
$\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est majoré par $\deg B$ $(\max(\deg A, \deg B))$.
L'existence est assurée par la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

16.18 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

Propostion 16.18

Soit A et B deux polynômes non tous deux nuls. Soit $D \in \mathbb{K}[X]$. Alors Δ est un PGCD de A et B si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X].$$

D'après (16.15), on choisit $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose que D est un PGCD.
Donc $D|A$ et $D|B$.
Donc $D|F$ (combinaison $F \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$).
Or $F|A$ et $F|B$ ($A \in F\mathbb{K}[X]$, $B \in F\mathbb{K}[X]$).
Par maximalité de $\deg D$, on a F et D associés.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$D\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Donc $D|A$ et $D|B$.
Pour tout diviseur commun P de A et B, $P|A$ et $P|B$.
Donc $P|D$ ($D \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$).
Donc $\deg D$ est maximal pour la divisibilité.

16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire

Lemme 16.24

Soit A et B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $A \wedge B = (A - BQ) \wedge B$.
En particulier, si Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B Alors $A \wedge B = B \wedge R$.

$$\begin{aligned}(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= (A - BQ)\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= ((A - BQ) \wedge B)\mathbb{K}[X]\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $(A - BQ) \wedge B$ sont associés, unitaires par définition, donc égaux.

16.26 Exemple

Exemple alternatif 16.26

Trouver les PGCD de $A = X^5 + 2X$ et de $B = X^4 + 2X^3 + 4$ et une relation de Bézout.

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X &= (X^4 + 2X^3 + 4)(X - 2) + 4X^3 - 2X + 8 \\
X^4 + 2X^3 + 4 &= (4X^3 - 2X + 8)(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}X^2 - X \\
4X^3 - 2X + 8 &= (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16) + 14X + 8 \\
\frac{1}{2}X^2 - X &= (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{14 \times 7}) + \frac{9 \times 4}{7^2} \\
A \wedge B = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{9 \times 4}{7^2} &= \frac{1}{2}X^2 - X - (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2}) \\
&= \frac{1}{2}X^2 - X - (4X^3 - 2X + 8 - (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16))(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2})
\end{aligned}$$

16.27 Propriétés du PGCD

Propostion 16.27

L'opération $\wedge$ est commutative et associative. Par ailleurs, si C est unitaire, alors $(A \wedge B)C = (AC) \wedge (BC)$.

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$ non tous nuls.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
&= B\mathbb{K}[X] + A\mathbb{K}[X] \\
&= (B \wedge A)\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $B \wedge A$ sont associés et unitaires donc égaux.

$$\begin{aligned}
((A \wedge B) \wedge C)\mathbb{K}[X] &= (A \wedge B)\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= (A \wedge (B \wedge C))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge (B \wedge C)$ et $(A \wedge B) \wedge C$ sont associés et unitaires donc égaux.
On suppose C unitaire.
On a :

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
\text{donc } (A \wedge B)C\mathbb{K}[X] &= AC\mathbb{K}[X] + BC\mathbb{K}[X] \\
&= ((AC) \wedge (BC))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Ainsi $C(A \wedge B)$ et $(AC) \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

16.29 Existence de PPCM

Propostion 16.29

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors A et B admettent des PPCM.

On note $\mathcal{D} = \{\deg P, A|P, B|P, P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

$$\deg AB \in \mathcal{D} \neq \emptyset$$

On conclut avec la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

16.30 Caractérisation des PPCM par les idéaux

Propostion 16.30

Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P est un PPCM de A et B si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X].$$

$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc de la forme $M\mathbb{K}[X]$ (16.15).
Montrons que P est un PPCM de A et B si et seulement si P et M sont associés.

$\boxed{\Rightarrow}$
On a donc :

$$\begin{aligned} P &\in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \\ &\in M\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc $M|P$.
Or M est un multiple commun à A et B, donc par définition de P, on a :

$$\boxed{\deg P \leq \deg M}$$

Donc P et M sont associés.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose P et M associés, donc :

$$\begin{aligned} P\mathbb{K}[X] &= M\mathbb{K}[X] \\ &= A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

En particulier, P est un multiple commun à A et B et pour tout $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$, donc $P|Q$.
Donc :

$$\boxed{degP \leq \deg Q}$$

16.42 Cas d'unicité d'une relation de Bézout

Propostion 16.42

Soit A et B non constants et premiers entre eux. Il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1 \text{ et } \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

<u>Existence :</u>
Soit $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que (16.37 - Bézout) :

$$AC + BD = 1$$

On effectue la dviision euclidienne de C par B :

$$\begin{aligned}C &= BE + U \text{ avec } \deg U < \deg B\\ \text{donc } AU + B(\underbrace{D + AE}_{V}) &= 1\\ \text{donc } \deg(AU + BV) &= 0\end{aligned}$$

Si $\deg V \geq \deg A$, alors :

$$\begin{aligned}\deg B + \deg V &\geq \deg B + \deg A\\ &> \deg U + \deg B\\ &= \deg AU\end{aligned}$$

Donc $\deg(AU + BV) = \deg BV > 0$.
Absurde.
L'exsitence est prouvée.

Unicité :
Avec es hypothèses correspondantes :

$$\begin{aligned}AU_1 + BV_1 = 1 &= AU_2 + BV_2\\ \text{donc } A(U_1 - U_2) &= B(V_2 - V_1)\\ \text{donc } A&|B(V_2 - V_1)\end{aligned}$$

Or $A \wedge B = 1$, donc $A|(V_2 - V_1)$.
Or $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$.
Donc $V_2 - V_1 = 0$.
Puis $A(U_1 - U_2) = 0$, donc $U_1 - U_2 = 0$ car $\mathbb{K}[X]$ est intègre avec $A \neq 0$.

16.43 Corollaire

Corollaire 16.43

Soit A, B et C trois polynômes avec A et B premiers entre eux. Alors $A \wedge (BC) = A \wedge C$.

— $A \wedge C|A$ donc $A \wedge C|A \wedge (BC)$. Donc $A \wedge C|BC$.
— $A \wedge (BC)|A$. Or $A \wedge B = 1$ donc on peut écrire $AU + BV = 1$. Donc $ACU + BCV = C$.
Or $A \wedge (BC)|ACU + BCV$ soit $A \wedge (BC)|C$. Donc $A \wedge (BC)|A \wedge C$.

Ainsi, $A \wedge C$ et $A \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

16.44 Caractérisation des PGCD et PPCM

Propostion 16.44

Soit A et B deux polynômes non nuls, M et D deux polynômes. Alors

$$M = A \vee B \Leftrightarrow (M \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, M = AU = BV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

$$D = A \wedge B \Leftrightarrow (D \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, A = DU \text{ et } B = DV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

— $\boxed{\Rightarrow}$
$M = A \vee B$. On écrit $M = AU + BV$ avec $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$.
On note $R = U \wedge V$. On écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}M &= RAU_1 = RBV_1\\ \text{donc } R(AU_1 - BV_1) &= 0\\ \text{donc } AU_1 &= BV_1 \ (\mathbb{K}[X] \text{ est intègre})\end{aligned}$$

Donc $M_1 = AU_1 = BV_1$ est un multiple commun et par minimalité des degrés :

$$RM_1 = M|M_1 \text{ donc } R = 1$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, M est un multiple commun, donc :

$$M \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$$

Donc $A \vee B | M$.
Donc $M = D \times A \vee B$.
Or $A \vee B = AU_1 = BV_1$.
Donc $M = DAU_1 = DBV_1 = AU = BV$.
Donc :

$$A(DU_1 - U) = 0$$
$$B(DV_1 - V) = 0$$

Or $\mathbb{K}[X]$ est intègre donc $DU_1 = U$ et $DV_1 = V$.
Donc $D|U \wedge V = 1$.

— $\boxed{\Rightarrow}$
$D = A \wedge B$. On écrit $A = DU$ et $B = DV$.
Or pour $R = U \wedge V$, on écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Donc $A = DRU_1$ et $B = DRV_1$.
Donc $DR|A$ et $DR|B$.
Donc $DR|D$.
Nécessairement, $R = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, $D|A$ et $D|B$, donc $D|A \wedge B$.
Comme $U \wedge V = 1$, d'après le théorème de Bézout :

$$\begin{aligned} UU_1 + VV_1 &= 1 \\ \text{donc } DUU_1 + DVV_1 &= D \\ \text{soit } AU_1 + BV_1 &= D \\ \text{donc } A \wedge B &| D \end{aligned}$$

Ainsi, $A \wedge B$ et D sont associés. Or ils sont unitaires, donc égaux.

16.53 Caractérisation des racines par la divisibilité

Théorème 16.53

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{K}$. Alors r est racine de P si et seulement si $X - r$ divise P. Donc s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - r)Q$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $P = (X - r)Q$, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(r) &= (X - r)\tilde{Q}(r) \\ &= 0 \times \tilde{Q}(r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose r racine de P.
On effectue la division euclidienne de P par $X - r$:

$$P = (X - r)Q + R, R \in \mathbb{K}_0[X]$$

Donc $0 = \tilde{P}(r) = \tilde{R}(r)$.
Donc $R = 0$.
Donc $X - r|P$.

16.56 Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème 16.56

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré d et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On note $E_k = X^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
On a, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$E_k^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_k(X+a) &= (X+a)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \end{aligned}$$

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k E_k$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(x+a) &= \sum_{k=0}^{d} a_k E_k(X+a) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=i}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} P^{(i)}(a) X^i \end{aligned}$$