

# Chapitre 28

## Matrice d'une application linéaire

<b>28 Matrice d'une application linéaire</b>	<b>1</b>
28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs	2
28.6 Exemple	2
28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes	3
28.13 Exemple	3
28.15 Exemple	3
28.18 Exemple	3
28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire	4
28.20 Exemple	5
28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires	6
28.22 Exemple	7
28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde	8
28.28 Exemple	8
28.29 Exemple	9
28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice	9
28.35 Invariance du rang par une matrice inversible	9
28.37 Exemple	10
28.38 Matrice de changement d'une base à une autre	10
28.41 Exemple	11
28.42 Changement de bases pour une application linéaire	11
28.47 Exemple fondamental	11
28.48 Invariance du rang par transposition	12
28.52 Rang d'une matrice extraite	12
28.57 Invariance du rang et de la trace par similitude	12

## 28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

### Théorème 28.5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est inversible.

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $E$ .

On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre (car  $|\mathcal{F}| = \dim E$ ), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$$

Or pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M \end{aligned}$$

En conclusion,  $\mathcal{F}$  est une base si et seulement si  $\ker M = \{0\}$ , si et seulement si  $M$  est inversible.

## 28.6 Exemple

### Exemple 28.6

Montrer que la famille  $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$  de  $\mathbb{R}[X]$  est libre.

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc libre.

## 28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes

### Théorème 28.9

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible
- la famille des colonnes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ ,  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ ,  $\mathcal{B}_n$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$  est inversible (28.8).

Si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (28.5).

Si et seulement si  ${}^t A$  est inversible (11.42).

Si et seulement si  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

## 28.13 Exemple

### Exemple 28.13

On note  $T$  l'endomorphisme  $P \mapsto X^2 P'' + P(1)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{B}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(T)$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\ T(1) &= 1 \\ T(X) &= 1 \\ T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\ T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 28.15 Exemple

### Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$$

## 28.18 Exemple

### Exemple 28.18

On note  $\varphi$  l'application canoniquement associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}'_2$  la base  $((0, 1), (1, 0))$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}'_3$  la base  $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi)$ .

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y). \\ \varphi(1, 0) &= (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .) \\ \varphi(0, 1) &= (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

### Théorème 28.19

Soit  $E \neq \{0\}$  et  $F \neq \{0\}$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $p$  et  $n$ ,  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ . Alors :

$$\underbrace{\text{Mat}_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{\text{Mat}_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{\text{Mat}_e(x)}_{(p,1)}$$

On note  $e = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\text{Mat}_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Soit  $x \in E$ . On écrit  $m = \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j$ . Par conséquent :

$$\text{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^p m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^n [M \times \text{Mat}_e(x)]_i f_i\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times \text{Mat}_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times \text{Mat}_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times \text{Mat}_e(x)\end{aligned}$$

## 28.20 Exemple

### Exemple 28.20

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(3, 2X^2 + X)$  et  $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ .

On a :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c)$$

$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a)$$

— Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= \text{Vect}(X^2 - 2X) \\ &= \text{Vect}(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \text{Im}(M) &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 + X + 2X^2)$$

## 28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

### Théorème 28.21

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles  $p$  et  $n$  respectivement. L'application  $u : \text{Mat}_{e,f}(u)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
2. Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions non nulles et de bases respectives  $e$ ,  $f$  et  $g$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \times \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimensions finies et non nulles. Soit  $e$  une base de  $E$ ,  $f$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  si et seulement si  $\text{Mat}_{e,f}(u)$  est inversible. Dans ce cas on a :

$$\text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application  $u \mapsto \text{Mat}_{e,f}(u)$  est bijective. Par construction, elle est bien linéaire.
2. Soit  $x \in F$ .

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,g}(v \circ u) \text{Mat}_e(x) &= \text{Mat}_g(v \circ u(x)) \\ &= \text{Mat}_g(v(u(x))) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_f(u(x)) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u) \text{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

Nécessairement :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) &= \text{Mat}_f(u \circ u^{-1}) \\ &= \text{Mat}_f(\text{id}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$

On note  $P = M^{-1}$ . D'après le premier point, on note  $\sigma$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(F, E)$  tel que  $\text{Mat}_{f,e}(\sigma) = P$ .

On a :

$$\text{Id} = MP = \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(v) = \text{Mat}_f(u \circ v)$$

Donc :

$$u \circ v = \text{id}$$

Donc ( $E$  est de dimension finie) :

$$u^{-1} = v$$

## 28.22 Exemple

### Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme  $\omega$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à  $Vect(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$  parallèlement à  $Vect(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$ .

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + c - d \\ -a + c - d \\ 2b - 2d \\ -a + 2b + c - 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ -a + 2b + c - 3d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= c - d \\ b &= d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Donc } \ker(\omega - id) = Vect(1 + X^2, -1 + X + X^3).$$

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c - d \\ -a + 2b + c - d \\ 2b + 2c - 2d \\ -a + 2b + c - d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (\Omega + I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c + d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c + d \\ -c + d \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker(\omega + id) = \text{Vect}(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$ .

## 28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

### Théorème 28.23

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . On appelle **matrice de Vandermonde de  $x_1, \dots, x_n$**  la matrice  $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont distincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit  $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$ .

On suppose que tous les  $x_i$  sont distincts deux à deux.

Si  $P \in \ker \varphi$ ,  $P$  possède (au moins)  $n$  racines distinctes, or  $\deg P \leq n - 1$  donc par rigidité,  $P = 0$ .

Donc  $\varphi$  est injective ( $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$ ).

Donc  $\varphi$  est un isomorphisme ( $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$ ).

Or, en notant  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^n$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc  $M$  est inversible (28.21).

Si  $x_1 = x_j$  avec  $x \neq j$ ,  $M$  possède deux lignes identiques, donc  $M \notin GL_n(\mathbb{K})$  (28.9).

## 28.28 Exemple

### Exemple 28.28

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3 et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $u$  est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base,  $u$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

— D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\text{rg } u}_{\geq 1} = 3$$

Comme  $u^2 = 0$ ,  $\text{Im } u \subset \ker u$ .

On a nécessairement  $\text{rg } u = 1$  et  $\dim \ker u = 2$ .



- Soit  $x \in E$  tel que  $u(x) \neq 0$ . Or  $u(x) \in \ker u$  et  $\dim \ker u = 2$ , on complète donc  $(u(x), y)$  en une base de  $\ker u$ .
- La famille  $(y, x, u(x))$  est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c = 0 &\text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$  est de cardinal 3 =  $\dim E$ , donc est une base de  $E$  et :

$$\text{Mat}_{(u(x), y, x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.29 Exemple

### Exemple 28.29

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang  $r$ .

Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et une base  $f$  de  $F$  telles que  $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$ , où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Comme  $\text{rg } u = r$ ,  $\dim \ker u = p - r$  ( $p = \dim E$ ).

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ .

$\dim S = r$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$  une base adaptée à  $E = S \oplus \ker u$ .

$(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une base de  $\text{Im } u$ , donc libre dans  $F$ , que l'on complète en une base  $f$  de  $F$ .

Par construction :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

### Proposition 28.33

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit  $e$  et  $f$  deux bases quelconques, respectivement de  $E$  et  $F$ . Alors :

$$\text{rg } u = \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u)$$

On note  $e = (e_i)$ .

$$\begin{aligned} \text{rg } \dim \text{Vect}((u(e_i))) &= \dim \text{Vect}((C_i)) \\ &= \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u) \end{aligned}$$

## 28.35 Invariance du rang par une matrice inversible

### Proposition 28.35

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ , alors :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg } M$$

Soit  $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$  les applications canoniquement associées à  $M, P, R$ .  
 $\hat{P}, \hat{R}$  sont des isomorphismes ( $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ ). Ainsi :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg}(\hat{P} \circ \hat{M} \circ \hat{R}) = \text{rg}(\hat{M}) = \text{rg } M$$

## 28.37 Exemple

### Exemple 28.37

Déterminer le rang de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est 2 donc  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ .

## 28.38 Matrice de changement d'une base à une autre

### Théorème 28.38

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et  $e, f$  et  $g$  trois bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage de  $e$  à  $f$**  la matrice :

$$\text{Mat}_e(f) = \text{Mat}_{f,e}(\text{id}_E)$$

Cette matrice est souvent notée  $P_e^f$  (ou quelques fois  $P_{e \rightarrow f}$ ). De plus :

1.  $P_e^f$  est inversible, d'inverse  $P_f^e$ .
2.  $P_e^f \times P_f^g = P_e^g$ .

1. On a  $P_e^f = \text{Mat}_{f,e}(\text{id})$ .  
Donc ( $\text{id}$  est inversible) :

$$(P_e^f)^{-1} = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}) = P_f^e$$

- 2.

$$\begin{aligned} P_e^f \times P_f^g &= \text{Mat}_{f,e}(\text{id}) \times \text{Mat}_{g,f}(\text{id}) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id} \circ \text{id}) \quad (28.21) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id}) \\ &= P_e^g \end{aligned}$$

## 28.41 Exemple

### Exemple 28.41

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Notons  $e = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et posons

$$\begin{cases} u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j \\ v_\theta = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases}$$

La matrice de la famille  $(u_\theta, v_\theta)$  dans la base  $(i, j)$  est :

$$\text{Mat}_{(i,j)}(u_\theta, v_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut 1 (et donc non nul), alors  $b_\theta = (u_\theta, v_\theta)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer les coordonnées de  $u$  dans la nouvelle base  $b_\theta$ .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_e((x, y))$ .

On note  $X' = \text{Mat}_{(u_\theta, v_\theta)}((x, y))$ .

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X &= PX' \\ \text{donc } X' &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta x & \sin \theta y \\ -\sin \theta x & \cos \theta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y)u_\theta + (-\sin \theta x + \cos \theta y)v_\theta$ .

## 28.42 Changement de bases pour une application linéaire

### Théorème 28.42

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles,  $e$  et  $e'$  deux bases de  $E$ ,  $f$  et  $f'$  deux bases de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e',f'}(u) = P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'}$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e',f'}(u) &= \text{Mat}_{e',f'}(\text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E) \\ &= \text{Mat}_{f',f'}(\text{id}) \times \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{e',e}(\text{id}) \\ &= P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'} \end{aligned}$$

## 28.47 Exemple fondamental

### Proposition 28.47

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient à dire que toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est équivalente à  $J_r$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application canoniquement associée à  $M$ .

Donc  $\text{rg } u = r$ .

D'après (28.29), on choisit une base  $e$  de  $\mathbb{K}^p$  et  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  telles que :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$$

D'après (28.44),  $M$  et  $\text{Mat}_{e,f}(u)$  sont équivalentes, soit :

$$M \sim J_r$$

## 28.48 Invariance du rang par transposition

### Théorème 28.48

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on a  $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$ .

En effet car  ${}^t(J_r) = J_r$ .

Ainsi,  $A \sim J_r$ .

Alors  $A = Q^{-1} J_r P$ .

Et  ${}^t A = {}^t P J_r {}^t Q^{-1}$ .

Donc  ${}^t A \sim J_r$ .

Donc  $\text{rg } {}^t A = \text{rg } A$ .

## 28.52 Rang d'une matrice extraite

### Proposition 28.52

Pour toute matrice  $B$  extraite de  $A$ , on a  $\text{rg } B \leq \text{rg } A$ . Le rang de  $A$  est la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de  $A$ .

Extraire une matrice  $B$  de  $A$  revient à supprimer des colonnes et des lignes de  $A$ .

On note  $C$  la matrice intermédiaire en supprimant les colonnes de  $A$ .

Ainsi,  $B$  s'obtient à partir de  $C$  en supprimant les lignes de  $C$ .

Par définition (28.30),  $\text{rg } C \leq \text{rg } A$ .

Puis (28.49),  $\text{rg } B \leq \text{rg } C$ .

On note  $r$  le rang de  $A$ .

D'après (28.30), il existe  $r$  colonnes de  $A$  linéairement indépendantes.

Soit  $C$  la matrice extraite de  $A$ , constituée de ses vecteurs colonnes.

En particulier,  $\text{rg } C = r$ .

D'après (28.49), il existe  $r$  vecteurs lignes de  $C$ , libres.

On note  $B$  la matrice (extraite de  $C$ ) constituée de ces vecteurs lignes.

On a  $\text{rg } B = r$  et  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ .

Donc  $B \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$  (28.9).

## 28.57 Invariance du rang et de la trace par similitude

### Proposition 28.57

Deux matrices semblables ont même rang et même trace.

- Deux matrices semblables sont équivalentes (28.54) et ont le même rang (28.47).
- Si  $B = P^{-1}AP$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{tr } B &= \text{tr}(P^{-1}AP) \\ &= \text{tr}(APP^{-1}) \\ &= \text{tr}(A) \end{aligned}$$

La trace est et le rang sont des invariants de similitude.