Chapitre 27

Séries numériques

27.6 Série géométrique

Théorème 27.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \ (a \neq 1) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \ (|a| < 1) \end{aligned}$$

La série converge et $\sum\limits_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

Propostion 27.11

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.
D'après les hypothèses, A est majoré donc possède un maximum N d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.
On note (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Pour $n \geq N$:

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k\in A}(u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge.

27.12 CN de convergence portant sur le terme général

Théorème 27.12

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. De manière équivalente, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théroème de comparaison sur les suites.

27.20 Convergence absolue entraîne convergence

Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
  On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$
  Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
  Or, pour tout n :
  $$0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$
  $$0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$
  Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent et par linéarité (27.16) $\sum u_n$ converge.
- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
  Alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| \leq |u_n|$$
  $$|Im(u_n)| \leq |u_n|$$
  Donc, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16) $\sum u_n$ converge.

27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

Théorème 27.23

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :
- La convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
- La divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

On suppose $u_n = O(v_n)$ avec $v_n \geq 0$.
- On suppose que $\sum v_n$ converge. On a $|u_n| = O(v_n)$ donc à partir d'un certain rang :
  $$0 \leq |u_n| \leq M v_n$$
  D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum |u_n|$ diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence

Théorème 27.24

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
On conclut avec (27.23).

27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale

Théorème 27.25

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge aussi (i.e. $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie).

D'après le TLM ($f \geq 0$), $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)\,dt$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geq a$. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.
Comme f est décroissante, pour tout $n \geq n_0$:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

Donc par Chasles :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1)}_{\sum\limits_{k=n_0}^{n+1} f(k)-f(n_0)} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

D'après le TLM :
- Si $\sum(f_n)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$, alors $\sum(f_n)$ converge.

Exercice 1

Exercice 27.1

En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{o(1)} \\ &\geq \frac{1}{2n} \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2

Exercice 27.2

En utilisant un théorème de comparaison par domination ou négligabilité, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}}-\lfloor n^{\frac{3}{2}}\rfloor+n}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{O(1)+n}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-e\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{e-e\left(1-\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n+o(n)}
\end{aligned}$$

Par comparaison par $\sim$, $\sum u_n$ est convergent.

27.29 Nature des séries de Riemann

Théorème 27.29

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Si $\alpha < 0$, la divergence est grossière.
- On a montré que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- Si $\alpha \in]0,1]$:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$$

  Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Soit $\alpha > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décoroissante et positive sur $[1,+\infty[$.
  Pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x\\
&= \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)}\\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

  Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

27.30 Nature des séries exponentielles

Théorème 27.30

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et sa somme vaut e^x.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  Par comparaison par domination à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.
- Soit $x \in \mathbb{R}, \exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt$$

On pose $M = \max(1, e^x)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!}\,dt\right| &\leq \pm \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M\,dt \\ &= M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

27.32 Nature des séries de Bertrand - Hors Programme

Propostion 27.32 - HP

La **série de Bertrand de paramètre** $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ est définie par $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. Elle est convergente si et seulement si $(\alpha,\beta) > (1,1)$ pour l'ordre lexicographique. Cela signifie :
- si $\alpha > 1$, la série converge
- si $\alpha < 1$, la série diverge
- pour $\alpha = 1$:
  - si $\beta > 1$, la série converge
  - si $\beta \leq 1$, la série diverge

- Si $\alpha > 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$$

Comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.
- Si $\alpha < 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

Comme $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge.
- Si $\alpha = 1$. Pour $\beta = 1$, $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge (comparaison série intégrale).
Pour $\beta < 1$:

$$\frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{n\ln^\beta n}$$

$\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n\ln^\beta n}$ diverge.
Pour $\beta > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t\ln^\beta t}$ est positive et décroissante sur $[2,+\infty[$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \int_2^x \frac{1}{t}\times(\ln t)^{-\beta}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta-1}$$

Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n\ln^\beta n}$ converge.

27.35 Règle d'Alembert - Hors Programme

Théorème 27.35 - HP

Soit $\sum u_n$ à termes quelconques non nuls. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une liite (finie) ℓ. Alors :
1. si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
2. si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
3. si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

—

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0,1[$$

A partir d'un rang n_0 :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\ell+1}{2}$$

On a directement :

$$0 \leq |u_n| \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \times |u_{n_0}|}_{\text{terme général d'une série géométrique de raison } \frac{\ell+1}{2}}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
- Même raisonnement si $\ell > 1$.
- $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ fournissent des contre-exemples.

27.39 Critère spécial des séries alternées

Théorème 27.39

Toute série alternée est convergente.

Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Ainsi, $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. (a_n) est décroissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On note (S_n) la suite des sommes partielles associée à cette série. Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
-
$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
- Pour $n \geq 0$:
$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes, donc elles convergent vers une limite commune.
Donc (S_n) converge, donc $\sum(-1)^n a_n$ converge.

27.42 Majoration du reste d'une série alternée

Propostion 27.42

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On note R_n le reste d'ordre n. Alors :
1. R_n est du signe de u_{n+1}
2. On a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

On reprend les notations de (27.39).

$$\forall n \geq 0, u_n = (-1)^n a_n$$

1. D'après la démonstration de (27.39), on a :

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} \leq \sum_{k\geq 0} u_k \leq S_{2n}$$

Donc :

$$\forall n \geq 0, R_{2n} = \sum_{k \geq 0} u_k - S_{2n} \leq 0$$
$$R_{2n+1} = \sum_{k \geq 0} u_k - S_{2n+1} \geq 0$$

On obtient alors le résultat souhaité.

2. Soit $n \geq 0$:

$$|R_{2n}| = -R_{2n} = -\sum u_k + S_{2n} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n+1} = |u_{2n+1}|$$
$$|R_{2n+1}| = R_{2n+1} = \sum u_k - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} = |u_{2n+2}|$$