Chapitre 19

Convexité

19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Propostion 19.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur, soit sur $I \cap]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$.

On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$.
g paramètre la sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

— Sur $[x, y]$, RAF car f est convexe.
— Soit $t > y$. On pose $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y))}{t-x} \\ &= y\end{aligned}$$

Par convexité de f :

$$\begin{aligned}f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{y} f(y) - \left(\frac{1}{y} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si $t \leq x < y$.

19.8 Inégalités des pentes

Propostion 19.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

1. f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.
2. Si f est convexe, alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$
On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et $x < y$ dans $I \backslash \{a\}$.
— On suppose $x < a < y$. D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a)) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Si $x < a < y$, d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que pour tout $a \in I$, $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.
Soit $x < y$ et $\lambda \in]0,1[$. On pose $a = \lambda y + (1-\lambda)x$.
g_a est croissante sur $I \backslash \{a\}$, donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
x-a<0 \text{ et } y-a>0 \\
(f(x)-f(a))(y-a) \leq (f(y)-f(a))(x-a) \\
\text{donc } f(a)(y-x) \leq f(x)(y-a) - f(y)(x-a) \\
\text{soit } f(a) \leq f(x)\frac{y-a}{y-x} + f(y)\frac{a-x}{y-x} \\
= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)
\end{aligned}$$

2. Soit $a < b < c$.

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 19.9

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert. La fonction f est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites osnt envisageables). Pour tout $a \in I$, on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour $a \in I$, on note encore $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Comme g est définie à gauche et à droite de a (I est ouvert) et que g est croissante sur $I \backslash \{a\}$, d'après le TLM g admet des limites finies à gauche et à droite de a et :

$$\begin{aligned}
\lim_{a^+} g = f'_d(a) \geq f'_g(a) = \lim_{a^-} g \\
\forall x \neq a, f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a) \\
\xrightarrow[x \to a^+]{} f(a) \\
\xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)
\end{aligned}$$

19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

Théorème 19.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $x < y$. Soit a tel que $x < a < y$.
D'après l'inégalité des pentes (f est convexe), on a :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

En considérant les limiets $a \to x^+$ et $a \to y^-$ et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose f' croissante sur I. Soit $x < y$. Soit $a \in]x,y[$.
On applique deux fois le TAF : on choisit $\alpha \in]x,a[$ et $\beta \in]a,y[$ tels que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{-x+a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\beta)$$

Comme f' est croissante, on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, soit :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$
$$\text{donc } f(a) \leq \frac{a-x}{y-x}f(y) + \frac{y-a}{y-x}f(x)$$

Comme $a \in]x,y[$, $a = \lambda y + (1-\lambda)x$ et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$$

Donc f est convexe (sur I).