Chapitre 22

Espaces de dimension finie

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Propostion 22.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$P(k) : \text{"}E \text{ est engendré par } n-k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}\text{"}$$

Pour $k = 0$, la famille convient.
On suppose que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E = Vect(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in L})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i l_j$.
Comme $\mathcal{L}$ est libre, $l_{k+1} \notin Vect(l1, \dots, l_k)$.
Donc il existe $i \in [\![1, n-k]\!], \alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i, on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_n + 1)$$

Ainsi :

$$E = Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in [\![0, n]\!]$, en particulier, $P(n)$ est vraie.
$(l1, \dots, l_n)$ est une base de E. Or $l_{n+1} \in E$ et $(l_1, \dots, l_{n+1})$ libre. Absurde.

22.5 Algroithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et de certains vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$.

On utilise l'algorithme suivant :
On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$:
- Si $x_k \in Vect(\mathcal{F})$, on laisse $\mathcal{F}$ invariant.
- Si $x_k \notin Vect(\mathcal{F})$, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.
La famille $\mathcal{F}$ obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in Vect(\mathcal{F})$$

Donc $E = Vect(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \subset Vect(\mathcal{F}) \subset E$. Donc $\mathcal{F}$ est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.

1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant $\mathcal{L}$.

2. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de $\mathcal{G}$ et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
   La base obtenue est bien constituée de vecteurs de $\mathcal{G}$.

Remarque

Remarque

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.