Chapitre 1

Calculs Algébriques

1.20 Somme des carrés et des cubes

— Somme des carrés :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : « \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} »$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— Somme des cubes :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : « \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} »$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1)^2}{4} = 0$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.39 Formule de Pascal

Démontrons pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ la relation :

$$\text{« } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \text{ »}$$

La relation est vraie si $p > n$ (on a $0 = 0 + 0$) et si $p = n$ (qui donne $1 = 0 + 1$).

Soit $1 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right) \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{(p-1)!(n-1-p)! \times p(n-p)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$

1.41 Formule du capitaine

Démontrons pour n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$ la relation :

$$\text{« } n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p} \text{ »}$$

On a :

$$n\binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p\binom{n}{p}$$

1.42 Formule du binôme de Newton

Soit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la proposition :

$$P(n) : \text{« } (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \text{ »}$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$(x+y)^0 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \textit{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n+1-k}) && \textit{(linéarité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && \textit{(translation)} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n+1-k} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} && \textit{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$