Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f =_a O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f =_a o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1. $f =_a O(g)$ ssi il existe h bornée au voisinage de a tel que $f = g \cdot h$

   ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \to a$, $f(u_n) = g(u_n) \times w_n$ où (w_n) est une suite bornée.

   $\boxed{\Rightarrow}$ $w_n = h(u_n)$ ssi bornée $\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde avec (25.5).

   ssi Pour toute suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \to a$, $f(u_n) = O(g(u_n))$.

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)