# Chapitre 16

# Arithmétique des polynômes

## 16.1 Division euclidienne

**Théorème 16.1**

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, il existe un unique couple de polynômes $(Q, R)$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Le polynôme $Q$ est appelé **quotient** et $R$ le **reste**.

Existence :
On raisonne par récurrence sur le degré de $A$.

— Pour $n = \deg A = 0$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.
  — Si $\deg B > 0$, alors $(0, A)$ convient.

  — Si $\deg B = 0$, le couple $(B^{-1} \times A, 0)$ convient (comme $B$ est constant et non nul), alors $B \in \mathbb{K}^*$ donc inversible).

— On suppose le résultat vrai pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$.
Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ avec $\deg A = n + 1$.
On écrit $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$.
  — Si $\deg A < \deg B$, le couple $(0, A)$ convient.
  — Si $\deg A \geq \deg B$ et on note $b$ le coefficient dominant de $B$ :

$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$.
  Donc :

$$A = \left[Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}\right] \times B + R$$

Unicité :
On suppose que $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$.
Donc :

$$\begin{aligned} B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\ \text{donc } \underbrace{\deg\left(B(Q - Q_1)\right)}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg\left(R_1 - R\right) \\ &\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\ &< \deg B \\ \text{donc } \deg\left(Q - Q_1\right) &< 0 \\ \text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\ \text{puis } R_1 - R &= 0 \end{aligned}$$

## 16.7 Proposition 16.7

**Propostion 16.7**

On a :

1. Soit $A$ et $P$ deux polynômes non nuls. Si $A|P$ et si $P|A$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha A$. (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si $A|B$ et si $B|C$, alors $A|C$. La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $A|A$. La relation de divisibilité est réflexive.

1. $P \neq 0$, $A \neq 0$. Si $A|P$ et $P|A$, alors (16.6.2) :

$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$

Donc :

$$\deg P = \deg A$$

Or $A|P$, alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \text{ } (\mathbb{K} \text{ est intègre})$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS
3. RAS

## 16.15 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

**Théorème 16.15**

Soit $I$ un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$. Il existe un unique polynôme unitaire $D$ tel que

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

Existence :
Soit $I \neq \{0\}$ un idéal.
On note $A = \{\deg P, P \in I \backslash \{0\}\} \subset \mathbb{N}$.
$A \neq \emptyset$ ($I \neq \{0\}$), d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, $A$ possède un plus petit élément noté $n \geq 0$.
Comme $n \in A$, on choisit $D \in I$ tel que $\deg D = n$.
Comme $I$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}[X]$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha D \in I$$

On peut donc supposer $D$ unitaire. Comme $I$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, on a :

$$D \times \mathbb{K}[X] \subset I$$

Soit $P \in I$. On effectue la division euclidienne de $P$ par $D$ ($\neq 0$) :

$$P = BD + R$$

avec $\deg R \subset \deg D$.
Or :

$$\underbrace{R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{BD}_{\in I}}_{\in I}$$

Par définition de $\deg D = n$, $R = 0$.

Unicité :

$$I = D\mathbb{K}[X] = J\mathbb{K}[X]$$

avec $D$ et $J$ unitaires.
Or ils sont associés, donc égaux.

## 16.17 Existence de *pgcd*

**Propostion 16.17**

Si $A$ et $B$ sont deux polynômes non nuls, de tels PGCD existent.

Soit $A, B$ dans $\mathbb{K}[X]$, $(A, B) \neq (0, 0)$.
On note $\mathcal{C} = \{\deg P, P|A \text{ et } P|B \text{ et } P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.
$\mathcal{C} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est majoré par $\deg B$ $(\max(\deg A, \deg B))$.
L'existence est assurée par la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

## 16.18 Principalité de $\mathbb{K}[X]$

**Propostion 16.18**

Soit $A$ et $B$ deux polynômes non tous deux nuls. Soit $D \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\Delta$ est un PGCD de $A$ et $B$ si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X].$$

D'après (16.15), on choisit $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $D$ est un PGCD.
Donc $D|A$ et $D|B$.
Donc $D|F$ (combinaison $F \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$).
Or $F|A$ et $F|B$ ($A \in F\mathbb{K}[X]$, $B \in F\mathbb{K}[X]$).
Par maximalité de $\deg D$, on a $F$ et $D$ associés.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$D\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Donc $D|A$ et $D|B$.
Pour tout diviseur commun $P$ de $A$ et $B$, $P|A$ et $P|B$.
Donc $P|D$ ($D \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$).
Donc $\deg D$ est maximal pour la divisibilité.

## 16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire

**Lemme 16.24**

Soit $A$ et $B$ deux polynômes tels que $B \neq 0$. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $A \wedge B = (A - BQ) \wedge B$.
En particulier, si $Q$ et $R$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ Alors $A \wedge B = B \wedge R$.

$$\begin{aligned}(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= (A - BQ)\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= ((A - BQ) \wedge B)\mathbb{K}[X]\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $(A - BQ) \wedge B$ sont associés, unitaires par définition, donc égaux.

## 16.26 Exemple

**Exemple alternatif 16.26**

Trouver les PGCD de $A = X^5 + 2X$ et de $B = X^4 + 2X^3 + 4$ et une relation de Bézout.

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X &= (X^4 + 2X^3 + 4)(X - 2) + 4X^3 - 2X + 8 \\
X^4 + 2X^3 + 4 &= (4X^3 - 2X + 8)(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}X^2 - X \\
4X^3 - 2X + 8 &= (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16) + 14X + 8 \\
\frac{1}{2}X^2 - X &= (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{14 \times 7}) + \frac{9 \times 4}{7^2} \\
A \wedge B = 1 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{9 \times 4}{7^2} &= \frac{1}{2}X^2 - X - (14X + 8)(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2}) \\
&= \frac{1}{2}X^2 - X - (4X^3 - 2X + 8 - (\frac{1}{2}X^2 - X)(8X + 16))(\frac{1}{28}X - \frac{9}{2 \times 7^2})
\end{aligned}$$

## 16.27 Propriétés du PGCD

**Propostion 16.27**

L'opération $\wedge$ est commutative et associative. Par ailleurs, si $C$ est unitaire, alors $(A \wedge B)C = (AC) \wedge (BC)$.

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$ non tous nuls.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
&= B\mathbb{K}[X] + A\mathbb{K}[X] \\
&= (B \wedge A)\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge B$ et $B \wedge A$ sont associés et unitaires donc égaux.

$$\begin{aligned}
((A \wedge B) \wedge C)\mathbb{K}[X] &= (A \wedge B)\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] + C\mathbb{K}[X] \\
&= (A \wedge (B \wedge C))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Donc $A \wedge (B \wedge C)$ et $(A \wedge B) \wedge C$ sont associés et unitaires donc égaux.
On suppose $C$ unitaire.
On a :

$$\begin{aligned}
(A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\
\text{donc } (A \wedge B)C\mathbb{K}[X] &= AC\mathbb{K}[X] + BC\mathbb{K}[X] \\
&= ((AC) \wedge (BC))\mathbb{K}[X]
\end{aligned}$$

Ainsi $C(A \wedge B)$ et $(AC) \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

## 16.29 Existence de PPCM

**Propostion 16.29**

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $A$ et $B$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors $A$ et $B$ admettent des PPCM.

On note $\mathcal{D} = \{\deg P, A|P, B|P, P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

$$\deg AB \in \mathcal{D} \neq \emptyset$$

On conclut avec la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.

## 16.30 Caractérisation des PPCM par les idéaux

Propostion 16.30

Soit $A$ et $B$ deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P$ est un PPCM de $A$ et $B$ si et seulement si
$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X].$$

$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc de la forme $M\mathbb{K}[X]$ (16.15).
Montrons que $P$ est un PPCM de $A$ et $B$ si et seulement si $P$ et $M$ sont associés.

$\boxed{\Rightarrow}$
On a donc :

$$\begin{aligned} P &\in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \\ &\in M\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc $M|P$.
Or $M$ est un multiple commun à $A$ et $B$, donc par définition de $P$, on a :

$$\boxed{\deg P \leq \deg M}$$

Donc $P$ et $M$ sont associés.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose $P$ et $M$ associés, donc :

$$\begin{aligned} P\mathbb{K}[X] &= M\mathbb{K}[X] \\ &= A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

En particulier, $P$ est un multiple commun à $A$ et $B$ et pour tout $Q \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X]$, donc $P|Q$.
Donc :

$$\boxed{degP \leq \deg Q}$$

## 16.42 Cas d'unicité d'une relation de Bézout

Propostion 16.42

Soit $A$ et $B$ non constants et premiers entre eux. Il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU + BV = 1 \text{ et } \deg U < \deg B \text{ et } \deg V < \deg A.$$

<u>Existence :</u>
Soit $(C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que (16.37 - Bézout) :

$$AC + BD = 1$$

On effectue la dviision euclidienne de $C$ par $B$ :

$$\begin{aligned} C &= BE + U \text{ avec } \deg U < \deg B \\ \text{donc } AU + B(\underbrace{D + AE}_{V}) &= 1 \\ \text{donc } \deg(AU + BV) &= 0 \end{aligned}$$

Si $\deg V \geq \deg A$, alors :

$$\begin{aligned} \deg B + \deg V &\geq \deg B + \deg A \\ &> \deg U + \deg B \\ &= \deg AU \end{aligned}$$

Donc $\deg(AU + BV) = \deg BV > 0$.
Absurde.
L'exsitence est prouvée.

Unicité :
Avec es hypothèses correspondantes :

$$\begin{aligned} AU_1 + BV_1 &= 1 = AU_2 + BV_2 \\ \text{donc } A(U_1 - U_2) &= B(V_2 - V_1) \\ \text{donc } A &| B(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Or $A \wedge B = 1$, donc $A | (V_2 - V_1)$.
Or $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$.
Donc $V_2 - V_1 = 0$.
Puis $A(U_1 - U_2) = 0$, donc $U_1 - U_2 = 0$ car $\mathbb{K}[X]$ est intègre avec $A \neq 0$.

## 16.43 Corollaire

**Corollaire 16.43**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois polynômes avec $A$ et $B$ premiers entre eux. Alors $A \wedge (BC) = A \wedge C$.

— $A \wedge C | A$ donc $A \wedge C | A \wedge (BC)$. Donc $A \wedge C | BC$.
— $A \wedge (BC) | A$. Or $A \wedge B = 1$ donc on peut écrire $AU + BV = 1$. Donc $ACU + BCV = C$.
Or $A \wedge (BC) | ACU + BCV$ soit $A \wedge (BC) | C$. Donc $A \wedge (BC) | A \wedge C$.

Ainsi, $A \wedge C$ et $A \wedge (BC)$ sont associés et unitaires donc égaux.

## 16.44 Caractérisation des PGCD et PPCM

**Propostion 16.44**

Soit $A$ et $B$ deux polynômes non nuls, $M$ et $D$ deux polynômes. Alors

$$M = A \vee B \Leftrightarrow (M \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, M = AU = BV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

$$D = A \wedge B \Leftrightarrow (D \text{ unitaire et } \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, A = DU \text{ et } B = DV \text{ et } U \wedge V = 1).$$

— $\boxed{\Rightarrow}$
$M = A \vee B$. On écrit $M = AU + BV$ avec $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$.
On note $R = U \wedge V$. On écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} M &= RAU_1 = RBV_1 \\ \text{donc } R(AU_1 - BV_1) &= 0 \\ \text{donc } AU_1 &= BV_1 \; (\mathbb{K}[X] \text{ est intègre}) \end{aligned}$$

Donc $M_1 = AU_1 = BV_1$ est un multiple commun et par minimalité des degrés :

$$RM_1 = M|M_1 \text{ donc } R = 1$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, $M$ est un multiple commun, donc :

$$M \in A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = (A \vee B)\mathbb{K}[X]$$

Donc $A \vee B|M$.
Donc $M = D \times A \vee B$.
Or $A \vee B = AU_1 = BV_1$.
Donc $M = DAU_1 = DBV_1 = AU = BV$.
Donc :

$$A(DU_1 - U) = 0$$
$$B(DV_1 - V) = 0$$

Or $\mathbb{K}[X]$ est intègre donc $DU_1 = U$ et $DV_1 = V$.
Donc $D|U \wedge V = 1$.

— $\boxed{\Rightarrow}$
$D = A \wedge B$. On écrit $A = DU$ et $B = DV$.
Or pour $R = U \wedge V$, on écrit $U = RU_1$ et $V = RV_1$.
Donc $A = DRU_1$ et $B = DRV_1$.
Donc $DR|A$ et $DR|B$.
Donc $DR|D$.
Nécessairement, $R = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Par hypothèse, $D|A$ et $D|B$, donc $D|A \wedge B$.
Comme $U \wedge V = 1$, d'après le théorème de Bézout :

$$\begin{aligned} UU_1 + VV_1 &= 1 \\ \text{donc } DUU_1 + DVV_1 &= D \\ \text{soit } AU_1 + BV_1 &= D \\ \text{donc } A \wedge B&|D \end{aligned}$$

Ainsi, $A \wedge B$ et $D$ sont associés. Or ils sont unitaires, donc égaux.

## 16.53 Caractérisation des racines par la divisibilité

**Théorème 16.53**

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{K}$. Alors $r$ est racine de $P$ si et seulement si $X - r$ divise $P$. Donc s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - r)Q$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $P = (X - r)Q$, alors :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(r) &= (X - r)\tilde{Q}(r) \\ &= 0 \times \tilde{Q}(r) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose $r$ racine de $P$.
On effectue la division euclidienne de $P$ par $X - r$ :

$$P = (X - r)Q + R, R \in \mathbb{K}_0[X]$$

Donc $0 = \tilde{P}(r) = \tilde{R}(r)$.
Donc $R = 0$.
Donc $X - r|P$.

## 16.56 Formule de Taylor pour les polynômes

**Théorème 16.56**

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $P$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $d$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On note $E_k = X^k$, pour $k \in \mathbb{N}$.
On a, pour $i \in \mathbb{N}$ :

$$E_k^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_k(X+a) &= (X+a)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a^{k-i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \end{aligned}$$

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k E_k$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(x+a) &= \sum_{k=0}^{d} a_k E_k(X+a) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k} \frac{E_k^{(i)}(a)}{i!} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left( \sum_{k=i}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} \left( \sum_{k=0}^{d} a_k E_k^{(i)}(a) \right) X_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{i!} P^{(i)}(a) X^i \end{aligned}$$

## 16.57 Caractérisation de la multiplicité par les dérivées

**Théorème 16.57**

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Le réel $a$ est racine d'ordre multiplicité $k$ de $P$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i \\ &= \sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i \\ &= (X-a)^k \underbrace{\sum_{i=k}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i-k}}_{=Q} \end{aligned}$$

$$Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

$\boxed{\Rightarrow}$
$P = (\underbrace{X-a}_{B})^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
Pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$ :

$$\begin{aligned} P^{(i)} &= (BQ)^{(i)} \\ &= \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} B^{(l)} Q^{(i-l)} \\ P^{(i)}(a) &= 0 \\ P^{(k)} &= \binom{k}{k} B^{(k)}(a) \times Q^{(k-k)}(a) \\ &= k! \times Q(a) \neq 0 \end{aligned}$$

## 16.59 Caractérisation de la multiplicité des racines par la divisibilité

**Théorème 16.59**

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r_1, \dots, r_k$ des racines deux à deux distinctes de $P$, de multiplicités respectives $a_1, \dots, a_k$. Alors $(X-r_1)^{a_1} \dots (X-r_k)^{a_k}$ divise $P$ et $r_1, \dots, r_k$ ne sont pas racines du quotient.

RAF :

$$(X-r_i)^{\alpha_1} \wedge (X-r_k)^{\alpha_k} = 1 \text{ si } i \neq k$$

## 16.63 Polynômes formels et fonctions polynomiales

**Théorème 16.63**

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Alors l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[x]$ qui à un polynôme formel associe sa fonction polynomiale est un isomorphisme d'anneaux.

RAF : $\varphi(P) = \varphi(Q)$ donc $\varphi(P-Q) = 0$
$\tilde{P} - \tilde{Q}$ s'annule sur $\mathbb{K}$ infini et on applique (16.62).

## 16.66 Caractérisation des polynômes interpolateurs

**Lemme 16.66**

Le polynôme $L_i$ est l'unique polynôme de degré au plus $n$ tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

<u>Existence :</u> RAF
<u>Unicité :</u> (16.61.3)

## 16.69 Corollaire

**Corollaire 16.69**

Soit $P$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et aux valeurs $(y_i)_{0\leq i\leq n}$
Soit $P_0 = (X-x_0)\dots(X-x_n)$. L'ensemble $E$ des polynômes $Q$ (sans restriction de degré) tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!], Q(x_i) = y_i$ est décrit par

$$E = P + (P_0) = \{P + (X-x_0)\dots(X-x_n)R, R \in \mathbb{K}[X]\}$$

$\boxed{\supset}$
Si $Q = P + (X-x_0)\dots(X-x_n)R$, alors :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], Q(x_i) = P(x_i) = y_i$$

Donc $Q \in E$.

$\boxed{\subset}$
Soit $Q \in E$, alors $x_0, \dots, x_n$ sont racines de $Q-P$.
Donc $(X-x_0)\dots(X-x_n)|Q-P$.

## 16.74 Proposition

**Propostion 16.74 (HP)**

Soit $P$ un polynôme scindé non constant de $\mathbb{R}[X]$ à racines simples. Alors $P'$ est scindé, et ses racines séparent celles de $P$.

Soit $P = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ avec $x_1 < \dots < x_n$.
D'après le théroème de Rolle, comme $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n)$ pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on choisit $y_k \in ]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.
On a donc :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$$

et $y_1, \dots, y_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de $P'$ de degré $n-1$ ($\mathbb{R}$ de caractéristique nulle).
Donc $P'$ est scindé (à racines simples).

## 16.76 Relation de Viète

**Théorème 16.76**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré $n$, scindé, de racines (éventuellement non distinctes, apparaissant dans la liste autant de fois que sa multiplicité) $r_1, \dots, r_n$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ :

$$\sum_{1\leq i_1 < \dots < i_k \leq n} r_{i_1}\dots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= a_n \prod_{k=1}^{n}(X-r_k) \end{aligned}$$

Les relations de Viète consistent simplement à développer l'expression de droite et à identifier les mnômes de degré $n-k$.

$$a_{n-k} = (-1)^k a_n \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} r_{i_1} \ldots r_{i_k}$$

## 16.88 Lemme

**Lemme 16.88**

Soit $P$ un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $A$ un polynôme non multiple de $P$. Alors $A$ et $P$ ont premiers entre eux.

Soit $D$ unitaire $\in \mathcal{D}_{A,P}$.
Si $P \not| A$, alors $D \neq U(P)$.
Donc $D = 1$.
Donc $P \wedge A = 1$.

## 16.98 Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ par les racines

**Théorème 16.98**

Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Alors $P$ divise $Q$ si et seulement si toute racine de $P$ est aussi une racine de $Q$, et que sa multiplicité dans $Q$ est supérieure ou égale à sa multiplicité dans $P$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Supposons $P|Q$.
Soit $r$ une racine de $P$ de multiplicité $\alpha$. Donc :

$$\begin{gathered}(X-r)^\alpha | P \\ \text{donc } (X-r)^\alpha | Q\end{gathered}$$

Donc $r$ est racine de $Q$ de multiplicité supérieure à $\alpha$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On décompose $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^{\alpha_i}$ ($P$ est scindé sur $\mathbb{C}$).
Par hypothèse, $\prod_{i=1}^{n} (X-r_i)^{\alpha_i} | Q$.
Donc $P|Q$.

## 16.99 Caractérisation des polynômes à coefficients réels

**Théorème 16.99**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Les propositions sont équivalents :

1. $P$ est à coefficients réels ;
2. $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ;
3. pour tout $z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
RAF

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$
On suppose que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} (\overline{z})^k$$

Par hypothèse, pour $z \in \mathbb{R}$, $P(z) \in \mathbb{R}$, soit $\overline{P(z)} = P(z)$.
Ainsi, pour $z \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Les deux polynômes $\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ coincident sur une infinité de valeurs, donc (théorème de rigidité) ils sont égaux.
Donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = \overline{a_k}$$

Donc $P \in \mathbb{R}[X]$.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$
RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$
Si $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors en particulier pour $z \in \mathbb{R}$, $\overline{P(z)} = P(z)$ soit $P(z) \in \mathbb{R}$.

## 16.100 Racine complexe d'un polynôme réel

**Corollaire 16.100**

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels et $r$ une racine de $P$ dans $\mathbb{C}$. Si $r \notin \mathbb{R}$, alors $\overline{r}$ est aussi une racine de $P$ et elles ont la même multiplicité.

Soit $r$ une racine complexe de $P$.
Donc $P(r) = 0$.
Donc $\overline{P(r)} = 0$.
Donc (16.99.3) $P(\overline{r}) = 0$.
Donc $\overline{r}$ est aussi une racine de $P$.
Donc $(X - \overline{r})(X - r)|P$.
Donc $P = (X - \overline{r})(X - r)Q$ et si $r$ est une racine de $Q$, $\overline{r}$ également, ce qui justifie que $\overline{r}$ ala même multiplicité que $r$.

## 16.101 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

**Théorème 16.101**

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.
2. Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut être factorisé en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 ou de degré 2, de discriminant strictement négatif.

1. Les polynômes annoncés sont bien les seuls irréductibles dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg P \geq 3$. Dans $\mathbb{C}[X]$, $P$ est scindé.
   Si $P$ admet une racine dans $\mathbb{R}$, $P$ est réductible.
   Supposons maintenant que toutes les racines de $P$ sont complexes. Soit $r$ l'une d'entre elles.
   Alors $\overline{r} \neq r$ est aussi une racine de $P$.
   Donc $(X-r)(X-\overline{r})|P$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} P &= (X-r)(X-\overline{r})Q \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X] \\ &= (\underbrace{x^2 - 2Re(r)X + |r|^2}_{:=R\in\mathbb{R}[X]})Q \end{aligned}$$
   Donc $P = RQ$ est la division euclidienne de $P$ par $R$ dans $\mathbb{C}[X]$ et aussi dans $\mathbb{R}[X]$.
   Par unicité, on a donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.
2. RAF