

# Chapitre 24

## Comparaison locale des suites

<b>24 Comparaison locale des suites</b>	<b>1</b>
24.18Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité . . . . .	2
24.20Equivalent d'un polynôme . . . . .	2
24.31Exemple . . . . .	3
24.36Exemple . . . . .	4
24.43Exemple . . . . .	4
24.46Exemple . . . . .	5

## 24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Proposition 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

$\Rightarrow$

Si  $u_n \sim v_n$  à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &=_{n \rightarrow +\infty} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

Si  $u_n = v_n + o(v_n)$ , alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

## 24.20 Equivalent d'un polynôme

Proposition 24.20

Soit  $P$  un polynôme de monôme dominant  $a_d X^d$ . Alors  $P(n) \sim a_d n^d$ .

On note  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ .

Pour  $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$  :

$$n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(n^d) \text{ et } a_k n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k =_{n \rightarrow +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

## 24.31 Exemple

### Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sqrt{3n+1}}$$

On note  $u_n$  l'expression de l'exemple.

But : trouver un équivalent (simple) de  $u_n$ .

—

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

—

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{3}{n^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—

$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3} \times \frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{9}{n^4} \times \sqrt{3n}} \\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

## 24.36 Exemple

Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de  $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \frac{1}{n}\end{aligned}$$

## 24.43 Exemple

Exemple 24.43

Trouver un équivalent de  $\ln \sin \frac{1}{n}$ .

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1)) \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow -\infty} + o(1) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

## 24.46 Exemple

### Exemple 24.46

Soit  $(u_n)$  une suite non nulle de limite nulle. On admet que  $\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ , montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned} \exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &=_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(5n + n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &=_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$