Chapitre 18

Dérivabilité

18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP

Théorème 18.43 - HP

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \backslash \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

— On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que f' admet une limite finie en x_0.
On prolonge f' en une fonction g par continuité en x_0. Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
On remarque que pour tout $x \neq x_0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

où $a \in I \backslash \{x_0\}$ quelconque.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t)\, dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \to x_0}$$

Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \to x_0$.
On prolonge alors f par continuité en $\tilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

— On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$: "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.
Pour $n = 1$, c'est fait.
On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...
Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0.
D'après $P(n)$, on prolonge f' en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En particulier, g est continue sur I.
Donc f' admet une limite finie en x_0.
On applique $P(1)$. On prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Théorème 18.45

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f'(t)|\, dt \\
&\leq \int_a^b M\, dt \\
&= M|b - a|
\end{aligned}$$