Chapitre 30

Déterminant

30.4 Exemple

Exemple 30.4

On considère l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}; ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix}\right) \\
&= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\
&= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\
&= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

Propostion 30.11

Soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_{i,j})_{1\leq j\leq d}$ une base de E_i et pour tout $(j_1,\dots,j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \dots \times [\![1,d_n]\!]$, $f_{j_1,\dots,j_n} \in F$.
Alors il existe une unique application n-linéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ telle que :

$$\forall (j_1,\dots,j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \dots \times [\![1,d_n]\!], \varphi(e_{1,j_1},\dots,e_{n,j_n}) = f_{j_1,\dots,j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1\leq j\leq d}$ est une base de E_i alors $((e_{1,2},0,\dots,0,\dots,e_{1,d},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,e_{n,1},\dots,(0,\dots,0,e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \dots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.

30.18 Caractérisation par les transpositions

Lemme 30.18

Pour qu'une forme f soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si τ est une transposition alors $\varphi(x_{\tau_1},\dots,x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)(x_1,\dots,x_n)$.
Soit $\sigma \in S_n$. On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ avec τ_i des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(1)},\dots,x_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varphi(x_{\tau_2\circ\dots\circ\tau_k(1)},\dots,x_{\tau_2\circ\dots\circ\tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k)\varphi(x_1,\dots,x_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

Lemme 30.19

Soit φ une forme alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, alors φ est alternée.

Soit φ alternée.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

On suppose que $\text{carac}(\mathbb{K}) \neq 2$.
On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

Propostion 30.21

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée et φ une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, \dots x_n\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

30.22 Forme n-linéaire d'un espace de dimension n

Théorème 30.22

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Il existe une unique forme n-linéaire φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
2. Cette forme n-linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $\lambda\varphi$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\boxed{1, 2}$

On utilise le théorème de rigidité des applications n-linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$ avec $(i_1, \ldots, i_n) \in [\![1, n]\!]^n$.

— $\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ s'il existe $i_j - i_k$ avec $j \neq k$.
— $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1,\ldots,i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma\in\mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1,\ldots,e_n)}$.

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

$\boxed{3}$

Soit ψ une forme n-linéaire alternée. On pose $\lambda = \psi(e_1, \ldots, e_n)$.

— si $\lambda = 0$, par alternance (et anitsymétrie) on a $\psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_n$.
Par rigidité, $\psi = 0 = 0 \times \varphi$.
— si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}\psi(1, \ldots, e_n) = 1$.
Par unicité (1), $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$.
Donc $\psi = \lambda\varphi$.

30.25 Exemple

Exemple 30.25

On considère $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$. Soit $((a, b), (c, d)) \in E^2$. Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$.
$((a, b), (c, d)) \in (E)^2$.

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

30.26 Description du déterminant par les coordonnées

Théorème 30.26

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de E, dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \text{ (multilinéarité)} \\
&= \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\} = [\![1,n]\!]} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \text{ (alternance)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \text{ (reformulation)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}
\end{aligned}$$

30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

Propostion 30.28

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

Propostion 30.30

Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle, muni d'une base $\mathcal{B}$. Une famille $\mathcal{F}$ de cardinal n est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

D'après (30.29), si $\mathcal{F}$ est une base alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.
Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base, alors elle est liée ($|\mathcal{F}| = n$)
Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$ (30.21).

30.36 Déterminant d'un produit

Théorème 30.36

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_1, \ldots, A_n$ les colonnes de A et $B_1, \ldots, B_n$ les colonnes de B.
On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}; (X_1, \ldots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \ldots, AX_n)$$

φ est une forme n-linéaire alternée.
On choisit donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\
&= \lambda \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \ldots, A_n) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi = \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\det(A)\det(B) &= \det(A)\det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n) \\
&= \varphi(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \ldots, AB_n) \\
&= \det(AB)
\end{aligned}$$

30.40 Expression des déterminants classiques

Propostion 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2. $\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\}$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}
\end{aligned}$$