Chapitre 5

Fonctions usuelles

5.2 Propriétés du logarithme

Par définition, ln est définie et dérvable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\text{"ln est dérivable } n \text{ fois et } \forall n > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\text{"}$$

Initialisation :
La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité :
Si elle est vraie pour $n \geq 1$, par théorème d'opérations, $\ln^{(n)}$ est encore dérivable et :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, ln^{(n+1)}(x) &= \left[\ln^{(x)}\right](x) \\ &= (-1)^n n! x^{-n-1}\end{aligned}$$

Comme $\ln' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.3 Propriété fondamentale du logarithme

On montre seulement la propriété pour $a > 0$ et $b > 0$.
On fixe $b > 0$ et on considère :

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}; x \mapsto \ln(xb)$$

Par composition, $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x > 0, f'(x) = b \times \frac{1}{xb} = \frac{1}{x}$$

Donc f est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On choisit $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f = \ln + c$$

En particulier :

$$f(1) = \ln 1 + c$$

Soit :

$$\ln b = c$$

Ainsi :

$$\forall x > 0, \ln(xb) = \ln x + \ln b$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 &= \ln 1 \\ &= \ln(x \times \frac{1}{x}) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Donc pour $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)\\ &= \ln a + \ln\frac{1}{b}\\ &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

5.4 Limites usuelles de la fonction logarithme

On commence par montrer que :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On sait que ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{ou} \qquad \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}\ln n &= \int_1^n \frac{dt}{t}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Par théorème de comparaison :

$$\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc :

$$\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Enfin :

$$\forall x > 0, \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc par composition :

$$\ln x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

Par taux d'accroissement, en introduisant :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; x \mapsto \ln(1+x)\\ f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\\ \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to0}{f'(0)} = 1\end{aligned}$$

5.8 Propriétés de la fonction exponentielle

D'après les résultas précédents (5.2), (5.4), on applique le théorème de la bijection dérivable. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x &= \frac{1}{\ln' \circ \exp x} \\ &= \exp x\end{aligned}$$

On obtient directement que $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et que $\exp^{(n)} = \exp n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.9 Propriété fondamentale de l'exponentielle

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On choisit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$x = \ln a \text{ et } y = \ln b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp(\ln(ab)) \\ &= ab \\ &= \exp x \times \exp y\end{aligned}$$

Ainsi, $\exp 0 = \exp(0+0) = \exp^2 0$.
Donc $\exp 0 \in \{0; 1\}$
Or exp est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $\exp 0 = 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \times \exp(-x) = 1$$

5.15 Dérivée d'une fonction puissance

Soit $y > 0$. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto y^x = \exp(x \ln y)$.
$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc par composition :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \ln y \times \exp(x \ln y) \\ &= \ln y \times y^x\end{aligned}$$

5.21 Croissances comparées en $+\infty$

1. On commence par montrer que $\frac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $x \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\ln x}{x} &= \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{x} \left[2\sqrt{t}\right]_1^x \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

   D'après le théorème d'encadrement, $\frac{\ln x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $a > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln x^a}{x^a} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(composition et théorème d'opérations)}$$

2. On utilise le changement de variable :

$$x = (\ln y)^{\frac{1}{a}}, \text{ soit } y = e^{ax}$$

Ainsi :

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln y}{y^{\frac{1}{a}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \text{ par composition si } a > 0 \\ 0 \text{ par théorème d'opérations si } a \leq 0 \end{cases}$$

5.22 Croissances comparées en 0

On utilise la proposition (5.21.1) avec $y = \frac{1}{x}$.

5.43.2 Formule de trigonométrie hyperbolique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{4} + \frac{(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}}{4} \\ &= ch(a+b) \end{aligned}$$