

# Chapitre 17

## Fractions rationnelles

<b>17 Fractions rationnelles</b>	<b>1</b>
17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire . . . . .	2
17.10 Degré d'une fraction . . . . .	2
17.13 Propriété du degré . . . . .	2
17.19 Théorème . . . . .	3
17.20 Fraction dérivée . . . . .	3
17.24 Dérivée logarithmique d'un produit . . . . .	3
17.25 Partie entière . . . . .	4
17.31 Existence d'une décomposition . . . . .	4
17.32 Théorème . . . . .	5
17.38 Cas d'un pôle simple . . . . .	5
17.39 Exemple . . . . .	6
17.40 Cas d'un pôle double . . . . .	6

## 17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

### Définition 17.2

Soit  $\frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  deux fractions rationnelles et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \quad \text{et} \quad \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.

Soit  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  dans  $\mathbb{K}(X)$ .

Montrons que :

$$\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1S + Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$(PS + QR)Q_1S - (P_1S + Q_1R)QS = S^2 \underbrace{(PQ_1 - P_1Q)}_{=0} + RS \underbrace{(QQ_1 - Q_1Q)}_{=0} = 0$$

On raisonne de la même manière pour  $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$  et ainsi, l'opération est bien définie.

## 17.10 Degré d'une fraction

### Définition 17.10

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  une fraction. On pose  $\deg(F) = -\infty$  si  $F = 0$  et  $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$  sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

Si  $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ , alors :

$$P_1Q = PQ_1$$

$$\text{donc } \deg(P_1Q) = \deg(PQ_1)$$

$$\text{donc } \deg(P_1) + \deg(Q) = \deg(P) + \deg(Q_1) \quad (\mathbb{K} \text{ int\`egre})$$

$$\text{donc } \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(P) - \deg(Q)$$

## 17.13 Propriété du degré

### Théorème 17.13

Soit  $F$  et  $G$  deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \quad \text{et} \quad \deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$ .

$$\begin{aligned} \deg(F + G) &= \deg\left(\frac{PS + QR}{QS}\right) \\ &= \deg(PS + QR) - \deg(QS) \\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(QS) \\ &= \max(\deg(PS) - \deg(QS), \deg(QR) - \deg(QS)) \\ &= \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right), \deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \\ &= \max(\deg(F), \deg(G)) \end{aligned}$$

— RAS

## 17.19 Théorème

### Théorème 17.19

Soit  $F$  et  $G$  deux fractions rationnelles. Si les fonctions rationnelles  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  sont égales sur une partie infinie  $\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$  alors les fractions rationnelles sont égales, i.e.  $F = G$ .

On note  $F = \frac{P}{Q}$  et  $G = \frac{R}{S}$  avec  $P \wedge Q = 1$  et  $R \wedge S = 1$ .

On a :

$$\forall x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G, \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$$

Soit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, P\tilde{x} \times S\tilde{x} = R\tilde{x} \times Q\tilde{x}$$

Comme  $\mathcal{D}$  est infini, d'après le théorème de rigidité,  $PS = RQ$ , donc  $F = G$ .

## 17.20 Fraction dérivée

### Définition 17.20

Soit  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On appelle **fraction dérivée** de  $F$  la fraction notée  $F'$  (ou  $\frac{dF}{dX}$ ) définie par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Le résultat ne dépend pas du représentant de  $F$  choisi. On définit également les dérivées successives de  $F$  en posant  $F^{(0)} = F$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$ .

On écrit  $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ .

Montrons que  $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2} = \frac{R'S - RS'}{S^2}$ .

Comme  $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$ , on a  $PS = RQ$ .

Donc  $P'S + S'P = R'Q + Q'R$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} [P'Q - PQ']S^2 - [R'S - RS']Q^2 &= P'SQ^2 + S'PQ^2 - R'QS^2 - Q'RS^2 \\ &= QS(P'S - R'Q) + Q^2RS' - S^2Q'P \\ &= QS(Q'R - S'P) + PSQS' - SQRQ' \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 17.24 Dérivée logarithmique d'un produit

### Théorème 17.24

Si  $F$  est une fraction non nulle qui se factorise en  $F = F_1 \times \dots \times F_n$  dans  $\mathbb{K}(X)$  avec  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$\frac{F'}{F} = \frac{F'_1}{F_1} + \dots + \frac{F'_n}{F_n}.$$

Pour  $n = 2$  seulement.

$$F = F_1 \times F_2 \neq 0$$

Donc :

$$F' = F'_1 F_2 + F_1 F'_2$$

Donc :

$$\frac{F'}{F} = \frac{F'_1 F_2}{F_1 F_2} + \frac{F_1 F'_2}{F_1 F_2} = \frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2}$$

## 17.25 Partie entière

### Théorème 17.25

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Il existe un unique polynôme  $Q$  tel que  $\deg(F - Q) < 0$ . Celui-ci est appelé **partie entière** de  $F$ , c'est le quotient dans la division euclidienne du numérateur de  $F$  par le dénominateur.

Existence :

Soit  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A \wedge B = 1$ .

Soit la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Donc :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ + R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

Donc :

$$\deg(F - Q) = \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

Unicité :

On suppose que :

$$F = Q + G = Q_1 + G_1 \text{ avec } (Q_1, G_1) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ et } \deg(G), \deg(G_1) < 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q - Q_1 &= G_1 - G \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &= \deg(G_1 - G) \\ &\leq \max(\deg(G_1), \deg(G)) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Or  $Q - Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ , donc  $Q = Q_1$ .

## 17.31 Existence d'une décomposition

### Théorème 17.31

Si  $T$  et  $S$  sont deux polynômes premiers entre eux et si  $\deg\left(\frac{A}{TS}\right) < 0$ , alors il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S}, \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \text{ et } \deg(V) < \deg(S).$$

Comme  $T \wedge S = 1$ , d'après le théorème de Bézout, on écrit :

$$CT + DS = 1$$

Donc :

$$ACT + DSA = A$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{A}{TS} &= \frac{ACT + DSA}{TS} \\ &= \frac{DA}{T} + \frac{AC}{S} \end{aligned}$$

On écrit la division euclidienne de  $DA$  par  $T$  et de  $AC$  par  $S$  :

$$DA = TQ + U \text{ avec } \deg(U) < \deg(T)$$

$$AC = SH + V \text{ avec } \deg(V) < \deg(S)$$

Donc :

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S} + Q + H$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \deg(Q + H) &= \deg\left(\frac{A}{TS} - \frac{U}{T} - \frac{V}{S}\right) \\ &\leq \max(\dots, \dots, \dots) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc  $Q + H = 0$ .

## 17.32 Théorème

### Théorème 17.33

Si  $T$  est un polynôme irréductible unitaire et si  $\deg\left(\frac{A}{T^n}\right) < 0$  (avec  $n \geq 1$ ), alors il existe des polynômes  $V_1, \dots, V_n$  tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{T^k}, \text{ avec } \deg(V_k) < \deg(T).$$

C'est une **décomposition en éléments simples**.

Par récurrence sur  $n$ .

- Pour  $n = 1$ , RAF.
- On suppose le résultat vrai pour  $n \geq 1$  fixé.  
On écrit la division euclidienne de  $A$  par  $T$  :

$$A = BT + V_{n+1} \text{ avec } \deg(V_{n+1}) < \deg(T)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{A}{T^{n+1}} &= \frac{BT + V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \frac{B}{T^n} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{T^k} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \text{ (Hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

## 17.38 Cas d'un pôle simple

### Proposition 17.38

Si  $a$  est un pôle simple de  $F = \frac{A}{B}$ , alors la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est

$$P_F(a) = \frac{c}{X - a} \text{ avec } c = \frac{A(a)}{B'(a)} = \frac{A(a)}{Q(a)} \text{ où } B = (X - a)Q.$$

D'après le théorème d'existence de la DES :

$$\frac{A}{B} = F = E + \frac{c}{X - a} + G$$

Donc :

$$\begin{aligned} c &= \frac{(X - a)A}{B} - (X - a)E - (X - a)G \\ &= \frac{A}{Q} - (X - a)E - (X - a)G \end{aligned}$$

Donc  $c = \frac{A(a)}{Q(a)}$ .

Si  $B = (X - a)Q$ , alors  $B'(a) = Q(a)$ .

## 17.39 Exemple

### Exemple 17.39

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  la fraction rationnelle  $F = \frac{1}{X^n - 1}$  avec  $n \geq 1$ .

- $\deg F = -n < 0$ .
- $F$  possède  $n$  pôles simples.  $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_k$ .
- D'après le théorème de DES :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \omega_k}$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $c_k = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$ .

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

## 17.40 Cas d'un pôle double

### Proposition 17.40

Si  $a$  est un pôle double de  $F = \frac{A}{B}$ , alors la partie polaire de  $F$  relative à  $a$  est

$$P_F(a) = \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} \text{ avec } \beta = H(a) \text{ et } \alpha = H'(a) \text{ en posant } H = (X - a)^2 F.$$

On a (notations 17.38) :

$$F = E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} + G$$

$$\beta + (X - a)\alpha = \underbrace{(X - a)^2 F - (X - a)^2 E - (X - a)^2 G}_{:=H}$$

En évaluant en  $a$  :  $\beta = H(a)$ .

On dérive et on évalue en  $a$  :  $\alpha = H'(a)$ .