Chapitre 18

Dérivabilité

18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum

Théorème 18.13

Soit f une fonction définie sur I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

On suppose que f atteint un maximum local en x_0.
On choisit $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in U \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier :

$$\forall x \in U, x > x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
$$\forall x \in U, x < x_0, \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

D'après le TCILPPL :

$$f'_{\text{droite}}(x_0) \leq 0 \text{ et } f'_{\text{gauche}}(x_0) \geq 0$$

Donc f est dérivable en x_0.
Donc $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

18.17 Théorème de Rolle

Théorème 18.17

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit f continue sur $[a,b]$.
D'après le théorème de compacité, elle possède un maximum et un minimum.
Si ils sont tous les deux égaux à $f(a)$, alors f est constante et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$.
Sinon, l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$ et est atteint dans $]a,b[$.
D'après (18.13), $f'(c) = 0$.

18.21 Théorème des accroissements finis

Théorème 18.21

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
$g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[, \mathbb{R})$.
$g(a) = f(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP

Théorème 18.43 - HP

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \backslash \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

— On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que f' admet une limite finie en x_0.
On prolonge f' en une fonction g par continuité en x_0. Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
On remarque que pour tout $x \neq x_0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

où $a \in I \backslash \{x_0\}$ quelconque.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t)\,dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \to x_0}$$

Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \to x_0$.
On prolonge alors f par continuité en $\tilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

— On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$: "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0, alors f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.
Pour $n = 1$, c'est fait.
On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...
Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0.
D'après $P(n)$, on prolonge f' en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En particulier, g est continue sur I.
Donc f' admet une limite finie en x_0.
On applique $P(1)$. On prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Théorème 18.45

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b M\,dt \\ &= M|b - a| \end{aligned}$$