

# Chapitre 34

## Espaces préhilbertiens réels

<b>34 Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>1</b>
34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	2
34.5 Exemple	2
34.14 Identités remarquables	2
34.15 Proposition 34.15 bis	3
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire	3
34.17 Exemple	4
34.18 Exemple	4
34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur	5
34.21 Exemple	5
34.23 Exemple	5
34.24 Exemple	6
34.25 Propriétés des familles orthogonales	6
34.26 Coordonnées dans une base orthonormale	6
34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale	7
34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	7
34.29 Exemple	8
34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie	9
34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie	10
34.49 Exemple	11
34.50 Exemple	12
34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie	12

### 34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

#### Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ , appelé produit scalaire canonique.

Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  :

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$  donc  ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

### 34.5 Exemple

#### Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ,  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$ , donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left( {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$  alors  $|xy| = 0$ , puis  $x = y = 0$ .

La forme est définie positive.

### 34.14 Identités remarquables

#### Proposition 34.14

Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \text{ (bilinéarité)} \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

### 34.15 Proposition 34.15 bis

Proposition 34.15 bis

Soit  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne. Soit  $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ .

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

### 34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x$  et  $y$  dans  $E$ .

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire :

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont positivement colinéaires.

- Inégalité triangulaire, version distance :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si  $x = 0$ , l'inégalité est vérifiée pour tout  $y \in E$ .

On suppose  $x \neq 0$ . On considère, pour  $y \in E$  fixé :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \|tx + y\|^2 \\
&= \langle tx + y, tx + y \rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

$f$  est une fonction polynomiale de degré 2 ( $\|x\| \neq 0$ ) positive donc de discriminant  $\Delta \leq 0$ .

Or  $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$ . D'où le résultat.

Si  $\Delta = 0$ , alors  $f$  s'annule une unique fois en  $t_0$ . On a alors  $\|t_0 x + y\|^2 = 0$ .

Donc  $t_0 x + y = 0$ .

Donc  $(x, y)$  est liée.

Réciproquement, si  $(x, y)$  est liée, alors  $y = t_0 x$  ( $x \neq 0$ ) et on a encore  $f(t_0) = 0$ .

- Pour  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.

RAS pour l'inégalité généralisée.

Si  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :

$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant  $x \neq 0$ ) :

$$\|1 + \alpha\|x\| = \|x + y\| = (1 + |\alpha|)\|x\|$$

Donc  $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$ .

Nécessairement,  $\alpha \geq 0$

### 34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

avec égalité si et seulement si  $x_1 = \dots = x_n$ .

On munit  $E = \mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| &\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ \left| \sum_{k=1}^n 1 \times x_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{aligned}$$

### 34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$ , on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

On munit  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  du produit scalaire usuel :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $f$  et  $f'$  :

$$\begin{aligned} \|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\ &= \left| \int_a^b f(t)f'(t) dt \right| \\ &= \left| \left[ \frac{f^2(t)}{2} \right]_a^b \right| \\ &= \left| \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right| \end{aligned}$$

### 34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

#### Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

$\Rightarrow$  RAF

$\Leftarrow$  Si  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $E$ , alors  $x \perp x$ , donc  $\|x\|^2 = 0$ , donc  $x = 0$ .

### 34.21 Exemple

#### Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur  $\mathbb{R}^2$ , la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$  l'est.

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{2} = \|(0, 1)\|$$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 1$$

Donc

$$\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)\| = 1$$

$$\text{On a } \|(1, -2)\| = \sqrt{6}$$

$$\text{Et } \langle (1, 0), (1, -2) \rangle = 0.$$

### 34.23 Exemple

#### Exemple 34.23

La famille des fonctions  $t \mapsto \sin(nt)$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est orthonormale dans  $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$  pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

On note pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$ .

Soit  $p \neq n$ .

$$\begin{aligned} \langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(pt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $n = p$  alors :

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt)) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $(f_n)$  est bien une famille orthonormée.

### 34.24 Exemple

#### Exemple 34.24

Dans  $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

D'après le chapitre 4, si  $f$  est impaire :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

Si  $f$  est paire et  $g$  impaire, alors  $fg$  est impaire et ainsi  $\langle f, g \rangle = 0$ .

### 34.25 Propriétés des familles orthogonales

#### Théorème 34.25

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x$  et  $y$  sont orthogonaux ssi  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .  
De surcroît, si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ , alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre. En particulier, si  $E$  est de dimension finie  $n$  non nulle, toute famille orthogonale de  $n$  vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF

2. Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthogonale. Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que  $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ .

Soit  $j \in I$ .

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle &= 0 \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0 \text{ pour } i \neq j} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 = 0$$

$$\text{donc } \lambda_j = 0$$

Donc la famille est libre.

### 34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

#### Théorème 34.26

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ , et  $x \in E$ . Alors

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  sont  $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$ .

Comme  $(e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base, tout  $x \in E$  s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle x, e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

### 34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

#### Théorème 34.27

Soit  $E \neq \{0_E\}$  un espace euclidien et  $(x, y) \in E^2$  de coordonnées respectives  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  dans une certaine base orthonormale de  $E$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = {}^t X X$$

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormale de  $E$ . Pour  $(x, y) \in E^2$  :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

### 34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

#### Théorème 34.28

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . On peut transformer  $(e_1, \dots, e_n)$  en une famille orthonormale de  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k).$$

Les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  peuvent être construits de proche en proche depuis  $u_1$  jusqu'à  $u_n$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on n'a que deux choix possibles pour  $u_k$  :

$$\pm \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i}{\left\| e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \right\|}$$

- Nécessairement,  $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$  pour que  $u_1$  soit unitaire et  $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ .
  - Supposons construits  $(u_1, \dots, u_k)$ ,  $k \leq n-1$  vérifiant :
    - $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
    - $(u_1, \dots, u_k)$  est une famille orthornormale
- Soit  $v \in E$ . Comme  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$ .  
 Si  $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ , on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

On suppose désormais  $\lambda_{k+1} \neq 0$ .

On a  $(u_1, \dots, u_k, v)$  une famille orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle u_i, v \rangle &= 0 \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, 0 &= \langle u_i, \sum_{p=1}^k \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1} \rangle \\ &= \sum_{p=1}^k \lambda_p \langle u_i, u_p \rangle + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ &= \lambda_i + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i &= -\lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\ \text{ssi. } v &= \lambda_{k+1} (e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_i, e_{k+1} \rangle u_i) \end{aligned}$$

Ainsi,  $(u_1, \dots, u_{k+1})$  est orthonormée avec  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$  si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$$

## 34.29 Exemple

### Exemple 34.29

Sur  $\mathbb{R}[X]$ , la famille  $(1, \sqrt{3}(2X-1), \sqrt{5}(6X^2-6X+1))$  est orthonormale pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

On orthonormalise  $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$  avec Gram-Schmidt.

- $\|P_0\| = 1$  donc on pose  $V_0 = P_0$ .
- Soit  $\tilde{V}_1 = X + aV_0$

$$\langle \tilde{V}_1, V_0 \rangle = \langle X, V_0 \rangle + a\|V_0\|^2 = \frac{1}{2} + a$$

On pose donc  $\tilde{V}_1 = X - \frac{1}{2}$ . On a :

$$\begin{aligned} \|\tilde{V}_1\|^2 &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$



On pose  $V_1 = \frac{\tilde{V}_1}{\|\tilde{V}_1\|} = \sqrt{12}(X - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2X - 1)$ .

On pose  $\tilde{V}_2 = X^2 + aV_1 + bV_0$ .

On a :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{V}_2, V_1 \rangle &= \langle X^2, V_1 \rangle + a\|V_1\|^2 \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 t^2(2t-1) dt + a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} + a \\ \langle \tilde{V}_2, V_0 \rangle &= \langle X^2, V_0 \rangle + b\|V_0\|^2 \\ &= \frac{1}{3} + b\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 &= X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2X-1) - \frac{1}{3} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ \|\tilde{V}_2\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{180}\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}V_2 &= \sqrt{180}(X^2 - X + \frac{1}{6}) \\ &= \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)\end{aligned}$$

### 34.34 Propriétés de l'orthogonal d'une partie

#### Proposition 34.34

Avec les mêmes hypothèses que la définition précédente :

1.  $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , orthogonal à  $X$ .
2. Si  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , orthogonal à  $X$ .
3. Si  $X \subset Y$  alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .
4. On a  $X^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$  et  $X \subset (X^\perp)^\perp$

1.  $X^\perp \perp X$ .

- $X^\perp \subset E$
- $0 \in X^\perp$
- Si  $(t, u) \in (X^\perp)^2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \langle t + \alpha u, x \rangle &= \langle t, x \rangle + \alpha \langle u, x \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc  $t + \alpha u \in X^\perp$ .

Donc  $X^\perp$  est bien un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2. On suppose  $X$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Soit  $X \in X \cap X^\perp$  donc  $x \perp x$  donc  $x = 0_E$ .  
Donc  $X \cap X^\perp = \{0_E\}$ .

3. Soit  $X \subset Y$  et  $t \in Y^\perp$ .

Donc :

$$\forall x \in Y, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc :

$$\forall x \in X, \langle x, t \rangle = 0$$

Donc  $t \in X^\perp$ .

4. Comme  $X \subset \text{Vect}(X)$ , on a :

$$\text{Vect}(X)^\perp \subset X^\perp$$

Soit  $t \in X^\perp$ . Soit  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in \text{Vect}(X)$  ( $x_i \in X$  et  $(\lambda_i)$  famille à support fini).

$$\langle t, u \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle t, x_i \rangle = 0$$

Donc  $t \in \text{Vect}(X)^\perp$ .

### 34.38 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Théorème 34.38

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

1.  $F^\perp$  est l'unique supplémentaire de  $F$  dans  $E$  orthogonal à  $F$ . On l'appelle le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ .
2.  $F^{\perp\perp} = F$ .

1. Existence :

On remarque que la propriété est vraie pour  $F = \{x\}$ .

On suppose  $F \neq \{0_E\}$ .

Comme  $F$  est de dimension finie non nulle il possède une base orthonormée notée  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Soit  $x \in E$ , on décompose  $x = \underbrace{x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{:=v} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k}_{\in F}$ .

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $v \in F^\perp$ .

Unicité :

On suppose que  $F \oplus G = F \oplus F^\perp$ .

Par définition,  $G \subset F^\perp$ .

Soit  $t \in F^\perp$ .

On décompose  $t = f + g$ .

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \langle f, t - g \rangle \\ &= \langle f, t \rangle - \langle f, g \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On sait que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .

Soit  $x \in (F^\perp)^\perp$ .

D'après (1),  $x = f + v$  avec  $f \in F, v \in F^\perp$ .

Or :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \langle v, v \rangle = \langle v, x - f \rangle \\ &= \langle v, x \rangle - \langle v, f \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc  $v = 0$ .

## 34.49 Exemple

### Exemple 34.49

On note  $F$  le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(\sin, \cos)$  de  $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ . Montrer que le projeté orthogonal de l'identité sur  $F$  pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

est la fonction  $t \mapsto -2 \sin t$ .

Première Méthode :

—

$$\begin{aligned}\|\sin\|^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \pi \\ &= \|\cos\|^2\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\langle \cos, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

On note  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin$  et  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos$ .

$(f_1, f_2)$  est une base orthonormée de  $F$ .

D'après le cours :

$$P_F(\text{id}) = \langle \text{id}, f_1 \rangle f_1 + \langle \text{id}, f_2 \rangle f_2$$

Or :

$$\begin{aligned}\langle \text{id}, \sin \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= [-t \cos(t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \\ &= -2\pi \\ \langle \text{id}, \cos \rangle &= \int_0^{2\pi} t \cos(t) dt \\ &= [t \sin(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(t) dt \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_F(\text{id}) &= \langle \text{id}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= -2 \sin \end{aligned}$$

Deuxième Méthode :

$P_F(\text{id}) \in \text{Vect}(\sin, \cos)$ .

On écrit donc :

$$P_F(\text{id}) = a \sin + b \cos$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{id} - P_F(\text{id}) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \sin \rangle = 0 \\ \langle \text{id} - P_F(\text{id}), \cos \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \text{id}, \sin \rangle - a \|\sin\|^2 - b \langle \sin, \cos \rangle = 0 \\ \langle \text{id}, \cos \rangle - a \langle \sin, \cos \rangle - b \|\cos\|^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi - a\pi - b \times 0 = 0 \\ 0 - a \times 0 + b\pi = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 34.50 Exemple

#### Exemple 34.50

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie non nulle et  $H$  un hyperplan de  $E$  de vecteur normal  $a$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $H$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,

$$p(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2}$$

En notant  $q$  la projection orthogonale sur  $H^\perp$ .

Or  $H^\perp = \text{Vect}(a) = \text{Vect}\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ .

$$\begin{aligned} q(x) &= \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} \\ &= \frac{\langle x, a \rangle a}{\|a\|^2} \end{aligned}$$

### 34.53 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

#### Théorème 34.53

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie et  $x \in E$ . On note  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

1. On a

$$d(x, F) = \|x - p(x)\| = d(x, p(x))$$

La distance de  $x$  à  $F$  est donc atteinte et est donc un minimum. Le minimum est donc atteint en projetant  $x$  orthogonalement sur  $F$ .

2. Par ailleurs

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2$$

Comme  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie,  $p$  est bien définie.

Soit  $f \in F$ . On écrit :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \left\| \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - f}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \text{ (Pythagore)} \\ &\geq \|x - p(x)\|^2 \end{aligned}$$

Donc  $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|^2$ .

Donc  $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$  ( $t \mapsto \sqrt{t}$  est croissante).

Par définition de la borne inférieure :

$$d(x, F) \geq \|x - p(x)\|$$

Or  $p(x) \in F$  donc  $\|x - p(x)\| \in \{d(x, f), f \in F\}$ .

Donc  $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ .

La dernière égalité provient du théorème de Pythagore.

## Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{tr}({}^tAB) \end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont  $N$  est la norme associée.

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ .

$$\begin{aligned} N(AB)^2 &= \text{tr}({}^tABAB) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (AB)_{ji}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \right]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right] \times \left[ \sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right] \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n B_{pi}^2 \right) \times \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{jk}^2 \right) \\ &= N(A)^2 N(B)^2 \end{aligned}$$

## Exercice 7

1. (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.
- (b) Pour  $u \in E$ , on note  $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x \rangle$  et on note  $f : E \rightarrow E^*; u \mapsto f_u$ .  
On a  $\dim(E^*) = \dim(E)$  donc  $f$  est surjective.  
Soit  $u \in \ker f$ . Donc :

$$\forall x \in E, \langle u, x \rangle = 0$$

Donc  $u = 0_E$ .

Donc  $f$  est injective.

Donc  $f$  est bijective.

2. (a) On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  (de dimension finie) du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$ .

Ainsi,  $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$ .

D'après (1.b), il existe un unique  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P \rangle$$

- (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe  $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)A(t) dt = P(0)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 t^k A(t) dt = 0$ .

En particulier,  $\int_0^1 t A(t) dt = 0$ .

Donc  $t \mapsto tA(t)$  doit s'annuler sur  $]0, 1[$ .

Donc  $A$  possède au moins une racine sur  $]0, 1[$ .

Notons  $r_1, \dots, r_k$  les racines de  $A$  sur  $]0, 1[$ . ( $k \leq n$ )

On pose  $P = X \prod_{i \in [1, k]} (X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ .

On a  $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}} dt = P(0) = 0$ .

Donc  $PA = 0$ . Absurde.