Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k, J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

En notant, pour $n\in\mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}, S_n\in\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N=\max J$ et $J\subset [\![0,N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S\leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$

35.5 Croissance de la somme

Propostion 35.5

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si pour tout $i\in I, a_i\leq b_i$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Soit $J\in\mathcal{P}_f(I)$. Comme :

$$\forall i\in J, a_i\leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i\in j} a_i \leq \sum i\in J b_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

$\sum\limits_{i\in I} b_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$.
Par définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$