Chapitre 36

Fonctions de deux variables

36.15 Exemple

Exemple 36.15

Les projections $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} p_1 : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto x \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout $(x, y) \in B(a, \epsilon)$.

$$|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Donc p_1 est bien continue en a, donc sur $\mathbb{R}^2$.

36.17 Exemple

Exemple 36.17

Soi tI et J deux intervalles et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors :

$$I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x) + g(y) \quad \text{et} \quad I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

sont continues sur $I \times J$.

- Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Par continuité de f et g on choisit $\alpha > 0$ tel que :
  - $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  - $\forall y \in J, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$

  Soit $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$.

$$|f(x) + g(y) - f(x_0) - g(y_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(y) - g(y_0)|$$

- De la même manière (voir le produit de fonctions de $\mathcal{C}^0$, chap. 15).

36.24 Exemple

Exemple 36.24

Quelles sont les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$?

Sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &= y^2 e^{xy^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= 2xy e^{xy^2} \end{aligned}$$

Démonstration de la première :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f((x, y) + t(1, 0)) &= f(x + t, y) \\ &= e^{(x+t)y^2} \\ &= e^{xy^2 + ty^2} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) &= y^2 e^{xy^2 + ty^2} \\ g'(0) &= y^2 e^{xy^2} \end{aligned}$$