Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n \in \left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N = \max J$ et $J \subset [\![0, N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$

35.5 Croissance de la somme

Propostion 35.5

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si pour tout $i \in I, a_i \leq b_i$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$. Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i\in j} a_i \leq \sum i \in J b_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

$\sum\limits_{i\in I} b_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$.
Par définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

35.8 Lien avec les séries à termes positifs

Propostion 35.8

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs.

1. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

Corollaire 35.10

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.
σ induit une bijection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$ de $\left\{\sum_{i\in J} | J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$ sur $\left\{\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \text{ (35.8)}$$

35.12 Restriction

Propostion 35.12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $J \subset I$, alors :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Comme $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$:

$$\left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J)\right\} \subset \left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.13 Preque linéarité

Propostion 35.13

Soit (a_i) et (b_i) deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$et $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$. On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

$(a \geq 0, b \geq 0$ et $\sup A, \sup B$ existent).