Chapitre 33

Variables aléatoires réelles finies

33.3 Exemple

Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1,2 et 3 tombent avec une probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec une probabilité $\frac{1}{12}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

33.4 Espérance des lois usuelles

Théorème 33.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1. Variable aléatoire constante : si X est constante de valeur m, alors $\mathrm{E}(X) = m$.
2. Loi uniforme : si $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ et si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, alors $\mathrm{E}(X)$ est la moyenne naturelle des valeurs $x_1, \ldots, x_n$ de X :
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
3. Loi de Bernoulli : soit $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathrm{E}(X) = p$.
4. Exemple fondamental : pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{E}\left(\mathbb{1}_A\right) = P(A)$.
5. Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathrm{E}(X) = np$.

1. Si $X(\Omega) = \{m\}, P(X = m) = 1$ et $E(X) = 1 \times m = m$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\}$ alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$
Donc :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :
$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$
4. Si $A \subset \Omega$, alors :
$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \text{ (32.21)}$$
Donc (3) $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Par définition :
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :
Soit $Q = (1-p+Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$.

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k \text{donc } Q' = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^{k-1}$$

$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k$$

Par ailleurs $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$.
En évaluant les deux expressions en p, on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :
On poursuit le calcul de $E(X)$ en utilisant la formule du capitaine.
Troisième méthode :
En utilisant la linéarité de l'espérance.

33.5 Propriétés de l'espérance

Propostion 33.5

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. Reformulation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.
2. Linéarité : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$.
3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
4. Croissance : si $X \leq Y$, alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$.
5. Inégalité triangulaire : $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$.

1. On rappelle qe $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un SCE.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) x \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega \in (X = x)} P(X = \omega) \right] x \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)) \\ &= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) Y(\omega) \\ &= \lambda E(X) + \mu E(Y) \end{aligned}$$

3. Si $X \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned}
|E(X)| &= \left|\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)\right| \\
&\leq \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})|X(\omega)| \\
&= E(|X|)
\end{aligned}$$