Chapitre 17

Fractions rationnelles

17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

Définition 17.2

Soit $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS+QR}{QS},\ \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \text{ et } \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.
Soit $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ dans $\mathbb{K}(X)$.
Montrons que :

$$\frac{PS+QR}{QS} = \frac{P_1S+Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$\begin{aligned}(PS+QR)Q_1S - (P_1S+Q_1R)QS &= S^2(\underbrace{PQ_1 - P_1Q}_{=0}) + RS(\underbrace{QQ_1 - Q_1Q}_{=0}) \\ &= 0\end{aligned}$$

On raisonne de la même manière pour $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$ et ainsi, l'opération est bien définie.

17.10 Degré d'une fraction

Définition 17.10

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction. On pose $\deg(F) = -\infty$ si $F = 0$ et $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$ sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Si $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$, alors :

$$\begin{aligned}P_1Q &= PQ_1 \\ \text{donc } \deg(P_1Q) &= \deg(PQ_1) \\ \text{donc } \deg(P_1) + \deg(Q) &= \deg(P) + \deg(Q_1) \text{ } (\mathbb{K} \text{ intègre}) \\ \text{donc } \deg(P_1) - \deg Q_1 &= \deg(P) - \deg(Q)\end{aligned}$$

17.13 Propriété du degré

Théorème 17.13

Soit F et G deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \text{ et } \deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$.

—

$$\begin{aligned}\deg(F+G) &= \deg(\frac{PS+QR}{QS}) \\ &= \deg(PS+QR) - \deg(QS) \\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(QS) \\ &= \max(\deg(PS) - \deg(QS), \deg(QR) - \deg(QS)) \\ &= \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right), \deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right) \\ &= \max(\deg(F), \deg(G))\end{aligned}$$

— RAS

17.19 Théorème

Théorème 17.19

Soit F et G deux fractions rationnelles. Si les fonctions rationnelles $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont égales sur une partie infinie $\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$ alors les fractions rationnelles sont égales, i.e. $F = G$.

On note $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$ avec $P \wedge Q = 1$ et $R \wedge S = 1$.
On a :

$$\forall x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G, \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$$

Soit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, P\tilde{(x)} \times S\tilde{(x)} = R\tilde{(x)} \times Q\tilde{(x)}$$

Comme $\mathcal{D}$ est infini, d'après le théorème de rigidité, $PS = RQ$, donc $F = G$.

17.20 Fraction dérivée

Définition 17.20

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle **fraction dérivée** de F la fraction notée F' (ou $\frac{dF}{dX}$) définie par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Le résultat ne dépend pas du représentant de F choisi. On définit également les dérivées successives de F en posant $F^(0) = F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$.

On écrit $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$.
Montrons que $\frac{P'Q-Q'P}{Q^2} = \frac{R'S-RS'}{S^2}$.
Comme $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$, on a $PS = RQ$.
Donc $P'S + S'P = R'Q + Q'R$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
[P'Q - PQ']S^2 - [R'S - RS']Q^2 &= P'SQ^2 + S'PQ^2 - R'QS^2 - Q'RS^2 \\
&= QS(P'S - R'Q) + Q^2RS' - S^2Q'P \\
&= QS(Q'R - S'P) + PSQS' - SQRQ' \\
&= 0
\end{aligned}$$

17.24 Dérivée logarithmique d'un produit

Théorème 17.24

Si F est une fraction non nulle qui se facotorise en $F = F_1 \times \ldots \times F_n$ dans $\mathbb{K}(X)$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\frac{F'}{F} = \frac{F_1'}{F_1} + \ldots + \frac{F_n'}{F_n}.$$

Pour $n = 2$ seulement.

$$F = F_1 \times F_2 \neq 0$$

Donc :

$$F' = F_1'F_2 + F_1F_2'$$

Donc :

$$\frac{F'}{F} = \frac{F_1'F_2}{F_1F_2} + \frac{F_1F_2'}{F_1F_2} = \frac{F_1'}{F_1} + \frac{F_2'}{F_2}$$

17.25 Partie entière

Théorème 17.25

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme Q tel que $\deg(F - Q) < 0$. Celui-ci est appelé **partie entière** de F, c'est le quotient dans la division euclidienne du numérateur de F par le dénominateur.

Existence :
Soit $F = \frac{A}{B}$ avec $A \wedge B = 1$.
Soit la division euclidiene de A par B :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Donc :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BQ + R}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

Donc :

$$\deg(F - Q) = \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

Unicité :
On suppose que :

$$F = Q + G = Q_1 + G_1 \text{ avec } (Q_1, G_1) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ et } \deg(G), \deg(G_1) < 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} Q - Q_1 &= G_1 - G \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &= \deg(G_1 - G) \\ &\leq \max(\deg(G_1), \deg(G)) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Or $Q - Q_1 \in \mathbb{K}[X]$, donc $Q = Q_1$.

17.31 Existence d'une décomposition

Théorème 17.31

Si T et S sont deux polynômes premiers entre eux et si $\deg\left(\frac{A}{TS}\right) < 0$, alors il existe deux polynômes U et V tels que

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S}, \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \text{ et } \deg(V) < \deg(S).$$

Comme $T \wedge S = 1$, d'après le théormème de Bézout, on écrit :

$$CT + DS = 1$$

Donc :

$$ACT + DSA = A$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{A}{TS} &= \frac{ACT + DSA}{TS} \\ &= \frac{DA}{T} + \frac{AC}{S} \end{aligned}$$

On écrit la division euclidienne de DA par T et de AC par S :

$$\begin{aligned} DA &= TQ + U \text{ avec } \deg(U) < \deg(T) \\ AC &= SH + V \text{ avec } \deg(V) < \deg(S) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{A}{TS} = \frac{U}{T} + \frac{V}{S} + Q + H$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \deg(Q+H) &= \deg\left(\frac{A}{TS} - \frac{U}{T} - \frac{V}{S}\right) \\ &\leq \max(\ldots, \ldots, \ldots) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Donc $Q + H = 0$.

17.32 Théorème

Théorème 17.33

Si T est un polynôme irréductible unitaire et si $\deg\left(\frac{A}{T^n}\right) < 0$ (avec $n \geq 1$), alors il existe des polynômes $V_1, \ldots, V_n$ tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{T^k}, \text{ avec } \deg(V_k) < \deg(T).$$

C'est une **décomposition en éléments simples**.

Par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, RAF.
- On suppose le résultat vrai pour $n \geq 1$ fixé.
  On écrit la division euclidienne de A par T :

  $$A = BT + V_{n+1} \text{ avec } \deg(V_{n+1}) < \deg(T)$$

  Ainsi :

  $$\begin{aligned} \frac{A}{T^{n+1}} &= \frac{BT + V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \frac{B}{T^n} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \\ &= \sum_{k=1} \frac{V_k}{T^k} + \frac{V_{n+1}}{T^{n+1}} \text{ (Hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

17.38 Cas d'un pôle simple

Propostion 17.38

Si a est un pôle simple de $F = \frac{A}{B}$, alors la partie polaire de F relative à a est

$$P_F(a) = \frac{c}{X-a} \text{ avec } c = \frac{A(a)}{B'(a)} = \frac{A(a)}{Q(a)} \text{ où } B = (X-a)Q.$$

D'après le théorème d'existence de la DES :

$$\frac{A}{B} = F = E + \frac{c}{X-a} + G$$

Donc :

$$\begin{aligned} c &= \frac{(X-a)A}{B} - (X-a)E - (X-a)G \\ &= \frac{A}{Q} - (X-a)E - (X-a)G \end{aligned}$$

Donc $c = \frac{A(a)}{Q(a)}$.
Si $B = (X-a)Q$, alors $B'(a) = Q(a)$.

17.39 Exemple

Exemple 17.39

Décomposer en éléments simples dan $\mathbb{C}(X)$ la fraction raitonnelle $F = \frac{1}{X^n - 1}$ avec $n \geq 1$.

— $\deg F = -n < 0$.

— F possède n pôles simples. $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega_k$.
— D'après le théorème de DES :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - \omega_k}$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $c_k = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$.

$$F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}$$

17.40 Cas d'un pôle double

Propostion 17.40

Si a est un pôle double de $F = \frac{A}{B}$, alors la partie polaire de F relative à a est

$$P_F(a) = \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} \text{ avec } \beta = H(a) \text{ et } \alpha = H'(a) \text{ en posant } H = (X-a)^2 F.$$

On a (notations 17.38) :

$$F = E + \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + G$$
$$\beta + (X-a)\alpha = \underbrace{(X-a)^2 F}_{:=H} - (X-a)^2 E - (X-a)^2 G$$

En évaluant en a : $\beta = H(a)$.
On dérive et on évalue en a : $\alpha = H'(a)$.

17.42 Exemple

Exemple 17.42

Décomposer $F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^3+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

— $\deg F = 1 \geq 0$
—

$$X^6 = (X-1)^2(X^3+1)(X+2) + R \text{ avec } \deg R < 5$$

— D'après le théorème DES :

$$\begin{aligned}
F &= \frac{X^6}{(X-1)^2(X+1)(X+j)(X+j^2)} \\
&= X+2+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{X+j}+\frac{e}{x+j^2} \\
c &= (x+1)\tilde{F}(-1) = \frac{1}{4} \\
d &= (x+j)\tilde{F}(-j) \\
&= \frac{1}{(j+1)^2(1-j)(-j+j^2)} \\
&= \frac{1}{(1+j)(1-j^2)(j-1)j} \\
&= \frac{-1}{(1-j^2)^2 j} \\
&= \frac{-1}{j(-3j^2)} \\
&= \frac{1}{3} \\
e &= (x+j^2)\tilde{F}(-j^2) = \frac{1}{3} \\
H &= (X-1)^2 F = \frac{X^6}{X^3+1} \\
b &= H(1) = \frac{1}{2} \\
a = H'(1) &= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

17.44 Parties polaires conjuguées d'une fraction réelle

Propostion 17.44

Si F est à coefficients réels, alors les parties polaires relatives aux pôles conjugués sont conjuguées.

Soit $F \in \mathbb{R}(X) \subset \mathbb{C}(X)$.
On écrit $F = \frac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{R}(X)^2$.
Soit r un pôle de multiplicité m.
Comme $F \in \mathbb{R}(X)$, $\overline{r}$ est un pôle de multiplicité m. On suppose que $r \neq \overline{r}$
D'après le théorème de DES, on écrit :

$$F = E + P_F(r) + G \text{ avec } (E, r) \in \mathbb{R}(X)^2, G \in \mathbb{C}(X)$$

r n'est pas un pôle de G ($\overline{r}$ oui).
Ainsi :

$$\begin{aligned}
F &= \overline{F} \\
&= \overline{E + P_F(r) + G} \\
&= \overline{E} + P_F(\overline{r}) + \overline{G} \\
&= E + \overline{P_F(r)} + \overline{G}
\end{aligned}$$

Or r n'est pas un pôle de $\overline{P_F(r)}$ mais $\overline{r}$ est un pôle de $\overline{P_F(r)}$.
De la même manière, comme r n'est pas un pôle de G, $\overline{r}$ n'est pas un pôle de $\overline{G}$.
Donc $P_F(\overline{r}) = \overline{P_F(r)}$.

17.45 Exemple

Exemple 17.45

Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{(X^2+X+1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

$F = \overline{(x^2+x+1)^2}, \deg(F) = -4 < 0$.
Les pôles de F sont j et j^2 (de multiplicité 2).
D'après le théorème de DES :

$$F = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{(X-j)^2} + \frac{c}{X-j^2} + \frac{d}{(X-j^2)^2} \text{ car } F \in \mathbb{R}(X)$$

On pose $H = (X-j)^2 F = \frac{1}{(x-j^2)^2}$.
On trouve $b = H(j) = \frac{j}{(1-j)}$ et $a = H'(j) = \frac{-2}{(1-j)^3} = \frac{-2j^2}{3(1-j)j}$.

17.46 Exemple

Exemple 17.47

Décomposer en éléments simples $F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

$F = \frac{X^4+1}{X(X^2-1)^2}, \deg F = -1 < 0$. Donc :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{X+1} + \frac{e}{(X+1)^2}$$

F est impaire donc :

$$\begin{aligned}
F(-X) &= -\frac{a}{X} + \frac{b}{-X-1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{-X+1} + \frac{e}{(-X+1)^2} \\
&= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2} - \frac{d}{X-1} + \frac{e}{(X-1)^2} \\
&= -F \\
&= -\frac{a}{X} - \frac{b}{X-1} - \frac{c}{(X-1)^2} - \frac{d}{X+1} - \frac{e}{(X+1)^2}
\end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{cases} a = a \\ -b = -d \\ -c = e \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b = d \\ e = -c \end{cases}$$

On a : $a = \tilde{XF}(0) = 1$.
On pose :

$$\begin{aligned}
H &= (X-1)^2 F = \frac{X^4+1}{X(X+1)^2} \\
c &= H(1) = \frac{1}{2} \\
b &= H'(1) \\
&= \frac{4 \times 4 - 2 \times (3+4+1)}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

17.51 Exemple - Calcul de la dérivée n-ième d'une fraction

Exemple 17.51

Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On définit :

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{X^2+1} &\in \mathbb{R}(X) \\ &\in \mathbb{C}(X) \end{aligned}$$

D'après le théorème de DES, car les pôles de F sont simples, égaux à i et $-i$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{1}{-2i}}{X+i} + \frac{\frac{1}{2i}}{X-i} \\ F^{(n)} &= \frac{\frac{i}{2}(-1)^n n!}{(X+i)^{n+1}} + \frac{\frac{-i}{2}(-1)^n n!}{(X-i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+i)^{n+1}} \frac{i}{2} \left[(X-i)^{n+i} - (X+i)^{n+i}\right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [(-i)^k - i^k] X^{n+1-k} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(X^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} X^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2k+1} (-i)^{k+1} x^{n+1-k}$$