Chapitre 27

Séries numériques

27.6 Série géométrique

Théorème 27.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \ (a \neq 1)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \ (|a| < 1)$$

La série converge et $\sum\limits_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

Propostion 27.11

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.
D'après les hypothèses, A est majoré donc possède un maximum N d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.
On note (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Pour $n \geq N$:

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k\in A}(u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge.

27.12 CN de convergence portant sur le terme général

Théorème 27.12

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. De manière équivalente, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théroème de comparaison sur les suites.

27.20 Convergence absolue entraîne convergence

Théorème 27.20

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
  On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

  Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
  Or, pour tout n :

  $$\begin{aligned} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{aligned}$$

  Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent et par linéarité (27.16) $\sum u_n$ converge.
- On suppose que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
  Alors :

  $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| &\leq |u_n| \\ |Im(u_n)| &\leq |u_n| \end{aligned}$$

  Donc, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16) $\sum u_n$ converge.