

# Chapitre 28

## Matrice d'une application linéaire

<b>28 Matrice d'une application linéaire</b>	<b>1</b>
28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs	2
28.6 Exemple	2
28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes	3
28.13 Exemple	3
28.15 Exemple	3
28.18 Exemple	3
28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire	4
28.20 Exemple	5
28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires	6
28.22 Exemple	7
28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde	8
28.28 Exemple	8
28.29 Exemple	9
28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice	9
28.35 Invariance du rang par une matrice inversible	9
28.37 Exemple	10
28.38 Matrice de changement d'une base à une autre	10
28.41 Exemple	11
28.42 Changement de bases pour une application linéaire	11
28.47 Exemple fondamental	11
28.48 Invariance du rang par transposition	12

## 28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

### Théorème 28.5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  est inversible.

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs et  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  une base de  $E$ .

On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre (car  $|\mathcal{F}| = \dim E$ ), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$$

Or pour  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left[ M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M \end{aligned}$$

En conclusion,  $\mathcal{F}$  est une base si et seulement si  $\ker M = \{0\}$ , si et seulement si  $M$  est inversible.

## 28.6 Exemple

### Exemple 28.6

Montrer que la famille  $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$  de  $\mathbb{R}[X]$  est libre.

On note  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ , donc libre.

## 28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes

### Théorème 28.9

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible
- la famille des colonnes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de  $A$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ ,  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ ,  $\mathcal{B}_n$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$  est inversible (28.8).

Si et seulement si  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  (28.5).

Si et seulement si  ${}^t A$  est inversible (11.42).

Si et seulement si  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .

### 28.13 Exemple

#### Exemple 28.13

On note  $T$  l'endomorphisme  $P \mapsto X^2 P'' + P(1)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathcal{B}_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(T)$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\ T(1) &= 1 \\ T(X) &= 1 \\ T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\ T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 28.15 Exemple

#### Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$$

### 28.18 Exemple

#### Exemple 28.18

On note  $\varphi$  l'application canoniquement associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}'_2$  la base  $((0, 1), (1, 0))$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B}'_3$  la base  $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ . Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi)$ .

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y). \\ \varphi(1, 0) &= (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .) \\ \varphi(0, 1) &= (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

### Théorème 28.19

Soit  $E \neq \{0\}$  et  $F \neq \{0\}$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $p$  et  $n$ ,  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ . Alors :

$$\underbrace{\text{Mat}_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{\text{Mat}_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{\text{Mat}_e(x)}_{(p,1)}$$

On note  $e = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et  $\text{Mat}_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Soit  $x \in E$ . On écrit  $m = \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j$ . Par conséquent :

$$\text{Mat}_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^p m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^n [M \times \text{Mat}_e(x)]_i f_i\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times \text{Mat}_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times \text{Mat}_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times \text{Mat}_e(x)\end{aligned}$$

## 28.20 Exemple

### Exemple 28.20

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

Montrer que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(3, 2X^2 + X)$  et  $\ker f = \text{Vect}(X^2 - 2X)$ .

On a :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c)$$

$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a)$$

— Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :$

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= \text{Vect}(X^2 - 2X) \\ &= \text{Vect}(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} \text{Im}(M) &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 + X + 2X^2)$$

## 28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

### Théorème 28.21

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles  $p$  et  $n$  respectivement. L'application  $u : \text{Mat}_{e,f}(u)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
2. Soit  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions non nulles et de bases respectives  $e, f$  et  $g$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \times \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimensions finies et non nulles. Soit  $e$  une base de  $E$ ,  $f$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est un isomorphisme entre  $E$  et  $F$  si et seulement si  $\text{Mat}_{e,f}(u)$  est inversible. Dans ce cas on a :

$$\text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application  $u \mapsto \text{Mat}_{e,f}(u)$  est bijective. Par construction, elle est bien linéaire.
2. Soit  $x \in F$ .

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,g}(v \circ u) \text{Mat}_e(x) &= \text{Mat}_g(v \circ u(x)) \\ &= \text{Mat}_g(v(u(x))) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_f(u(x)) \\ &= \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u) \text{Mat}_e(x) \end{aligned}$$

Nécessairement :

$$\text{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \text{Mat}_{f,g}(v) \text{Mat}_{e,f}(u)$$

3.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(u^{-1}) &= \text{Mat}_f(u \circ u^{-1}) \\ &= \text{Mat}_f(id) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$

On note  $P = M^{-1}$ . D'après le premier point, on note  $\sigma$  l'unique élément de  $\mathcal{L}(F, E)$  tel que  $\text{Mat}_{f,e}(\sigma) = P$ .

On a :

$$Id = MP = \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{f,e}(v) = \text{Mat}_f(u \circ v)$$

Donc :

$$u \circ v = id$$

Donc ( $E$  est de dimension finie) :

$$u^{-1} = v$$

## 28.22 Exemple

### Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme  $\omega$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à  $Vect(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$  parallèlement à  $Vect(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$ .

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + c - d \\ -a + c - d \\ 2b - 2d \\ -a + 2b + c - 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \\ -a + 2b + c - 3d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d &= 0 \\ b - d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= c - d \\ b &= d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Donc } \ker(\omega - id) = Vect(1 + X^2, -1 + X + X^3).$$

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c - d \\ -a + 2b + c - d \\ 2b + 2c - 2d \\ -a + 2b + c - d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 (\Omega + I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c - d = 0 \\ b + c - d = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c + d \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c + d \\ -c + d \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow X \in Vect \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker(\omega + id) = Vect(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$ .

## 28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

### Théorème 28.23

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . On appelle **matrice de Vandermonde de  $x_1, \dots, x_n$**  la matrice  $(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires  $x_1, \dots, x_n$  sont distincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit  $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$ .

On suppose que tous les  $x_i$  sont distincts deux à deux.

Si  $P \in \ker \varphi$ ,  $P$  possède (au moins)  $n$  racines distinctes, or  $\deg P \leq n - 1$  donc par rigidité,  $P = 0$ .

Donc  $\varphi$  est injective ( $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$ ).

Donc  $\varphi$  est un isomorphisme ( $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$ ).

Or, en notant  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^n$  :

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc  $M$  est inversible (28.21).

Si  $x_1 = x_j$  avec  $x \neq j$ ,  $M$  possède deux lignes identiques, donc  $M \notin GL_n(\mathbb{K})$  (28.9).

## 28.28 Exemple

### Exemple 28.28

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension 3 et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $u$  est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base,  $u$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

— D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\text{rg } u}_{\geq 1} = 3$$

Comme  $u^2 = 0$ ,  $\text{Im } u \subset \ker u$ .

On a nécessairement  $\text{rg } u = 1$  et  $\dim \ker u = 2$ .



- Soit  $x \in E$  tel que  $u(x) \neq 0$ . Or  $u(x) \in \ker u$  et  $\dim \ker u = 2$ , on complète donc  $(u(x), y)$  en une base de  $\ker u$ .
- La famille  $(y, x, u(x))$  est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c = 0 &\text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$  est de cardinal 3 =  $\dim E$ , donc est une base de  $E$  et :

$$\text{Mat}_{(u(x), y, x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.29 Exemple

### Exemple 28.29

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang  $r$ .

Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et une base  $f$  de  $F$  telles que  $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$ , où  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Comme  $\text{rg } u = r$ ,  $\dim \ker u = p - r$  ( $p = \dim E$ ).

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\ker u$  dans  $E$ .

$\dim S = r$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$  une base adaptée à  $E = S \oplus \ker u$ .

$(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une base de  $\text{Im } u$ , donc libre dans  $F$ , que l'on complète en une base  $f$  de  $F$ .

Par construction :

$$\text{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## 28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

### Proposition 28.33

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit  $e$  et  $f$  deux bases quelconques, respectivement de  $E$  et  $F$ . Alors :

$$\text{rg } u = \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u)$$

On note  $e = (e_i)$ .

$$\begin{aligned} \text{rg } \dim \text{Vect}((u(e_i))) &= \dim \text{Vect}((C_i)) \\ &= \text{rg } \text{Mat}_{e,f}(u) \end{aligned}$$

## 28.35 Invariance du rang par une matrice inversible

### Proposition 28.35

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ , alors :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg } M$$

Soit  $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$  les applications canoniquement associées à  $M, P, R$ .  
 $\hat{P}, \hat{R}$  sont des isomorphismes ( $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ ). Ainsi :

$$\text{rg}(PMR) = \text{rg}(\hat{P} \circ \hat{M} \circ \hat{R}) = \text{rg}(\hat{M}) = \text{rg } M$$

## 28.37 Exemple

### Exemple 28.37

Déterminer le rang de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est 2 donc  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ .

## 28.38 Matrice de changement d'une base à une autre

### Théorème 28.38

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et  $e, f$  et  $g$  trois bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage de  $e$  à  $f$**  la matrice :

$$\text{Mat}_e(f) = \text{Mat}_{f,e}(\text{id}_E)$$

Cette matrice est souvent notée  $P_e^f$  (ou quelques fois  $P_{e \rightarrow f}$ ). De plus :

1.  $P_e^f$  est inversible, d'inverse  $P_f^e$ .
2.  $P_e^f \times P_f^g = P_e^g$ .

1. On a  $P_e^f = \text{Mat}_{f,e}(\text{id})$ .  
Donc ( $\text{id}$  est inversible) :

$$(P_e^f)^{-1} = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}^{-1}) = \text{Mat}_{e,f}(\text{id}) = P_f^e$$

- 2.

$$\begin{aligned} P_e^f \times P_f^g &= \text{Mat}_{f,e}(\text{id}) \times \text{Mat}_{g,f}(\text{id}) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id} \circ \text{id}) \quad (28.21) \\ &= \text{Mat}_{g,e}(\text{id}) \\ &= P_e^g \end{aligned}$$

## 28.41 Exemple

### Exemple 28.41

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé. Notons  $e = (i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et posons

$$\begin{cases} u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j \\ v_\theta = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases}$$

La matrice de la famille  $(u_\theta, v_\theta)$  dans la base  $(i, j)$  est :

$$\text{Mat}_{(i,j)}(u_\theta, v_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut 1 (et donc non nul), alors  $b_\theta = (u_\theta, v_\theta)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer les coordonnées de  $u$  dans la nouvelle base  $b_\theta$ .

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Mat}_e((x, y))$ .

On note  $X' = \text{Mat}_{(u_\theta, v_\theta)}((x, y))$ .

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X &= PX' \\ \text{donc } X' &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta x & \sin \theta y \\ -\sin \theta x & \cos \theta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $(x, y) = (\cos \theta x + \sin \theta y)u_\theta + (-\sin \theta x + \cos \theta y)v_\theta$ .

## 28.42 Changement de bases pour une application linéaire

### Théorème 28.42

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles,  $e$  et  $e'$  deux bases de  $E$ ,  $f$  et  $f'$  deux bases de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{e',f'}(u) = P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'}$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{e',f'}(u) &= \text{Mat}_{e',f'}(\text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E) \\ &= \text{Mat}_{f',f'}(\text{id}) \times \text{Mat}_{e,f}(u) \times \text{Mat}_{e',e}(\text{id}) \\ &= P_{f'}^f \text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'} \end{aligned}$$

## 28.47 Exemple fondamental

### Proposition 28.47

Deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient à dire que toute matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est équivalente à  $J_r$ .

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de rang  $r$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application canoniquement associée à  $M$ .

Donc  $\operatorname{rg} u = r$ .

D'après (28.29), on choisit une base  $e$  de  $\mathbb{K}^p$  et  $f$  de  $\mathbb{K}^n$  telles que :

$$\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = J_r$$

D'après (28.44),  $M$  et  $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$  sont équivalentes, soit :

$$M \sim J_r$$

## 28.48 Invariance du rang par transposition

### Théorème 28.48

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on a  $\operatorname{rg} {}^t A = \operatorname{rg} A$ .

En effet car  ${}^t(J_r) = J_r$ .

Ainsi,  $A \sim J_r$ .

Alors  $A = Q^{-1} J_r P$ .

Et  ${}^t A = {}^t P J_r {}^t Q^{-1}$ .

Donc  ${}^t A \sim J_r$ .

Donc  $\operatorname{rg} {}^t A = \operatorname{rg} A$ .