

# Chapitre 30

## Déterminant

<b>30 Déterminant</b>	<b>1</b>
30.4 Exemple . . . . .	2
30.11 Détermination d'une application $n$ -linéaire sur une base . . . . .	2
30.18 Caractérisation par les transpositions . . . . .	2
30.19 Une forme alternée change de signe par transposition . . . . .	3
30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée . . . . .	3
30.22 Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$ . . . . .	4
30.25 Exemple . . . . .	4
30.26 Description du déterminant par les coordonnées . . . . .	5
30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant . . . . .	5
30.30 Caractérisation des bases par le déterminant . . . . .	5
30.36 Déterminant d'un produit . . . . .	6
30.40 Expression des déterminants classiques . . . . .	6
30.41 Invariance du déterminant par transposée . . . . .	7
30.42 Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	7
30.44 Déterminant et conjugaison . . . . .	7
30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire . . . . .	7
30.47 Déterminant des matrices de codage des opérations . . . . .	8
30.50 Exemple . . . . .	8
30.51 Exemple . . . . .	9
30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs . . . . .	10
30.57 Exemple . . . . .	11
30.58 Développement suivant une colonne . . . . .	11
30.59 Développement selon une ligne . . . . .	12
30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley . . . . .	13

## 30.4 Exemple

### Exemple 30.4

On considère l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}; ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned} \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix} \right) \\ &= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\ &= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\ &= \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \lambda \delta \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

## 30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

### Proposition 30.11

Soit pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$  une base de  $E_i$  et pour tout  $(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket$ ,  $f_{j_1, \dots, j_n} \in F$ .

Alors il existe une unique application  $n$ -linéaire  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket, \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1, \dots, j_n}$$

Si  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$  est une base de  $E_i$  alors  $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$  est une base de  $E_1 \times \dots \times E_n$ . (22.16), théorème de rigidité.

## 30.18 Caractérisation par les transpositions

### Lemme 30.18

Pour qu'une forme  $f$  soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si  $\tau$  est une transposition alors  $\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ .  
Soit  $\sigma \in S_n$ . On écrit  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  avec  $\tau_i$  des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1) \varphi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k) \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.19 Une forme alternée change de signe par transposition

#### Lemme 30.19

Soit  $\varphi$  une forme alternée. Alors pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$  :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Cela revient à dire que pour toute transposition  $\tau \in S_n$ , on a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = -\varepsilon(\tau)\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, alors  $\varphi$  est alternée.

Soit  $\varphi$  alternée.

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j + x_i, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &\quad + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On suppose que  $\text{carac}(\mathbb{K}) \neq 2$ .

On a :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ (antisymétrie)}$$

Donc :

$$2\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

Donc :

$$\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$$

### 30.21 Image d'une famille liée par une forme alternée

#### Proposition 30.21

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille liée et  $\varphi$  une forme alternée. Alors :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, alors on peut écrire par exemple :

$$x_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{i=2}^n \lambda_i \varphi(x_i, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

### 30.22 Forme $n$ -linéaire d'un espace de dimension $n$

#### Théorème 30.22

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. Il existe une unique forme  $n$ -linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .
2. Cette forme  $n$ -linéaire est entièrement décrite sur les vecteurs de la base par :

$$\begin{cases} \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 & \text{s'il existe } j \neq k \text{ tel que } i_j = i_k \\ \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) & \text{où } \sigma \in \mathcal{S}_n \end{cases}$$

3. Toute autre forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  est de la forme  $\lambda\varphi$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1, 2

On utilise le théorème de rigidité des applications  $n$ -linéaires (30.11) en fixant l'image de chaque  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  avec  $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n$ .

- $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  s'il existe  $i_j = i_k$  avec  $j \neq k$ .
- $\varphi(\underbrace{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}}_{(i_1, \dots, i_n) \text{ fournit alors une permutation } \sigma \in \mathcal{S}_n}) = \varepsilon(\sigma) \times \underbrace{1}_{\varphi(e_1, \dots, e_n)}.$

Le théorème nous fournit l'existence de la forme alternée et l'unicité.

3

Soit  $\psi$  une forme  $n$ -linéaire alternée. On pose  $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$ .

- si  $\lambda = 0$ , par alternance (et antisymétrie) on a  $\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$  pour tout  $i_1, \dots, i_n$ .  
Par rigidité,  $\psi = 0 = 0 \times \varphi$ .
- si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\frac{1}{\lambda}\psi(e_1, \dots, e_n) = 1$ .  
Par unicité (1),  $\frac{1}{\lambda}\psi = \varphi$ .  
Donc  $\psi = \lambda\varphi$ .

### 30.25 Exemple

#### Exemple 30.25

On considère  $E = \mathbb{R}^2$ , muni de sa base canonique  $e = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ . Soit  $((a, b), (c, d)) \in E^2$ .  
Montrer que :

$$\det_e((a, b), (c, d)) = ad - bc$$

$e = ((1, 0), (0, 1))$ .  
 $((a, b), (c, d)) \in (E)^2$ .

$$\begin{aligned} \det_e((a, b), (c, d)) &= \det_e(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\ &= ac \times \cancel{\det_e(e_1, e_1)} + ad \times \det_e(e_1, e_2) + bc \times \det_e(e_2, e_1) + bd \times \cancel{\det_e(e_2, e_2)} \\ &= ad \times \det_e(e_1, e_2) - bc \times \det_e(e_1, e_2) \\ &= (ad - bc) \end{aligned}$$

### 30.26 Description du déterminant par les coordonnées

#### Théorème 30.26

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille d'éléments de  $E$ , dont les coordonnées sont :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{multilinéarité}) \\ &= \sum_{\{i_1, \dots, i_n\} = \llbracket 1, n \rrbracket} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det_{\mathcal{B}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \quad (\text{alternance}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=\varepsilon(\sigma)} \quad (\text{reformulation}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \end{aligned}$$

### 30.28 Effet d'un changement de base sur le déterminant

#### Proposition 30.28

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}}$$

D'après le corollaire (30.27), on écrit :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

En particulier :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

### 30.30 Caractérisation des bases par le déterminant

#### Proposition 30.30

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  non nulle, muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Une famille  $\mathcal{F}$  de cardinal  $n$  est une base si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

D'après (30.29), si  $\mathcal{F}$  est une base alors  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

Si  $\mathcal{F}$  n'est pas une base, alors elle est liée ( $|\mathcal{F}| = n$ )

Donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$  (30.21).

### 30.36 Déterminant d'un produit

#### Théorème 30.36

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$$

Soit  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $A_1, \dots, A_n$  les colonnes de  $A$  et  $B_1, \dots, B_n$  les colonnes de  $B$ . On considère l'application :

$$\varphi : (\mathbb{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{K}; (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}_C}(AX_1, \dots, AX_n)$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

On choisit donc  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_C}$ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_C) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_C) \\ &= \lambda \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(A_1, \dots, A_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi = \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \det(A) \det(B) &= \det(A) \det_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \varphi(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(AB_1, \dots, AB_n) \\ &= \det(AB) \end{aligned}$$

### 30.40 Expression des déterminants classiques

#### Proposition 30.40

1. On a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Soit : diagonales descendantes moins les diagonales ascendantes.

2.  $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2), (1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)\}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

### 30.41 Invariance du déterminant par transposée

#### Théorème 30.41

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

RAF avec (30.34)

### 30.42 Déterminant d'un endomorphisme

#### Théorème 30.42

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le scalaire  $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie. On appelle ce scalaire **déterminant de  $f$**  et est noté  $\det(f)$ .

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  sont semblables, donc elles ont le même déterminant (30.37).

### 30.44 Déterminant et conjugaison

#### Proposition 30.44

Soit  $\psi : E \rightarrow F$  un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie non nulles et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\det(\underbrace{\psi \circ u \circ \psi^{-1}}_{\in \mathcal{L}(F)}) = \det(u)$$

Soit  $e$  une base de  $E$  et  $f$  une base de  $F$ .

$$\begin{aligned} \det(\psi \circ u \circ \psi^{-1}) &= \det(\text{Mat}_f(\psi \circ u \circ \psi^{-1})) \quad (30.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi) \times \text{Mat}_e(u) \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (28.42) \\ &= \det(\text{Mat}_{e,f}(\psi)) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \times \det(\text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})) \quad (30.36) \\ &= \det(\underbrace{\text{Mat}_{\psi} \times \text{Mat}_{f,e}(\psi^{-1})}_{I_n}) \times \det(\text{Mat}_e(u)) \quad (30.36) \\ &= \det(\text{Mat}_e(u)) \end{aligned}$$

### 30.45 Déterminant d'une matrice triangulaire

#### Proposition 30.45

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure (on passe à la transposée sinon).  
Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow t_{i,j} = 0$$

D'après la formule sur les coefficients (30.34) :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) \leq i \equiv \text{id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n t_{\sigma(i),i} \\ &= \sigma(\text{id}) \prod_{i=1}^n t_{ii}\end{aligned}$$

### 30.47 Déterminant des matrices de codage des opérations

Lemme 30.47

On a :

$$\det(P_{ij}) = -1, \quad \det(Q_i(\lambda)) = \lambda \quad \text{et} \quad \det(R_{ij}(\lambda)) = 1$$

$Q_i(\lambda)$  et  $R_{ij}(\lambda)$  sont triangulaires.

D'après (30.45) :

$$\begin{aligned}\det(Q_i(\lambda)) &= \lambda \\ \det(R_{ij}(\lambda)) &= 1 \\ \det(P_{ij}) &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C}(C_{\tau_{ij}(1)}, \dots, C_{\tau_{ij}(n)}) \text{ où } \tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \\ & \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon(\tau_{ij}) \det_{\mathcal{B}_C}(C_1, \dots, C_n) \\ &= -1\end{aligned}$$

### 30.50 Exemple

Exemple 30.50

Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

### 30.51 Exemple

Exemple 30.51

Calculer pour  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_n(a) &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (a+n-1)(a-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

### 30.52 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

#### Proposition 30.52

Soit  $T$  une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les  $A_i$  sont des matrices carrées. Alors :

$$\det(T) = \prod_{i=1}^k \det(A_i)$$

On montre le résultat dans le cas où  $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

On généralisera alors par récurrence et transposée.

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  les colonnes de  $A$  et  $(B_1, \dots, B_p)$  les lignes de  $B$ .

On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^n)^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n & C \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire alternée.

Donc on choisit  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_n) &= \lambda \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

On cherche donc :

$$\varphi(\mathcal{B}_n) = \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & B \end{vmatrix}$$

On définit :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{K}^p)^p &\rightarrow \mathbb{K} \\ (Y_1, \dots, Y_p) &\mapsto \begin{vmatrix} 1 & & C \\ & \ddots & \\ & & 1 & Y_1 \\ & & & \vdots \\ & & & Y_p \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$\psi$  est une forme  $p$ -linéaire alternée donc on choisit  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\psi = \alpha \det_{\mathcal{B}_p}$$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha &= \psi(\mathcal{B}_p) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\psi = \det_{\mathbb{B}_p}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda &= \varphi(\mathcal{B}_n) \\ &= \psi(B_1, \dots, B_p) \\ &= \det(B)\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \det(B) \times \det_{\mathcal{B}_n}$$

Donc :

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}_n}(A_1, \dots, A_n)$$

Soit :

$$\det(T) = \det(B) \det(A)$$

### 30.57 Exemple

Exemple 30.57

Déterminer la comatrice de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\Delta_{11}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{12}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{13}(M) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{21}(M) = \dots$$

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 30.58 Développement suivant une colonne

Théorème 30.58

Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

On note  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On note  $M_1, \dots, M_n$  les colonnes de  $M$ .

Par hypothèses :

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, M_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_C} \left( M_1, \dots, \sum_{i=1}^n m_{ij} E_i, \dots, M_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(M_1, \dots, E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \det_{\mathcal{B}_C}(E_i, \dots, M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & M_1 & \cdots & M_n \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} m_{ij} \begin{vmatrix} 1 & m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ 0 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,n} \\ 0 & m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{j+1} m_{ij} \Delta_{ij} \end{aligned}$$

### 30.59 Développement selon une ligne

#### Théorème 30.59

Soit  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{ij}(M)$$

$\det(M) = \det({}^t M)$  et on utilise (30.58).

### 30.61 Expression de l'inverse de la comatrice, Cayley

#### Corollaire 30.61

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

$$M^t \text{Com}(M) = {}^t \text{Com}(M) M \det(M) I_n$$

En particulier,  $M$  est inversible si et seulement si  $\det(M) \neq 0$  et dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$$

On montre seulement  $M^t \text{Com}(M) = \det(M) I_n$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n M_{ik} [{}^t \text{Com}(M)]_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^n M_{ik} \text{Com}(M)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n M_{ik} (-1)^{i+k} \Delta_{kj}(M) \\ &= \det(M) \text{ (formule du développement)} \end{aligned}$$

On suppose que  $i \neq j$ . En reprenant les étapes précédentes :

$$\begin{aligned} [M^t \text{Com}(M)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n M_{ik} \text{Com}(M)_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} M_{ik} \Delta_{jk}(M) \end{aligned}$$

On considère le déterminant suivant (on a remplacé la ligne  $j$  par  $i$ ) :

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{développement de la ligne } j}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} m_{ik} \Delta_{jk}(M)$$