Chapitre 19

Convexité

19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Propostion 19.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur, soit sur $I \cap]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$.

On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$.
g paramètre la sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

- Sur $[x, y]$, RAF car f est convexe.
- Soit $t > y$. On pose $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y))}{t-x} \\ &= y\end{aligned}$$

  Par convexité de f :

$$\begin{aligned}f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{y} f(y) - \left(\frac{1}{y} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right) f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

- On raisonne de la même manière si $t \leq x < y$.

19.8 Inégalités des pentes

Propostion 19.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

1. f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.
2. Si f est convexe, alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$
   On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et $x < y$ dans $I \backslash \{a\}$.
   - On suppose $x < a < y$. D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a)) + f(a)$$

     Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Si $x < a < y$, d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que pour tout $a \in I$, $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.
Soit $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. On pose $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$.
g_a est croissante sur $I \backslash \{a\}$, donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
x - a < 0 \text{ et } y - a > 0 \\
(f(x) - f(a))(y - a) \leq (f(y) - f(a))(x - a) \\
\text{donc } f(a)(y - x) \leq f(x)(y - a) - f(y)(x - a) \\
\text{soit } f(a) \leq f(x)\frac{y - a}{y - x} + f(y)\frac{a - x}{y - x} \\
= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)
\end{aligned}$$

2. Soit $a < b < c$.

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 19.9

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert. La fonction f est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites osnt envisageables). Pour tout $a \in I$, on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour $a \in I$, on note encore $g_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Comme g est définie à gauche et à droite de a (I est ouvert) et que g est croissante sur $I \backslash \{a\}$, d'après le TLM g admet des limites finies à gauche et à droite de a et :

$$\begin{aligned}
\lim_{a^+} g = f'_d(a) \geq f'_g(a) = \lim_{a^-} g \\
\forall x \neq a, f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \\
\underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a) \\
\underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)
\end{aligned}$$

19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

Théorème 19.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $x < y$. Soit a tel que $x < a < y$.
D'après l'inégalité des pentes (f est convexe), on a :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

En considérant les limiets $a \to x^+$ et $a \to y^-$ et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose f' croissante sur I. Soit $x < y$. Soit $a \in]x, y[$.
On applique deux fois le TAF : on choisit $\alpha \in]x, a[$ et $\beta \in]a, y[$ tels que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{-x+a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\beta)$$

Comme f' est croissante, on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} &\leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{a-x}{y-x} f(y) + \frac{y-a}{y-x} f(x) \end{aligned}$$

Comme $a \in]x, y[$, $a = \lambda y + (1-\lambda)x$ et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$$

Donc f est convexe (sur I).

19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes

Propostion 19.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est convexe sur I si et seulement si le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto f'(a)(t-a) + f(a)$.
On pose $h = f - \varphi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $h' = f' - f'(a)$.
Or f est convexe donc f' est croissante sur I. Donc :

a			
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	0	$\nearrow$
h		$+$	

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x < y$ et $a = \lambda y + (1-\lambda)x \in]x, y[$.
Par hypothèse, le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a.

$$\forall t \in I, f(t) \geq f'(a)(t-a) + f(a)$$

En particulier :

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$f(y) \geq f'(a)(y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\begin{aligned}(y-a)f(x) + (a-x)f(y) &\geq (y-a)f(a) \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y) \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\end{aligned}$$

19.17 Somme de fonctions convexes

Propostion 19.17

La somme de deux fonctions convexes et convexe.

Soit f et g convexes. Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.
On a :

$$f(a) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
$$g(a) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Donc :

$$(f+g)(a) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

Donc $f+g$ est convexe.

19.18 Composition de fonctions convexes

Propostion 19.18

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes avec g croissante. Alors $g \circ f$ est convexe sur I.

Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.
On a :

$$\begin{aligned}f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \text{donc } g \circ f(a) &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f(x)) + (1-\lambda)(g \circ f(y))\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

19.19 Réciproque de fonctions convexes

Propostion 19.19

Soit $f : I \to J$ une fonction convexe bijective avec I ouvert. Alors $g = f^{-1}$ est soit concave, soit convexe sur J.

Comme f est convexe sur I ouvert, f est continue sur I (19.9).
Or f est bijective, donc f est strictement monotone sur I (15.72).

- Supposons f strictement croissante sur I. Soit $x < y$ dans $J = f(I)$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Alors g est strictement croissante.
  On pose $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On a :

$$\begin{aligned}f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &\leq \lambda x + (1-\lambda)y\end{aligned}$$

Or g est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}\lambda g(x) + (1-y)g(y) &= \lambda a + (1-\lambda)b \\ &\leq g(\lambda x + (1-\lambda)y)\end{aligned}$$

Donc g est concave sur J.

— Si f est strictement décroissante (et donc g strictement décroissante), alors g est concave sur J.

19.20 Extrema des fonctions convexes

Propostion 19.20

Soit f une fonction convexe définie par un intervalle I ouvert. Alors f admet un minimum global en un point a si et seulement si a est un point critique.

$\boxed{\Rightarrow}$

RAF

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose que a est un point critique. Donc $f'(a) = 0$.
Or le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a, soit :

$$\forall x \in I, f(x) \geq \underbrace{f'(a)}_{0}(x-a) + f(a) = f(a)$$

Donc $f(a)$ est un minimum global de f.

19.24 Inégalité de Jensen

Théorème 19.24

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $n \geq 2$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0;1]^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Par récurrence.

— Pour $n = 2$, RAF (cf. définition)

— On suppose la propriété vraie au rang n.

Soit $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in I^{n+1}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$, on applique directement l'hypothèse au rang n (RAF).
On suppose $\lambda_{n+1} \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} x_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) \times \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\end{aligned}$$

19.25 Exemple - Inégalité arithmético-géométrique

Exemple 19.25

Soit $n \geq 1$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
On remarque que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. D'après l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \\ &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \\ &= \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)\end{aligned}$$

On compose alors par exp (strictement croissante).
D'après le résultat précédent appliqué à $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$:

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Donc $(x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*)$:

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

19.26 Inégalités de Holder et Minkowski

Théorème 19.26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, p et q deux nombres réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \quad \textbf{Inégalité de Holder}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} b_k^p} \quad \textbf{Inégalité de Minkowski}$$

— On rappelle que le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $u > 0$ et $v > 0$, on a :

$$\ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(uv)$$

Donc :

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Et en particulier :

$$u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$$

En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\underbrace{\left[\frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\right]^{\frac{1}{q}}}_{\frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n a_i^p} \times \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n b_i^q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}\sqrt[q]{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}} &\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k}{\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}} \leq 1$$

—

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} \ (p \neq 1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k(a_k + b_k)^{p-1}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Holder $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &\leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q}} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p}\end{aligned}$$

$$\text{donc } \left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)\right]^{\overbrace{(1 - \frac{1}{q})}^{\frac{1}{p}}} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} + \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n b_k^p}$$

Pour $p = 1$, RAF.