

# Chapitre 35

## Familles sommables

<b>35 Familles sommables</b>	<b>1</b>
35.2 Reformulation	2
35.5 Croissance de la somme	2
35.8 Lien avec les séries à termes positifs	3
35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes	3
35.12 Restriction	3
35.13 Preque linéarité	4
35.14 Sommation par paquets	4
35.16 Théorème de Fubini positif	5
35.17 Exemple	5
35.18 Exemple	5
35.19 Exemple	6
35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives	7
35.27 Caractérisation de la somme par les $\epsilon$	7
35.28 Linéarité	8
35.29 Intégralité triangulaire	9
35.31 Associativité pour les familles sommables	10
35.33 Produit de familles sommables	10
35.34 Exemple	11
35.35 Exemple	11
35.36 Exemple	12
35.37 Exemple	13
35.38 Produit de Cauchy	14

## 35.2 Reformulation

### Proposition 35.2

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs. Alors  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est bien définie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$$

En notant, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , on a :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} a_k$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \in \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$ .

Donc  $\sum_{k \geq 0} a_k \leq \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\} = S$ .

Par ailleurs, pour  $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ , on pose  $N = \max J$  et  $J \subset \llbracket 0, N \rrbracket$  et :

$$\sum_{k \in J} a_k \leq \sum_{k=0}^N a_k \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k \geq 0} a_k = S$$

## 35.5 Croissance de la somme

### Proposition 35.5

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux familles à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Si pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ , alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ . Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

$\sum_{i \in I} b_i$  est un majorant de  $\left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ .

Par définition :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

### 35.8 Lien avec les séries à termes positifs

#### Proposition 35.8

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs.

1. On a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier,  $\sum a_n$  converge si et seulement si la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

### 35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

#### Corollaire 35.10

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs et  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

Soit  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ .

$\sigma$  induit une bijection  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$  de  $\{\sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$  sur  $\{\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ . Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \quad (35.8)$$

### 35.12 Restriction

#### Proposition 35.12

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Soit  $J \subset I$ , alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Comme  $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$  :

$$\left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \subset \left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.13 Preque linéarité

#### Proposition 35.13

Soit  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux familles d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et  $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$ . On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

( $a \geq 0, b \geq 0$  et  $\sup A, \sup B$  existent).

### 35.14 Sommation par paquets

#### Théorème 35.14

Soit  $I$  un ensemble quelconque et  $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que  $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$  :

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ .

Pour tout  $k \in K$ , on note  $J_k = J \cap I_k$ .

Ainsi,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$  et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k \in K} J_k &= \bigsqcup_{k \in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k \in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également  $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$ .

Alors  $L \in \mathcal{P}_f(K)$  et :

$$\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i \leq \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On prouve  $\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$ .

Soit  $L \in \mathcal{P}_f(K)$ .

Soit, pour  $k \in L$ ,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ .  $\bigsqcup_{k \in L} J_k$  est donc une partie finie de  $I$ .

$$\underbrace{\sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup_{k \in L} J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.16 Théorème de Fubini positif

#### Corollaire 35.16

Soit  $I$  et  $J$  deux ensembles quelconques et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\} = I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

### 35.17 Exemple

#### Exemple 35.17

Montrer que  $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = 1$ .

$(\frac{1}{k^n})_{n \geq 2, k \geq 2}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} - 1 \right) &= \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \quad (\text{Fubini positif}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \quad (\text{progresion géométrique}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k} \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad (\text{DES}) \\ &= 1 \quad (\text{télescopage}) \end{aligned}$$

### 35.18 Exemple

#### Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1 \leq k \leq n}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2^n} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq k} \frac{1}{2^n} \right) \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

### 35.19 Exemple

#### Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la somme  $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{pq}{(p+q)^\alpha}$  est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$  est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \geq 1, q \geq 1} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d \geq 1} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommatation par paquets)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \left( \frac{p}{d^{\alpha-1}} - \frac{p^2}{d^\alpha} \right) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \left( \frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}} - \frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}} \right) \text{ (sommes usuelles)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d+1}{d^{\alpha-1}} (3d - 2d - 1) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}}
 \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si  $\alpha > 4$ .

### 35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives

#### Théorème 35.5

1. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont.
2. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de complexes. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$  le sont.

1. On rappelle que :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

et :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, 0 \leq a_i^+ \leq |a_i| \\ 0 \leq a_i^- \leq |a_i| \end{aligned}$$

Si  $(a_i)$  est sommable, alors  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont aussi (35.24).  
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall i \in I, |a_i| \leq a_i^+ + a_i^-$$

Donc si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables, alors  $(a_i)$  est sommable (35.24) et (35.13).

2. Démonstration similaire.

### 35.27 Caractérisation de la somme par les $\epsilon$

#### Proposition 35.27

Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \ell(I)$  et  $S \in \mathbb{C}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $S = \sum_{i \in I} a_i$
2. pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$  avec  $J_\epsilon \subset K$  :

$$\left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| \leq \epsilon$$

$\Rightarrow$

On suppose que  $S = \sum_{i \in I} a_i$  (avec  $(a_i)$  une famille de réels).

On décompose :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

Et :

$$S = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- = S^+ - S^-$$

On note également :

$$\begin{aligned} A_+ &= \left\{ \sum_{i \in J} a_i^+ \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \\ A_- &= \left\{ \sum_{i \in J} a_i^- \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ .

$S^+ - \frac{\epsilon}{2}$  ne majore pas  $A_+$ , on choisit  $J_\epsilon^+ \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$S^+ - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+$$

Pour les mêmes raisons, on choisit  $J_\epsilon^- \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$S^- - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^-$$

Pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$  avec  $K \supset J_\epsilon = J_\epsilon^+ \cup J_\epsilon^-$ .

$$\begin{aligned} S^+ - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+ \leq \sum_{i \in K} a_i^+ \\ S^- - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^- \leq \sum_{i \in K} a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| &= \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ - S^- + \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ \right| + \left| S^- - \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

⇐

Supposons qu'il existe  $S$  et  $S'$  vérifiant la condition 2. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , n notant  $J_\epsilon$  l'ensemble de l'assertion :

$$\begin{aligned} |S - S'| &= \left| S - \sum_{i \in J_\epsilon} a_i + \sum_{i \in J_\epsilon} a_i - S' \right| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc  $S = S'$ .

## 35.28 Linéarité

### Théorème 35.28

L'ensemble  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et  $(a_i)_{i \in I} \rightarrow \sum_{i \in I} a_i$  est une forme linéaire sur  $\ell^1(I)$ .

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- $\ell^1(I) \subset \mathbb{K}^I$ .
- Soit  $(a_i), (b_i)$  dans  $\ell^1(I)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\lambda a_i + \mu b_i| &\leq \sum_{i \in I} |\lambda| |a_i| + |\mu| |b_i| \\ &\leq |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |b_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc  $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ .

- Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $J_\epsilon^a \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que :

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(I), K \supset J_\epsilon^a, \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$



On pose  $J_\epsilon = J_\epsilon^a \cup J_\epsilon^b$ .

On a alors, pour  $K \in \mathcal{P}_f(I)$ ,  $K \supset J_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \left| \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in K} (\lambda a_i + \mu b_i) \right| &= \left| \lambda \sum_{i \in I} a_i - \lambda \sum_{i \in K} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i - \mu \sum_{i \in K} b_i \right| \\ &\leq |\lambda| \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| + |\mu| \left| \sum_{i \in I} b_i - \sum_{i \in K} b_i \right| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\epsilon \end{aligned}$$

D'après (35.27), on a donc :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

## 35.29 Intégralité triangulaire

### Proposition 25.29

Si  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille sommable de complexes, alors

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$$

On suppose que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{R})$ .

On écrit donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, a_i &= a_i^+ - a_i^- \\ |a_i| &= a_i^+ + a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in I} a_i \right| &= \left| \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- \right| \\ &\leq \sum_{i \in I} a_i^+ + \sum_{i \in I} a_i^- \quad (\text{Inégalité triangulaire sur } \mathbb{R}) \\ &= \sum_{i \in I} (a_i^+ + a_i^-) \quad (\text{presque linéarité}) \\ &= \sum_{i \in I} |a_i| \end{aligned}$$

On suppose que  $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{C})$ .

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in J} a_i \right| &\leq \sum_{i \in J} |a_i| \\ &\leq \sum_{i \in I} |a_i| \end{aligned}$$

On note  $M = \sup \left\{ \left| \sum_{i \in J} a_i \right| \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$  de telle sorte que  $M \leq \sum_{i \in I} |a_i|$ .

Montrons que  $M = \left| \sum_{i \in I} a_i \right| = |S|$ .

Pour  $\epsilon > 0$ , on choisit  $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$  tel que pour tout  $K \in \mathcal{P}_f(I)$ ,  $K \supset J_\epsilon$  :

$$\left| |S| - \left| \sum_{i \in K} a_i \right| \right| \leq \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$

Ce qui permet de conclure :

$$M = |S|$$

### 35.31 Associativité pour les familles sommables

#### Théorème 35.31

Soit  $(I_k)_{k \in K}$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille de réels ou de complexes. Alors  $a$  est sommable si et seulement si chaque  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable de somme  $s_k$  et de somme absolue  $t_k$  et si la famille  $(t_k)_{k \in K}$  est sommable. Dans ce cas,  $(s_k)$  est également sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} s_k = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On traite la sommabilité.

D'après le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (35.14) :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i| = \sum_{k \in K} t_k \text{ (notations (35.31))}$$

i

— Si  $\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$  alors :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |a_i| < +\infty$$

Donc  $(t_k)$  est sommable.

Et  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable.

— Si  $(a_i)_{i \in I_k}$  est sommable pour tout  $k \in K$  et  $(t_k)_{k \in K}$  est sommable, alors :

$$\sum_{k \in K} t_k < +\infty$$

Donc :

$$\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$$

#### Théorème 35.33

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles sommables. Alors  $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right)$$

### 35.33 Produit de familles sommables

— Sommabilité : On note  $c_{ij} = a_i b_j$  pour tout  $(i, j) \in I \times J$ .

On écrit  $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J$ .

On pose, pour  $i \in I$  :

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j \in J} |c_{ij}| \\ &= \sum_{j \in J} |a_i| |b_j| \\ &= |a_i| \times \sum_{j \in J} |b_j| \text{ (presque linéarité)} \\ &< +\infty \text{ ((} b_j \text{) est sommable)} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} t_i &= \sum_{i \in I} |a_i| \times \underbrace{\left( \sum_{j \in J} \right)}_{\in \mathbb{R}_+} \\ &= \left( \sum_{j \in J} |b_j| \right) \times \sum_{i \in I} |a_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

D'après le théorème de sommation par paquets (35.31), la famille  $(c_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable.  
— Somme :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} c_{ij} &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j \quad (35.28) \\ &= \sum_{i \in I} a_i \left( \sum_{j \in J} b_j \right) \\ &= \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{j \in J} b_j \right) \quad (35.28) \end{aligned}$$

### 35.34 Exemple

#### Exemple 35.34

Montrer que la famille  $\left( \frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1, q \geq 1} \left| \frac{\sin(p+q)}{p^2 q^2} \right| &\leq \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2 q^2} \\ &= \left( \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \right) \left( \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2} \right) \quad (\text{Fubini positif}) \\ &= \zeta(2)^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

### 35.35 Exemple

#### Exemple 35.35

Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la famille  $(z^{ij})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$  est sommable si et seulement si  $|z| < 1$ .

— Si  $|z| < 1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \geq 1, j \geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |z|^i |z|^j \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{i \geq 1} |z|^i \frac{1}{1 - |z|^i} \quad (|z|^i \neq 1) \\
 &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \frac{|z|^i}{1 - |z|^i} \\
 &\leq \sum_{i \geq 1} \frac{|z|^i}{1 - |z|} \quad (|z| < 1) \\
 &= \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}
 \end{aligned}$$

— Si  $|z| \geq 1$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \geq 1, j \geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |z|^i |z|^j \\
 &= \sum_{i \geq 1} +\infty \quad (|z|^i \geq 1) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

### 35.36 Exemple

Exemple 35.36

Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$ .

On note  $(a_{n,k}) = \left( \frac{(-1)^n}{nk(k+1)} \right)_{1 \leq n \leq k}$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq k} |a_{n,k}| &= \sum_{1 \leq n \leq k} \frac{1}{nk(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k \geq n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \\
 &= \zeta(2) \\
 &< +\infty
 \end{aligned}$$

La famille est donc sommable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq k} a_{n,k} &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \zeta(2) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \zeta(2) \\
 &= -\frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

### 35.37 Exemple

Exemple 35.37

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq k+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = -\frac{1}{2}$ .

On note  $(a_{n,k}) = \left( \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} \right)_{1 \leq k \leq n}$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq k \leq n} |a_{n,k}| &= \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{2^n} \\
 &< +\infty \text{ (car } \frac{n-1}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)) \\
 \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq n+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{2^n} \times (-1) \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

### 35.38 Produit de Cauchy

#### Théorème 35.38

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries absolument convergentes. Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Alors  $\sum_{n \geq 0} c_n$  est absolument convergente et :

$$\sum_{n \geq 0} c_n = \left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right)$$

La famille des  $(a_i b_j)_{i \geq 0, j \geq 0}$  est sommable (35.38).

D'après le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n \geq 0} a_n \right) \left( \sum_{n \geq 0} b_n \right) &= \sum_{i \geq 0, j \geq 0} a_i b_j \quad (35.33) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i+j=n} a_i b_j \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n \end{aligned}$$