

Chapitre 27

Séries numériques

27 Séries numériques	1
27.6 Série géométrique	2
27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout	2
27.12 CN de convergence portant sur le terme général	2
27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs	2

27.6 Série géométrique

Théorème 27.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a} \quad (|a| < 1)$$

La série converge et $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

Proposition 27.11

Si (u_n) et (v_n) ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.

D'après les hypothèses, A est majoré donc possède un maximum N d'après la propriété fondamentale de \mathbb{N} .

On note (S_n) et (S'_n) les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Pour $n \geq N$:

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k \in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi (S_n) converge si et seulement si (S'_n) converge.

27.12 CN de convergence portant sur le terme général

Théorème 27.12

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0. De manière équivalente, si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 27.16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théorème de comparaison sur les suites.