Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (X,Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

— ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$

— bilinéarité : RAF

— ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire usuel.

— bilinéarité : RAF

— Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2, {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t\left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y\right) \\ &= {}^tY {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2+xy+y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2+xy+y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.
La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Propostion 34.14

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \text{ (bilinéarité)} \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Propostion 34.15 bis

Soit $\|.\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire :
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.
- Inégalité triangulaire, version distance :
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \|tx+y\|^2 \\ &= \langle tx+y, tx+y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$
f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.
Or $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. D'où le résultat.
Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0. On a alors $\|t_0x+y\|^2 = 0$.
Donc $t_0x + y = 0$.
Donc (x,y) est liée.
Réciproquement, si (x,y) est liée, alors $y = t_0x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.
- Pour $(x,y) \in E^2$:
$$\begin{aligned}\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|\end{aligned}$$
La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.
RAS pour l'inégalité généralisée.
Si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :
$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1+\alpha\|\|x\| = \|x+y\| = (1+|\alpha|)\|x\|$$

Donc $|1+\alpha| = 1+|\alpha|$.
Nécessairement, $\alpha \geq 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| &\leq \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \\
\left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}
\end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_a^b f'(t)^2\,dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})\cdot \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned}
\|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f'\rangle| \\
&= \left|\int_a^b f(t)f'(t)\,dt\right| \\
&= \left|\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_a^b\right| \\
&= \left|\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right|
\end{aligned}$$

34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

$\boxed{\Rightarrow}$ RAF
$\boxed{\Leftarrow}$ Si x est orthogonal à tout vecteur de E, alors $x \perp x$, donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

34.21 Exemple

Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur $\mathbb{R}^2$, la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2)\right)$ l'est.

$\|(1,0)\| = \sqrt{2} = \|(0,1)\|$
$\langle(1,0),(0,1)\rangle = 1$
Donc
$|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)\| = 1$
On a $\|(1,-2)\| = \sqrt{6}$
Et $\langle(1,0),(1,-2)\rangle = 0$.

34.23 Exemple

Exemple 34.23

La famille des fonctions $t \mapsto \sin(nt)$, où $n \in \mathbb{N}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}([0;2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0;2\pi] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$.
Soit $p \neq n$.

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_n\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(pt)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-p}\sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p}\sin((n+p)t)\right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $n = p$ alors :

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt))\, dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc (f_n) est bien une famille orthonormée.

34.24 Exemple

Exemple 34.24

Dans $\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f,g)\mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

D'après le chapitre 4, si f est impaire :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$$

Si f est paire et g impaire, alors fg est impaire et ainsi $\langle f,g\rangle = 0$.

34.25 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 34.25

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout $(x,y)\in E^2, x$ et y sont orthogonaux ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$. De surcro ^ it, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, si E est de dimension finie n non nulle, toute famille orthogonale de n vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF
2. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i\in I, e_i \neq 0$$

On suppose que $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i e_i = 0$.
Soit $j\in I$.

$$\begin{aligned}\langle\sum_{i\in I}\lambda_i e_i, e_j\rangle &= 0\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=0 \text{ pour } i\neq j}\\ \text{donc } \lambda_j\|e_j\|^2 &= 0\\ \text{donc } \lambda_j &= 0\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

34.26 Coordonnées dans une base orthonormale

Théorème 34.26

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E, et $x\in E$. Alors

$$x = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont $(\langle x,e_1\rangle,\dots,\langle x,e_n\rangle)$.

Comme $(e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base, tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle x, e_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \lambda_j\end{aligned}$$

34.27 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale

Théorème 34.27

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $(x,y) \in E^2$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E. Alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\mathrm{t}}XY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = {}^{\mathrm{t}}XX$$

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de E. Pour $(x,y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle e_i\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

34.28 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 34.28

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. On peut transformer $(e_1, \dots, e_n)$ en une famille orthonormale de $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)\,.$$

Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ peuvent être construits de proche en proche depuis u_1 jusqu'à u_n et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on n'a que deux choix possibles pour u_k :

$$\pm \frac{e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle\, u_i}{\left\| e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle\, u_i \right\|}$$

— Nécessairement, $u_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$ pour que u_1 soit unitaire et $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$.
— Supposons construits $(u_1, \dots, u_k)$, $k \leq n-1$ vérifiant :
  — $Vect(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
  — $(u_1, \dots, u_k)$ est une famille orthornormale

  Soit $v \in E$. Ccomme $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1})$.
  Si $v \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$, on a alors :

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \mu_{k+1} e_{k+1}$$

  On a :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v) \Leftrightarrow \lambda_{k+1} \neq 0$$

  On suppose désormais $\lambda_{k+1} \neq 0$.
  On a $(u_1, \dots, u_k, v)$ une familel orthogonale si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall i \in [\![1, k]\!], \langle u_i, v \rangle = 0 \\
\text{ssi. } \forall i \in [\![1, k]\!], 0 &= \langle u_1, \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_p + \lambda_{k+1} e_{k+1} \rangle \\
&= \sum_{p=1}^{k} \lambda_p \langle u_i, u_p \rangle + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\
&= \lambda_i + \lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\
\text{ssi. } &\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = -\lambda_{k+1} \langle u_i, e_{k+1} \rangle \\
&\text{ssi. } v = \lambda_{k+1} (e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, e_k \rangle u_i)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $(u_1, \dots, u_{k+1})$ est orthonormée avec $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ si et seulement si :

$$u_{k+1} = \pm \frac{e_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i}{\|e_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle u_i\|}$$

Exercice 6

D'après le cours :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\to \mathbb{R} \\
(A, B) &\mapsto \text{tr}({}^t AB)
\end{aligned}$$

définit un produit scalaire dont N est la norme associée.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &= \text{tr}({}^t ABAB) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (AB)_{ji}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} A_{jk} B_{ki} \right]^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} A_{jk}^2 \right] \times \left[\sum_{p=1}^{n} B_{pi}^2 \right] \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} B_{pi}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{jk}^2 \right) \\
&= N(A)^2 N(B)^2
\end{aligned}$$

Exercice 7

1. (a) RAF d'après la définition d'un produit scalaire.

   (b) Pour $u \in E$, on note $f_u : E \to \mathbb{R}; x \mapsto \langle u, x \rangle$ et on note $f : E \to E^*; u \mapsto f_u$.
   On a $\dim(E^*) = \dim(E)$ donc f est surjective.
   Soit $u \in \ker f$. Donc :
   $$\forall x \in E, \langle u, x \rangle = 0$$
   Donc $u = 0_E$.
   Donc f est injective.
   Donc f est bijective.

2. (a) On munit $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension finie) du produit scalaire :
   $$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$$
   On note $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$.
   Ainsi, $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]^*$.
   D'après (1.b), il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] : \varphi(P) = \langle A, P \rangle$$

   (b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $A \neq 0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)A(t)\, dt = P(0)$$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k A(t)\, dt = 0$.
   En particulier, $\int_0^1 tA(t)\, dt = 0$.
   Donc $t \mapsto tA(t)$ doit s'annuler sur $]0, 1[$.
   Donc A possède au moins une racine sur $]0, 1[$.
   Notons $r_1, \dots, r_k$ les racines de A sur $]0, 1]$. ($k \leq n$)
   On pose $P = X \prod_{i \in [\![1,k]\!]} (X - r_i) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
   On a $\int_0^1 \underbrace{P(t)A(t)}_{\text{de signe constant}}\, dt = P(0) = 0$.
   Donc $PA = 0$. Absurde.