

Chapitre 20

Espace Vectoriels

20 Espace Vectoriels	1
20.2 Propriétés du 0, régularité	2
20.10Espace vectoriel de référence	2
20.11Transfert de structure	2
20.16Caractérisation des sous-espaces vectoriels	3
20.22Proposition 20.22	3
20.27Intersection de sous-espaces vectoriels	4
20.34Description de $Vect(X)$	4
20.36Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés	4
20.41Somme de sous-espaces vectoriels engendrés	5
20.43Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels	5
20.47Unicité de l'écriture de la somme directe	6
20.51Famille libre	7
20.52Exemple	8
20.58Caractérisation de la liberté pour des familles infinies	8
20.60Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par \mathbb{N}	9

20.2 Propriétés du 0, régularité

Proposition 20.2

Soit E un \mathbb{K} -ev. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. $(-1).x = -x$
4. si $x \neq 0_E$,

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Proposition 20.10

1. \mathbb{K} est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

1. RAF.
2. Soit E un \mathbb{K} -ev et F un ensemble quelconque.
 E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
 Le produit externe est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$

Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , G un ensemble quelconque et $\varphi : E \rightarrow G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et une loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{ et } \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
 (x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi(z)) \\
 &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
 &= x + (y+z) \\
 x + \varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + 0) = x \quad (\varphi \text{ neutre}) \\
 x + \varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
 x + y &= y + x
 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
 &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
 &= (\lambda\mu).x \\
 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\
 &= x \\
 (\mu + \lambda).x &= \varphi((\mu + \lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \mu.x + \lambda.x
 \end{aligned}$$

De même pour la dernière.

20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 20.16

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$;
2. $0 \in F$;
3. F est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

\Rightarrow

1. Oui.
2. F est un sous-groupe de E donc $0_E \in F$.
3. Pour tout $(x, y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ et $y \in F$. Donc $\lambda x + y \in F$.

\Leftarrow

D'après (3) avec :

- $y = 0$: \times est LCE.
- $\lambda = 1$: $+$ est LCI.

$0 \in F$ et $\lambda = -1$, F est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

20.22 Propostion 20.22

Propostion 20.22

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, D_1 et D_2 deux droites vectorielles. Alors soit $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, soit $D_1 = D_2$.

Par définition, $0_E \in D_1 \cap D_2$.

Supposons $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$ et fixons $x \in D_1 \cap D_2$ avec $x \neq 0_E$.

Soit $v \in D_1$. Par définition, on écrit $D_1 = \mathbb{K}x_1$ et $D_2 = \mathbb{K}x_2$.

On a donc $v = \alpha x_1$, $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Ainsi :

$$v = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_1 = \alpha \lambda_1^{-1} x = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc $D_1 \subset D_2$ et par symétrie, $\boxed{D_1 = D_2}$.

20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.27

Soit E un espace vectoriel et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

- $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$.
- $\forall i \in I, 0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$.
- Soit $(x, y) \in \left[\bigcap_{i \in I} E_i \right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

$$\text{Donc } \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

20.34 Description de $\text{Vect}(X)$

Proposition 20.34

Soit E un \mathbb{K} -ev et X un sous-ensemble de E . Alors $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

On note F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X .

F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X .

Par définition, $\text{Vect}(X) \subset F$.

Or $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel qui contient X . Il doit donc contenir les combinaisons linéaires de X soit F .

Donc $\boxed{F = \text{Vect}(X)}$.

20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.36

Soit A et B deux ensembles. On a

1. $A \subset \text{Vect}(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. $A = \text{Vect}(A)$ si et seulement si A est un espace vectoriel.
4. $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
5. $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$ si et seulement si $x \in \text{Vect}(A)$.

1. RAF

2. RAF (20.24)

3. Si $A = \underbrace{\text{Vect}(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$, alors A est un sous-espace vectoriel.

Si A est un espace vectoriel, par minimalité, $A = \text{Vect}(A)$.

4. RAF (20.36.3)

5. On a toujours $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$ (20.36.2) si $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$.

Or $x \in Vect(A \cup \{x\})$.

Donc $x \in Vect(A)$.

Réciproquement, si $x \in Vect(A)$, d'après (20.34) :

$$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$

Si $u \in Vect(A \cup \{x\})$, alors :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} (\mu_1 a'_1 + \dots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.41

Soit X et Y deux sous-ensembles de E . Alors

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :

$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.43

Soit E_1, \dots, E_n et F des sous-espaces vectoriels de E . Sont équivalentes :

1. $F = E_1 + \dots + E_n$;
2. $F = (\dots((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1}) + E_n$;
3. $F = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}$.

2. Associativité fournie par la définition.

3. (20.39) + (20.43.2)

Exemple

Dans \mathbb{R}^3 , $E = Vect((1, 0, 0))$ et $F = Vect((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Soit $u \in E \cap F$.

$$u = \alpha(1, 0, 0) = \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1).$$

$$\text{Donc } (-\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0).$$

$$\text{Donc } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dans \mathbb{R}^4 avec $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$.

$$E = Vect(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

$$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$$

Soit $u \in E \cap F$.

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1 + e_3) + \delta(2e_2 + e_1 - e_4) = (\gamma + \delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 0 \text{ (} L_1 - L_3 \text{)} \\ \beta = 0 \text{ (} L_4 \text{)} \\ \alpha = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \\ \gamma = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément x de $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$.

\Rightarrow

On suppose que la somme est directe.

Soit $x \in E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_n \\ &= x'_1 + \dots + x'_n \\ \text{donc } \underbrace{x'_n - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{(x_{n-1} - x'_{n-1})}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x'_n &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

\Leftarrow

On remarque que $0 = 0 + \dots + 0$.

Soit $u \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1})$.

Donc :

$$\begin{aligned} u &= e_n = e_1 + \dots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \dots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.

20.51 Famille libre

Proposition 20.51

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **libre** si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires de \mathbb{K} , à support fini, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
2. Pour tout $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ il existe une **unique** famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires de \mathbb{K} , à support fini, telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.
Si de plus, $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, les points précédents sont équivalents aux points suivants :
3. Les x_i sont non nuls et la somme $\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$ est directe.
4. La fonction $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ est injective.

$1 \Rightarrow 2$

On écrit, pour tout $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$:

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$$

$$\text{donc } \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Comme (λ_i) et (μ_i) sont des familles de scalaires à support fini, $(\lambda_i - \mu_i)$ aussi et d'après (20.51.1) :

$$\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$$

$2 \Rightarrow 1$

Soit $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ avec (λ_i) une famille de scalaires à support fini.

Comme :

$$0 = \sum_{i \in I} 0 x_i$$

Par unicité :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$1, 2 \Rightarrow 3$

Nécessairement, les x_i sont tous non nuls (sinon, on écrit $1 \times x_1 = 0$).

Soit $x \in (\mathbb{K} + \dots + \mathbb{K}x_{n-1}) \cap \mathbb{K}x_n$.

On écrit :

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = \alpha_n x_n$$

$$\text{donc } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n x_n = 0$$

Par hypothèse :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$$

On poursuit le travail par récurrence pour montrer que la somme est directe.

$3 \Rightarrow 4$

RAF : (20.47)

$4 \Rightarrow 1, 2$

RAF : définition de l'injectivité pour 2.

20.52 Exemple

Exemple 20.54

1. Montrer que la famille $((1, 1), (0, 1))$ est libre.
2. Montrer que la famille $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$ est libre.
3. Montrer que la famille $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 6, 1))$ est liée.

1. On suppose $\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = 0$.
Donc :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = 0$

La famille est libre.

2. Par équivalence. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ a + b - c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + a &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

La famille est libre.

3. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 6, 1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ 2a + 6c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 3c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet des solutions non nulles (par exemple $(-3, 2, 1)$), donc la famille est liée.

20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies

Proposition 20.58

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

\Rightarrow

RAF : (20.57)

\Leftarrow

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille à support fini telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \tag{20.1}$$

On choisit $J \subset I$, fini, tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \setminus J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \sum_{i \in J} \lambda_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

Or $(x_i)_{i \in J}$ est libre (finie), donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par \mathbb{N}

Proposition 20.60

Une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (x_0, \dots, x_n) est libre.

\Rightarrow

Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre, alors (20.58) ses sous-familles finies sont libres, en particulier celles sous la forme (x_0, \dots, x_n) .

\Leftarrow

Soit $(x_i)_{i \in J}$ avec J un sous-ensemble fini de \mathbb{N} .

Or pose $n = \max J$, donc $J \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.

Par hypothèse, (x_0, \dots, x_n) est libre.

Donc (20.57), $(x_i)_{i \in J}$ est libre.

D'après (20.58), $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.