Chapitre 30

Déterminant

30.4 Exemple

Exemple 30.4

On considrèe l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}; ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right) &= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix}\right) \\
&= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\
&= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\
&= \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda \delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

Propostion 30.11

Soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ une base de E_i et pour tout $(j_1, \dots, j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \dots \times [\![1,d_n]\!]$, $f_{j_1,\dots,j_n} \in F$.
Alors il existe une unique application n-linéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in [\![1,d_1]\!] \times \dots \times [\![1,d_n]\!], \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1,\dots,j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ est une base de E_i alors $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \dots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.

30.18 Caractérisation par les transpositions

Lemme 30.18

Pour qu'une forme f soit antisymétrique, il faut et il suffit que l'échange de deux variables quelconques provoque un changement de signe.

Par hypothèse, si τ est une transposition alors $\varphi(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n}) = -\varepsilon(\tau)(x_1, \dots, x_n)$.
Soit $\sigma \in S_n$. On écrit $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ avec τ_i des transpositions. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}) &= \varphi(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1)\varphi(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)}) \\
&= \varepsilon(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k)\varphi(x_1, \dots, x_n) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$