Chapitre 28

Matrice d'une application linéaire

28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

Théorème 28.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.
On note $M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre (car $|\mathcal{F}| = \dim E$), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0$$

Or pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, n]\!], \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\
&\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M
\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\ker M = \{0\}$, si et seulement si M est inversible.

28.6 Exemple

Exemple 28.6

Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc libre.

28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyeu de leur lignes et colonnes

Théorème 28.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est inversible
- la famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A, $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
A est inersible si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (28.8).
Si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (28.5).
Si et seulement si ${}^tA$ est inversible (11.42).
Si et seulement si $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

28.13 Exemple

Exemple 28.13

On note T l'endomorphisme $P \mapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_3}(T)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\
T(1) &= 1 \\
T(X) &= 1 \\
T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\
T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\
Mat_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

28.15 Exemple

Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$

28.18 Exemple

Exemple 28.18

On note φ l'application canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_2'$ la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_3'$ la base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_2',\mathcal{B}_3'}(\varphi)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y)$.
$\varphi(1, 0) = (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .)$
$\varphi(0, 1) = (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)$

$$Mat_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 28.19

Soit $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et n, e une base de E et f une base de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Alors :

$$\underbrace{Mat_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{Mat_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{Mat_e(x)}_{(p,1)}$$

On note $e = (e_1, \ldots, e_p)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ et $Mat_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$
Soit $x \in E$. On écrit $m = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j e_j$. Par conséquent :

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [M \times Mat_e(x)]_i f_i \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Mat_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times Mat_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times Mat_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times Mat_e(x) \end{aligned}$$

28.20 Exemple

Exemple 28.20

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Montrer que $Im(f) = Vect(3, 2X^2 + X)$ et $\ker f = Vect(X^2 - 2X)$.

On a :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c)$$
$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a)$$

— Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= Vect(X^2 - 2X) \\ &= Vect(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} Im(M) &= Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$Im(f) = Vect(1 + X + 2X^2)$$

28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

Théorème 28.21

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles p et n respectivement. L'application $u : Mat_{e,f}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions non nulles et de bases respectives e, f et g. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) \times Mat_{e,f}(u)$$
3. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimensions finies et non nulles. Soit e une base de E, f une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est un isomorphisme entre E et F si et seulement si $Mat_{e,f}(u)$ est inversible. Dans ce cas on a :
$$Mat_{f,e}(u^{-1}) = Mat_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$ est bijective.
Par construction, elle est bien linéaire.

2. Soit $x \in F$.
$$\begin{aligned} Mat_{e,g}(v \circ u)Mat_e(x) &= Mat_g(v \circ u(x)) \\ &= Mat_g(v(u(x))) \\ &= Mat_{f,g}(v)Mat_f(u(x)) \\ &= Mat_{f,g}(v)Mat_{e,f}(u)Mat_e(x) \end{aligned}$$
Nécessairement :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v)Mat_{e,f}(u)$$

3.
$$\begin{aligned} Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(u^{-1}) &= Mat_f(u \circ u^{-1}) \\ &= Mat_f(id) \end{aligned}$$
Donc :
$$Mat_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$
On note $P = M^{-1}$. D'après le premier point, on note σ l'unique élément de $\mathcal{L}(F,E)$ tel que $Mat_{f,e}(\sigma) = P$.
On a :
$$Id = MP = Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(v) = Mat_f(u \circ v)$$
Donc :
$$u \circ v = id$$
Donc (E est de dimension finie) :
$$u^{-1} = v$$

28.22 Exemple

Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme ω de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à $Vect(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$ parallèlement à $Vect(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$.

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + c - d \\ -a + c - d \\ 2b - 2d \\ -a + 2b + c - 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d & = 0 \\ b - d & = 0 \\ -a + 2b + c - 3d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d & = 0 \\ b - d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = c - d \\ b & = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $\ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Donc $\ker(\omega - id) = Vect(1 + X^2, -1 + X + X^3)$.

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c - d \\ -a + 2b + c - d \\ 2b + 2c - 2d \\ -a + 2b + c - d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\Omega + I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+c-d &= 0 \\ b+c-d &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c+d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c+d \\ -c+d \\ c \\ d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Donc $\ker(\omega + id) = Vect(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$.

28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

Théorème 28.23

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **matrice de Vandermonde de** $x_1, \ldots, x_n$ la matrice $(x_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n}$. Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont ditincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n))$.
On suppose que tous les x_i sont distincts deux à deux.
Si $P \in \ker\varphi$, P possède (au moins) n racines distinctes, or $\deg P \leq n-1$ donc par rigidité, $P = 0$.
Donc φ est injective ($\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$).
Donc φ est un isomorphisme ($\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).
Or, en notant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$:

$$Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc M est inversible (28.21).
Si $x_1 = x_j$ avec $x \neq j$, M possède deux lignes identiques, donc $M \notin GL_n(\mathbb{K})$ (28.9).

28.28 Exemple

Exemple 28.28

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— D'après le théroème du rang :

$$\underbrace{\dim\ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\operatorname{rg} u}_{\geq 1} = 3$$

Comme $u^2 = 0$, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
On a nécessairement $\operatorname{rg} u = 1$ et $\dim\ker u = 2$.

- Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. Or $u(x) \in \ker u$ et $\dim \ker u = 2$, on complète donc $(u(x), y)$ en une base de $\ker u$.
- La famille $(y, x, u(x))$ est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c &= 0 \text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$ est de cardinal $3 = \dim E$, donc est une base de E et :

$$\mathrm{Mat}_{(u(x),y,x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28.29 Exemple

Exemple 28.29

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r.

Montrer qu'il existe une base e de E et une base f de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathrm{rg}\, u = r$, $\dim \ker u = p - r$ ($p = \dim E$).
Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E.
$\dim S = r$. Soit $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base adaptée à $E = S \oplus \ker u$.
$(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, donc libre dans F, que l'on complète en une base f de F.
Par construction :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$