

Chapitre 18

Dérivabilité

18 Dérivabilité	1
18.43 Théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^n - HP	2

18.43 Théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^n - HP

Théorème 18.43 - HP

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I .

- On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que f' admet une limite finie en x_0 .
On prolonge f' en une fonction g par continuité en x_0 . Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
On remarque que pour tout $x \neq x_0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

où $a \in I \setminus \{x_0\}$ quelconque.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t) dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \rightarrow x_0}$$

Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \rightarrow x_0$.
On prolonge alors f par continuité en \tilde{f} , de classe \mathcal{C}^1 sur I .

- On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$: "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.

Pour $n = 1$, c'est fait.

On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...

Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 .

D'après $P(n)$, on prolonge f' en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

En particulier, g est continue sur I .

Donc f' admet une limite finie en x_0 .

On applique $P(1)$. On prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.