Chapitre 22

Espaces de dimension finie

22 Espaces de dimension finie **1**
22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants . . . 2
22.5 Algroithme de la base incomplète . . . 2
22.8 Théorème de la base incomplète . . . 2
22.11Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres . . . 3
22.12Théorème de la dimension . . . 3
22.18Caractérisation des bases en dimension finie . . . 3
22.20Majoration du rang et cas d'égalité . . . 4

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Propostion 22.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E.
Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

$$P(k) : \text{"}E \text{ est engendré par } n-k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}\text{"}$$

Pour $k = 0$, la famille convient.
On suppose que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E = Vect(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in L})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i l_j$.
Comme $\mathcal{L}$ est libre, $l_{k+1} \notin Vect(l1, \dots, l_k)$.
Donc il existe $i \in [\![1, n-k]\!], \alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i, on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_n + 1)$$

Ainsi :

$$E = Vect(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in [\![0, n]\!]$, en particulier, $P(n)$ est vraie.
$(l1, \dots, l_n)$ est une base de E. Or $l_{n+1} \in E$ et $(l_1, \dots, l_{n+1})$ libre. Absurde.

22.5 Algroithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ et de certains vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n$.

On utilise l'algorithme suivant :
On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in [\![p+1, n]\!]$:

- Si $x_k \in Vect(\mathcal{F})$, on laisse $\mathcal{F}$ invariant.
- Si $x_k \notin Vect(\mathcal{F})$, on remplace $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.
La famille $\mathcal{F}$ obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in Vect(\mathcal{F})$$

Donc $E = Vect(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \subset Vect(\mathcal{F}) \subset E$. Donc $\mathcal{F}$ est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.

1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant $\mathcal{L}$.

2. Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de $\mathcal{G}$ et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
   La base obtenue est bien constituée de vecteurs de $\mathcal{G}$.

Remarque

Remarque

Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

Corollaire 22.11

Soit E un espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de E est de cardinal fini.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose E de dimension finie. Donc E possède une famille génératrice à n vecteurs.
Donc les familles libres de E ont un cardinal inférieur à n.
Elles sont finies.

$\boxed{\Leftarrow}$

Par contraposée, on suppose E de dimension infinie.
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
On pose $x_1 = x$. Comme E est de dimension infinie, on choisit $x_2 \in E \backslash Vect(x_1)$.
On poursuit les raisonnement par récurrence pour obtenir une famille libre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

22.12 Théorème de la dimension

Théorème 22.12

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et sont de même cardinal.

Soit B et B' deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 22.18

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$. Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit $\mathcal{F}$ une famille avec $|\mathcal{F}| = \dim E = n$.

- On suppose que $\mathcal{F}$ est libre.
  On applique sur $\mathcal{F}$ le théorème de la base incomplète.
  On obtient alors une base B de E avec :

$$\mathcal{F} \subset E$$

Or $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$.
Donc $\mathcal{F} = B$.

— On suppose $\mathcal{F}$ génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

Propostion 22.20

On a

$$rg(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit $Vect((x_i)_{i \leq k})$ possède un système fini de k vecteurs générateurs.

$$\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$, alors (22.18), $(x_1, \dots, x_k)$ est une base, donc est libre.
— Si la famille est libre, c'est une base de $Vect(x_1, \dots, x_k)$, donc $\dim(Vect(x_1, \dots, x_k)) = k$.