Chapitre 36

Fonctions de deux variables

36.15 Exemple

Exemple 36.15

Les projections $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} p_1 : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto x \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout $(x, y) \in B(a, \epsilon)$.

$$|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Donc p_1 est bien continue en a, donc sur $\mathbb{R}^2$.

36.17 Exemple

Exemple 36.17

Soi tI et J deux intervalles et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors :

$$I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x) + g(y) \quad \text{et} \quad I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

sont continues sur $I \times J$.

— Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Par continuité de f et g on choisit $\alpha > 0$ tel que :
  — $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  — $\forall y \in J, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$
  Soit $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$.

$$|f(x) + g(y) - f(x_0) - g(y_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(y) - g(y_0)|$$

— De la même manière (voir le produit de fonctions de $\mathcal{C}^0$, chap. 15).

36.24 Exemple

Exemple 36.24

Quelles sont les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$?

Sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &= y^2 e^{xy^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= 2xye^{xy^2} \end{aligned}$$

Démonstration de la première :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f((x, y) + t(1, 0)) &= f(x + t, y) \\ &= e^{(x+t)y^2} \\ &= e^{xy^2 + ty^2} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) &= y^2 e^{xy^2 + ty^2} \\ g'(0) &= y^2 e^{xy^2} \end{aligned}$$

36.35 Exemple

Exemple 36.35

La fonction $(x, y) \mapsto e^{-x} \ln y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x,y) &\mapsto -e^{-x} \ln y \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}) \\ \partial_2 f(x,y) &\mapsto \frac{e^{-x}}{y} \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Par opérations.

36.38 Existence de développement limité à l'ordre 1 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 36.38

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. La fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a :

$$f(a+v) \underset{v \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \mathrm{o}(\|v\|)$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \mathrm{o}(\|x - a\|)$$

Si les variables de f sont notées x et y et si $a = (x_a, y_a)$, cela revient à :

$$f(x_a + h, y_a + k) \underset{(h,k) \to (0,0)}{=} f(a) + \partial_1 f(a) \cdot h + \partial_2 f(a) \cdot k + \mathrm{o}(\|(h,k)\|)$$

Par translation, on le montre pour $a = 0$.
On pose $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Par hypothèse, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues.
Siot $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall v \in B(0,r), &|\partial_1 f(v) - \partial_1 f(0)| < \epsilon \\ &|\partial_2 f(v) - \partial_2 f(0)| < \epsilon \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} |f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &= |f(v) - f(0) - \partial_1 f(0) h - \partial_2 f(0) k| \\ &= |f(h,k) - f(h,0) + f(h,0) - f(0,0) - \partial_1 f(0) h - \partial_2 f(0) k| \\ &= \left| \int_0^k \partial_2 f(h,t)\, dt - \partial_2 f(0) k + \int_0^h \partial_1 f(t,0)\, dt - \partial_1 f(0) h \right| \\ \text{(Inégalité triangulaire x3)} \quad &\leq \int_0^k |\partial_2 f(h,t) - \partial_2 f(0)|\, dt + \int_0^h |\partial_1 f(t,0) - \partial_1 f(0)|\, dt \end{aligned}$$

Pour $v \in B(0,r)$:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,k], (0,t) \in B(0,r) \\ \forall t \in [0,h], (h,t) \in B(0,r) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &\leq \epsilon \times h + \epsilon \times k \\ &\leq \epsilon |h| + \epsilon |k| \\ &\leq 2\epsilon \|v\| \end{aligned}$$

En conlusion, $f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle = o(\|v\|)$.

36.42 Règle de la chaîne

Théorème 36.42

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit x et y dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \Omega$.
La fonction $F : tf(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))$$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ donc possède un $\mathrm{DL}_1(t)$ en tout point.
Soit $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t+h) &= f(x((t+h), y(t+h))) \\ &= \underbrace{f(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}_{\underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + (x(t), y(t)) \\ &= f(x(t), y(t)) + \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t)) \rangle + o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|) \end{aligned} \tag{36.36}$$

On a :

$$\begin{cases} x(t+h) - x(t) & \underset{h\to 0}{=} hx'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{=} O(h) \\ y(t+h) - y(t) & \underset{h\to 0}{=} hy'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{=} O(h) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)\|) &\underset{h\to 0}{=} o(\|O(h), O(h)\|) \\ &\underset{h\to 0}{=} o(h) \end{aligned}$$

Et :

$$\langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \rangle = \partial_1 f(x(t), y(t))hx'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))hy'(t) + o(h)$$

En conclusion :

$$F(t+h) \underset{h\to 0}{=} F(t) + h[\partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)] + o(h)$$

Donc F possède un $\mathrm{DL}_1(t)$, donc $F \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t, F'(t) &= \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t) \\ &\in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ par opérations} \end{aligned}$$

Donc $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

36.43 Exemple

Exemple 36.43

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $f(t^2, \sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dérivée.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
$t \mapsto t^2, \sin \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
D'après la règle de la chaîne, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = 2t\partial_1 f(t^2, \sin t) + \cos t\partial_2 f(t^2, \sin t)$$

36.46 Règle de la chaîne, dérivées directionnelle et gradient

Théorème 36.46

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Soit I un intervalle de $\gamma \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ une fonction pour laquelle $\gamma(I) \subset \Omega$. La fonction $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$:
$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$
2. La fonction f possède une dérivée directionnelle en tout point de Ω et dans toutes les directions. Plus précisément, pour tout $a \in \Omega$, tout $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$:
$$\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \partial_1 f(a).h + \partial_2 f(a).k$$
3. Interprétation du gradient : le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

1. RAF
2. Soit $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Comme Ω est ouvert, il existe $I =]-\alpha, \alpha[$ tel que :
$$\begin{aligned} &I \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto f(a + tv) = f(x_a + th, y_a + tk) \end{aligned}$$
est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la règle de la chaîne ($t \mapsto x_a + th \in \mathcal{C}^1(I), t \mapsto y_a + tk \in \mathcal{C}^1(I)$).
$$\forall t \in I, g'(t) = h\partial_1 f(a + tv) + k\partial_2 f(a + tv)$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} D_v f(a) &= g'(a) \\ &= h\partial_1 f(a) + k\partial_2 f(a) \\ &= \langle \nabla f(a), v \rangle \end{aligned}$$
3. Notons $P_\lambda : z = \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$
Une line de niveau λ est l'ensemble des solutions de $f(x, y) = \lambda$.
Soit $P_\lambda \cap S$. On suppose que $P_\lambda \cap S \neq \emptyset$ et que $P_\lambda \cap S$ n'est pas un singleton.
Soit $a \in P_\lambda \cap S$. On admet qu'il existe $I =]-\alpha, \alpha[$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tel que :
$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(I) \subset P_\lambda \cap S \end{cases}$$
On a donc :
$$\forall t \in I, f \circ \gamma(t) = \lambda$$
D'après la règle de la chaîne ($f \in \mathcal{C}^1, \gamma \in \mathcal{C}^1$) :
$$\forall t \in I, \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle (f \circ \gamma)'(t) = 0$$
Donc $\nabla f(\gamma(a))$ est bien orthogonal à $\gamma'(a)$ (vecteur tangent à $P_\lambda \cap S$ en a).
D'après (2) pour tout $v \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} |D_v f(a)| &= |\langle \nabla f(a), v \rangle| \\ &\leq \|\nabla f(a)\| \|v\| \end{aligned}$$
avec égalité si et seulement si v est colinéaire à $\nabla f(a)$ (et positif si te seulement si v est positivement linéaire à $\nabla f(a)$).

36.51 Points critiques et extrema locaux

Théorème 36.51

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. Si f possède un extremum local en a (i.e. un maximum ou minimum local) alors a est un point critique, i.e. vérifie $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
Par conséquent, le plan tangent de f en un point critique est parallèle au plan abscisse et les dérivées directionnelles de f en a sont toutes nulles.

On suppose que a est un maximum local.
Soit $v \in \mathbb{R}^2$.
On pose $g : I \to \mathbb{R}; t \mapsto f(a + tv)$.
$f(a)$ est nécessairement un maximum local pour g.
Donc $g'(0) = 0$.
Soit $D_v f(a) = 0$.

36.52 Exemple

Exemple 36.52

Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3x + yx + y^2$ possède un unique extremum local : un minimum local en $(2, -1)$.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\begin{cases}\partial_1 f(x,y) = 0\\ \partial_2 f(x,y) = 0\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}2x - 3 + y = 0\\ x + 2y = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\ y = -1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $(2, -1)$ est l'unique point critique.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}f(2+x, -1+y) - f(2, -1) &= (2+x)^2 - 3(2+x)(-1+y) + (-1+y)^2 - f(2,-1)\\ &= 4x + x^2 - 3x - x + 2y + xy - 2y + y^2\\ &= x^2 + xy + y^2\\ &\geq |xy|\end{aligned}$$

Donc $f(2, -1)$ est bin le seul minimum global.

36.53 Exemple

Exemple 36.53

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - x - xy - \frac{y^2}{2} + 2y$ ne possède aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}\partial_1 f(x,y) = 0\\ \partial_2 f(x,y) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - 1 - y = 0\\ -x - y + 2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(1+x,1+y)-f(1,1) &= (1+x)^2-(1+x)-(1+x)(1+y)-\frac{1}{2}(1+y)^2+2(1+y)-f(1,1)\\
&= 2x+x^2-x-x-y-xy-y-\frac{y^2}{2}+2y\\
&= x^2-xy-\frac{y^2}{2}\\
&= (x-\frac{y}{2})^2-\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{2}\\
\forall x\neq 0, d(x,2x) &< 0\\
d(x,0) &> 0
\end{aligned}$$

$f(1,-1)$ n'est pas un minimum ni un maximum.