Chapitre 36

Fonctions de deux variables

36.15 Exemple

Exemple 36.15

Les projections $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} p_1 :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto x \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout $(x, y) \in B(a, \epsilon)$.

$$|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Donc p_1 est bien continue en a, donc sur $\mathbb{R}^2$.

36.17 Exemple

Exemple 36.17

Soi tI et J deux intervalles et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors :

$$I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x) + g(y) \quad \text{et} \quad I \times J \to \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

sont continues sur $I \times J$.

- Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
  Soit $\epsilon > 0$.
  Par continuité de f et g on choisit $\alpha > 0$ tel que :
  - $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  - $\forall y \in J, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$

  Soit $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$.

  $$|f(x) + g(y) - f(x_0) - g(y_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(y) - g(y_0)|$$
- De la même manière (voir le produit de fonctions de $\mathcal{C}^0$, chap. 15).

36.24 Exemple

Exemple 36.24

Quelles sont les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$?

Sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &= y^2 e^{xy^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= 2xy e^{xy^2} \end{aligned}$$

Démonstration de la première :
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f((x, y) + t(1, 0)) &= f(x + t, y) \\ &= e^{(x+t)y^2} \\ &= e^{xy^2 + ty^2} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) &= y^2 e^{xy^2 + ty^2} \\ g'(0) &= y^2 e^{xy^2} \end{aligned}$$

36.35 Exemple

Exemple 36.35

La fonction $(x, y) \mapsto e^{-x} \ln y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &\mapsto -e^{-x} \ln y \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}) \\ \partial_2 f(x, y) &\mapsto \frac{e^{-x}}{y} \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})\end{aligned}$$

Par opérations.

36.38 Existence de développement limité à l'ordre 1 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 36.38

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. La fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a :

$$f(a + v) \underset{v \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + \mathrm{o}(\|v\|)$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + \mathrm{o}(\|x - a\|)$$

Si les variables de f sont notées x et y et si $a = (x_a, y_a)$, cela revient à :

$$f(x_a + h, y_a + k) \underset{(h,k) \to (0,0)}{=} f(a) + \partial_1 f(a) \cdot h + \partial_2 f(a) \cdot k + \mathrm{o}(\|(h, k)\|)$$

Par translation, on le montre pour $a = 0$.
On pose $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$.
Par hypothèse, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues.
Siot $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall v \in B(0, r), &|\partial_1 f(v) - \partial_1 f(0)| < \epsilon \\ &|\partial_2 f(v) - \partial_2 f(0)| < \epsilon\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}|f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &= |f(v) - f(0) - \partial_1 f(0)h - \partial_2 f(0)k| \\ &= |f(h, k) - f(h, 0) + f(h, 0) - f(0, 0) - \partial_1 f(0)h - \partial_2 f(0)k| \\ &= \left| \int_0^k \partial_2 f(h, t)\, dt - \partial_2 f(0)k + \int_0^h \partial_1 f(t, 0)\, dt - \partial_1 f(0)h \right| \\ \text{(Inégalité triangulaire x3)} \quad &\leq \int_0^k |\partial_2 f(h, t) - \partial_2 f(0)|\, dt + \int_0^h |\partial_1 f(t, 0) - \partial_1 f(0)|\, dt\end{aligned}$$

Pour $v \in B(0, r)$:

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, k], (0, t) \in B(0, r) \\ \forall t \in [0, h], (h, t) \in B(0, r)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}|f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &\leq \epsilon \times h + \epsilon \times k \\ &\leq \epsilon |h| + \epsilon |k| \\ &\leq 2\epsilon \|v\|\end{aligned}$$

En conlusion, $f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle = o(\|v\|)$.

36.42 Règle de la chaîne

Théorème 36.42

Soit Ω un ouvert

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ donc possède un $\mathrm{DL}_1(t)$ en tout point.
Soit $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t+h) &= f(x((t+h), y(t+h))) \\ &= \underbrace{f(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}_{\underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + (x(t), y(t)) \\ &= f(x(t), y(t)) + \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t)) \rangle + o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|) \end{aligned} \tag{36.36}$$

On a :

$$\begin{cases} x(t+h) - x(t) & \underset{h\to 0}{=} hx'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{=} O(h) \\ y(t+h) - y(t) & \underset{h\to 0}{=} hy'(t) + o(h) \underset{h\to 0}{=} O(h) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)\|) &\underset{h\to 0}{=} o(\|O(h), O(h)\|) \\ &\underset{h\to 0}{=} o(h) \end{aligned}$$

Et :

$$\langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \rangle = \partial_1 f(x(t), y(t)) hx'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t)) hy'(t) + o(h)$$

En conclusion :

$$F(t+h) \underset{h\to 0}{=} F(t) + h[\partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)] + o(h)$$

Donc F possède un $\mathrm{DL}_1(t)$, donc $F \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t, F'(t) &= \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t) \\ &\in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ par opérations} \end{aligned}$$

Donc $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.