

Chapitre 29

Groupe symétrique

29 Groupe symétrique	1
29.26 Lemme 26	2
29.29 Propriété fondamentale de la signature	2
29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des τ_i	2
29.37 Caractère générateur des transpositions	3
29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle	3
29.41 Corollaire 29.41	3
29.42 Unicité de la signature	4
29.52 Décomposition en cycle d'une permutation	4
29.62 Décomposition d'un cycle en transpositions	4
29.63 Signature d'un cycle	5

29.26 Lemme 26

Lemme 29.26

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a :

$$\left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(i) - \sigma(j)) \right| = \prod_{X \in \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)} \delta_\sigma(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

- La première égalité est justifiée car on a une bijection entre $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ et $\mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
- La seconde égalité est justifiée d'après (28.23).

29.29 Propriété fondamentale de la signature

Théorème 29.29

La signature est un morphisme de groupe de (\mathcal{S}_n, \circ) dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

Montrons que $\epsilon(\sigma \circ \xi) = \epsilon(\sigma) \times \epsilon(\xi)$.

Pour $\sigma, \xi \in \mathcal{S}_n$:

$$\begin{aligned} \epsilon(\sigma \circ \xi) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma \circ \xi(j) - \sigma \circ \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))} \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(\xi(X)) \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(X) \\ &= \epsilon(\xi) \times \epsilon(\sigma) \end{aligned}$$

29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des τ_i

Proposition 29.35

soit $1 \leq i < j \leq n$ et $\tau = (i, j)$. Alors :

$$\tau = \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_{j-1}$$

- Si $k > j$, alors pour tout $p \in \llbracket i, j-1 \rrbracket$, $\tau_p(k) = k$.
Donc $\sigma(k) = k$.
Cela reste vrai si $k < i$.
- On a :

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= \tau_{j-1} \circ \tau_{j-2} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i+1) \\ &= \tau_{j-1}(j-1) \\ &= j \\ \sigma(j) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-1}(j) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-2}(j-1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i(i+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i) \\ &= i \end{aligned}$$

— Si $i < k < j$, alors :

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_k(k) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_{k-1}(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{k+1}(k) \\ &= k\end{aligned}$$

29.37 Caractère générateur des transpositions

Théorème 29.37

Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est un produit de transposition.

On prouve le résultat par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

— pour $n = 2$, $\mathcal{S}_2 = \{id, (1 \ 2)\}$ et $id = (1 \ 2)^2$.

— On suppose le résultat vrai pour $n \geq 2$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$.

— Si $\sigma(n+1) = n+1$, σ induit naturellement une permutation $\tilde{\sigma}$ sur \mathcal{S}_n , donc $\tilde{\sigma}$ est un produit de transpositions $\tilde{\tau}$, et chaque $\tilde{\tau}$ se relève en une transposition τ de \mathcal{S}_{n+1} .

— Si $\sigma(n+1) = i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors :

$$\varphi = (i \ n+1) \circ \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$$

et $\varphi(n+1) = n+1$.

D'après le point précédent, φ est un produit de transposition.

Donc $\sigma = (i \ n+1) \circ \varphi$ est aussi un produit de transposition.

29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle

Théorème 29.40

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $(a_1 \ \cdots \ a_k)$ un cycle. Alors :

$$\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \cdots \ \sigma(a_k))$$

— Si $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ alors $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) = i$.

— Si $\sigma^{-1}(i) = a_j$, alors $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma(a_{j+1})$.

29.41 Corollaire 29.41

Corollaire 29.41

Soit $\varphi : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ un morphisme. Soit $\alpha \in \{1, -1\}$. S'il existe une transposition τ_0 telle que $\varphi(\tau_0) = \alpha$, alors pour toute transposition τ , on a $\varphi(\tau) = \alpha$.

Ainsi, φ prend une valeur constante sur les transpositions.

Par conjugaison. Soit $\tau_0 = (i \ j)$ et $\tau = (k \ l)$.

On a :

$$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$$

avec $\sigma = (i \ k \ j \ l)$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \varphi(\sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\sigma) \times \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma^{-1}) \\ &= \varphi(\tau_0) \times \varphi(\sigma)^2 \\ &= \varphi(\tau_0)\end{aligned}$$

29.42 Unicité de la signature

Théorème 29.42

La signature est l'unique morphisme de groupe non trivial de \mathcal{S}_n dans $\{-1, 1\}$.

Soit φ un morphisme de groupes de \mathcal{S}_n dans $\{\pm 1\}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. D'après (29.37), $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions est 1 (29.40), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^k \varphi(\tau_i) = 1$$

Donc φ est triviale.

— Si la valeur prise par φ sur les transpositions est -1 (29.41), alors :

$$\varphi(\sigma) = \prod_{i=1}^k \varphi(\tau_i) = (-1)^k = \epsilon(\sigma)$$

Donc $\varphi = \epsilon$.

29.52 Décomposition en cycle d'une permutation

Théorème 29.52

Soit σ une permutation de \mathcal{S}_n . A permutation près des facteurs, il existe une unique décomposition de σ en produit de cycle à supports disjoints.

$$\sigma = C_1 \circ \dots \circ C_k$$

telles que les supports des cycles forment un partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. De plus, l'unique cycle de cette décomposition contenant x est égale à C_x .

— Existence : On note $\{\overline{C_1}, \dots, \overline{C_k}\} = \llbracket 1, n \rrbracket / \equiv_\sigma$.

On note (29.49) c_i la permutation induite par σ sur $\overline{C_i}$ ($C_i = (p \ \sigma(p) \ \dots \ \sigma^j(p))$).

On pose $\varphi = C_1 \circ \dots \circ C_k$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $i \in \overline{C_q}$ avec $q \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

D'après (29.51), $\varphi(i) = C_q(i) = \sigma(i)$.

Donc $\varphi = \sigma$.

— Unicité : On suppose que $\sigma = C_1 \circ \dots \circ C_k = U_1 \circ \dots \circ U_q$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $i \in \text{supp}(C_1) \in \text{supp}(U_1)$ (quitte à permuter les rôles).

On a donc $\sigma(i) = C_1(i) = U_1(i)$ et $\sigma^2(i) = C_1^2(i) = U_1^2(i)$ et

Donc $C_1 = U_1$.

29.62 Décomposition d'un cycle en transpositions

Lemme 29.62

Soit (i_1, \dots, i_k) des entiers deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k) = (i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_2)$$

On note $\sigma = (i_1 \ i_k) \dots (i_1 \ i_2)$.

Soit $p \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. On a bien $\sigma(p) = p$.

Soit $i_j \in \{i_1, \dots, i_k\}$. ($j \neq k$)

$$\begin{aligned}
\sigma(i_1) &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_2) (i_1) \\
&= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_3) (i_2) \\
&= i_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(i_j) &= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_2) (i_j) \\
&= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_j) (i_j) \\
&= (i_1 \ i_k) \cdots (i_1 \ i_{j+1}) (i_1) \\
&= i_{j+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(i_k) &= (i_1 \ i_k) (i_k) \\
&= i_1
\end{aligned}$$

29.63 Signature d'un cycle

Proposition 28.63

Soit C un cycle et $\ell(C)$ sa longueur. Alors :

$$\epsilon(C) = (-1)^{\ell(C)-1}$$

Avec ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\epsilon(\sigma) &= \prod_{j=2}^k \epsilon((i_1 \ i_j)) \\
&= (-1)^{k-1} \\
&= (-1)^{\ell(C)-1}
\end{aligned}$$