Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup \left\{ \sum_{k\in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n \in \left\{ \sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup \left\{ \sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N = \max J$ et $J \subset [\![0, N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$