Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(g) & \text{ ssi il existe } h \text{ bornée au voisinage de } a \text{ tel que } f = g \cdot h \\ & \text{ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = g(u_n) \times w_n \text{ où } (w_n) \text{ est une suite bornée.} \\ & \boxed{\Rightarrow} \quad w_n = h(u_n) \text{ ssi bornée } \quad \boxed{\Leftarrow} \quad \text{Par l'absurde avec (25.5).} \\ & \text{ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = O(g(u_n)). \end{aligned}$$

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ Alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \sum_{k=0}^{0} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x - t)^0}{0!} f'(t)\, dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
\text{(IPP)} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme

Théorème 25.22

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que $g(b) = f(b)$.
On choisit A de telle sorte que $g(a) = f(b)$.
On pose :

$$A = \frac{-(n+1!)}{(b-a)^{n+1}} \left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f(b)\right]$$

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]a,b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - A\frac{(b-x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$$

Or $c \neq b$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.
On conclut avec $f(b) = g(a)$.

25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0

Théorème 25.27

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0. Alors au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I, \mathbb{R})$.
D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \underset{x \to x_0}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)\, dt \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\, dt
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $v \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathcal{V}, x > x_0$. On a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\, dt \right| &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)|\, dt \\
&\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\, dt \\
&= \frac{\varepsilon (x-x_0)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour $x \leq x_0$.
Par définition (avec les ε), on a le résultat souhaité.

25.28 Développement limité de l'exponentielle

Propostion 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

25.29 Développement limité du logarithme

Propostion 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n(]-1, \infty[, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \forall x > -1, f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \\ f^{(k+1)}(0) &= (-1)^k k! \end{aligned}$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

25.30 Développement limité de cosinus et sinus

Propostion 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ pour le sinus et à l'ordre $2n+1$ pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Idem pour cos.

25.40 Unicité du DL

Théorème 25.40

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.
On note $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$.
Or :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Donc :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k \underset{x\to x_0}{=} +o((x-x_0)^n)$$

$$\text{donc } a_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k(x-x_0)^k \underset{x\to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

$$\text{donc } a_p(x-x_0)^p \underset{x\to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^n)$$

$$\text{donc } a_p = b_p + o(1)$$

Absurde car $a_p \neq b_p$.

25.41 DL de fonctions paires ou impaires

Propostion 25.41

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0. Alors :
- si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

- On suppose f paire et :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

  Donc :

$$f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o(x^n)$$

  Par unicité du DL :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = (-1)^k a_k$$

  Donc pour k impair :

$$a_k = 0$$

- Même raisonnement pour f impaire.

25.42 Remarque

Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n-ième de f en x_0. Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si f admet un DL_0 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

Néecssairement, $a = f(x_0)$ et f est continue en x_0.
Si f admet un DL_1 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{=} a + o(1) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

25.43 Exemple

Exemple 25.43.2

2. La fonction $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$ admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc f admet bien un DL_2 en 0, donc un DL_1 en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$ par théorème d'opérations).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$
$$\frac{f'(x)}{x} = -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

Propostion 25.50

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que pour h au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{x \to x_0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \ldots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=m}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &\underset{x \to x_0}{=} (x - x_0)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changment de variable : $x = x_0 + h$.

25.56 Produit de DL

Propostion 25.56

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et P et Q deux polynômes de degré au plus n. Si au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\ &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

25.57 Exemple

Exemple 25.57

1. $\frac{\cos x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2. $(e^x)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\ &\underset{x\to 0}{=} (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (e^x)^2 &\underset{x\to 0}{=} (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

25.58 Exemple

Exemple 25.58

1. $(\sin x - x)(\cos x - 1) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.

$$\begin{aligned}
(\sin x - x)(\cos x - 1) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}+\left(\frac{-1}{2\times 5!}-\frac{1}{3!4!}\right)x^7+o(x^8)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{1}{5\times 3\times 3!}x^7+o(x^8)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{x^7}{90}+o(x^8)
\end{aligned}$$

25.59 Composition de DL

Propostion 25.59

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 avec $f(0)=0$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n, alors $T_n(Q\circ P)$ est un DL en 0 de $g\circ f$ à l'ordre n :

$$g\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x)+o(x^n)$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} P(x)+o(x^n)\\
g(x) &\underset{x\to 0}{=} Q(x)+o(x^n)
\end{aligned}$$

Comme $f(0)=0$, on a $P(0)=0$.

$$g\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(f(x))+o(x^n)$$

Avec la notation $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned}
g\circ f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x)^k + o(f(x)^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (P(x)+o(x^n))^k + o((P(x)+o(x^n))^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} [b_k(P(x))^k + \underbrace{o(x^n)}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}O(1)}] + o(\underbrace{P(x)^k}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}=O(x)})\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k P(x)^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} Q\circ P(x)+o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x)+o(x^n)
\end{aligned}$$

25.60 Exemple

Exemple 25.59

1. $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$
2. $e^{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)$

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)^3\right)^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}(x+O(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+O(x^3))^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x-1} &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{X^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$