

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34 Espaces préhilbertiens réels	1
34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n	2
34.5 Exemple	2
34.14 Identités remarquables	2
34.15 Proposition 34.15 bis	3
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire	3

34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur \mathbb{R}^2 distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$, ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.

La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Proposition 34.14

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \quad (\text{bilinéarité}) \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (\text{symétrie})
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Proposition 34.15 bis

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E .

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

- Inégalité triangulaire, version distance :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \|tx + y\|^2 \\
&= \langle tx + y, tx + y \rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x\| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.

Or $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$. D'où le résultat.

Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0 . On a alors $\|t_0 x + y\|^2 = 0$.

Donc $t_0 x + y = 0$.

Donc (x, y) est liée.

Réciproquement, si (x, y) est liée, alors $y = t_0 x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.

- Pour $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.

RAS pour l'inégalité généralisée.

Si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :

$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1 + \alpha\| \|x\| = \|x + y\| = (1 + |\alpha|) \|x\|$$

Donc $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$.

Nécessairement, $\alpha \geq 0$