

Chapitre 22

Espaces de dimension finie

| | |
|---|----------|
| 22 Espaces de dimension finie | 1 |
| 22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants | 2 |
| 22.5 Algorithme de la base incomplète | 2 |
| 22.8 Théorème de la base incomplète | 2 |
| 22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres | 3 |
| 22.12 Théorème de la dimension | 3 |
| 22.18 Caractérisation des bases en dimension finie | 3 |
| 22.20 Majoration du rang et cas d'égalité | 4 |
| 22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel | 4 |
| 22.23 Formule de Grassmann | 4 |
| 22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires | 5 |
| 22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie | 6 |
| 22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$ | 6 |
| 22.32 Dimension d'espaces isomorphes | 6 |
| 22.35 Rang d'une famille génératrice | 7 |
| 22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie | 7 |
| 22.39 Effet d'une composition sur le rang | 7 |
| 22.40 Noyau et image d'une restriction | 8 |

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Proposition 22.3

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit \mathcal{L} une famille libre de E .

Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$P(k) : "E \text{ est engendré par } n - k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}"$$

Pour $k = 0$, la famille convient.

On suppose que pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $E = \text{Vect}(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in \mathcal{L}})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$.

Comme \mathcal{L} est libre, $l_{k+1} \notin \text{Vect}(l_1, \dots, l_k)$.

Donc il existe $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$, $\alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i , on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en particulier, $P(n)$ est vraie.

(l_1, \dots, l_n) est une base de E . Or $l_{n+1} \in E$ et (l_1, \dots, l_{n+1}) libre. Absurde.

22.5 Algorithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs x_1, \dots, x_p et de certains vecteurs x_{p+1}, \dots, x_n .

On utilise l'algorithme suivant :

On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$:

- Si $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, on laisse \mathcal{F} invariant.
- Si $x_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, on remplace \mathcal{F} par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.

La famille \mathcal{F} obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$. Donc \mathcal{F} est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E .
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E .

En particulier, E possède une base finie.

Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie.

1. Soit \mathcal{L} une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant \mathcal{L} .

2. Comme \mathcal{G} est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de \mathcal{G} et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
La base obtenue est bien constituée de vecteurs de \mathcal{G} .

Remarque

Remarque

Si \mathcal{G} est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

Corollaire 22.11

Soit E un espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de E est de cardinal fini.



On suppose E de dimension finie. Donc E possède une famille génératrice à n vecteurs.
Donc les familles libres de E ont un cardinal inférieur à n .
Elles sont finies.



Par contraposée, on suppose E de dimension infinie.
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
On pose $x_1 = x$. Comme E est de dimension infinie, on choisit $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1)$.
On poursuit les raisonnements par récurrence pour obtenir une famille libre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

22.12 Théorème de la dimension

Théorème 22.12

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et sont de même cardinal.

Soit B et B' deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 22.18

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \neq 0$. Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit \mathcal{F} une famille avec $|\mathcal{F}| = \dim E = n$.

- On suppose que \mathcal{F} est libre.
On applique sur \mathcal{F} le théorème de la base incomplète.
On obtient alors une base B de E avec :

$$\mathcal{F} \subset B$$

Or $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$.

Donc $\mathcal{F} = B$.

— On suppose \mathcal{F} génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.

22.20 Majoration du rang et cas d'égalité

Proposition 22.20

On a

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_k) \leq k$$

avec égalité si et seulement si la famille est libre.

Soit $\text{Vect}((x_i)_{i \leq k})$ possède un système fini de k vecteurs générateurs.

$$\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) \leq k$$

— Si $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$, alors (22.18), (x_1, \dots, x_k) est une base, donc est libre.

— Si la famille est libre, c'est une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, donc $\dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)) = k$.

22.22 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 22.22

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , avec E de dimension finie.

Ainsi, F est lui-même de dimension finie (22.11).

Si \mathcal{L} est une famille libre de F :

$$|\mathcal{L}| \leq \dim E$$

Donc (il suffit de prendre pour \mathcal{L} une base de F) :

$$\dim F \leq \dim E$$

Si $\dim F = \dim E$, alors une base de F est aussi une base de E (22.18).

Ainsi :

$$F = \text{Vect}(B) = E$$

22.23 Formule de Grassmann

Théorème 22.23

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $F + G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$F \cap G \subset F$, donc $F \cap G$ est de dimension finie.

On note $n = \dim F \cap G$.

On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de $F \cap G$.

On complète cette famille libre en :

— une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ de F

— une base $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$ de G

Montrons que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F + G$.

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) + \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) \end{aligned}$$

La famille génératrice. On suppose :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i + \sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = 0$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^q \gamma_i g_i = - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^p \beta_i f_i \in F \cap G$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_q)$) :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (0, \dots, 0)$$

Puis :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^p \beta_i f_i = 0$$

Donc (liberté de $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$) :

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (0, \dots, 0) \\ (\beta_1, \dots, \beta_p) &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= n + p + q \\ &= n + p + n + q - n \\ &= \dim F + \dim G - \dim F \cap G \end{aligned}$$

22.27 Caractérisation des couples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Proposition 22.27

Soit E un espace de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

si et seulement si :

$$F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E$$

F et G sont supplémentaires ssi $F \oplus G = E$

$$\text{ssi } F \cap G = \{0\} \text{ et } F + G = E$$

(\Rightarrow) 22.26 (\Leftarrow) 22.26, 22.22) ssi $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

(\Rightarrow) 22.26 (\Leftarrow) 22.23) ssi $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

22.28 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

Théorème 22.28

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E . Alors il existe un supplémentaire S de F et :

$$\dim S = \dim E - \dim F$$

- Si $F = \{0\}$, E convient.
- Si $F \neq \{0\}$, on choisit une base de F (f_1, \dots, f_p) que l'on complète en une base $(f_1, \dots, f_p, s_1, \dots, s_q)$ de E ($\dim E = p + q$).
 $S = \text{Vect}(s_1, \dots, s_q)$ convient.

22.30 Base de $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 22.30

Si E et F sont de dimension finie, la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ décrite dans l'exemple précédent est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

- Montrons que $(u_{i,j})$ est libre.
 On suppose $\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$.

$$\begin{aligned} \forall k \in I, \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j}(b_k) &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} \delta_{i,k} c_j &= 0 \\ \text{donc} \quad \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j &= 0 \end{aligned}$$

Par liberté des (c_j) , on a :

$$\forall k \in I, \forall j \in J, \lambda_{k,j} = 0$$

- Montrons que $(u_{i,j})$ est génératrice.
 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Pour tout $k \in I$, $f(b_k) = \sum_{j \in J} \lambda_{k,j} c_j$ ((c_j) est une base de F).
 Alors :

$$f = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} u_{i,j} \text{ (théorème de rigidité)}$$

22.32 Dimension d'espaces isomorphes

Proposition 22.32

Soit E et F deux espaces isomorphes. Si l'un des deux est de dimension finie, alors les deux le sont et :

$$\dim E = \dim F$$

Réciproquement, si E et F sont de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, alors E et F sont isomorphes.

- Si $\dim E = n$, on choisit B une base de E .
 Si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f(B)$ est une base de F .
 Donc F est de dimension finie et $\dim F = |f(B)| = |B| = n = \dim E$.

- On suppose que $\dim E = n = \dim F$.
Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (f_1, \dots, f_n) une base de F .
On définit (théorème de rigidité) $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$$

D'après (21.70), u est un isomorphisme.

22.35 Rang d'une famille génératrice

Proposition 22.35

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Le rang de u , s'il existe est égal au rang de la famille $(u(x_i))_{i \in I}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \dim(\operatorname{Im}(u)) \\ &= \dim(\operatorname{Vect}(u(x_i))_{i \in I}) \quad (21.21) \\ &= \operatorname{rg}(u(x_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

22.36 Existence et majoration du rang en dimension finie

Proposition 22.36

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E ou F sont de dimension finie, alors $\operatorname{Im}(u)$ est également de dimension finie et (avec les conditions adéquates) :

$$\operatorname{rg}(u) \leq \dim E \text{ ou } \operatorname{rg}(u) \leq \dim F$$

- Avec les conditions appropriées :
 - $\operatorname{rg}(u) = \dim E$ si et seulement si u est injective
 - $\operatorname{rg}(u) = \dim F$ si et seulement si u est surjective

On suppose E et F de dimension finie.

- $\operatorname{Im}(u) \subset F$ et $\dim(\operatorname{Im}(u)) \leq \dim F$ et $\operatorname{rg}(u) = \dim F$ si et seulement si (22.22) $\operatorname{Im}(u) = F$ si et seulement si u est surjective.
- Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E .
Comme (e_1, \dots, e_n) engendre E :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad (22.35) \\ &\leq n = \dim E \quad (22.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) &= n \text{ ssi } (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ &\quad (21.68) \text{ ssi } u \text{ est injective} \end{aligned}$$

22.39 Effet d'une composition sur le rang

Théorème 22.39

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$
2. si v est injective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$
3. si u est surjective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$

1. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \operatorname{rg}(v)$ et $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im}(v|_{\operatorname{Im}(u)})$ donc :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v|_{\operatorname{Im}(u)}) \leq \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u)$$

2. Si v est injective, alors (22.36), $rg(v|_{Im(u)}) = \dim(Im(u)) = rg(u)$
3. Si u est surjective, alors $Im(u) = F$, et d'après (22.39.1) :

$$rg(v \circ u) = rg(v|_F) = rg(v)$$

22.40 Noyau et image d'une restriction

Lemme 22.40

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un sous-espace vectoriel de E . Soit $v \in \mathcal{L}(E', F)$ la restriction de u à E' . Alors :

- $\ker v = \ker u \cap E'$
- Si $\ker u + E' = E$, alors $Im(v) = Im(u)$

Soit $x \in E$.

—

$$\begin{aligned} x \in \ker v &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ v(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E' \\ u(x) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker u \cap E' \end{aligned}$$

- Supposons que $\ker u + E' = E$. On a toujours $Im(v) \subset Im(u)$.
Soit $y \in Im(u)$. On choisit $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
On écrit $x = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \ker u$ et $\beta \in E'$.
Ainsi :

$$y = u(x) = u(\alpha + \beta) = u(\alpha) + u(\beta) = 0 + v(\beta) \in Im(v)$$