

Chapitre 18

Dérivabilité

18 Dérivabilité	1
18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum	2
18.17 Théorème de Rolle	2
18.21 Théorème des accroissements finis	2
18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions	3
18.43 Théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^n - HP	3
18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	4

18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum

Théorème 18.13

Soit f une fonction définie sur I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

On suppose que f atteint un maximum local en x_0 .

On choisit $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in U \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \forall x \in U, x > x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq 0 \\ \forall x \in U, x < x_0, \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} &\geq 0 \end{aligned}$$

D'après le TCILPPL :

$$f'_{\text{droite}}(x_0) \leq 0 \text{ et } f'_{\text{gauche}}(x_0) \geq 0$$

Donc f est dérivable en x_0 .

Donc $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

18.17 Théorème de Rolle

Théorème 18.17

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit f continue sur $[a, b]$.

D'après le théorème de compacité, elle possède un maximum et un minimum.

Si ils sont tous les deux égaux à $f(a)$, alors f est constante et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.

Sinon, l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$ et est atteint dans $]a, b[$.

D'après (18.13), $f'(c) = 0$.

18.21 Théorème des accroissements finis

Théorème 18.21

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)$.

$g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$.

$g(a) = f(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions

Théorème 18.37

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus X$, où X est un ensemble fini. Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) \geq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
2. f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I \setminus X$, $f'(x) \leq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

1. \Rightarrow

On suppose f croissante. Soit $a \in I \setminus X$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

D'après le TCILPPL, on a $f'(x) \geq 0$.

\Leftarrow

On suppose $X \neq \emptyset$. Soit $x < y$ et $f \in \mathcal{C}^0([x, y], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]x, y[, \mathbb{R})$.

D'après le TAF, on choisit $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$

Supposons $X = \{\alpha\}$ avec $x < \alpha < y$.

On applique les TAF deux fois sur $[x, \alpha]$ et $[\alpha, y]$.

et on choisit $c_1 \in]x, \alpha[$ et $c_2 \in]\alpha, y[$ tel que :

$$f(\alpha) - f(x) = f'(c_1)(\alpha - x) \leq 0$$

$$f(y) - f(\alpha) = f'(c_2)(y - \alpha) \leq 0$$

On généralise sans difficulté quand X est fini.

Si $\varphi = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ est fini, on utilise la même méthode, $X \equiv X \cup \varphi$.

2. RAS

18.43 Théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^n - HP

Théorème 18.43 - HP

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie de classe \mathcal{C}^n sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f est prolongeable en une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I .

— On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que f' admet une limite finie en x_0 .

On prolonge f' en une fonction g par continuité en x_0 . Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

On remarque que pour tout $x \neq x_0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

où $a \in I \setminus \{x_0\}$ quelconque.

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t) dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \rightarrow x_0}$$

Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \rightarrow x_0$.

On prolonge alors f par continuité en \tilde{f} , de classe \mathcal{C}^1 sur I .

— On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$: "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 , alors f se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.

Pour $n = 1$, c'est fait.

On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...

Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I \setminus \{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en x_0 .

D'après $P(n)$, on prolonge f' en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

En particulier, g est continue sur I .

Donc f' admet une limite finie en x_0 .

On applique $P(1)$. On prolonge f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Théorème 18.45

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ et M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M dt \\ &= M|b - a| \end{aligned}$$