

Chapitre 33

Variables aléatoires réelles finies

33 Variables aléatoires réelles finies	1
33.3 Exemple	2
33.4 Espérance des lois usuelles	2
33.5 Propriétés de l'espérance	3
33.6 Exemple	4
33.7 Formule de transfert	4
33.10Exemple	4
33.11Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes	5
33.13Propriétés de la variance	5
33.15Propriétés de la covariance	6
33.16Variance des lois usuelles	7

33.3 Exemple

Exemple 33.3

Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 a été truqué de telle sorte que les faces 1, 2 et 3 tombent avec une probabilité $\frac{1}{6}$, les faces 4 et 5 avec une probabilité $\frac{1}{12}$ et 6 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Quelle numéro obtient-on en moyenne ?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{45}{12} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

33.4 Espérance des lois usuelles

Théorème 33.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω .

1. Variable aléatoire constante : si X est constante de valeur m , alors $E(X) = m$.
2. Loi uniforme : si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie de \mathbb{R} et si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$, alors $E(X)$ est la moyenne naturelle des valeurs x_1, \dots, x_n de X :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

3. Loi de Bernoulli : soit $p \in [0; 1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
4. Exemple fondamental : pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
5. Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

1. Si $X(\Omega) = \{m\}$, $P(X = m) = 1$ et $E(X) = 1 \times m = m$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$ alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n P(X = x_k) x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times p + 0 \times (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

4. Si $A \subset \Omega$, alors :

$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A)) \quad (32.21)$$

Donc (3) $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

5. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n P(X = k) k \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Première méthode :

Soit $Q = (1 - p + Y)^n \in \mathbb{R}[Y]$.

$$Q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k \text{ donc } Q' = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^{k-1}$$

$$\text{donc } YQ' = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} Y^k$$

Par ailleurs $YQ' = n(1-p+Y)^{n-1}$.

En évaluant les deux expressions en p , on obtient l'expression voulue :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

Deuxième méthode :

On poursuit le calcul de $E(X)$ en utilisant la formule du capitaine.

Troisième méthode :

En utilisant la linéarité de l'espérance.

33.5 Propriétés de l'espérance

Proposition 33.5

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω .

1. Reformulation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$.
2. Linéarité : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.
4. Croissance : si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.
5. Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$.

1. On rappelle que $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un SCE.

Ainsi :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega \in (X=x)} P(X = \omega) \right] x$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

2.

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega))$$

$$= \lambda \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \mu \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})Y(\omega)$$

$$= \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

3. Si $X \geq 0$, alors :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0} \underbrace{X(\omega)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0$$

4. RAS (2 + 3)

5.

$$\begin{aligned}
|E(X)| &= \left| \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega) \right| \\
&\leq \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) |X(\omega)| \\
&= E(|X|)
\end{aligned}$$

33.6 Exemple

Exemple 33.7

Qu'obtient-on en moyenne quand on lance deux fois un dé à 6 faces et qu'on additionne les résultats obtenus ?

$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(P(\llbracket 1, 6 \rrbracket))$.

$$\begin{aligned}
E(X_1 + X_2) &= E(X_1) + E(X_2) \\
&= 2 \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k \\
&= 7
\end{aligned}$$

33.7 Formule de transfert

Théorème 33.8

Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'espérance de $f(X)$ est entièrement déterminée par f et la loi de X :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)$$

$\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$ est un SCE.

$$\begin{aligned}
E(f(X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \right) f(x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x)
\end{aligned}$$

33.10 Exemple

Exemple 33.10

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donner un équivalent simple de $E(X)$ et de $E(X^2)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n+1}{2} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} k^2 \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}
 \end{aligned}$$

33.11 Espérance du produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Théorème 33.11

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω . Si X et Y sont indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Ce résultat s'étend naturellement à un nombre fini quelconque de variables aléatoires réelles indépendantes.

$$\begin{aligned}
 E(X)E(Y) &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y)y \right) \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P(X=x \text{ et } Y=y)xy \text{ (indépendance)} \\
 &= E(XY)
 \end{aligned}$$

33.13 Propriétés de la variance

Proposition 33.13

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$. On dit dans ce cas que X est presque sûrement constante.
3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

En particulier, si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

1.

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E((X - E(X))^2) \\
 &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\
 &= E(X^2) - E(X)^2
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
V(X) = 0 &\Leftrightarrow E((X - E(X))^2) = 0 \\
(\text{fonction de transfert}) \quad &\Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)(x - E(X))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega) \setminus \{E(X)\}, P(X = x) = 0 \\
&= P(X = E(X)) = 1
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E((aX + b - E(aX + b))^2) \\
&= E(a^2(X - E(X))^2) \quad (\text{linéarité}) \\
&= a^2 V(X) \quad (\text{linéarité})
\end{aligned}$$

33.15 Propriétés de la covariance

Proposition 33.15

On a :

1. $V(X) = \text{cov}(X, X)$ et $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
2. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. $V(X + Y) = V(X) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y) + V(Y)$.
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Les assertions 3 et 4 se généralisent au cas de variables aléatoires réelles X_1, \dots, X_n sur Ω . Dans ce cas :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Si X_1, \dots, X_n sont (seulement) deux à deux indépendantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

1. RAF

2.

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
&= E(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
V(X + Y) &= E((X + Y - E(X + Y))^2) \\
&= E((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 \\
&= V(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + V(Y)
\end{aligned}$$

4. On suppose que X et Y sont indépendantes, donc :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Puis, par (2) :

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

33.16 Variance des lois usuelles

Théorème 33.16

Soit X une variable aléatoire réelle et $p \in [0; 1]$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1 - p)$.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow B(p)$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

2. Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec X_1, \dots, X_n indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} V(X_1 + \dots + X_n) &= \sum_{k=1}^n V(X_k) \text{ (indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^n p(1 - p) \text{ (1)} \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$