

# Chapitre 35

## Familles sommables

<b>35 Familles sommables</b>	<b>1</b>
35.2 Reformulation . . . . .	2
35.5 Croissance de la somme . . . . .	2
35.8 Lien avec les séries à termes positifs . . . . .	3
35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes . . . . .	3
35.12 Restriction . . . . .	3
35.13 Preque linéarité . . . . .	4
35.14 Sommation par paquets . . . . .	4
35.16 Théorème de Fubini positif . . . . .	5
35.17 Exemple . . . . .	5
35.18 Exemple . . . . .	5
35.19 Exemple . . . . .	6
35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives	7

## 35.2 Reformulation

### Proposition 35.2

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs. Alors  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est bien définie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et

$$\sum_{n \geq 0} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$$

En notant, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , on a :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} a_k$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \in \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$ .

Donc  $\sum_{k \geq 0} a_k \leq \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\} = S$ .

Par ailleurs, pour  $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ , on pose  $N = \max J$  et  $J \subset \llbracket 0, N \rrbracket$  et :

$$\sum_{k \in J} a_k \leq \sum_{k=0}^N a_k \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k \geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k \geq 0} a_k = S$$

## 35.5 Croissance de la somme

### Proposition 35.5

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux familles à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Si pour tout  $i \in I$ ,  $a_i \leq b_i$ , alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ . Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

$\sum_{i \in I} b_i$  est un majorant de  $\left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ .

Par définition :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

### 35.8 Lien avec les séries à termes positifs

#### Proposition 35.8

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs.

1. On a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier,  $\sum a_n$  converge si et seulement si la famille  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

### 35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

#### Corollaire 35.10

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs et  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ .

Soit  $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ .

$\sigma$  induit une bijection  $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$  de  $\{\sum_{i \in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$  sur  $\{\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}$ . Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \quad (35.8)$$

### 35.12 Restriction

#### Proposition 35.12

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Soit  $J \subset I$ , alors :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Comme  $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$  :

$$\left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \subset \left\{ \sum_{j \in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.13 Preque linéarité

#### Proposition 35.13

Soit  $(a_i)$  et  $(b_i)$  deux familles d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$  et  $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$ . On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

( $a \geq 0, b \geq 0$  et  $\sup A, \sup B$  existent).

### 35.14 Sommation par paquets

#### Théorème 35.14

Soit  $I$  un ensemble quelconque et  $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$  un recouvrement disjoint de  $I$ . Soit  $a = (a_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que  $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \left( \sum_{i \in I_k} a_i \right)$  :

Soit  $J \in \mathcal{P}_f(I)$ .

Pour tout  $k \in K$ , on note  $J_k = J \cap I_k$ .

Ainsi,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$  et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k \in K} J_k &= \bigsqcup_{k \in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k \in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également  $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$ .

Alors  $L \in \mathcal{P}_f(K)$  et :

$$\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i \leq \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On prouve  $\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$ .

Soit  $L \in \mathcal{P}_f(K)$ .

Soit, pour  $k \in L$ ,  $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ .  $\bigsqcup_{k \in L} J_k$  est donc une partie finie de  $I$ .

$$\underbrace{\sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup_{k \in L} J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

### 35.16 Théorème de Fubini positif

#### Corollaire 35.16

Soit  $I$  et  $J$  deux ensembles quelconques et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j \in J} I \times \{j\} = I \times J = \bigsqcup_{i \in I} \{i\} \times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

### 35.17 Exemple

#### Exemple 35.17

Montrer que  $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = 1$ .

$(\frac{1}{k^n})_{n \geq 2, k \geq 2}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n} - 1 \right) &= \sum_{n \geq 2} \left( \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n} \right) \quad (\text{Fubini positif}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) \quad (\text{progresion géométrique}) \\ &= \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k} \\ &= \sum_{k \geq 2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad (\text{DES}) \\ &= 1 \quad (\text{télescopage}) \end{aligned}$$

### 35.18 Exemple

#### Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1 \leq k \leq n}$  est une famille de  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{2^n} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{n \geq k} \frac{1}{2^n} \right) \text{ (Fubini positif)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)} \\
 &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

### 35.19 Exemple

#### Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la somme  $\sum_{p,q \in \mathbb{N}^*} \frac{pq}{(p+q)^\alpha}$  est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$  est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}
 \sum_{p \geq 1, q \geq 1} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d \geq 1} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommatation par paquets)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \frac{p(d-p)}{d^\alpha} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \sum_{p=0}^d \left( \frac{p}{d^{\alpha-1}} - \frac{p^2}{d^\alpha} \right) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \left( \frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}} - \frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}} \right) \text{ (sommes usuelles)} \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d+1}{d^{\alpha-1}} (3d - 2d - 1) \\
 &= \sum_{d \geq 2} \frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}}
 \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2 - 1}{6d^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si  $\alpha > 4$ .

### 35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives

#### Théorème 35.5

1. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de réels. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont.
2. Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille de complexes. Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si  $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$  le sont.

1. On rappelle que :

$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$

et :

$$\begin{aligned} \forall i \in I, 0 \leq a_i^+ \leq |a_i| \\ 0 \leq a_i^- \leq |a_i| \end{aligned}$$

Si  $(a_i)$  est sommable, alors  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  le sont aussi (35.24).

Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall i \in I, |a_i| \leq a_i^+ + a_i^-$$

Donc si  $(a_i^+)_{i \in I}$  et  $(a_i^-)_{i \in I}$  sont sommables, alors  $(a_i)$  est sommable (35.24) et (35.13).

2. Démonstration similaire.