Chapitre 10

Structures algébriques

10.3 Exemple

Exemple

Soit $E =]-1;1[$. Pour $(x,y) \in E^2$, on pose : $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que l'on définit ainsi une lci dans E.

On fixe $y \in E$. On note $\varphi : [-1;1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$.
$\varphi \in \mathcal{D}^1([-1;1], \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \varphi'(x) &= \frac{1+xy-y(x+y)}{(1+xy)^2} \\ &= \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \\ &> 0\end{aligned}$$

Comme E est un intervalle : φ est strictement croissante sur E et :

$$\forall x \in E, -1 = \varphi(-1) < \varphi(x) < \varphi(1) = 1$$

Donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, x \star y \in E$$

10.6 Exemple

Exemple

Soit $E =]-1;1[$. Pour $(x,y) \in E^2$, on pose $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $\star$ est associative et commutative.

- Commutativité : RAF
- Associativité :
  Soit $(x,y,z) \in E^3$. On a :

$$\begin{aligned}x \star (y \star z) &= x \star \left(\frac{y+z}{1+yz}\right) \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+xy+xz} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+yz+xy+xz}\end{aligned}$$

  C'est une expression symétrique en x, y et z donc :

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$