Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n \in \left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N = \max J$ et $J \subset [\![0, N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$

35.5 Croissance de la somme

Propostion 35.5

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si pour tout $i \in I, a_i \leq b_i$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$. Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i\in j} a_i \leq \sum i \in J b_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

$\sum\limits_{i\in I} b_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$.
Par définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

35.8 Lien avec les séries à termes positifs

Propostion 35.8

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs.

1. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

Corollaire 35.10

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.
σ induit une bijection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$ de $\left\{\sum_{i\in J} | J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$ sur $\left\{\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \text{ (35.8)}$$

35.12 Restriction

Propostion 35.12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $J \subset I$, alors :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Comme $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$:

$$\left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J)\right\} \subset \left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.13 Preque linéarité

Propostion 35.13

Soit (a_i) et (b_i) deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$et $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$. On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

($a \geq 0, b \geq 0$ et $\sup A, \sup B$ existent).

35.14 Sommation par paquets

Théorème 35.14

Soit I un ensemble quelconque et $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que $\sum\limits_{i \in I} a_i \leq \sum\limits_{k \in K} \left(\sum\limits_{i \in I_k} a_i \right)$:
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$.
Pour tout $k \in K$, on note $J_k = J \cap I_k$.
Ainsi, $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k \in K} J_k &= \bigsqcup_{k \in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k \in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$.
Alors $L \in \mathcal{P}_f(K)$ et :

$$\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i \in J} a_i = \sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i \leq \sum_{k \in L} \sum_{i \in I_k} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_i$$

— On prouve $\sum\limits_{k \in K} \sum\limits_{i \in I_k} a_i \leq \sum\limits_{i \in I} a_i$.
Soit $L \in \mathcal{P}_f(K)$.
Soit, pour $k \in L, J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. $\bigsqcup_{k \in L} J_k$ est donc une partie finie de I.

$$\underbrace{\sum_{k \in L} \sum_{i \in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.16 Théorème de Fubini positif

Corollaire 35.16

Soit I et J deux ensembles quelconques et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\} = I\times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

35.17 Exemple

Exemple 35.17

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2}(\zeta(n)-1) = 1$.

$\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\geq 2,k\geq 2}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^n} - 1\right) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^n}\right)\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{k^n}\right) \text{ (Fubini positif)}\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \text{ (progresion géométrique)}\\
&= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2-k}\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \text{ (DES)}\\
&= 1 \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

35.18 Exemple

Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq k}\frac{1}{2^n}\right) \text{ (Fubini positif)} \\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)} \\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 2\end{aligned}$$

35.19 Exemple

Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum\limits_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1,q\geq 1}\frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d\geq 1}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommation par paquets)} \\ &= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha} \\ &= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\left(\frac{p}{d^{\alpha-1}}-\frac{p^2}{d^\alpha}\right) \\ &= \sum_{d\geq 2}\left(\frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}}-\frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}}\right) \text{ (sommes usuelles)} \\ &= \sum_{d\geq 2}\frac{d+1}{d^{\alpha-1}}(3d-2d-1) \\ &= \sum_{d\geq 2}\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}\sim\frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si $\alpha > 4$.