# Chapitre 27

# Séries numériques

**27 Séries numériques** **1**
27.6 Série géométrique . . . 2
27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout . . . 2
27.12 CN de convergence portant sur le terme général . . . 2
27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs . . . 2
27.20 Convergence absolue entraîne convergence . . . 3
27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité . . . 3
27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence . . . 3
27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale . . . 4
27.29 Nature des séries de Riemann . . . 5
27.30 Nature des séries exponentielles . . . 5
27.32 Nature des séries de Bertrand - Hors Programme . . . 6
27.35 Règle d'Alembert - Hors Programme . . . 6
27.39 Critère spécial des séries alternées . . . 7
27.42 Majoration du reste d'une série alternée . . . 7
27.44 Critère d'Abel - Hors Programme . . . 8

## 27.6 Série géométrique

**Théorème 27.6**

Soit $a \in \mathbb{C}$. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \ (a \neq 1) \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \ (|a| < 1) \end{aligned}$$

La série converge et $\sum\limits_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$.

## 27.11 Deux séries de termes généraux égaux presque partout

**Propostion 27.11**

Si $(u_n)$ et $(v_n)$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On note $A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \neq v_n\}$. Supposons $A \neq \emptyset$.
D'après les hypothèses, $A$ est majoré donc possède un maximum $N$ d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$.
On note $(S_n)$ et $(S'_n)$ les sommes partielles associée à $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
Pour $n \geq N$ :

$$S_n = S'_n + K \text{ où } K = \sum_{k \in A} (u_k - v_k) \text{ (constant)}$$

Ainsi $(S_n)$ converge si et seulement si $(S'_n)$ converge.

## 27.12 CN de convergence portant sur le terme général

**Théorème 27.12**

Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)$ converge vers 0. De manière équivalente, si $(u_n)$ ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

On suppose que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0$$

## 27.16 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

**Théorème 27.16**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge aussi.
- Si $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ donc), alors $\sum v_n$ diverge aussi (vers $+\infty$ donc).

De plus, si la divergence est grossière pour $\sum u_n$, elle l'est aussi pour $\sum v_n$.

En utilisant les notations du (27.11), on peut supposer que :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq v_n$$

Puis :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq S_n \leq S'_n$$

On utilise alors le théroème de comparaison sur les suites.

## 27.20 Convergence absolue entraîne convergence

**Théorème 27.20**

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

— On suppose que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \geq 0 \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0) \geq 0$$

Ainsi, $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
Or, pour tout $n$ :

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$
$$0 \leq u_n^- \leq |u_n|$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent et par linéarité (27.16) $\sum u_n$ converge.

— On suppose que $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, avec $\sum |u_n|$ convergente.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |Re(u_n)| \leq |u_n|$$
$$|Im(u_n)| \leq |u_n|$$

Donc, $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ sont absolument convergentes (27.15) donc convergent, puis par combinaison linéaire (27.16) $\sum u_n$ converge.

## 27.23 Comparaison des séries par domination ou négligabilité

**Théorème 27.23**

Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques et $\sum v_n$ une série à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$). Alors :

- La convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$.
- La divergence de $\sum u_n$ (celle de $\sum |u_n|$ suffit) entraîne la divergence de $\sum v_n$.

On suppose $u_n = O(v_n)$ avec $v_n \geq 0$.

— On suppose que $\sum v_n$ converge. On a $|u_n| = O(v_n)$ donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq |u_n| \leq M v_n$$

D'après le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge donc $\sum u_n$ converge.

— Si $\sum |u_n|$ diverge, par comparaison par minoration des séries à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.

## 27.24 Comparaison des séries à termes positifs par équivalence

**Théorème 27.24**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{=} O(u_n)$.
On conclut avec (27.23).

## 27.25 Théorème de comparaison entre série et intégrale

**Théorème 27.25**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : [a; +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et positive. Alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge aussi (i.e. $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie).

D'après le TLM ($f \geq 0$), $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(t)\,dt$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $n_0 \geq a$. $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.
Comme $f$ est décroissante, pour tout $n \geq n_0$ :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

Donc par Chasles :

$$\underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1)}_{\sum\limits_{k=n_0}^{n+1} f(k) - f(n_0)} \leq \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

D'après le TLM :
- Si $\sum(f_n)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt \in \mathbb{R}_+$, alors $\sum(f_n)$ converge.

# Exercice 1

**Exercice 27.1**

En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{o(1)} \\ &\geq \frac{1}{2n} \text{ à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

# Exercice 2

**Exercice 27.2**

En utilisant un théorème de comparaison par domination ou négligabilité, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{\frac{3}{2}} - \lfloor n^{\frac{3}{2}} \rfloor + n} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{O(1) + n} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{e - e \times \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)} \\
&\underset{n \to +\infty}{=} \frac{e - e\left(1 - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n + o(n)}
\end{aligned}$$

Par comparaison par $\sim$, $\sum u_n$ est convergent.

## 27.29 Nature des séries de Riemann

**Théorème 27.29**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

— Si $\alpha < 0$, la divergence est grossière.
— On a montré que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
— Si $\alpha \in ]0, 1]$ :

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
— Soit $\alpha > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décoroissante et positive sur $[1, +\infty[$.
Pour $x \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt &= \left[\frac{1}{(-\alpha+1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} \\
&\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

## 27.30 Nature des séries exponentielles

**Théorème 27.30**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et sa somme vaut $e^x$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{x^n}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison par domination à une série de Riemann de paramètre $2 > 1$, $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.
— Soit $x \in \mathbb{R}, \exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$

On pose $M = \max(1, e^x)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{n!}\, dt \right| &\leq \pm \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} M\, dt \\ &= M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

## 27.32 Nature des séries de Bertrand - Hors Programme

**Propostion 27.32 - HP**

La **série de Bertrand de paramètre** $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est définie par $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. Elle est convergente si et seulement si $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique. Cela signifie :

- si $\alpha > 1$, la série converge
- si $\alpha < 1$, la série diverge
- pour $\alpha = 1$ :
  - si $\beta > 1$, la série converge
  - si $\beta \leq 1$, la série diverge

- Si $\alpha > 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$$

Comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.

- Si $\alpha < 1$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

Comme $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, par comparaison en 0, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge.

- Si $\alpha = 1$. Pour $\beta = 1$, $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge (comparaison série intégrale).

Pour $\beta < 1$ :

$$\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n \ln^\beta n}$$

$\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ diverge.

Pour $\beta > 1$, $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta t}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \int_2^x \frac{1}{t} \times (\ln t)^{-\beta}\, dt = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

Par comparaison série intégrale, $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ converge.

## 27.35 Règle d'Alembert - Hors Programme

**Théorème 27.35 - HP**

Soit $\sum u_n$ à termes quelconques non nuls. On suppose que $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une liite (finie) $\ell$. Alors :

1. si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument
2. si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement
3. si $\ell = 1$, on ne peut rien dire

—

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1[]$$

A partir d'un rang $n_0$ :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{\ell+1}{2}$$

On a directement :

$$0 \leq |u_n| \leq \underbrace{\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \times |u_{n_0}|}_{\text{terme général d'une série géométrique de raison } \frac{\ell+1}{2}}$$

Par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
— Même raisonnement si $\ell > 1$.
— $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n}$ fournissent des contre-exemples.

## 27.39 Critère spécial des séries alternées

**Théorème 27.39**

Toute série alternée est convergente.

Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Ainsi, $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. $(a_n)$ est décroissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On note $(S_n)$ la suite des sommes partielles associée à cette série. Montrons que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes.

—

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

— Pour $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Les suites $(S_{2n+1})$ et $(S_{2n})$ sont adjacentes, donc elles convergent vers une limite commune.
Donc $(S_n)$ converge, donc $\sum(-1)^n a_n$ converge.

## 27.42 Majoration du reste d'une série alternée

**Propostion 27.42**

Soit $\sum u_n$ une série alternée. On note $R_n$ le reste d'ordre $n$. Alors :

1. $R_n$ est du signe de $u_{n+1}$
2. On a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

On reprend les notations de (27.39).

$$\forall n \geq 0, u_n = (-1)^n a_n$$

1. D'après la démonstration de (27.39), on a :

$$\forall n \geq 0, S_{2n+1} \leq \sum_{k\geq 0} u_k \leq S_{2n}$$

Donc :

$$\forall n \geq 0, R_{2n} = \sum_{k\geq 0} u_k - S_{2n} \leq 0$$
$$R_{2n+1} = \sum_{k\geq 0} u_k - S_{2n+1} \geq 0$$

On obtient alors le résultat souhaité.

2. Soit $n \geq 0$ :

$$|R_{2n}| = -R_{2n} = -\sum u_k + S_{2n} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n+1} = |u_{2n+1}|$$
$$|R_{2n+1}| = R_{2n+1} = \sum u_k - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} = |u_{2n+2}|$$

## 27.44 Critère d'Abel - Hors Programme

**Théorème 27.44 - HP**

1. Soit $\sum a_n b_n$ une série telle que $(a_n)$ soit une suite réelle positive décoroissante de limite nulle, et telle que la suite $(B_n)$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée ($(b_n)$ est une suite complexe ou réelle). Alors $\sum a_n b_n$ converge.
2. Les suites $(b_n)$ définies par $b_n = e^{ina}, \cos(an), \sin(an)$ remplissent les conditions requises, lorsque $a \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. On note $(S_n)$ la suite des sommes partielles associées à $\sum a_n b_n$.
On convient que $B_{-1} = 0$. Pour $n \geq 0$ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1})$$

Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k$$
$$= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

— On a :

$$a_n b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ (a_n \to 0 \text{ et } (B_n) \text{ bornée})$$

—

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \ (a_n \text{ décroissante})$$
$$\leq M \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \ ((B_n) \text{ bornée})$$
$$= M(a_0 - a_n)$$
$$\leq M a_0$$

Donc $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente donc convergente.
Donc $(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k)$ admet une limite finie.
Donc $(S_n)$ converge.
Donc $\sum a_n b_n$ converge.

2. — Soit $a \neq 0 \pmod{2\pi}$, on note $(b_n) = (e^{ina})$.
   Pour $n \geq 0$ :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} e^{ika} = \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}} \ (e^{ia} \neq 1)$$

   Donc :

$$|B_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{ia}|}$$

   — Si $a = 0 \pmod{2\pi}$ :

$$B_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \ (B_n = n + 1)$$