Chapitre 24

Comparaison locale des suites

24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Propostion 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $u_n \sim v_n$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &=_{n \to +\infty} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

24.20 Equivalent d'un polynôme

Propostion 24.20

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
Pour $k \in [\![0, d-1]\!]$:

$$n^k =_{n \to +\infty} o(n^d) \text{ et } a_k n^k =_{n \to +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k =_{n \to +\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

24.31 Exemple

Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}}$$

On note u_n l'expression de l'exemple.
<u>But :</u> trouver un équivalent (simple) de u_n.

—
$$e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :
$$(e^{\frac{1}{n}}-1)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 &= (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}-1\\ &\sim \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

—
$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\\ &\sim \frac{3}{n^2}\end{aligned}$$

Donc :
$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—
$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :
$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{9}{n^4}\times\sqrt{3n}}\\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Donc :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

24.36 Exemple

Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\ &\sim \frac{1}{n}\end{aligned}$$

24.43 Exemple

Exemple 24.43

Trouver un équivalent de $\ln\sin\frac{1}{n}$.

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + o\left(1\right)\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1))\\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to -\infty} + o(1)\\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

24.46 Exemple

Exemple 24.46

Soit (u_n) une suite non nulle de limite nulle. On admet que $\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned}
\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &=_{n\to+\infty} \exp\left(5n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&=_{n\to+\infty} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\
&=_{n\to+\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

Exercice 24.9

Exercice 24.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$. Donner un équivalent simple de u_n.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\left[(1+\frac{1}{n})^{-1} - 1\right]}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{-\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$