

# Chapitre 34

## Espaces préhilbertiens réels

<b>34 Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>1</b>
34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	2
34.5 Exemple	2

### 34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

#### Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ , appelé produit scalaire canonique.

Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  :

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$  donc  ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

### 34.5 Exemple

#### Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ,  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$ , donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left( {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si  ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$  alors  $|xy| = 0$ , puis  $x = y = 0$ .

La forme est définie positive.