Chapitre 26

Intégration sur un segment

26.12 Image d'une fonction en escalier

Propostion 26.12

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Si $v = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$ est une subdivision associée à f, alors :

$$|Im(f)| \leq \underbrace{n}_{\text{valeurs sur chaque intervalle ouvert}} + \underbrace{n+1}_{\text{valeurs de } f(v_i)} = 2n+1$$

26.14 Subdivision commune

Lemme 26.14

Soit f et g deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à f et g.

Si σ est une subdivision associée à f et τ est une subdivision associée à g :

$$\begin{aligned} \sigma \cup \tau &\leq \sigma \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

Donc $\sigma \cup \tau$ est une subdivision commune associée à f et g.

26.15 Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Théorème 26.15

L'ensemble $Esc([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^[a, b]$ (c'est même une sous-algèbre).

PRAS (26.14)

26.17 Théorème

Théorème 26.17

Pour toutes subdivisions σ et τ associées à f, on a :

$$I(f, \sigma) = I(f, \tau)$$

Autrement dit, la quantité $I(f, \sigma)$ est indépendante du choix de la subdivision associée.

Dans un premier temps, on suppose $\tau \subset \sigma$.
Notons :

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \\ &= \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \end{aligned}$$

On note f_k la valeur constante de f sur $]\tau_k, \tau_{k+1}[$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
I(f,\tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{i_{k+1}} - \sigma_{i_k}) f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) \right] f_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
&= \sum_{p=0}^{i_n - 1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\
&= I(f,\sigma)
\end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$I(f,\tau) = I(f, \tau \cup \sigma) = I(f,\sigma)$$

Propostion 26.21

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et soit $c \in]a,b[$, alors f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Soit σ associée à f, $\sigma \cup \{c\}$ est toujours associée à f, alors $\sigma \cup \{c\} \cap [a,c]$ est associée à $f_{[a,c]}$.
RAS pour la suite.

26.23 Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout

Propostion 26.23

Si deux fonctions en escalier ne différent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Dans ce cas, $f - g$ est nulle presque partout et on utilise la linéarité et (26.20).

26.24 Positivité ou croissance de l'intégrale

Propostion 26.24

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ (avec $a \leq b$) telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

En particulier, si f est en escalier sur $[a,b]$ et positive, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

En reprenant la notation du (20.18), pour tout i, $f_i \geq 0$. Donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

On obtient la croissance par linéarité.

26.26 Inéglité triangulaire intégrale

Propostion 26.26

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ (avec toujours $a \leq b$) à valeurs réelles. Alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a,b]$ et :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Si σ est associée à f, elle reste associée à $|f|$ et ensuite on utilise l'inégalité triangulaire classique avec (26.20).

26.36 Théorème

Théorème 26.36

f est intégrable si et seulement si $I_-(f)$ et $I_+(f)$ existent et si $I_-(f) = I_+(f)$.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f intégrable. Donc $Esc_+(f)$ et $Esc_-(f)$ ne sont pas vides.
En particulier $A_+(f) \neq \emptyset$ est minoré et $A_-(f) \neq \emptyset$ est majoré.
D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, $I_-(f)$ et $I_+(f)$ sont bien définis.
Soit $\epsilon > 0$, on choisit $(h,g) \in Esc_-(f) \times Esc_+(f)$ tel que :

$$\int_a^b (g-h)(x)\,dx < \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq \int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b h(x)\,dx + \epsilon \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_- + \epsilon$$

Donc :

$$I_+ \leq I_-$$

Donc :

$$I_+ = I_-$$

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose $I_+ = I_-$.
Soit $\epsilon > 0$.
$I_+ + \frac{\epsilon}{2}$ ne minore pas A_+.
$I_- - \frac{\epsilon}{2}$ ne majore pas A_-.
On choisit donc $h \in Esc_-$ et $g \in Esc_+$ telles que :

$$\int_a^b g(x)\,dx < I_+ + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\int_a^b h(x)\,dx > I_- - \frac{\epsilon}{2}$$

Donc :

$$\int_a^b (g(x) - h(x))\,dx < I_+ - I_- + \epsilon = \epsilon$$

26.42 Intégrabilité des fonctions monotones

Théorème 26.42

Soit f une fonction monotone sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

On suppose f croissante. Alors f est bornée (minorée par $f(a)$, majorée par $f(b)$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note σ_n la subdivision régulière de $[a, b]$ à n pas.

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \sigma_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)}{n}k$$

On définit $h_n \in Esc_-(f)$ et $g_n \in Esc_+(f)$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}], g_n(x) & = f(\sigma_{k+1}^{(n)}) \\ g_n(a) = f(a) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \forall x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) & = f(\sigma_k^{(n)}) \\ h_n(b) = f(b) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (g_n - h_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times (f(\sigma_{k+1}^{(n)}) - f(\sigma_k^{(n)})) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

D'après (26.41), f est intégrable.

26.43 Intégrabilité des fonctions continues

Théorème 26.43

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
Comme $[a, b]$ est un segment, f est uniformément continue sur $[a, b]$ d'après le theorème de Heine.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $\sigma^{(n)}$ la subsdivision régulière de $[a, b]$ à n pas ($n \geq 1$).
On choisit n tel que $\frac{b-a}{n} < \eta$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ donc y atteint ses bornes ($[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$ est compact/théorème des bornes atteintes).
On note alors m_k et M_k respesctivement les minimum et maximum sur $[\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}]$.
On pose alors h_n et g_n.

— Pour $x \in [\sigma_k^{(n)}, \sigma_{k+1}^{(n)}[, h_n(x) = m_k$ et $g_n(x) = M_k$.

— $h_n(b) = g_n(b) = f(b)$

Par construction, $h_n \in Esc_-(f)$ et $g_n \in Esc_+(f)$, et :

$$\int_a^b (g_n - h_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)})(M_k - m_k) < \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{k+1}^{(n)} - \sigma_k^{(n)}) \times \epsilon = \epsilon \times (b-a)$$

Par définition :

$$\int_a^b (g_n - h_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

26.46 Relation de Chasles

Propostion 26.46

Soit une fonction f définie sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ si et suelement si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

cf. annexe

26.49 Croissance et positivité de l'intégrale

Propostion 20.49

Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) telles que pour tout $x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$ et positive, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Si $f \geq 0$, alors $0 \in Esc_-(f)$.

$$\int_a^b 0 = 0 \in A_-(f)$$

Donc :

$$I_-(f) = \int_a^b f \geq 0$$

26.51 Inégalité triangulaire intégrale

Propostion 26.51

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

On suppose f intégrable sur $[a, b]$.
On choisit (φ_n, θ_n) associé à f (26.39).
Comme :

$$\forall x \in [a, b], ||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \theta_n(x)$$

Alors $(|\varphi_n|, \theta_n)$ est associée à $|f|$. Par conséquent, $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx$$

Or, d'après (26.26) :

$$\left| \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx$$

Donc, d'arpès le TCILPPL :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$