Chapitre 15

Limites et continuité

15.6 Limite en un point du domaine

Propostion 15.6

Si $a \in X$ et si $f(x)$ admet une limite finie en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Comme $f(x)$ admet une limite finie b quand $x \to a$:

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x-a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout $\epsilon > 0$:

$$|a-a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc $\boxed{f(a) = b}$.

15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coincidant au voisinage de a

Propostion 15.15

Soit f et g deux fonctions coincidant au voisinage d'un point a. Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g aussi et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

On choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \cap X = W \cap Y$ et $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$.
Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x)$ tend vers b quand $x \to a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(b)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc g admet une limite en a égale à b

15.17 Unicité de la limite, cas réel

Théorème 15.17

Soit $a \in \overline{X}$ et f une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a est unique.

Par l'absurde. On suppose que f possède deux limites $l \neq l'$ en a.
On choisit $u \in \mathcal{V}(l)$ et $u' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $u \cap u' = \emptyset$.
Par définition, on choisit $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$ tels que $f(W \cap X) \subset U$ et $f(W' \cap X) \subset U'$.
Or $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$ et $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$.
Absurde.

15.23 Propostion

Propostion 15.23

Soit $a \in \overline{X}$. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$ (on dit que (Z_i) est un **recouvrement** de X). La fonction f admet au point a une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si pour tout i tel que la limite de f en a sur Z_i est envisageable, cette limite existe et vaut ℓ.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $\lim\limits_{a} f = \ell$.
Soit $i \in I$ tel que $a \in \overline{X \cap Z}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$.
EN particulier $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Notons $J \subset I$ l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en Z_i.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Pour tout $i \in J$, comme $\lim\limits_{x \to a x \in Z_i} = \ell$ on choisit $U_i \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$.
On pose $U = \bigcap\limits_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$ car J est fini.
On choisit $U' \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U' \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$.
$f(U \cap U' \cap X) \subset V$
Donc $\boxed{\lim\limits_{a} f = \ell}$.

15.30 Composition de limites

Propostion 15.30

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(X) \subset Y$. Soit $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{a} f = b$ et si $\lim\limits_{b} g = c$, alors $\lim\limits_{a} g \circ f = c$.

Soit $W \in \mathcal{V}(c)$. On choisit $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \ (\lim_{a} f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

15.32 Limites et inégalités strictes

Propostion 15.32

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.
1. Si $\lim\limits_{a} f < M$ alors $f(x) < M$ au voisinage de a
2. Si $\lim\limits_{a} f > m$ alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

1. Notons $b = \lim\limits_{a} f \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $b < M$, on choisit $U \in \mathcal{V}(b)$ et $U' \in \mathcal{V}(M)$ avec $U < U'$.
   Comme $\lim\limits_{a} f = b$, on choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

15.33 Limite et inégalités larges

Propostion 15.33

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{X}$. On suppose que f et g possède des limites finies en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$.
Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 15.34

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{X}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Sont équivalentes :

1. $\lim\limits_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \to a, \lim f(u_n) = \ell \ (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite (u_n) de limite a à valeurs dans X, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$.
Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \ (\lim_a f = \ell)$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$
Par contraposée. On suppose que f n'admet pas ℓ comme limite en a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_n = \begin{cases}]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[\text{ si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[\text{ si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] \text{ si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe $W \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $x \in V \cap X$ et $f(x) \neq W$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in V_n \cap X$ tel que $f(x_n) \neq W$.
Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } f(x_n) \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \ell$$

15.39 Théorème de la limite monotone

Théorème 15.39

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. La limite $\lim\limits_{a^+} f$ existe et est finie. Plus précisément, on a $f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$.
2. Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim\limits_{c^-} f$ et $\lim\limits_{c^+} f$ existent et sont finies. Plus précisément : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$.
3. La limite $\lim\limits_{b} f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

1. On note $F = f(]a, b[)$. Comme f est définie au voisinage de a, $]a, b[\neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
   Par ailleurs, comme f est croissante sur $]a, b[$, F est minorée par $f(a)$.
   D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, F possède une borne inférieure notée α, avec $f(a) \leq \alpha$.
   Montrons par définition que $\lim\limits_{a^+} f = \alpha$.
   Soit $\epsilon > 0$, $\alpha + \epsilon$ n'est pas un minorant de F par définition de α. On choisit :
   $$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   Par croissance de f sur $]a, b[$:
   $$\forall x \in]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   On pose $\eta = x_0 - a > 0$, on a montré que :
   $$\boxed{\forall x \in]a - \eta[\cap]a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$
2. Pour $c \in]a, b[$, en appliquant (15.39.1) à $f|_{[a,b[}$, on montre que $\lim\limits_{c^+} f$ existe et $f(x) \leq \lim\limits_{x^+} f$.
   On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :
   $$F = f(]a, c[), \alpha = \sup(F)$$
   pour montrer que $\lim\limits_{c^-} f$ existe et
3. Par disjonction de cas.

   — Si f est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
   — Si f n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, on choisit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$.
   Comme f est croissante :
   $$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$
   Donc $\lim\limits_{b} f = +\infty$.

15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

Théorème 15.59

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémité a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il exsite $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = 0$.

On note $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$.

— $A \neq \emptyset$ car f est définie et strictement positive au voisinage de a (15.32).
— A est majoré car f est strictement négative au voisinage de b (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, A possède une borne supérieure notée $c \in]a, b[$.

— On a $c \notin A$. En effet, si $f(x) > 0$, alors f est strictement postivie sur un voisinage de c, et comme f est définie à droite de c, cela contredirait que c'est un majorant de A.
Donc $f(c) \leq 0$.
— Si $f(c) < 0$, alors f est strictement négative au voisinage à gauche de c.
Absurde car c est le plus petit des majorants.
Conclusion, $\boxed{f(c) = 0}$.

15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

Théorème 15.60

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $M = \sup_I f(x)$ et $m = \inf_I f(x)$ (éventuellement infinies).
Alors f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m; M[$:

$$\forall x_0 \in]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à $f - x_0$.

15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.

15.65 Théorème de Heine

Théorème 15.65

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Rappel :

$$C^0(I) : \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$
$$Cu(I) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On raisonne par l'absurde. Soit f continue sur $[a,b]$ mais non uniformément continue sur $[a,b]$.
On choisit ϵ tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x,y) \in [a,b]^2, |x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, on choisit un couple $(x_n, y_n) \in [a,b]^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \epsilon$$

En particulier (x_n) est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en extrait $(x_{\varphi(n)})$ suite convergente vers ℓ.
D'après le TCILPPL, $\ell \in [a,b]$.
Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors :

$$y_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Par continuité :

$$f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$$

Donc par opération :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Absurde d'après $(*)$.

15.67 Caractérisation des intervalles compacts

Lemme 15.67

Les intervalles compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les segments, c'est-à-dire les intervalles fermés bornés $[a,b]$.

Les segments sont bien compacts (BW et TCILPPL).

— Si $I =]-\infty, a[$,

$$u_n = a - n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \notin I$$
$$u_n = a - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \notin I$$

15.68 Image d'un compact par une fonction continue

Lemme 15.68

L'image continue d'un compact est compact.

Soit I un segment, donc un intervalle.
Comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle (TVI v3).
Montrons que $f(I)$ est compact.
Soit $(y_n) \in f(I)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in I$ tel que :

$$y_n = f(x_n)$$

Or I est compact (15.67), on choisit :

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in I$$

$y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ car f est continue sur I.

15.69 Image d'un segment par une fonction continue

Corollaire 15.69

Soit f continue sur un segment I, alors $f(I)$ est un segment.

(15.68) + TVI v3 + (15.67)

15.72 Théorème 15.72

Théorème 15.72

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

$\boxed{\Leftarrow}$
RAS

$\boxed{\Rightarrow}$
Supposons f non strictement monotone.
On peut supposer qu'il existe alors :

$$x < y < z$$

tels que $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$.
Soit :

$$\lambda = \frac{f(y) + \max(f(y), f(z))}{2} \begin{array}{l} \in]f(x), f(y)[\\ \in]f(z), f(y)[\end{array}$$

Par continuité de f sur les intervalles $]x, y[$ et $]y, z[$, il existe $\alpha \in]x, y[$ et $\beta \in]y, z[$ tels que :

$$f(\alpha) = \lambda = f(\beta)$$

Donc f n'est pas injective.

15.73 Théorème 15.73

Théorème 15.73

Soit I un intervalle et f monotone sur I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

On suppose f croissante sur I.
On suppose que f n'est pas continue sur I.
On applique le TLM :

$$\forall a \in I, \lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f \text{ (quand tout existe)}$$

Comme f n'est pas continue sur I, on choisit $a \in I$ tel que :

$$\lim_{a^-} f < f(a) \text{ ou } f(a) < \lim_{a^+} f$$

On pose :

$$\lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^-} f}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^+} f}{2}$$

$f(a) \neq \lambda$ et par croissance :

$$\begin{gathered} \forall x < a, f(x) < \lambda \\ \forall x > a, f(x) > \lambda \end{gathered}$$

Donc $\lambda \notin f(I)$.
Donc $f(I)$ n'est pas connexe, donc $f(I)$ n'est pas un intervalle.

15.76 Théorème de la bijection

Théorème 15.76

Soit I un intervalle d'extrémités a et b. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone et continue. Soit

$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \to b} f(x).$$

(ces limites existent car f et monotone). Alors $f(I)$ est un intervalle d'extrémité α et β, et f est un homémorphisme de I sur $f(I)$.
Plus précisément, la borne α de $f(I)$ est ouverte si et seulement si la borne a de I est ouverte (et de même pour β).

- $f(I)$ est un intervalle : (15.61).
- f induit une bijection de I sur $f(I)$ (15.72 $\boxed{\Leftarrow}$).
- f^{-1} est strictement monotone et définie sur $f(I)$ intervalle, d'image I intervalle donc f^{-1} est continue sur $f(I)$ (15.73 $\boxed{\Rightarrow}$).

Ainsi, f induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$.
La nature des bornes (fermées ou ouvertes) provient de la monotonie de f.