14.2 Exercice

1. Soit $k \geq 2 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &\Leftrightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1} \\
&\Leftrightarrow k \geq k-1 \ (x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante})
\end{aligned}$$

2. On suppose que S_n converge. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &\Leftrightarrow S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\
&\Leftrightarrow S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \text{ (télescopage)} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n \leq \lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} \text{ (Hypothèse)} \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n \leq 2
\end{aligned}$$

   D'autre part, la suite est strictement croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

14.6 Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $a = 1$, on a la relation $u_{n+1} = u_n + b$. Ainsi, (u_n) est une suite arithmétique d'expression :

$$u_n = u_0 + nb$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n + \lambda \\
\text{donc } v_{n+1} &= u_{n+1} + \lambda \\
&= au_n + b + \lambda
\end{aligned}$$

   On remarque que pour $\lambda = \frac{b}{a-1}$ avec $a \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= au_n + b + \frac{b}{a-1} \\
&= \frac{(a-1)(a)u_n + (a-1)b + b}{a-1} \\
&= a \times \frac{(a-1)u_n + b}{a-1} \\
&= a \left(u_n + \frac{b}{a-1} \right) \\
&= av_n
\end{aligned}$$

   Donc pour $\lambda = \frac{b}{a-1}$, (v_n) est géométrique.

   (b)

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n + \frac{b}{a-1} \\
\text{donc } u_n &= v_n - \frac{b}{a-1} \\
&= \left(u_0 + \frac{b}{a-1} \right) \times a^n - \frac{b}{a-1} \\
&= u_0 a^n + (a^n - 1) \frac{b}{a-1}
\end{aligned}$$

14.9 Exercice

On s'intéresse aux suites extraites $(u_{e^{2\pi n}})$ et $(u_{e^{2\pi n+\pi}})$:

$$(u_{e^{2\pi n}}) = (\cos(2\pi n))$$
$$(u_{e^{2\pi n+\pi}}) = (\cos(2\pi n + \pi))$$

On a les limites :

$$u_{e^{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$u_{e^{2\pi n+\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

Les deux suites extraites ne convergent pas vers la même limite, donc la suite (u_n) n'a pas de limites.

14.10 Exercice

3. Soit $x \in [0,1]$. Soit $\epsilon > 0$.
   Par **densité** de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on choisi $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tel qu $|x - q| < \frac{\epsilon}{2}$.
   D'après la question 2, comme $u_{n^2b^2+2an} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b} = q$, on choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$|u_{n^2b^2+2an} - q| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } |u_n - x| < \epsilon$$

   Donc $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.
   D'après le critère séquentiel de la densité, tout réel de $[0,1]$ est donc une limite d'une suite extraite de u.

14.12 Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{cases} 1 \leq (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} \leq \frac{3}{2} \\ -1 \leq (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} \leq 0 \end{cases} \qquad \text{donc } -1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$$

   $u_2 = \frac{3}{2}$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, $\sup\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\} = \frac{3}{2}$.
   De plus, $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $\inf\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\} = -1$.

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \neq q$ et $v_{p,q} = \frac{1}{p-q}$.
   Pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ avec $p \neq q$, on a : $p - q \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus 0$
   Si $p - q > 0$, alors $\frac{1}{p-q} > 0$ et $\frac{1}{p-q} \leq 1$ car $p - q \geq 1$
   Si $p - q < 0$, alors $\frac{1}{p-q} < 0$ et $\frac{1}{p-q} \geq -1$ car $p - q \leq -1$
   Donc $-1 \leq \frac{1}{p-q} \leq 1$
   De plus, on peut prendre $p = 0$ et $q = 1$ pour obtenir $v_{0,1} = -1$, et $p = 1$ et $q = 0$ pour obtenir $v_{1,0} = 1$
   D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et de la borne inférieure :
   $\sup\left\{\frac{1}{p-q}\right\}(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p \neq q = 1$ et $\inf\left\{\frac{1}{p-q}\right\}(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p \neq q = -1$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $w_k = \frac{(-1)^k k}{k+1}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
   Si k est pair, alors $w_k = \frac{k}{k+1} > 0$ et $w_k < 1$
   Si k est impair, alors $w_k = -\frac{k}{k+1} < 0$ et $w_k > -1$
   Donc $-1 < \frac{(-1)^k k}{k+1} < 1$
   De plus, pour k pair, $w_k = \frac{k}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
   Et pour k impair, $w_k = -\frac{k}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1$
   D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure et de la borne inférieure :
   $\sup\left\{\frac{(-1)^k k}{k+1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*} = 1$ et $\inf\left\{\frac{(-1)^k k}{k+1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*} = -1$

14.13 Exercice

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est bien croissante.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-3n+3}{(2n+1)(2n+2)n} \leq 0 \text{ (car } n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Donc (v_n) est bien décroissante.

En outre :

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc u et v sont bien des suites adjacentes.

14.17 Exercice

1. Montrons que pour tout $x \geq 3$, la fonction $x \mapsto \frac{2x^2-3}{x+2}$ est minorée par 3 :
   On note f la fonction $x \mapsto \frac{2x^2-3}{x+2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x^2+8x+3}{(x+2)^2} \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x^2+8x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	3		$2+\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(3)$	$\longrightarrow$	$f(2+\sqrt{\frac{5}{2}})$	$\longrightarrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty}$

   Ainsi, $[3, +\infty[$ est stable par la fonction f.

2. (a) a