Chapitre 21

Applications linéaires

21.4 Exemple

Exemple 21.4.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 3y$.

Soit $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x,y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Propostion 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$ est un estpace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
— $\overline{0}\mathcal{L}(E, F)$
— Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha \lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$.

21.10 Composition de deux AL

Propostion 21.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Soit (x, y) $\in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

21.13 Bilinéarité de la composition

Propostion 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis, E, F et G étant des $\mathbb{K}$-ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.

D'après la remarque (21.11), Ψ est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \forall (v,v') \in \mathcal{L}(F,G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v+\lambda v') = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u,v')$$

Soit $(u,u') \in \mathcal{L}(E,F)^2, v \in \mathcal{L}(F,G), \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u+\lambda u', v)(x) &= v \circ (u+\lambda u')(x) \\ &= v(u(x)+\lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u,v)(x) + \lambda \Psi(u',v)(x)\end{aligned}$$

Donc $\Psi(u+\lambda u', v) = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u',v)$.

21.16 Structure des images directes et réciproques

Propostion 21.16

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

1. — $f(E') \subset F$
   — $0 = f(0) \in f(E')$
   — Soit $(x,y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $x = f(\alpha), y = f(\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in E'^2$.

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda \beta) \\ &\in f(E') \end{aligned}$$

2. — $f^{-1}(F') \subset E$
   — $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$
   — Soit $(x,y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$

$$\text{donc } x + \lambda y \in f^{-1}(F')$$

21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

Propostion 21.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_i)_{i\in I})$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i \in I})$$

— Pour tout $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$.
Comme $Im(f)$ est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i\in I}) \subset Im(f)$$

— Soit $a \in Im(f)$. On choisit $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on peut écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à spport fini.

$$\begin{aligned} a &= f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i\in I}) \end{aligned}$$

21.23 Réciproque d'un isomophisme

Théorème 12.23

Soit f un isomorphisme de E vers F. Alors f^{-1} est une application linéaire, donc un isomophisme de F vers E.

On pose $g = f^{-1}$. Soit $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme

Propostion 21.41 - HP

L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si P et Q annulent u, alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si $B \in \mathbb{K}[X]$:

$$(PB)(u) = P(u) \circ B(u) = B(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur

Propostion 21.52

Soit p un projecteur de E. Alors $x \in Im(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. Soit :

$$Im(p) = \ker(p - id_E)$$

Soit p un projecteur. Soit $x \in E$.

- Si $x \in Im(p)$, on choisit $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
  Donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$.
- Si $p(x) = x$, alors $x \in Im(p)$.
-

$$\begin{aligned} x \in Im(p) &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - id)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - id) \end{aligned}$$

21.53 Diagonalisation d'un projecteur

Théorème 21.53

Soit p un projecteur de E. Alors :

$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - id_E)$$

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(p - id_E)$.
Donc $p(x) = 0$ et $p(x) - x = 0$.

Donc $x = 0$.

Soit $x \in E$, on écrit $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in Im(p) = \ker(p - id)}$.
Donc $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$.

21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs

Théorème 21.57

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

- p est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et
$$\forall f \in F, \forall g \in G, p(f + g) = f.$$
- Dans ce cas, $F = Im(p)$ et $G = \ker(p)$.
- Ainsi, un projecteur est une projection géométrique sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Existence justifiée avec $F = Im(p)$ et $G = \ker(p)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $x = f + g \in E$.

$$\begin{aligned} p^2(x) &= p \circ p(f + g) \\ &= p(f) \\ &= f \\ &= p(f + g) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$, donc p est un projecteur.

21.59 Diagonalisation d'une symétrie

Théorème 21.59

On suppose que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2. Soit s une symétrie de E. Alors :
$$E = \ker(s + id_E) \oplus \ker(s - id_E)$$

- Soit $x \in \ker(s - id) \cap \ker(s + id)$. Donc :
$$\begin{aligned} s(x) - x &= 0 \\ s(x) + x &= 0 \\ \text{donc } 2x &= 0 \\ \text{donc } x &= 0 \end{aligned}$$
- Pour $x \in E$, $x = \frac{1}{2}(\underbrace{x - s(x)}_{\in \ker(s+id)}) + \frac{1}{2}(\underbrace{x + s(x)}_{\in \ker(s-id)})$.

21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité

Propostion 21.63

Etant donné une base $(b_i)_{i\in I}$ de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I, u(b_i) = f_i$.

Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F.
Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i b_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini.
On pose $u(x) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i f_i$. On définit bien une application ca les λ_i sont uniques.
Montrons que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $(x,y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i b_i$ et $y = \sum\limits_{i\in I} \mu_i b_i$. Ainsi :

$$x + \alpha y = \sum_{i\in I} (\lambda_i + \alpha\mu_i) b_i$$

Par définition :

$$\begin{aligned} u(x+\alpha y) &= \sum_{i\in I}(\lambda_i + \alpha\mu_i) f_i \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \alpha \sum_{i\in I} \mu_i f_i \\ &= u(x) + \alpha u(y) \end{aligned}$$

L'existence est prouvée, et si $v \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$\forall i \in I, v(b_i) = f_i$$

Le raisonnement précédent impose que :

$$\forall x \in E, u(x) = v(x)$$

Soit :

$$u = v$$

21.64 Exemple

Exemple 21.64

1. Déterminer l'expression générale de l'application lin de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0) = (3,2) \quad \text{et} \quad f(0,1) = (2,1)$$

2. Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est de la forme $X \mapsto MX$ et décrire M à partir d'une base de $\mathbb{R}^p$.
3. Soit $(b_i)_{i\in I}$ de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I, u(b_i) = f_i$.

1. Pour tout (x,y).

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x(1,0) + y(0,1)) \\ &= xf(1,0) + yf(0,1) \\ &= x(3,2) + y(2,1) \\ &= (3x+2y, 2x+y) \end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Soit $(b_1, \dots, b_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!], f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j b_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j f(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{ij} x_j\right) e_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} m_{nj} x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base

Propostion 21.68

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. l'image de la famille libre de E par f est une famille libre de F
   Si de plus E admet au moins une base, elles sont aussi équivalentes à :
3. l'image de toute base de E par f est une famille libre de F
4. il existe une base de E dont l'image par f est une famille libre de F

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E.
On suppose $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$ avec $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini.
Donc :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) &= 0 \\ \text{donc } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i &= 0 \\ \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

On suppose f non injective. Donc $\ker(f) \neq \{0\}$.
Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$.
Or (x) est libre ($x \neq 0$) et $(f(x))$ est liée.

On suppose que E admet une base.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ RAF

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$
Soit $(b_i)_{i\in I}$ une base de E telle que $(f(b_i))_{i\in I}$ est libre.
Soit $x \in \ker f$. Donc $f(x) = 0$ et $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i b_i$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires à support fini.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f(b_i) \end{aligned}$$

Donc, car $(f(b_i))_{i\in I}$ est libre, on a :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Donc $x = 0$.
Donc f est injective.

21.69 Caractérisation de la surjectivité par l'image d'une base

Propostion 21.69

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Sont équivalentes :

1. f est surjective
2. l'image de toute famille génératrice de E par f est une famille génératrice de F
   Si de plus F admet au moins une base, les propriétés précédentes sont équivalentes à :
3. l'image de toute base de E par f est une famille génératrice de F
4. il existe une base de E dont l'image par f est une famille génératrice de F

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
On suppose f surjective. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.

$$\mathcal{F} = Im(f) = Vect(f(\mathcal{F}))$$

Donc $f(\mathcal{F})$ est génératrice.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ $\mathcal{F} = (x)_{x\in E}$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ RAF

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$
Soit B la base considérée.

$$Im(f) = Vect(f(B)) = F$$