Chapitre 20

Espace Vectoriels

20.2 Propriétés du 0, régularité

Propostion 20.2

Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. (-1).x = -x
4. si $x \neq 0_E$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1-1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Propostion 20.10

1. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. RAF.
2. Soit E un $\mathbb{K}-ev$ et F un ensemble quelconque.
   E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
   Le produit externe est défini par :
$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$
   Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, G un ensemble quelconque et $\varphi : E \to G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et un loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{et} \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
(x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y)+\varphi(z)) \\
&= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)+\varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
&= x+(y+z) \\
x+\varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)+0) = x \ (\varphi \text{ neutre}) \\
x+\varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
x+y=y+x &
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
\lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
&= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
&= (\lambda\mu).x \\
1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi\circ\varphi^{-1}(x) \\
&= x \\
(\mu+\lambda).x &= \varphi((\mu+\lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)+\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x))+\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \mu.x+\lambda.x
\end{aligned}$$

De même pour la dernière.