Chapitre 20

Espace Vectoriels

20.2 Propriétés du 0, régularité

Propostion 20.2

Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. (-1).x = -x
4. si $x \neq 0_E$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1-1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Propostion 20.10

1. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. RAF.
2. Soit E un $\mathbb{K}-ev$ et F un ensemble quelconque.
E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
Le produit externe est défini par :
$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$
Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, G un ensemble quelconque et $\varphi : E \to G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et un loi externe par

$$\forall (x,y,\lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{et} \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
(x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y)+\varphi(z)) \\
&= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)+\varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
&= x+(y+z) \\
x+\varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)+0) = x \ (\varphi \text{ neutre}) \\
x+\varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
x+y &= y+x
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
\lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
&= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
&= (\lambda\mu).x \\
1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi\circ\varphi^{-1}(x) \\
&= x \\
(\mu+\lambda).x &= \varphi((\mu+\lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)+\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x))+\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
&= \mu.x+\lambda.x
\end{aligned}$$

De même pour la dernière.

20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 20.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$;
2. $0 \in F$;
3. F est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

1. Oui.
2. F est un sous-groupe de E donc $0_E \in F$.
3. Pour tout $(x,y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$ et $y \in F$. Donc $\lambda x + y \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

D'après (3) avec :

— $y = 0$: $\times$ est LCE.

— $\lambda = 1$: $+$ est LCI.

$0 \in F$ et $\lambda = -1$, F est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

20.22 Propostion 20.22

Propostion 20.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, D_1 et D_2 deux droites vectorielles. Alors soit $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, soit $D_1 = D_2$.

Par définition, $0_E \in D_1 \cap D_2$.
Supposons $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$ et fixons $x \in D_1 \cap D_2$ avec $x \neq 0_E$.

Soit $v \in D_1$. Par définition, on écrit $D_1 = \mathbb{K}x_1$ et $D_2 = \mathbb{K}x_2$.
On a donc $v = \alpha x_1$, $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.
Ainsi :

$$v = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_1^{-1}x = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc $D_1 \subset D_2$ et par symétrie, $\boxed{D_1 = D_2}$.

20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.27

Soit E une espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

— $\bigcap\limits_{i\in I} E_i \subset E$.
— $\forall i \in I, 0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap\limits_{i\in I} E_i$.
— Soit $(x, y) \in \left[\bigcap\limits_{i\in I} E_i\right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

Donc $\lambda x + y \in \bigcap\limits_{i\in I} E_i$.

20.34 Description de $Vect(X)$

Propostion 20.34

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et X un sous-ensemble de E. Alors $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

On note F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X.
F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X.
Par définition, $Vect(X) \subset F$.
Or $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel qui contient X. Il doit donc contenir les combinaisons linéaiers de X soit F.
Donc $\boxed{F = Vect(X)}$.

20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.36

Soit A et B deux ensembles. On a

1. $A \subset Vect(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $Vect(A) \subset Vect(B)$.
3. $A = Vect(A)$ si et seulement si A est un espace vectoriel.
4. $Vect(Vect(A)) = Vect(A)$.
5. $Vect(A \cup \{x\}) = Vect(A)$ si et seulement si $x \in Vect(A)$.

1. RAF
2. RAF (20.24)
3. Si $A = \underbrace{Vect(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$, alors A est un sous-espace vectoriel.
   Si A est un espace vectoriel, par minimalité, $A = Vect(A)$.

4. RAF (20.36.3)
5. On a toujours $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)(2\ 0.36.2)$ si $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$.
   Or $x \in Vect(A \cup \{x\})$.
   Donc $x \in Vect(A)$.
   Réciproquement, si $x \in Vect(A)$, d'après (20.34) :
   $$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$
   Si $u \in Vect(A \cup \{x\})$, alors :
   $$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1}(\mu_1 a'_1 + \ldots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.41

Soit X et Y deux sous-ensembles de E. Alors
$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :
$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :
$$\boxed{Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)}$$

20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.43

Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des sous-espaces vectoriels de E. Sont équivalentes :
1. $F = E_1 + \ldots + E_n$;
2. $F = (\ldots((E_1 + E_2) + E_3) + \ldots + E_{n-1}) + E_n$;
3. $F = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n | (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n\}$.

2. Associativité fournie par la définition.
3. (20.39) + (20.43.2)

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, $E = Vect((1,0,0))$ et $F = Vect((0,1,0),(0,0,1))$.
Soit $u \in E \cap F$.
$u = \alpha(1,0,0) = \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$.
Donc $(-\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dans $\mathbb{R}^4$ avec $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.
$E = Vect(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$
Soit $u \in E \cap F$.

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1+e_2+e_3) + \beta(e_1+e_2+e_3+e_4) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1+e_3) + \delta(2e_2+e_1-e_4) = (\gamma+\delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma-\delta = 0 \\ \alpha+\beta-2\delta = 0 \\ \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \beta+\delta = 0 \end{cases}$$
$$\text{donc } \begin{cases} \delta = 0 \ (L_1 - L_3) \\ \beta = 0 \ (L_4) \\ \alpha = 0 \ (L_2) \\ \gamma = 0 \ (L_2) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément x de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_n$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que la somme est directe.
Soit $x \in E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.
On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \ldots + x_n \\ &= x'_1 + \ldots + x'_n \\ \text{donc } \underbrace{x'_n - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in E_1} + \ldots + \underbrace{(x_{n-1} - x'_{n-1})}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x'_n &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

$\boxed{\Leftarrow}$
On remarque que $0 = 0 + \ldots 0$.
Soit $u \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1})$.
Donc :

$$\begin{aligned} u = e_n &= e_1 + \ldots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \ldots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n-1]\!], e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.

20.51 Famille libre

Propostion 20.51

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est **libre** si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires de $\mathbb{K}$, à support fini, $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
2. Pour tout $x \in Vect((x_i)_{i\in I})$ il existe une **unique** famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires de $\mathbb{K}$, à support fini, telle que $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$.

   Si de plus, $I = [\![1, n]\!]$, les points précédents sont équivalents aux points suivants :
3. Les x_i sont non nuls et la somme $\mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_n$ est directe.
4. La fonction $\varphi : \mathbb{K}^n \to E; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ est injective.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

On écrit, pour tout $x \in Vect((x_i)_{i\in I})$:

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$$
$$\text{donc } \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Comme (λ_i) et (μ_i) sont des familles de sclaires à support fini, $(\lambda_i - \mu_i)$ aussi et d'après (20.51.1) :

$$\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Soit $\sum\limits_{i\in I} = 0$ avec (λ_i) une famille de scalaires à support fini.

Comme :

$$0 = \sum_{i\in I} 0 x_i$$

Par unicité :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$\boxed{1, 2 \Rightarrow 3}$

Nécessairement, les x_i sont tous non nuls (sinon, on écrit $1 \times x_1 = 0$).

Soit $x \in (\mathbb{K} + \ldots + \mathbb{K}x_{n-1}) \cap \mathbb{K}x_n$.

On écrit :

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = \alpha_n x_n$$
$$\text{donc } \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n x_n = 0$$

Par hypothèse :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i = 0$$

On poursuit le travail par récurrence pour montrer que la somme est directe.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

RAF : (20.47)

$\boxed{4 \Rightarrow 1, 2}$

RAF : définition de l'injectivité pour 2.

20.52 Exemple

Exemple 20.54

1. Montrer que la famille $((1,1),(0,1))$ est libre.
2. Montrer que la famille $((1,2,1),(1,0,1),(0,1,-1))$ est libre.
3. Montrer que la famille $((1,2,1),(1,0,1),(1,6,1))$ est liée.

1. On suppose $\alpha(1,1)+\beta(0,1)=0$.
   Donc :
$$\begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$$
$$\text{donc } \alpha=\beta=0$$
   La famille est libre.
2. Par équivalence. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a :
$$\begin{aligned}
&a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(0,1,-1)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a+b &=0\\ 2a+c &=0\\ a+b-c &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}b+a &=0\\ 2a+c &=0\\ c &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow a=b=c=0
\end{aligned}$$
   La famille est libre.
3. Avec les mêmes notations :
$$\begin{aligned}
&a(1,2,1)+b(1,0,1)+c(1,6,1)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c &=0\\ 2a+6c &=0\\ a+b+c &=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c &=0\\ a+3c &=0\end{cases}
\end{aligned}$$
   Le système admet des solutions non nulles (par exemple $(-3,2,1)$), donc la famille est liée.

20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies

Propostion 20.58

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

$\boxed{\Rightarrow}$
RAF : (20.57)

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille à support fini telle que :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 \tag{20.1}$$

On choisit $J \subset I$, fini, tel que :

$$\forall i \in I \backslash J, \lambda_i = 0$$
$$\text{donc } \sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$$

Or $(x_i)_{i \in J}$ est libre (finie), donc :

$$\forall i \in J, \lambda_i = 0$$
$$\text{donc } \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$

Propostion 20.60

Une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_0, \ldots, x_n)$ est libre.

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre, alors (20.58) ses sous-familles finies sont libres, en particulier celles sous la forme $(x_0, \ldots, x_n)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $(x_i)_{i \in J}$ avec J un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$.
Or pose $n = \max J$, donc $J \subset [\![0, n]\!]$.
Par hypothèse, $(x_0, \ldots, x_n)$ est libre.
Donc (20.57), $(x_i)_{i \in J}$ est libre.
D'après (20.58), $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.

20.61 Ajout d'un élément à une famille libre

Propostion 20.61

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E et $x_j \in E$ avec $j \notin I$. La famille $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ est libre si et seulement si $x_j \notin Vect((x_i)_{i \in I})$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $x_j \in Vect(x_i)_{i \in I}$, alors $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ est liée.
En effet, $x_j = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$ avec J fini.
Donc $\sum_{i \in J \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0$ avec $\lambda_j = -1$.
La famille $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$
On suppose que $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$ est liée.
On choisit une famille de scalaires à support fini $(\lambda_i)_{i \in I \cup \{j\}}$ telle que :

$$\sum_{i \in I \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_i) \neq (0)$$

Donc :

$$\lambda_j + x_j + \sum_{i \in I} = 0$$

Comme $(x_i)_{i \in I}$ est libre, $\lambda_j \neq 0$ et $x_j = -\sum_{i \in I} \lambda_i \lambda_j^{-1} x_i \in Vect((x_i)_{i \in I})$.

20.63 Généricité d'une famille libre maximale

Propostion 20.63

Une famille libre maximale est génératrice dans le sens de la définition ci après : tout élément de E est combinaison linéaire de vecteurs de la famille.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre maximale.
Soit $x \in E$. Alors $\mathcal{F} \cup \{x\}$ est liée.
Donc (20.61) :

$$x \in Vect(\mathcal{F})$$

20.64 Caractérisation des sommes directes par la liberté

Propostion 20.64

Soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces sous-espaces vectoriels non triviaux de E. Alors la somme $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ est directe si et seulement si tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments tous non nuls de $E_1 \times \dots \times E_n$ est une famille libre dans E.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_i \neq 0$.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

En particulier, $\lambda_i x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in E_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} E_i = \{0\}$. Donc $\lambda_n = 0$. On réitère le procédé pour trouver $\lambda_n = \dots = \lambda_1 = 0$.
Donc $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $x \in E_n \cap \sum E_i$. On écrit $x = x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$.
Donc :

$$x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n = 0$$

Par hypotèse, on doit avoir :

$$x_n = x_{n-1} = \dots = x_1 = 0$$

Donc $x = 0$ et $E_n \cap \left(\sum_{i=1}^{n-1} E_i\right) = \{0\}$.
On réitère le procédé pour montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.