

Chapitre 16

Arithmétique des polynômes

16 Arithmétique des polynômes	1
16.1 Division euclidienne	2
16.2 Proposition 16.7	2

16.1 Division euclidienne

Théorème 16.1

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$. Le polynôme Q est appelé **quotient** et R le **reste**.

Existence :

On raisonne par récurrence sur le degré de A .

- Pour $n = \deg A = 0$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$.
 - Si $\deg B > 0$, alors $(0, A)$ convient.
 - Si $\deg B = 0$, le couple $(B^{-1} \times A, 0)$ convient (comme B est constant et non nul), alors $B \in \mathbb{K}^*$ donc inversible).
- On suppose le résultat vrai pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$.
 Soit $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ avec $\deg A = n + 1$.
 On écrit $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$.
 - Si $\deg A < \deg B$, le couple $(0, A)$ convient.
 - Si $\deg A \geq \deg B$ et on note b le coefficient dominant de B :

$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$.

Donc :

$$A = [Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}] \times B + R$$

Unicité :

On suppose que $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$.

Donc :

$$\begin{aligned} B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\ \text{donc } \underbrace{\deg(B(Q - Q_1))}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg(R_1 - R) \\ &\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\ &< \deg B \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &< 0 \\ \text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\ \text{puis } R_1 - R &= 0 \end{aligned}$$

16.2 Proposition 16.7

Proposition 16.7

On a :

1. Soit A et P deux polynômes non nuls. Si $A|P$ et si $P|A$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \alpha A$. (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si $A|B$ et si $B|C$, alors $A|C$. La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $A|A$. La relation de divisibilité est réflexive.

1. $P \neq 0, A \neq 0$. Si $A|P$ et $P|A$, alors (16.6.2) :

$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$

Donc :

$$\deg P = \deg A$$

Or $A|P$, alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \text{ (}\mathbb{K} \text{ est intègre)}$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS

3. RAS