Chapitre 28

Matrice d'une application linéaire

28 Matrice d'une application linéaire **1**
28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs 2
28.6 Exemple 2
28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyeu de leur lignes et colonnes 3
28.13Exemple 3
28.15Exemple 3
28.18Exemple 3
28.19Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire 4
28.20Exemple 5
28.21Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires 6
28.22Exemple 7
28.23CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde 8
28.28Exemple 8
28.29Exemple 9
28.33Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice 9
28.35Invariance du rang par une matrice inversible 9
28.37Exemple 10
28.38Matrice de changement d'une base à une autre 10
28.41Exemple 11
28.42Changement de bases pour une application linéaire 11
28.47Exemple fondamental 11
28.48Invariance du rang par transposition 12
28.52Rang d'une matrice extraite 12
28.57Invariance du rang et de la trace par similitude 12
28.60Exemple 13

28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

Théorème 28.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \neq 0$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E.
On note $M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i$$

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre (car $|\mathcal{F}| = \dim E$), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0$$

Or pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[\forall i \in [\![1, n]\!], \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\
&\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M
\end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si $\ker M = \{0\}$, si et seulement si M est inversible.

28.6 Exemple

Exemple 28.6

Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
$Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc libre.

28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyeu de leur lignes et colonnes

Théorème 28.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est inversible
- la famille des colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$ (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A, $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
A est inersible si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (28.8).
Si et seulement si $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (28.5).
Si et seulement si ${}^tA$ est inversible (11.42).
Si et seulement si $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

28.13 Exemple

Exemple 28.13

On note T l'endomorphisme $P \mapsto X^2P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_3}(T)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\
T(1) &= 1 \\
T(X) &= 1 \\
T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\
T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\
Mat_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

28.15 Exemple

Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 ; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$

28.18 Exemple

Exemple 28.18

On note φ l'application canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_2'$ la base $((0,1),(1,0))$ de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_3'$ la base $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}_2', \mathcal{B}_3'}(\varphi)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y)$.
$\varphi(1, 0) = (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .)$
$\varphi(0, 1) = (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)$

$$Mat_{\mathcal{B}_2', \mathcal{B}_3'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 28.19

Soit $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie p et n, e une base de E et f une base de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Alors :

$$\underbrace{Mat_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{Mat_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{Mat_e(x)}_{(p,1)}$$

On note $e = (e_1, \dots, e_p)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $Mat_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
Soit $x \in E$. On écrit $m = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j$. Par conséquent :

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [M \times Mat_e(x)]_i f_i \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Mat_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times Mat_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times Mat_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times Mat_e(x) \end{aligned}$$

28.20 Exemple

Exemple 28.20

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Montrer que $Im(f) = Vect(3, 2X^2 + X)$ et $\ker f = Vect(X^2 - 2X)$.

On a :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]; aX^2 + bX + c \mapsto (4a + 2b)X^2 + (2a + b)X + (6a + 3b + 3c)$$
$$\hat{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (c, b, a) \mapsto (3c + 3b + 6a, b + 2a, 2b + 4a)$$

— Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3y + 6z \\ y + 2z \\ 2y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ker M = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ker f &= Vect(X^2 - 2X) \\ &= Vect(-2X + 1) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} Im(M) &= Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$Im(f) = Vect(1 + X + 2X^2)$$

28.21 Lien entre produit matriciel et composition d'applications linéaires

Théorème 28.21

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles p et n respectivement. L'application $u : Mat_{e,f}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions non nulles et de bases respectives e, f et g. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) \times Mat_{e,f}(u)$$
3. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimensions finies et non nulles. Soit e une base de E, f une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est un isomorphisme entre E et F si et seulement si $Mat_{e,f}(u)$ est inversible. Dans ce cas on a :
$$Mat_{f,e}(u^{-1}) = Mat_{e,f}(u)^{-1}$$

1. Le théorème de rigidité (21.63) justifie que l'application $u \mapsto Mat_{e,f}(u)$ est bijective.
Par construction, elle est bien linéaire.

2. Soit $x \in F$.
$$\begin{aligned} Mat_{e,g}(v \circ u) Mat_e(x) &= Mat_g(v \circ u(x)) \\ &= Mat_g(v(u(x))) \\ &= Mat_{f,g}(v) Mat_f(u(x)) \\ &= Mat_{f,g}(v) Mat_{e,f}(u) Mat_e(x) \end{aligned}$$
Nécessairement :
$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) Mat_{e,f}(u)$$

3.
$$\begin{aligned} Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(u^{-1}) &= Mat_f(u \circ u^{-1}) \\ &= Mat_f(id) \end{aligned}$$
Donc :
$$Mat_{e,f}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$$
On note $P = M^{-1}$. D'après le premier point, on note σ l'unique élément de $\mathcal{L}(F,E)$ tel que $Mat_{f,e}(\sigma) = P$.
On a :
$$Id = MP = Mat_{e,f}(u) \times Mat_{f,e}(v) = Mat_f(u \circ v)$$
Donc :
$$u \circ v = id$$
Donc (E est de dimension finie) :
$$u^{-1} = v$$

28.22 Exemple

Exemple 28.22

Montrer que l'endomorphisme ω de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la symétrie par rapport à $Vect(X^3 + X^2 + X, X^2 + 1)$ parallèlement à $Vect(X^3 + X + 1, X^3 + X^2)$.

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\Omega - I_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + c - d \\ -a + c - d \\ 2b - 2d \\ -a + 2b + c - 3d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Omega - I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d & = 0 \\ b - d & = 0 \\ -a + 2b + c - 3d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - c + d & = 0 \\ b - d & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a & = c - d \\ b & = d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\ker(\Omega - I_4) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Donc $\ker(\omega - id) = Vect(1 + X^2, -1 + X + X^3)$.

$$(\Omega + I_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c - d \\ -a + 2b + c - d \\ 2b + 2c - 2d \\ -a + 2b + c - d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$(\Omega + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+c-d &= 0 \\ b+c-d &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = -c+d \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -c+d \\ -c+d \\ c \\ d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\ker(\omega + id) = Vect(1 + X + X^3, X^2 + X^3)$.

28.23 CNS d'inversibilité d'une matrice de Vandermonde

Théorème 28.23

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **matrice de Vandermonde de** $x_1, \dots, x_n$ la matrice $(x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$. Cette matrice est inversible si et seulement si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont ditincts deux à deux.

$$M = (x_i^{j-1})_{1\leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On définit $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n ; P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$.
On suppose que tous les x_i sont distincts deux à deux.
Si $P \in \ker \varphi$, P possède (au moins) n racines distinctes, or $\deg P \leq n-1$ donc par rigidité, $P = 0$.
Donc φ est injective ($\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}^n)$).
Donc φ est un isomorphisme ($\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n$).
Or, en notant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$:

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = M$$

Donc M est inversible (28.21).
Si $x_1 = x_j$ avec $x \neq j$, M possède deux lignes identiques, donc $M \notin GL_n(\mathbb{K})$ (28.9).

28.28 Exemple

Exemple 28.28

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est donc nilpotent d'indice 2.

Montrer que dans une certaine base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— D'après le théroème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker u}_{\geq 1} + \underbrace{\operatorname{rg} u}_{\geq 1} = 3$$

Comme $u^2 = 0$, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
On a nécessairement $\operatorname{rg} u = 1$ et $\dim \ker u = 2$.

— Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. Or $u(x) \in \ker u$ et $\dim \ker u = 2$, on complète donc $(u(x), y)$ en une base de $\ker u$.
— La famille $(y, x, u(x))$ est libre :

$$\begin{aligned} ay + bx + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } bu(x) &= 0 \\ \text{donc } b &= 0 \\ \text{donc } ay + cu(x) &= 0 \\ \text{donc } a = c &= 0 \text{ car } (y, u(x)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$(y, x, u(x))$ est de cardinal $3 = \dim E$, donc est une base de E et :

$$\mathrm{Mat}_{(u(x),y,x)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

28.29 Exemple

Exemple 28.29

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies non nulles et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r.

Montrer qu'il existe une base e de E et une base f de F telles que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\mathrm{rg}\, u = r$, $\dim \ker u = p - r$ ($p = \dim E$).
Soit S un supplémentaire de $\ker u$ dans E.
$\dim S = r$. Soit $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base adaptée à $E = S \oplus \ker u$.
$(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, donc libre dans F, que l'on complète en une base f de F.
Par construction :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

28.33 Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

Propostion 28.33

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. Soit e et f deux bases quelconques, respectivement de E et F. Alors :

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$$

On note $e = (e_i)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg} \dim \mathrm{Vect}((u(e_i))) &= \dim \mathrm{Vect}((C_i)) \\ &= \mathrm{rg}\, \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \end{aligned}$$

28.35 Invariance du rang par une matrice inversible

Propostion 28.35

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors :

$$\mathrm{rg}(PMR) = \mathrm{rg}\, M$$

Soit $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$ les applications canoniquement associées à M, P, R.
$\hat{P}, \hat{R}$ sont des isomorphismes ($P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$). Ainsi :

$$\mathrm{rg}(PMR) = \mathrm{rg}(\hat{P} \circ \hat{M} \circ \hat{R}) = \mathrm{rg}(\hat{M}) = \mathrm{rg}\, M$$

28.37 Exemple

Exemple 28.37

Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le rang de cette matrice est 2 donc $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$.

28.38 Matrice de changement d'une base à une autre

Théorème 28.38

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et e, f et g trois bases de E. On appelle **matrice de passage de e à f** la matrice :

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{Mat}_{f,e}(id_E$$

Cette matrice est souvent notée P_e^f (ou quelques fois $P_{e \to f}$). De plus :

1. P_e^f est inversible, d'inverse P_f^e.
2. $P_e^f \times P_f^g = P_e^g$.

1. On a $P_e^f = \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{id})$.
   Donc (id est inversible) :

$$(P_e^f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{e,f}(\mathrm{id}^{-1}) = \mathrm{Mat}_{e,f}(\mathrm{id}) = P_f^e$$

2.

$$\begin{aligned} P_e^f \times P_f^g &= \mathrm{Mat}_{f,e}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{g,f}(\mathrm{id}) \\ &= \mathrm{Mat}_{g,e}(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) \ (28.21) \\ &= \mathrm{Mat}_{g,e}(\mathrm{id}) \\ &= P_e^g \end{aligned}$$

28.41 Exemple

Exemple 28.41

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Notons $e = (i, j)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et posons

$$\begin{cases} u_\theta = \cos(\theta)i + \sin(\theta)j \\ v_\theta = -\sin(\theta)i + \cos(\theta)j \end{cases}$$

La matrice de la famille (u_θ, v_θ) dans la base (i, j) est :

$$\mathrm{Mat}_{(i,j)}(u_\theta, v_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de cette matrice vaut 1 (et donc non nul), alors $b_\theta = (u_\theta, v_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les coordonnées de u dans la nouvelle base b_θ.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_e((x, y))$.
On note $X' = \mathrm{Mat}_{(u_\theta, v_\theta)}((x, y))$.
D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X &= PX' \\ \text{donc } X' &= P^{-1}X \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta x & \sin\theta y \\ -\sin\theta x & \cos\theta y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $(x, y) = (\cos\theta x + \sin\theta y)u_\theta + (-\sin\theta x + \cos\theta y)v_\theta$.

28.42 Changement de bases pour une application linéaire

Théorème 28.42

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies non nulles, e et e' deux bases de E, f et f' deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\mathrm{Mat_{e',f'}(u)} = P^f_{f'} \,\mathrm{Mat_{e,f}(u)}\, P^{e'}_e$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{e',f'}(u) &= \mathrm{Mat}_{e',f'}(\mathrm{id}_F \circ u \circ \mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{Mat}_{f,f'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \times \mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{id}) \\ &= P^f_{f'} \,\mathrm{Mat}_{e,f}(u) P^{e'}_e \end{aligned}$$

28.47 Exemple fondamental

Propostion 28.47

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Cela revient à dire que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à J_r.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à M.

Donc $\operatorname{rg} u = r$.
D'après (28.29), on choisit une base e de $\mathbb{K}^p$ et f de $\mathbb{K}^n$ telles que :

$$\operatorname{Mat}_{e,f}(u) = J_r$$

D'après (28.44), M et $\operatorname{Mat}_{e,f}(u)$ sont équivalentes, soit :

$$M \sim J_r$$

28.48 Invariance du rang par transposition

Théorème 28.48

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{rg} {}^t A = \operatorname{rg} A$.

En effet car ${}^t(J_r) = J_r$.
Ainsi, $A \sim J_r$.
Alors $A = Q^{-1} J_r P$.
Et ${}^t A = tP J_r {}^t Q^{-1}$.
Donc ${}^t A \sim J_r$.
Donc $\operatorname{rg} {}^t A = \operatorname{rg} A$.

28.52 Rang d'une matrice extraite

Propostion 28.52

Pour toute matrice B extraite de A, on a $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} A$. Le rang de A est la taille maximale des matrices inversibles que l'on peut extraire de A.

Extraire une matrice B de A revient à supprimer des colonnes et des lignes de A.
On note C la matrice intermédiaire en supprimant les colonnes de A.
Ainsi, B s'obtient à partir de C en supprimant les lignes de C.
Par définition (28.30), $\operatorname{rg} C \leq \operatorname{rg} A$.
Puis (28.49), $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} C$.
On note r le rang de A.
D'après (28.30), il existe r colonnes de A linéairement indépendantes.
Soit C la matrice extraite de A, constituée de ses vecteurs colonnes.
En particulier, $\operatorname{rg} C = r$.
D'après (28.49), il existe r vecteurs lignes de C, libres.
On note B la matrice (extraite de C) constituée de ces vecteurs lignes.
On a $\operatorname{rg} B = r$ et $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.
Donc $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ (28.9).

28.57 Invariance du rang et de la trace par similitude

Propostion 28.57

Deux matrices semblables ont même rang et même trace.

— Deux matrices semblables sont équivalentes (28.54) et ont le même rang (28.47).
— Si $B = P^{-1}AP$, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &= \operatorname{tr}(P^{-1}AP) \\ &= \operatorname{tr}(APP^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

La trace est et le rang sont des invariants de similitude.

28.60 Exemple

Exemple 28.60

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= 0 \\ u(e_2) &= e_1 \\ u(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

En posant $f = (e_3, e_1, e_2)$ on obtient $B = \mathrm{Mat}_f(u)$.
En posant $g = (\frac{1}{2}e_1, 2e_2, e_3)$ on obtient $C = \mathrm{Mat}_g(u)$.
D'après l'exemple fondamental, A, B et C sont semblables.

28.63 Opération sur la trace

Propostion 28.63

La trace est linéaire. De plus, pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

— Linéarité : RAF
— Pseudo-commutativité : RAF