15.2 Exercice

$$0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \times \frac{1}{x}$$
$$\text{donc } 0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

1. Quand $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, on remarque que $\lim_x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq \lim_x \frac{1}{x}$.
   Ainsi, par théorème d'opérations on a :

$$\lim_{x \to 0} x \times \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \lim_{x \to 0} x \times \frac{1}{x}$$

   Donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1}$$

2. Quand $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
   Donc :

$$\forall x > 1, x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

   Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0}$$