Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

4 Généralités sur les fonctions **1**
4.21 Exemple 2
4.23 Remarque 2
4.27 Axe de symétrie 2
4.28 Centre de symétrie 2
4.51 Exemple 2
4.52 Théorème de la bijection dérivable 2
4.61 Primitives d'une fonction sur un intervalle 3
4.62 Exemple 3
4.65 Remarque 3
4.66 Exemple 4
4.69 Intégration par partie 4
4.70 Changement de variable 4
4.72 Exemple 4
4.74 Méthode 5
4.75 Exemple 5

4.21 Exemple

On suppose que $f \geq g$. Ainsi :

$$|f-g| = f-g \Leftrightarrow \frac{f+g+|f-g|}{2} = f$$

4.23 Remarque

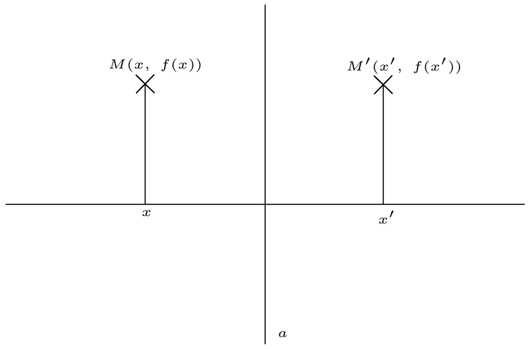
Soit $a \in \mathbb{Q}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
— Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x+a \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+a) = 1 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.
— Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x+a \notin \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+a) = 0 = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

4.27 Axe de symétrie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit $(x, x') \in I^2$.
M et M' sont symétriques par rapport $x = a$

ssi. $\begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ f(x) = f(x') \end{cases}$

ssi. $\begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x) = f(x') \end{cases}$



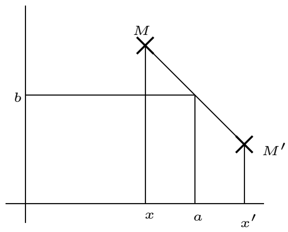
4.28 Centre de symétrie

On reprend les mêmes notations qu'à la (4.27).

M et M' sont symétriques par rapport à $A(a, b)$

ssi. $\begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ b = \frac{f(x)+f(x')}{2} \end{cases}$

ssi. $\begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x') = 2b - f(x) \end{cases}$



4.51 Exemple

1. $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}$
2. $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
3. $f'(x) = -3\frac{e^x(x-1)}{x^2} \sin\left(\frac{e^x}{x}\right) \cos^2\left(\frac{e^x}{x}\right)$

4.52 Théorème de la bijection dérivable

On suppose la dérivabilité de f^{-1}. Par définition :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_I$$

D'après la proposition (4.48.4), on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})' \circ f' \times f^{-1} &= (f \circ f^{-1})' \\ &= \mathrm{Id}_I' \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme f ne s'annule pas sur I, on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

4.61 Primitives d'une fonction sur un intervalle

— Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in I, (F-G)'(x) &= F'(x) - G'(x)\\ &= f(x) - f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme I est un intervalle, $F - G$ est constante (4.53).
Réciproquement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F + a$ est aussi une primitive de f sur I.

— Soit G une primitive de f sur I. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Or pour $F = G + a - G(x_0)$, F est une primitve de f sur I et $F(x) = a$.
L'unicité est donnée par le point précédent.

4.62 Exemple

1. Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= -\frac{-\sin x}{\cos x}\end{aligned}$$

La primitive de tan sur I est : $x \mapsto -\ln|\cos x| = \ln \cos x$.

2. Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\forall x \in I, \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$$

Une primitive de $\tan^2$ sur I est : $x \mapsto \tan x - x$.

3. Sur $I = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, x\sqrt{1+x^2} &= x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$.

4. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x > 0, \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln^2 x$.

4.65 Remarque

$G : y \mapsto yg(y) - F(g(y)) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}G'(y) &= g(y) + yg'(y) - g'(y)f(g(y))\\ &= g(y) + \cancel{yg'(y)} - \cancel{g'(y)y}\\ &= g(y)\end{aligned}$$

4.66 Exemple

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{1} \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \right| &\leq \int_{-1}^{1} \frac{|t^n|}{1+t^2}\,dt && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_{-1}^{1} |t|^n\,dt && (\forall t, \frac{|t|^n}{1+t^2} \leq |t|^n) \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{0} t^n\,dt + \int_{0}^{1} t^n\,dt && \text{(Relation de Chasles)} \\
&= (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{0}^{1} \\
&= -\frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{n+1}
\end{aligned}
$$

4.69 Intégration par partie

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt &= \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\,dt \\
&= \int_a^b (fg)'(t)\,dt \\
&= [f(t)g(t)]_a^b
\end{aligned}
$$

4.70 Changement de variable

Comme f est une fonction continue sur $[a,b]$, on choisit une primitive F de f sur $[a,b]$. (Théorème fondamental du calcul in
Ainsi :

$$
\begin{aligned}
\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt &= [F(t)]_{u(a)}^{u(b)} \\
&= F \circ u(b) - F \circ u(a)
\end{aligned}
$$

Or :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt &= \int_a^b F'(u(t)) \times u'(t)\,du(t) \\
&= [F \circ u(t)]_a^b
\end{aligned}
$$

4.72 Exemple

Si $x = \sin t$, alors $dx = \cos t\,dt$.
Pour $t = 0$, $x = \sin 0 = 0$.
Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Or $t \mapsto \sin t \in \mathcal{C}^1(\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R})$.

D'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

4.74 Méthode

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a;b\}$, trouver c et d tel que $\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha x+\beta}{(x-b)} &= c + \frac{d(x-a)}{(x-b)} && \text{(On multiplie par } (x-a)\text{)} \\
c &= \frac{\alpha a+\beta}{a-b} && (x=a) \\
d &= \frac{\alpha b+\beta}{b-a} && (x=b)
\end{aligned}$$

4.75 Exemple

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{4}{5(x-3)}$$

Une primitive de f sur $]-1;3[$ est : $x \mapsto \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{5}{4}\ln|x-3| = \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{5}{4}\ln(x-3)$