Programme de colle : semaine 13

I Suites numériques

I.1 Questions de cours

Enoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 14.41

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure (resp. inférieure) de A si et seulement si M majore (resp. minore) A et s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $M = \sup A$. Donc M majore A.
On rappelle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, M - \epsilon < a$$

Donc :

$$\forall n \in N, \exists a \in A, M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M \text{ (}M\text{ est un majorant)}$$

D'après la suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ étant ainsi définie, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
On choisit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M \text{ (majorant de } A\text{)}$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $a_n \in A$ tel que :

$$a_n \in]M - \epsilon, M + \epsilon[$$

Donc $M - \epsilon$ ne majore pas A.
Donc :

$$\boxed{M = \sup A}$$

Enoncer et démontrer le théorème de la limite monotone

Théorème 14.50

Si u est une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors u converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ (resp. vers $\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$).
Si u est une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors u tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

— On suppose u croissante et majorée.
L'ensemble $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré. Cet ensemble possède une borne supérieure notée l (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$).
Soit $\epsilon >$. Comme $l - \epsilon < u_n$ ne majore pas A, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \epsilon < u_n$.
Or (u_n) est croissante donc :

$$\forall n \geq N, l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

Donc :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$$

— On suppose u croissante et non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_N \geq A \text{ (}u\text{ non majorée)}$$

Donc :

$$\forall n \geq N, A \leq u_N \leq u_n \text{ (}u\text{ croissante)}$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Démontrer que deux suites adjacentes convergent vers la même limite

Théorème 14.55

Deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.
Soit $w = v - u$. Par opération, w est décroissante.
Par hypothèse :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $w \leq 0$, soit $u \leq v$.
La suite u est donc majorée par v_0, et croissante donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Pour les mêmes raisons, v converge.
Or, par théorème d'opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

II Exercices types

Exercice 1

Déterminer l'expression explicite de la suite de Fibonnaci, définie par

$$\begin{cases} \phi_0 = 0 \text{ et } \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}$$

Exercice 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Etudier $\lim_{n \to +\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leq b$. Etudier $\lim_{n \to +\infty} u_{n^2b^2+2an}$.
3. Montrer que tout élément de $[0, 1]$ est la limite d'une certaine suite extraite de (u_n).

Exercice 3

1. Montrer que $[3, +\infty[$ est stable par $x \mapsto \frac{2x^2-3}{x+2}$. On note alors (x_n) la suite définie par $x_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.
2. (a) Etudier la monotonie de (x_n).
   (b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} x_n$.