Chapitre 21

Applications linéaires

21.4 Exemple

Exemple 21.4.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 3y$.

Soit $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x,y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Propostion 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$ est un estpace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

— $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
— $\overline{0}\mathcal{L}(E, F)$
— Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha\lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$.

21.10 Composition de deux AL

Propostion 21.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Soit (x, y) $\in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

21.13 Bilinéarité de la composition

Propostion 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis, E, F et G étant des $\mathbb{K}$-ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.

D'après la remarque (21.11), Ψ est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F), \forall (v,v') \in \mathcal{L}(F,G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v+\lambda v') = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u,v')$$

Soit $(u,u') \in \mathcal{L}(E,F)^2, v \in \mathcal{L}(F,G), \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u+\lambda u', v)(x) &= v \circ (u+\lambda u')(x) \\ &= v(u(x) + \lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u,v)(x) + \lambda \Psi(u',v)(x)\end{aligned}$$

Donc $\Psi(u+\lambda u', v) = \Psi(u,v) + \lambda \Psi(u',v)$.

21.16 Structure des images directes et réciproques

Propostion 21.16

1. Soit E' un sev de E. Alors $f(E')$ est un sev de F.
2. Soit F' un sev de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E.

1. — $f(E') \subset F$
   — $0 = f(0) \in f(E')$
   — Soit $(x,y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $x = f(\alpha), y = f(\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in E'^2$.

$$\begin{aligned}x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda \beta) \\ &\in f(E')\end{aligned}$$

2. — $f^{-1}(F') \subset E$
   — $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$
   — Soit $(x,y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$

$$\text{donc } x + \lambda y \in f^{-1}(F')$$

21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

Propostion 21.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_i)_{i\in I})$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i\in I})$$

— Pour tout $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$.
Comme $Im(f)$ est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i\in I}) \subset Im(f)$$

— Soit $a \in Im(f)$. On choisit $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
Comme $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on peut écrit $x = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est à spport fini.

$$\begin{aligned}a &= f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i\in I})\end{aligned}$$

21.23 Réciproque d'un isomophisme

Théorème 12.23

Soit f un isomorphisme de E vers F. Alors f^{-1} est une application linéaire, donc un isomophisme de F vers E.

On pose $g = f^{-1}$. Soit $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(F, E)$.