

# Chapitre 22

## Espaces de dimension finie

<b>22 Espaces de dimension finie</b>	<b>1</b>
22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants . . . . .	2
22.5 Algorithme de la base incomplète . . . . .	2
22.8 Théorème de la base incomplète . . . . .	2
22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres . . . . .	3

## 22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

### Proposition 22.3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie engendré par  $n$  éléments. Alors toute partie libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.

Soit  $G$  une famille génératrice de  $E$  avec  $G = (g_1, \dots, g_n)$ . Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ .

Supposons par l'absurde que  $|\mathcal{L}| > n$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

$$P(k) : "E \text{ est engendré par } n - k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}"$$

Pour  $k = 0$ , la famille convient.

On suppose que pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $E = \text{Vect}(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in \mathcal{L}})$

Comme  $l_{k+1} \in E$ , on écrit  $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$ .

Comme  $\mathcal{L}$  est libre,  $l_{k+1} \notin \text{Vect}(l_1, \dots, l_k)$ .

Donc il existe  $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$ ,  $\alpha_i \neq 0$  et quitte à renommer les  $g_i$ , on peut supposer  $\alpha_{n-k} \neq 0$  et ainsi :

$$g_{n-k} \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence,  $P(k)$  est vraie pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , en particulier,  $P(n)$  est vraie.

$(l_1, \dots, l_n)$  est une base de  $E$ . Or  $l_{n+1} \in E$  et  $(l_1, \dots, l_{n+1})$  libre. Absurde.

## 22.5 Algorithme de la base incomplète

### Théorème 22.5

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  une partie génératrice de  $E$  dont les  $p$  premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions,  $E$  possède une base constituée des vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  et de certains vecteurs  $x_{p+1}, \dots, x_n$ .

On utilise l'algorithme suivant :

On initialise  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ . Pour tout  $k \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$  :

- Si  $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on laisse  $\mathcal{F}$  invariant.
- Si  $x_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$ , on remplace  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$ .

L'algorithme s'arrête en temps fini.

La famille  $\mathcal{F}$  obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc  $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$ . Donc  $\mathcal{F}$  est une base.

## 22.8 Théorème de la base incomplète

### Théorème 22.8

Soit  $E \neq \{0\}$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base finie de  $E$ .
2. De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base finie de  $E$ .

En particulier,  $E$  possède une base finie.

Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie.

1. Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à  $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$  qui fournit une base  $B$  de  $E$  contenant  $\mathcal{L}$ .

2. Comme  $\mathcal{G}$  est génératrice, on fixe  $x \neq 0 \in \mathcal{G}$  comme premier vecteur de  $\mathcal{G}$  et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.  
La base obtenue est bien constituée de vecteurs de  $\mathcal{G}$ .

## Remarque

### Remarque

Si  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

## 22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

### Corollaire 22.11

Soit  $E$  un espace vectoriel. Alors  $E$  est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de  $E$  est de cardinal fini.



On suppose  $E$  de dimension finie. Donc  $E$  possède une famille génératrice à  $n$  vecteurs.  
Donc les familles libres de  $E$  ont un cardinal inférieur à  $n$ .  
Elles sont finies.



Par contraposée, on suppose  $E$  de dimension infinie.  
Soit  $x \in E$  avec  $x \neq 0$ .  
On pose  $x_1 = x$ . Comme  $E$  est de dimension infinie, on choisit  $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1)$ .  
On poursuit les raisonnements par récurrence pour obtenir une famille libre  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## 22.12 Théorème de la dimension

### Théorème 22.12

Soit  $E \neq \{0\}$  un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  sont finies et sont de même cardinal.

Soit  $B$  et  $B'$  deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$