Chapitre 23

Sous-espaces affines

23.1 Sous-espace affine

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **sous-espace affine de** E toute partie $\mathcal{F}$ de E de la forme :

$$\mathcal{F} = x + F = \{f + x \mid f \in F\}$$

où F est un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E.

- Le sous-espace vectoriel F associé au sous-espace affine $\mathcal{F}$ est unique. On l'appelle **direction de** $\mathcal{F}$ et ses éléments sont appelés les **vecteurs directeurs de** $\mathcal{F}$.

On suppose que $\mathcal{F} = x_1 + F_1 = x_2 + F_2$.
Soit $y \in F_1$.
On a $y + x_1 \in \mathcal{F}$ donc $y + x_1 = x_2 + y_2$ avec $y_2 \in F_2$.
Or $x_1 \in \mathcal{F}$ donc $x_1 = x_2 + g_2$ avec $g_2 \in F_2$.
Donc :

$$\begin{aligned} y &= x_2 - x_1 + y_2 \\ &= y_2 - g_2 \\ &\in F_2 \end{aligned}$$

avec $F_1 \subset F_2$.
Par symétrie :

$$F_1 = F_2$$

23.8 Caractérisation des sous-espaces affines par leur direction et leur point

Théorème 23.8

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction F et $A \in \mathcal{F}$, alors :

$$\mathcal{F} = A + F$$

$\mathcal{F} = x + F$. Soit $A \in \mathcal{F}$.
Donc $A = x + f, f \in F$.
Donc $A - x \in F$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= x + F \\ &= (x - A) + A + F \\ &= A + F \end{aligned}$$

23.11 Fibre d'une application linéaire

Théorème 23.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$. Alors $u^{-1}(\{y\})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E et de direction $\ker u$.

On suppose que $u^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Fixons $x_0 \in u^{-1}(\{y\})$.

Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} x \in u^{-1}(\{y\}) &\Leftrightarrow u(x) = y \\ &\Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Leftrightarrow x - x_0 \in \ker u \\ &\Leftrightarrow x \in x_0 + \ker u \end{aligned}$$

Donc :

$$u^{-1}(\{y\}) = x_0 + \ker u$$

23.13 Exemple

Exemple 23.13

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire non homogène de degré 1 ou 2.
- L'ensemble des polynômes interpolateurs en un certain nombre de points.
- Equations arithmético-géométrique.

- $\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), ay' + b = f\} = u^{-1}(\{f\})$ où $u : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y \mapsto ay' + by$.
- Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconques deux à deux distincts. $\{P \in \mathbb{R}[X], \forall i \in [\![1, n]\!], P(a_i) = b_i\} = u^{-1}(\{(b_1, \ldots, b_n)\})$ où $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^n; P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$.
- $\{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \forall n \geq 0, u_{n+1} = au_n + b\} = u^{-1}(\{(b)_{n\geq 0}\})$ où $u : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}; (u_n) \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\geq 0}$.