

# Chapitre 20

## Espace Vectoriels

<b>20 Espace Vectoriels</b>	<b>1</b>
20.2 Propriétés du 0, régularité . . . . .	2
20.10 Espace vectoriel de référence . . . . .	2
20.11 Transfert de structure . . . . .	2
20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels . . . . .	3
20.22 Proposition 20.22 . . . . .	3
20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	4
20.34 Description de $Vect(X)$ . . . . .	4
20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés . . . . .	4
20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés . . . . .	5
20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels . . . . .	5
20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe . . . . .	6
20.51 Famille libre . . . . .	7
20.52 Exemple . . . . .	8
20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies . . . . .	8
20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$ . . . . .	9
20.61 Ajout d'un élément à une famille libre . . . . .	9
20.63 Généricité d'une famille libre maximale . . . . .	10

## 20.2 Propriétés du 0, régularité

### Proposition 20.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Pour tout  $x \in E$  :

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda.0_E = 0_E$
3.  $(-1).x = -x$
4. si  $x \neq 0_E$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si  $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$ . Donc  $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$ .
2. RAS.
3.  $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ .
4. Par l'absurde, si  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ , de  $\lambda x = 0_E$  on tire  $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$ , soit  $x = 0_E$ . Absurde.
5. Idem.

## 20.10 Espace vectoriel de référence

### Proposition 20.10

1.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions  $E^F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

1. RAF.
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  un ensemble quelconque.  
 $E^F$  est un groupe abélien (cf. chap 10).  
 Le produit externe est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$

Vérification facile.

## 20.11 Transfert de structure

### Lemme 20.11

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $G$  un ensemble quelconque et  $\varphi : E \rightarrow G$  une bijection. Alors en définissant sur  $G$  une loi interne et une loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{ et } \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit  $G$  d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
 (x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi(z)) \\
 &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
 &= x + (y+z) \\
 x + \varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + 0) = x \quad (\varphi \text{ neutre}) \\
 x + \varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
 x + y &= y + x
 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
 &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
 &= (\lambda\mu).x \\
 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\
 &= x \\
 (\mu + \lambda).x &= \varphi((\mu + \lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \mu.x + \lambda.x
 \end{aligned}$$

De même pour la dernière.

## 20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

### Théorème 20.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

1.  $F \subset E$ ;
2.  $0 \in F$ ;
3.  $F$  est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\Rightarrow$

1. Oui.
2.  $F$  est un sous-groupe de  $E$  donc  $0_E \in F$ .
3. Pour tout  $(x, y) \in F^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda x \in F$  et  $y \in F$ . Donc  $\lambda x + y \in F$ .

$\Leftarrow$

D'après (3) avec :

- $y = 0$  :  $\times$  est LCE.
- $\lambda = 1$  :  $+$  est LCI.

$0 \in F$  et  $\lambda = -1$ ,  $F$  est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

## 20.22 Propostion 20.22

### Propostion 20.22

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $D_1$  et  $D_2$  deux droites vectorielles. Alors soit  $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$ , soit  $D_1 = D_2$ .

Par définition,  $0_E \in D_1 \cap D_2$ .

Supposons  $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$  et fixons  $x \in D_1 \cap D_2$  avec  $x \neq 0_E$ .

Soit  $v \in D_1$ . Par définition, on écrit  $D_1 = \mathbb{K}x_1$  et  $D_2 = \mathbb{K}x_2$ .

On a donc  $v = \alpha x_1$ ,  $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$  avec  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ .

Ainsi :

$$v = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_1 = \alpha \lambda_1^{-1} x = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc  $D_1 \subset D_2$  et par symétrie,  $\boxed{D_1 = D_2}$ .

## 20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

### Proposition 20.27

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$ .
- $\forall i \in I, 0 \in E_i$  donc  $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$ .
- Soit  $(x, y) \in \left[ \bigcap_{i \in I} E_i \right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

$$\text{Donc } \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

## 20.34 Description de $\text{Vect}(X)$

### Proposition 20.34

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $\text{Vect}(X)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ .

On note  $F$  l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $X$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $X$ .

Par définition,  $\text{Vect}(X) \subset F$ .

Or  $\text{Vect}(X)$  est un sous-espace vectoriel qui contient  $X$ . Il doit donc contenir les combinaisons linéaires de  $X$  soit  $F$ .

Donc  $\boxed{F = \text{Vect}(X)}$ .

## 20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

### Proposition 20.36

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On a

1.  $A \subset \text{Vect}(A)$
2. Si  $A \subset B$  alors  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ .
3.  $A = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $A$  est un espace vectoriel.
4.  $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$ .
5.  $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $x \in \text{Vect}(A)$ .

1. RAF

2. RAF (20.24)

3. Si  $A = \underbrace{\text{Vect}(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$ , alors  $A$  est un sous-espace vectoriel.

Si  $A$  est un espace vectoriel, par minimalité,  $A = \text{Vect}(A)$ .

4. RAF (20.36.3)

5. On a toujours  $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$  (20.36.2) si  $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$ .

Or  $x \in Vect(A \cup \{x\})$ .

Donc  $x \in Vect(A)$ .

Réciproquement, si  $x \in Vect(A)$ , d'après (20.34) :

$$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$

Si  $u \in Vect(A \cup \{x\})$ , alors :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} (\mu_1 a'_1 + \dots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

## 20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 20.41

Soit  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $E$ . Alors

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :

$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :

$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

## 20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Proposition 20.43

Soit  $E_1, \dots, E_n$  et  $F$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Sont équivalentes :

1.  $F = E_1 + \dots + E_n$  ;
2.  $F = (\dots((E_1 + E_2) + E_3) + \dots + E_{n-1}) + E_n$  ;
3.  $F = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}$ .

2. Associativité fournie par la définition.

3. (20.39) + (20.43.2)

### Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $E = Vect((1, 0, 0))$  et  $F = Vect((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ .

Soit  $u \in E \cap F$ .

$$u = \alpha(1, 0, 0) = \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1).$$

$$\text{Donc } (-\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0).$$

$$\text{Donc } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dans  $\mathbb{R}^4$  avec  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1, 0)$  et  $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

$$E = Vect(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

$$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$$

Soit  $u \in E \cap F$ .

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1 + e_3) + \delta(2e_2 + e_1 - e_4) = (\gamma + \delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{donc } \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = 0 \text{ (} L_1 - L_3 \text{)} \\ \beta = 0 \text{ (} L_4 \text{)} \\ \alpha = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \\ \gamma = 0 \text{ (} L_2 \text{)} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

## 20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

### Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément  $x$  de  $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$  s'écrit de façon unique sous la forme  $x = x_1 + \dots + x_n$ .

$\Rightarrow$

On suppose que la somme est directe.

Soit  $x \in E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ .

On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \dots + x_n \\ &= x'_1 + \dots + x'_n \\ \text{donc } \underbrace{x'_n - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{(x_{n-1} - x'_{n-1})}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x'_n &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

$\Leftarrow$

On remarque que  $0 = 0 + \dots + 0$ .

Soit  $u \in E_n \cap (E_1 + \dots + E_{n-1})$ .

Donc :

$$\begin{aligned} u &= e_n = e_1 + \dots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \dots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.

## 20.51 Famille libre

### Proposition 20.51

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est **libre** si une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires de  $\mathbb{K}$ , à support fini,  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$ .
2. Pour tout  $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$  il existe une **unique** famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires de  $\mathbb{K}$ , à support fini, telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ .  
Si de plus,  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ , les points précédents sont équivalents aux points suivants :
3. Les  $x_i$  sont non nuls et la somme  $\mathbb{K}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}x_n$  est directe.
4. La fonction  $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow E; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  est injective.

$1 \Rightarrow 2$

On écrit, pour tout  $x \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$  :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$$

$$\text{donc } \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

Comme  $(\lambda_i)$  et  $(\mu_i)$  sont des familles de scalaires à support fini,  $(\lambda_i - \mu_i)$  aussi et d'après (20.51.1) :

$$\forall i \in I, \lambda_i - \mu_i = 0$$

$2 \Rightarrow 1$

Soit  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  avec  $(\lambda_i)$  une famille de scalaires à support fini.

Comme :

$$0 = \sum_{i \in I} 0 x_i$$

Par unicité :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

$1, 2 \Rightarrow 3$

Nécessairement, les  $x_i$  sont tous non nuls (sinon, on écrit  $1 \times x_1 = 0$ ).

Soit  $x \in (\mathbb{K} + \dots + \mathbb{K}x_{n-1}) \cap \mathbb{K}x_n$ .

On écrit :

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = \alpha_n x_n$$

$$\text{donc } \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - \alpha_n x_n = 0$$

Par hypothèse :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = 0$$

On poursuit le travail par récurrence pour montrer que la somme est directe.

$3 \Rightarrow 4$

RAF : (20.47)

$4 \Rightarrow 1, 2$

RAF : définition de l'injectivité pour 2.

## 20.52 Exemple

### Exemple 20.54

1. Montrer que la famille  $((1, 1), (0, 1))$  est libre.
2. Montrer que la famille  $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1))$  est libre.
3. Montrer que la famille  $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 6, 1))$  est liée.

1. On suppose  $\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) = 0$ .  
Donc :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

donc  $\alpha = \beta = 0$

La famille est libre.

2. Par équivalence. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ a + b - c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b + a &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

La famille est libre.

3. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} a(1, 2, 1) + b(1, 0, 1) + c(1, 6, 1) &= (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ 2a + 6c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 3c &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système admet des solutions non nulles (par exemple  $(-3, 2, 1)$ ), donc la famille est liée.

## 20.58 Caractérisation de la liberté pour des familles infinies

### Proposition 20.58

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.



RAF : (20.57)



Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille à support fini telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \tag{20.1}$$



On choisit  $J \subset I$ , fini, tel que :

$$\begin{aligned} \forall i \in I \setminus J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \sum_{i \in J} \lambda_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

Or  $(x_i)_{i \in J}$  est libre (finie), donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in J, \lambda_i &= 0 \\ \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

## 20.60 Caractérisation de la liberté pour les familles infinies indexées par $\mathbb{N}$

### Proposition 20.60

Une famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(x_0, \dots, x_n)$  est libre.

$\Rightarrow$

Si  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre, alors (20.58) ses sous-familles finies sont libres, en particulier celles sous la forme  $(x_0, \dots, x_n)$ .

$\Leftarrow$

Soit  $(x_i)_{i \in J}$  avec  $J$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$ .

Or pose  $n = \max J$ , donc  $J \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Par hypothèse,  $(x_0, \dots, x_n)$  est libre.

Donc (20.57),  $(x_i)_{i \in J}$  est libre.

D'après (20.58),  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre.

## 20.61 Ajout d'un élément à une famille libre

### Proposition 20.61

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$  et  $x_j \in E$  avec  $j \notin I$ . La famille  $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  est libre si et seulement si  $x_j \notin \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ .

$\Rightarrow$

Si  $x_j \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ , alors  $(x_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  est liée.

En effet,  $x_j = \sum_{i \in J} \lambda_i x_i$  avec  $J$  fini.

Donc  $\sum_{i \in J \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0$  avec  $\lambda_j = -1$ .

La famille  $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$ .

$\Leftarrow$

On suppose que  $(x_i)_{i \in J \cup \{j\}}$  est liée.

On choisit une famille de scalaires à support fini  $(\lambda_i)_{i \in I \cup \{j\}}$  telle que :

$$\sum_{i \in I \cup \{j\}} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_i) \neq (0)$$

Donc :

$$\lambda_j + x_j + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Comme  $(x_i)_{i \in I}$  est libre,  $\lambda_j \neq 0$  et  $x_j = -\sum_{i \in I} \lambda_i \lambda_j^{-1} x_i \in \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$ .

## 20.63 Généricité d'une famille libre maximale

### Proposition 20.63

Une famille libre maximale est génératrice dans le sens de la définition ci après : tout élément de  $E$  est combinaison linéaire de vecteurs de la famille.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille libre maximale.

Soit  $x \in E$ . Alors  $\mathcal{F} \cup \{x\}$  est liée.

Donc (20.61) :

$$x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$