

Chapitre 15

Limites et continuité

15 Limites et continuité	1
15.6 Limite en un point du domaine	2
15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de a	2
15.17 Unicité de la limite, cas réel	2
15.23 Proposition	2
15.30 Composition de limites	3
15.32 Limites et inégalités strictes	3
15.33 Limite et inégalités larges	4
15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction	4
15.39 Théorème de la limite monotone	5

15.6 Limite en un point du domaine

Proposition 15.6

Si $a \in X$ et si $f(x)$ admet une limite finie en a , alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Comme $f(x)$ admet une limite finie b quand $x \rightarrow a$:

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout $\epsilon > 0$:

$$|a - a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc $\boxed{f(a) = b}$.

15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de a

Proposition 15.15

Soit f et g deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point a . Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a , alors g aussi et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

On choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \cap X = W \cap Y$ et $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$.

Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ tend vers b quand $x \rightarrow a$.

Soit $V \in \mathcal{V}(b)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc g admet une limite en a égale à b

15.17 Unicité de la limite, cas réel

Théorème 15.17

Soit $a \in \overline{X}$ et f une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a est unique.

Par l'absurde. On suppose que f possède deux limites $l \neq l'$ en a .

On choisit $u \in \mathcal{V}(l)$ et $u' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $u \cap u' = \emptyset$.

Par définition, on choisit $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$ tels que $f(W \cap X) \subset U$ et $f(W' \cap X) \subset U'$.

Or $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$ et $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$.

Absurde.

15.23 Proposition

Proposition 15.23

Soit $a \in \overline{X}$. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de sous-ensembles de \mathbb{R} tels que $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$ (on dit que (Z_i) est un **recouvrement** de X). La fonction f admet au point a une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si pour tout i tel que la limite de f en a sur Z_i est envisageable, cette limite existe et vaut ℓ .

\Rightarrow

On suppose que $\lim_a f = \ell$.

Soit $i \in I$ tel que $a \in \overline{X \cap Z_i}$.

Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$.

EN particulier $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$.

 \Leftarrow

Notons $J \subset I$ l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en Z_i .

Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Pour tout $i \in J$, comme $\lim_{x \rightarrow a, x \in Z_i} f = \ell$ on choisit $U_i \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$.

On pose $U = \bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$ car J est fini.

On choisit $U' \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U' \cap \left(\bigcup_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$.

$f(U \cap U' \cap X) \subset V$

Donc $\boxed{\lim_a f = \ell}$.

15.30 Composition de limites

Proposition 15.30

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(X) \subset Y$. Soit $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_a f = b$ et si $\lim_b g = c$, alors $\lim_a g \circ f = c$.

Soit $W \in \mathcal{V}(c)$. On choisit $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \quad (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

15.32 Limites et inégalités strictes

Proposition 15.32

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim_a f < M$ alors $f(x) < M$ au voisinage de a
2. Si $\lim_a f > m$ alors $f(x) > m$ au voisinage de a .

1. Notons $b = \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $b < M$, on choisit $U \in \mathcal{V}(b)$ et $U' \in \mathcal{V}(M)$ avec $U < U'$.

Comme $\lim_a f = b$, on choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

15.33 Limite et inégalités larges

Proposition 15.33

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{X}$. On suppose que f et g possèdent des limites finies en a .

Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 15.34

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{X}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Sont équivalentes :

1. $\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \rightarrow a, \lim f(u_n) = \ell (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite (u_n) de limite a à valeurs dans X , la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ .

$1 \Rightarrow 2$

On suppose que $\lim_a f = \ell$.

Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \quad (\lim_a f = \ell)$$

Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$1 \Leftarrow 2$

Par contraposée. On suppose que f n'admet pas ℓ comme limite en a . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_n = \begin{cases}]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[& \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[& \text{si } a = +\infty \\]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe $W \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $x \in V \cap X$ et $f(x) \notin W$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in V_n \cap X$ tel que $f(x_n) \notin W$.

Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

15.39 Théorème de la limite monotone

Théorème 15.39

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. La limite $\lim_{a^+} f$ existe et est finie. Plus précisément, on a $f(a) \leq \lim_{a^+} f$.
2. Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim_{c^-} f$ et $\lim_{c^+} f$ existent et sont finies. Plus précisément : $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$.
3. La limite $\lim_b f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

1. On note $F = f([a, b[)$. Comme f est définie au voisinage de a , $]a, b[\neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Par ailleurs, comme f est croissante sur $]a, b[$, F est minorée par $f(a)$.
D'après la propriété fondamentale de \mathbb{R} , F possède une borne inférieure notée α , avec $f(a) \leq \alpha$.
Montrons par définition que $\lim_{a^+} f = \alpha$.
Soit $\epsilon > 0$, $\alpha + \epsilon$ n'est pas un minorant de F par définition de α . On choisit :

$$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

Par croissance de f sur $]a, b[$:

$$\forall x \in]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

On pose $\eta = x_0 - a > 0$, on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in]a - \eta[, a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$

2. Pour $c \in]a, b[$, en appliquant (15.39.1) à $f|_{[a, b[}$, on montre que $\lim_{c^+} f$ existe et $f(x) \leq \lim_{x^+} f$.
On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :

$$F = f([a, c]), \alpha = \sup(F)$$

pour montrer que $\lim_{c^-} f$ existe et

3. Par disjonction de cas.

- Si f est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
- Si f n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, on choisit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$.
Comme f est croissante :

$$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$

Donc $\lim_b f = +\infty$.