Chapitre 15

Limites et continuité

15.6 Limite en un point du domaine

Propostion 15.6

Si $a \in X$ et si $f(x)$ admet une limite finie en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Comme $f(x)$ admet une limite finie b quand $x \to a$:

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x-a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout $\epsilon > 0$:

$$|a-a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc $\boxed{f(a) = b}$.

15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coincidant au voisinage de a

Propostion 15.15

Soit f et g deux fonctions coincidant au voisinage d'un point a. Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g aussi et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

On choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que $W \cap X = W \cap Y$ et $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$.
Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x)$ tend vers b quand $x \to a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(b)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc g admet une limite en a égale à b

15.17 Unicité de la limite, cas réel

Théorème 15.17

Soit $a \in \overline{X}$ et f une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a est unique.

Par l'absurde. On suppose que f possède deux limites $l \neq l'$ en a.
On choisit $u \in \mathcal{V}(l)$ et $u' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $u \cap u' = \emptyset$.
Par définition, on choisit $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$ tels que $f(W \cap X) \subset U$ et $f(W' \cap X) \subset U'$.
Or $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$ et $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$.
Absurde.

15.23 Propostion

Propostion 15.23

Soit $a \in \overline{X}$. Soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$ (on dit que (Z_i) est un **recouvrement** de X). La fonction f admet au point a une limite ℓ (finie ou infinie) si et seulement si pour tout i tel que la limite de f en a sur Z_i est envisageable, cette limite existe et vaut ℓ.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$.
Soit $i \in I$ tel que $a \in \overline{X \cap Z}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap X) \subset V$.
EN particulier $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$
Notons $J \subset I$ l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en Z_i.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Pour tout $i \in J$, comme $\lim\limits_{x \to a x \in Z_i} = \ell$ on choisit $U_i \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$.
On pose $U = \bigcap\limits_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$ car J est fini.
On choisit $U' \in \mathcal{V}(a)$ tel que $U' \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$.
$f(U \cap U' \cap X) \subset V$
Donc $\boxed{\lim\limits_a f = \ell}$.

15.30 Composition de limites

Propostion 15.30

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(X) \subset Y$. Soit $a \in \overline{X}$, $b \in \overline{Y}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_a f = b$ et si $\lim\limits_b g = c$, alors $\lim\limits_a g \circ f = c$.

Soit $W \in \mathcal{V}(c)$. On choisit $V \in \mathcal{V}(b)$ tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \ (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

15.32 Limites et inégalités strictes

Propostion 15.32

Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{X}$, $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_a f < M$ alors $f(x) < M$ au voisinage de a
2. Si $\lim\limits_a f > m$ alors $f(x) > m$ au voisinage de a.

1. Notons $b = \lim\limits_a f \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $b < M$, on choisit $U \in \mathcal{V}(b)$ et $U' \in \mathcal{V}(M)$ avec $U < U'$.
   Comme $\lim\limits_a f = b$, on choisit $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

15.33 Limite et inégalités larges

Propostion 15.33

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{X}$. On suppose que f et g possède des limites finies en a.
Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_a f \leq \lim\limits_a g$.
Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 15.34

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{X}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Sont équivalentes :

1. $\lim\limits_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \to a, \lim f(u_n) = \ell \ (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite (u_n) de limite a à valeurs dans X, la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$
On suppose que $\lim\limits_a f = \ell$.
Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(\ell)$. On choisit $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \ (\lim_a f = \ell)$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$
Par contraposée. On suppose que f n'admet pas ℓ comme limite en a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$V_n = \begin{cases}]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[\text{ si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[\text{ si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] \text{ si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe $W \in \mathcal{V}(\ell)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $x \in V \cap X$ et $f(x) \neq W$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $x_n \in V_n \cap X$ tel que $f(x_n) \neq W$.
Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } f(x_n) \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} \ell$$

15.39 Théorème de la limite monotone

Théorème 15.39

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. La limite $\lim\limits_{a^+} f$ existe et est finie. Plus précisément, on a $f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$.
2. Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim\limits_{c^-} f$ et $\lim\limits_{c^+} f$ existent et sont finies. Plus précisément : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$.
3. La limite $\lim\limits_{b} f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

1. On note $F = f(]a, b[)$. Comme f est définie au voisinage de a, $]a, b[\neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
   Par ailleurs, comme f est croissante sur $]a, b[$, F est minorée par $f(a)$.
   D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, F possède une borne inférieure notée α, avec $f(a) \leq \alpha$.
   Montrons par définition que $\lim\limits_{a^+} f = \alpha$.
   Soit $\epsilon > 0$, $\alpha + \epsilon$ n'est pas un minorant de F par définition de α. On choisit :
   $$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   Par croissance de f sur $]a, b[$:
   $$\forall x \in]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$
   On pose $\eta = x_0 - a > 0$, on a montré que :
   $$\boxed{\forall x \in]a - \eta[\cap]a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$
2. Pour $c \in]a, b[$, en appliquant (15.39.1) à $f|_{[a,b[}$, on montre que $\lim\limits_{c^+} f$ existe et $f(x) \leq \lim\limits_{x^+} f$.
   On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :
   $$F = f(]a, c[), \alpha = \sup(F)$$
   pour montrer que $\lim\limits_{c^-} f$ existe et
3. Par disjonction de cas.
   - Si f est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
   - Si f n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, on choisit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$.
     Comme f est croissante :
     $$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$
     Donc $\lim\limits_{b} f = +\infty$.

15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

Théorème 15.59

Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémité a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'inverse), il exsite $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = 0$.

On note $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$.

- $A \neq \emptyset$ car f est définie et strictement positive au voisinage de a (15.32).
- A est majoré car f est strictement négative au voisinage de b (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, A possède une borne supérieure notée $c \in]a, b[$.

- On a $c \notin A$. En effet, si $f(x) > 0$, alors f est strictement postivie sur un voisinage de c, et comme f est définie à droite de c, cela contredirait que c'est un majorant de A.
  Donc $f(c) \leq 0$.
- Si $f(c) < 0$, alors f est strictement négative au voisinage à gauche de c.
  Absurde car c est le plus petit des majorants.
  Conclusion, $\boxed{f(c) = 0}$.

15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

Théorème 15.60

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $M = \sup_I f(x)$ et $m = \inf_I f(x)$ (éventuellement infinies).
Alors f prend toutes les valeurs de l'intervalle $]m; M[$:

$$\forall x_0 \in]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à $f - x_0$.

15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.