

# Chapitre 25

## Comparaison locale des fonctions

<b>25 Comparaison locale des fonctions</b>	<b>1</b>
25.6 Caractérisation séquentielle . . . . .	2
25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de $f$ . . . . .	2
25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre $n$ au point $a$ . . . . .	2
25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$ évaluée en $b$ - Hors Programme . . . . .	3
25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $x_0$ . . . . .	3
25.28 Développement limité de l'exponentielle . . . . .	4
25.29 Développement limité du logarithme . . . . .	4
25.30 Développement limité de cosinus et sinus . . . . .	5
25.40 Unicité du DL . . . . .	5
25.41 DL de fonctions paires ou impaires . . . . .	6
25.42 Remarque . . . . .	6
25.43 Exemple . . . . .	7
25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0 . . . . .	7
25.56 Produit de DL . . . . .	8
25.57 Exemple . . . . .	8
25.58 Exemple . . . . .	8

## 25.6 Caractérisation séquentielle

### Théorème 25.6

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions sur  $X$  et  $a \in \overline{X}$ . Alors :

1.  $f =_a O(g)$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  à valeurs dans  $X$ , alors  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .
2.  $f =_a o(g)$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  à valeurs dans  $X$ , alors  $f(u_n) = o(g(u_n))$ .

1.

$f =_a O(g)$  ssi il existe  $h$  bornée au voisinage de  $a$  tel que  $f = g \cdot h$

ssi Pour toute suite  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \rightarrow a$ ,  $f(u_n) = g(u_n) \times w_n$  où  $(w_n)$  est une suite bornée.

$\Rightarrow$   $w_n = h(u_n)$  ssi bornée  $\Leftarrow$  Par l'absurde avec (25.5).

ssi Pour toute suite  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \rightarrow a$ ,  $f(u_n) = O(g(u_n))$ .

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

## 25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de $f$

### Théorème 25.14

Soit  $f$  une fonction  $n$  fois dérivable en  $x_0$ . Alors le développement de Taylor de  $f$  en  $x_0$  à l'ordre  $n$  existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

## 25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre $n$ au point $a$

### Théorème 25.20

Soit  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$  Alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

— On suppose  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \sum_{k=0}^0 \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t) dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a, b], \mathbb{R})$ . En particulier,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ (\text{IPP}) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

## 25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ au point $a$ évaluée en $b$ - Hors Programme

### Théorème 25.22

Soit  $a < b$  deux réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et  $n+1$  dérivable sur  $]a, b[$ . Alors :

$$\exists c \in ]a, b[, f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que  $g(b) = f(b)$ .

On choisit  $A$  de telle sorte que  $g(a) = f(b)$ .

On pose :

$$A = \frac{-(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left[ -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + f(b) \right]$$

Par hypothèse,  $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ .

D'après le théorème de Rolle, on choisit  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

Or :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]a, b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} - A \frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n - A \frac{(b-x)^n}{n!} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (b-c)^n$$

Or  $c \neq b$  donc  $A = f^{(n+1)}(c)$ .

On conclut avec  $f(b) = g(a)$ .

## 25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ au point $x_0$

### Théorème 25.27

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ . Alors au voisinage de  $x_0$ , on a :

$$f(x) =_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I, \mathbb{R})$ .

D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt =_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt - \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on choisit  $v \in \mathcal{V}(x_0)$  tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car  $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x \in \mathcal{V}, x > x_0$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)] dt \right| &\leq \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{\varepsilon(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour  $x \leq x_0$ .

Par définition (avec les  $\varepsilon$ ), on a le résultat souhaité.

## 25.28 Développement limité de l'exponentielle

### Proposition 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

## 25.29 Développement limité du logarithme

### Proposition 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n ]-1, \infty[ , \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}\forall x > -1, f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \\ f^{(k+1)}(0) &= (-1)^k k!\end{aligned}$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned}f(x) &=_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &=_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &=_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

## 25.30 Développement limité de cosinus et sinus

### Proposition 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre  $2n+2$  pour le sinus et à l'ordre  $2n+1$  pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin x &=_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

Idem pour cos.

## 25.40 Unicité du DL

### Théorème 25.40

Si  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned}f(x) &=_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &=_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)\end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.

On note  $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$ .

Or :

$$\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k =_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n a_k (x - x_0)^k &=_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=p}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n a_k (x - x_0)^k &=_{x \rightarrow x_0} b_p (x - x_0)^p + \sum_{k=p+1}^n b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p (x - x_0)^p &=_{x \rightarrow x_0} b_p (x - x_0)^p + o((x - x_0)^n) \\ \text{donc } a_p &= b_p + o(1) \end{aligned}$$

Absurde car  $a_p \neq b_p$ .

## 25.41 DL de fonctions paires ou impaires

### Proposition 25.41

Soit  $f$  une fonction admettant un DL à l'ordre  $n$  au voisinage de 0. Alors :

- si  $f$  est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si  $f$  est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

— On suppose  $f$  paire et :

$$f(x) =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

Donc :

$$f(-x) =_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Par unicité du DL :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = (-1)^k a_k$$

Donc pour  $k$  impair :

$$a_k = 0$$

— Même raisonnement pour  $f$  impaire.

## 25.42 Remarque

### Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre  $n$  en  $x_0$  n'implique pas l'existence de la dérivée  $n$ -ième de  $f$  en  $x_0$ . Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si  $f$  admet un  $DL_0$  en  $x_0$ , on a :

$$f(x) =_{x \rightarrow x_0} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Donc :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

Nécessairement,  $a = f(x_0)$  et  $f$  est continue en  $x_0$ .

Si  $f$  admet un  $DL_1$  en  $x_0$ , on a :

$$f(x) =_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =_{x \rightarrow x_0} a + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$$

## 25.43 Exemple

### Exemple 25.43.2

2. La fonction  $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$  prolongée en 0 par  $f(0) = 1$  admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &=_{t \rightarrow 0} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &=_{t \rightarrow 0} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc  $f$  admet bien un  $DL_2$  en 0, donc un  $DL_1$  en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur  $\mathbb{R}$  par théorème d'opérations).

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \\ \frac{f'(x)}{x} &= -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

## 25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

### Proposition 25.50

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ , admettant à l'ordre  $n$  un DL non nul. Alors il existe un unique entier  $m \leq n$  tel que pour  $h$  au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) =_{x \rightarrow x_0} h^m (a_0 + a_1 h + \dots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec  $a_0 \neq 0$ . Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &=_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &=_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=m}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &=_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^m \left( \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changement de variable :  $x = x_0 + h$ .

## 25.56 Produit de DL

### Proposition 25.56

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degré au plus  $n$ . Si au voisinage de 0 :

$$f(x) =_{x \rightarrow 0} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) =_{x \rightarrow 0} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) =_{x \rightarrow 0} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &=_{x \rightarrow 0} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\ &=_{x \rightarrow 0} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\ &=_{x \rightarrow 0} P(x)Q(x) + o(x^n) \\ &=_{x \rightarrow 0} T_n(PQ)(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

## 25.57 Exemple

### Exemple 25.57

1.  $\frac{\cos x}{1+x} =_{x \rightarrow 0} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2.  $(e^x)^2 =_{x \rightarrow 0} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\ &=_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (e^x)^2 &=_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &=_{x \rightarrow 0} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

## 25.58 Exemple

### Exemple 25.58

1.  $(\sin x - x)(\cos x - 1) =_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.

$$\begin{aligned} (\sin x - x)(\cos x - 1) &=_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{12} + \left(\frac{-1}{2 \times 5!} - \frac{1}{3!4!}\right) x^7 + o(x^8) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{12} - \frac{1}{5 \times 3 \times 3!} x^7 + o(x^8) \\ &=_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8) \end{aligned}$$