

Chapitre 24

Comparaison locale des suites

24 Comparaison locale des suites	1
24.18Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité	2
24.20Equivalent d'un polynôme	2
24.31Exemple	3
24.36Exemple	4
24.43Exemple	4
24.46Exemple	5

24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Proposition 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

\Rightarrow

Si $u_n \sim v_n$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

\Leftarrow

Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1 + \epsilon_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

24.20 Equivalent d'un polynôme

Proposition 24.20

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$.

Pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$:

$$n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^d) \text{ et } a_k n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

24.31 Exemple

Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sqrt{3n+1}}$$

On note u_n l'expression de l'exemple.

But : trouver un équivalent (simple) de u_n .

—

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

—

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{3}{n^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—

$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3} \times \frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{9}{n^4} \times \sqrt{3n}} \\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

24.36 Exemple

Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \frac{1}{n}\end{aligned}$$

24.43 Exemple

Exemple 24.43

Trouver un équivalent de $\ln \sin \frac{1}{n}$.

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1)) \\ &= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow -\infty} + o(1) \\ &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

24.46 Exemple

Exemple 24.46

Soit (u_n) une suite non nulle de limite nulle. On admet que $\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned} \exp\left(5n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(5n + n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Exercice 24.9

Exercice 24.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$. Donner un équivalent simple de u_n .

$$\begin{aligned} u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \left[(1+\frac{1}{n})^{-1} - 1\right]}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Exercice 24.10

Exercice 24.10

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$$

1. Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante et de limite nulle.
2. On admet que si u est une suite de limite nulle, alors quand n tend vers $+\infty$, $\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Déterminer le réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de Césaro à la suite (v_n) , en déduire un équivalent simple de (u_n) , quand $n \rightarrow +\infty$.

1. L'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus.
Comme \sin est croissante, la suite (u_n) est monotone. On a $u_1 < u_0$ donc (u_n) est décroissante.
Par stabilité, (u_n) est positive.
D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
D'après le théorème du point fixe, car \sin est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin \ell = \ell$.
En étudiant les variations de $x \mapsto \sin x - x$, on trouve un unique point fixe : 0.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \\ &= \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left[1 + \alpha \left(-\frac{u_n^2}{6} \right) + o(u_n^2) \right] - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha}) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = -2$, on a :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} + o(1)$$

D'après le lemme de Césaro :

$$\frac{u_n^{-2} - u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{-2}}{n} &= \frac{u_0^{-2}}{n} + \frac{1}{3} + o(1) \\ &\sim \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n}$$

Donc :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$