

Chapitre 31

Dénombrement

31 Dénombrement	1
31.12Exemple : parcours d'une fourmi	2
31.19Exemple	2
31.20Exemple	2
31.27Exemple	2
31.28Exemple	2
31.32Exemple	3
31.33Exemple	3
31.38Nombre de combinaisons	3
31.40Exemple	3
31.41 k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$	3
31.43Exemple	4
31.45Exemple	4
31.48Exemple	4
31.49Nombre de parties d'un ensemble fini	5
31.51Exemple : formule du capitaine	5
31.53Exemple : formule de Pascal	6

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p + 2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B .

Pour construire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B .

On a $p + 1$ choix pour le premier B .

Pour chaque choix de position $k \in \llbracket 1, p + 1 \rrbracket$, il reste $p + 2 - k$ choix pour le second B .

Le nombre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p + 2 - k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p + 1)(p + 2)}{2} \end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $x \neq y$?

Étape 1 : On choisit $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit n choix.

Étape 2 : On choisit $y \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$, soit $n - 1$ choix.

Au total $n(n - 1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Étape 1 : On choisit la première lettre : p possibilités.

Étape 2 : On choisit la deuxième lettre : $p - 1$ possibilités.

Étape 3 : On choisit la troisième lettre : $p - 1$ possibilités.

...

Au total : $p(p - 1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.

Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.

Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.

Aut total : 4×26^3 possibilités.

31.32 Exemple

Exemple 31.32

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement sans remise dans un jeu de 52 cartes ?

Cela revient à compter le nombre de 5-arrangements d'un ensemble de cardinal 52, soit $\frac{52!}{(52-5)!}$.

31.33 Exemple

Exemple 31.33

De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?

- Sur un banc rectiligne, cela revient à calculer le nombre de n -arrangements d'un ensemble de cardinal n , soit $n!$ choix.
- En choisissant arbitrairement la place d'une personne (par exemple Jack), il suffit de compléter par un $(n-1)$ -arrangement d'un ensemble à $n-1$ éléments, soit $(n-1)!$ choix.

31.38 Nombre de combinaisons

Proposition 31.38

Soit $p \in \mathbb{N}$ et notons $n = |E|$. Il y a $\binom{n}{p}$ p -combinaisons de E .

Pour construire une p -combinaison :

- On choisit un p -arrangement de E : $\frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.
- On choisit l'ensemble des éléments qui constituent cet arrangement.
Or toute permutation du p -arrangement conduit à la même combinaison. Il y a donc $|S_p| = p!$ arrangements qui donne la même combinaison (il n'y en a pas d'autres).
On a donc $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ p -combinaisons.

31.40 Exemple

Exemple 31.40

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-combinaisons d'un ensemble de cardinal 52. Il y en a $\binom{52}{5}$.

31.41 k -listes strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Théorème 31.41

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\binom{n}{k}$ familles d'entiers (i_1, \dots, i_k) pour lesquelles $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Pour tout ensemble à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, il existe une unique manière de les ordonner. Réciproquement tout k -uplet (i_1, \dots, i_k) avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ fournit un sous-ensemble à k éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Il y a donc en tout $\binom{n}{k}$ familles recherchées.

31.43 Exemple

Exemple 31.43

Combien le mot "BOROROS" a-t-il d'anagrammes ?

Construire un anagramme de "BOROROS" c'est construire un mot de 7 lettres composé de 1 B, 3 O, 2 R et 1 S.

Étape 1 : $\binom{7}{1}$ choix pour la place de B.

Étape 2 : $\binom{6}{3}$ choix pour la place des O.

Étape 3 : $\binom{3}{2}$ choix pour la place des R.

Étape 4 : $\binom{1}{1}$ choix pour la place de S.

Au total :

$$\begin{aligned}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} &= 7 \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{2!} \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 3\end{aligned}$$

31.45 Exemple

Exemple 31.45

Un jeu de tarot contient 78 cartes :

- 21 atouts
- 1 excuse
- 14 cartes de chaque couleur (coeur, pique, trèfle, carreau)

Combien de tirages simultanés de 6 cartes d'un tel jeu peut-on obtenir contenant 2 atouts et 4 trèfles ?
Et ensuite, contenant exactement un atout et au moins 3 as ?

— Pour construire une telle main :

Étape 1 : $\binom{21}{2}$ choix pour les atouts.

Étape 2 : $\binom{14}{4}$ choix pour les trèfles.

Au total $\binom{21}{2}\binom{14}{4}$ mains possibles.

— $\binom{21}{1}\binom{4}{3}\binom{78-21-4}{2} + \binom{21}{1}\binom{4}{4}\binom{78-21-4}{1}$.

31.48 Exemple

Exemple 31.48

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de A ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De combien de façons peut-on extraire la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de A ?

1. Disjonctions de cas : Si on extrait par rapport à la deuxième ligne : $\binom{5}{3}$.

Si on extrait par rapport à la troisième ligne : $\binom{4}{3}$.

Au total : $\binom{5}{3} + \binom{4}{3}$ choix possibles.

2. Avec le même principe :

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2}$$

31.49 Nombre de parties d'un ensemble fini

Théorème 31.49

On a :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(E)| &= \sum_{k=0}^{|E|} |\mathcal{P}_k(E)| \\ &= \sum_{k=0}^{|E|} \binom{|E|}{k} \\ &= 2^{|E|} \text{ (binôme)} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

On liste les éléments de $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Toute partie de E peut-être codée de manière unique par un mot de n lettres à partir de l'alphabet $\{0, 1\}$ de manière suivante :

$$\underbrace{0}_{e_1 \notin A} \underbrace{1}_{e_2 \in A} \dots \underbrace{\quad}_{1 \text{ si } e_i \in A, 0 \text{ sinon}} \dots$$

Donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

31.51 Exemple : formule du capitaine

Exemple 31.51

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, on a :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

Dans une classe de n élèves, on décide de composer des équipes de p élèves dont un capitaine désigné.

Méthode 1 :

$$\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{choix du capitaine}} \times \underbrace{\binom{n-1}{p-1}}_{\text{choix des autres élèves}}$$

Méthode 2 :

$$\underbrace{\binom{n}{p}}_{\text{choix de l'équipe}} \times \underbrace{\binom{p}{1}}_{\text{choix du capitaine}}$$

On a par double comptage :

$$\binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p} \binom{p}{1}$$

Soit :

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$$

31.53 Exemple : formule de Pascal

Exemple 31.53

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Pour construire une partie à p éléments, on peut commencer par fixer un élément quelconque $e \in E$. Puis :

- construire une partie contenant e : $\binom{n}{p-1}$ possibilités.
- construire une partie qui ne contient pas e : $\binom{n}{p}$ possibilités.

Par double comptage :

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Exercice 1

$$\underbrace{2n}_{\text{choix de la première boule}} \times \underbrace{n}_{\text{choix d'une parité différente}} \times (n-1)(n-1) \cdots 1 = 2(n!)^2$$

Exercice 3

1.

$$\binom{n}{n'} \binom{p}{p'}$$

2.

$$\sum_{p'=1}^p \sum_{n'=1}^n \binom{n}{n'} \binom{p}{p'} = \left(\sum_{p'=1}^p \binom{p}{p'} \right) \left(\sum_{n'=1}^n \binom{n}{n'} \right) = (2^p - 1)(2^n - 1)$$

Exercice 6

Construire une telle permutation revient à construire une bijection de $\llbracket 3, n \rrbracket$ sur $\llbracket 4, n \rrbracket \cup \{1\}$.

Il y en a $(n-2)!$.

Exercice 9

On code toute configuration de la manière suivante : on associe à une boule la lettre 0 et à une urne la lettre |.

Réciproquement, à tout mot de $p + n - 1$ lettres composées d'exactly $n - 1$ lettres | et p lettres 0.

Au total, il y a $\binom{n+p-1}{p}$ configurations.