

Chapitre 28

Matrice d'une application linéaire

28 Matrice d'une application linéaire	1
28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs	2
28.6 Exemple	2
28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes	3
28.13Exemple	3
28.15Exemple	3
28.18Exemple	3
28.19Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire	4

28.5 Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs

Théorème 28.5

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{B} une base de E , \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E . Alors \mathcal{F} est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E .

On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i$$

\mathcal{F} est une base de E si et seulement si \mathcal{F} est libre (car $|\mathcal{F}| = \dim E$), si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$$

Or pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ij} \lambda_j \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i b_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0 &\Leftrightarrow \left[\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left[M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right]_i = 0 \right] \\ &\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker M \end{aligned}$$

En conclusion, \mathcal{F} est une base si et seulement si $\ker M = \{0\}$, si et seulement si M est inversible.

28.6 Exemple

Exemple 28.6

Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, x^2)$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure avec une diagonale ne contenant aucun 0 : elle est donc inversible. Donc \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, donc libre.

28.9 Caractérisation des matrices inversibles au moyen de leur lignes et colonnes

Théorème 28.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible
- la famille des colonnes de A est une base de \mathbb{K}^n (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)
- la famille des lignes de A est une base de \mathbb{K}^n (ce qui revient à dire qu'elle est libre ou génératrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A , L_1, \dots, L_n les lignes de A , \mathcal{B}_n la base canonique de \mathbb{K}^n .

A est inversible si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (28.8).

Si et seulement si (C_1, \dots, C_n) est une base de \mathbb{K}^n (28.5).

Si et seulement si ${}^t A$ est inversible (11.42).

Si et seulement si (L_1, \dots, L_n) est une base de \mathbb{K}^n .

28.13 Exemple

Exemple 28.13

On note T l'endomorphisme $P \mapsto X^2 P'' + P(1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et \mathcal{B}_3 la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(T)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= (1, X, X^2, X^3) \\ T(1) &= 1 \\ T(X) &= 1 \\ T(X^2) &= 2X^2 + 1 \\ T(X^3) &= 6X^2 + 1 \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(T) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

28.15 Exemple

Exemple 28.15

Déterminer l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y)$$

28.18 Exemple

Exemple 28.18

On note φ l'application canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, \mathcal{B}'_2 la base $((0, 1), (1, 0))$ de \mathbb{R}^2 , \mathcal{B}'_3 la base $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi)$.

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, x + y, -x + y). \\ \varphi(1, 0) &= (1, 1, -1) = -(1, 1, 1) + 2(1, 1, .) \\ \varphi(0, 1) &= (0, 1, 1) = (1, 1, 1) - (1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$Mat_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28.19 Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Théorème 28.19

Soit $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$ deux \mathbb{K} -ev de dimension finie p et n , e une base de E et f une base de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Alors :

$$\underbrace{Mat_f(u(x))}_{(n,1)} = \underbrace{Mat_{e,f}(u)}_{(n,p)} \underbrace{Mat_e(x)}_{(p,1)}$$

On note $e = (e_1, \dots, e_p)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $Mat_{e,f}(u) = M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

Soit $x \in E$. On écrit $m = \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j$. Par conséquent :

$$Mat_e(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^p \alpha_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^p m_{ij} \alpha_j \right] f_i \\ &= \sum_{i=1}^n [M \times Mat_e(x)]_i f_i\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}Mat_f(u(x)) &= \begin{pmatrix} [M \times Mat_e(x)]_1 \\ \vdots \\ [M \times Mat_e(x)]_n \end{pmatrix} \\ &= M \times Mat_e(x)\end{aligned}$$