

Chapitre 21

Applications linéaires

21 Applications linéaires	1
21.4 Exemple	2
21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$	2
21.10 Composition de deux AL	2
21.13 Bilinearité de la composition	2
21.16 Structure des images directes et réciproques	3
21.21 Famille génératrice de $Im(f)$	3
21.23 Réciproque d'un isomorphisme	4
21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme	4
21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur	4
21.53 Diagonalisation d'un projecteur	4
21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs	5
21.59 Diagonalisation d'une symétrie	5
21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité	6
21.64 Exemple	6

21.4 Exemple

Exemple 21.4.1

L'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = 2x + 3y$.

Soit $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

- $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
- $\vec{0} \in \mathcal{L}(E, F)$
- Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha \lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$.

21.10 Composition de deux AL

Proposition 21.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

21.13 Bilinearité de la composition

Proposition 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis, E, F et G étant des \mathbb{K} -ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.

D'après la remarque (21.11), Ψ est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall (v, v') \in \mathcal{L}(F, G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v + \lambda v') = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u, v')$$

Soit $(u, u') \in \mathcal{L}(E, F)^2, v \in \mathcal{L}(F, G), \lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u + \lambda u', v)(x) &= v \circ (u + \lambda u')(x) \\ &= v(u(x) + \lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u, v)(x) + \lambda \Psi(u', v)(x) \end{aligned}$$

Donc $\Psi(u + \lambda u', v) = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u', v)$.

21.16 Structure des images directes et réciproques

Proposition 21.16

1. Soit E' un sev de E . Alors $f(E')$ est un sev de F .
2. Soit F' un sev de F . Alors $f^{-1}(F')$ est un sev de E .

1. — $f(E') \subset F$
 — $0 = f(0) \in f(E')$
 — Soit $(x, y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $x = f(\alpha), y = f(\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in E'^2$.

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda \beta) \\ &\in f(E') \end{aligned}$$

2. — $f^{-1}(F') \subset E$
 — $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$
 — Soit $(x, y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda f(y) \in F' \\ \text{donc } x + \lambda y &\in f^{-1}(F') \end{aligned}$$

21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

Proposition 21.21

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Alors $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.

Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i \in I})$$

- Pour tout $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$.
 Comme $Im(f)$ est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i \in I}) \subset Im(f)$$

- Soit $a \in Im(f)$. On choisit $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
 Comme $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , on peut écrire $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est à support fini.

$$\begin{aligned} a &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

21.23 Réciproque d'un isomorphisme

Théorème 12.23

Soit f un isomorphisme de E vers F . Alors f^{-1} est une application linéaire, donc un isomorphisme de F vers E .

On pose $g = f^{-1}$. Soit $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{L}(F, E)$.

21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme

Proposition 21.41 - HP

L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si P et Q annulent u , alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si $B \in \mathbb{K}[X]$:

$$(PB)(u) = P(u) \circ B(u) = B(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur

Proposition 21.52

Soit p un projecteur de E . Alors $x \in \text{Im}(p)$ si et seulement si $p(x) = x$. Soit :

$$\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit p un projecteur. Soit $x \in E$.

- Si $x \in \text{Im}(p)$, on choisit $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
Donc $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$.
- Si $p(x) = x$, alors $x \in \text{Im}(p)$.
-

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(p) &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - \text{id})(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - \text{id}) \end{aligned}$$

21.53 Diagonalisation d'un projecteur

Théorème 21.53

Soit p un projecteur de E . Alors :

$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(p - \text{id}_E)$.

Donc $p(x) = 0$ et $p(x) - x = 0$.

Donc $x = 0$.

Soit $x \in E$, on écrit $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im}(p) = \ker(p-id)}$.

Donc $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$.

21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs

Théorème 21.57

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

- p est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et

$$\forall f \in F, \forall g \in G, p(f + g) = f.$$

- Dans ce cas, $F = \operatorname{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$.
- Ainsi, un projecteur est une projection géométrique sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

\Rightarrow

Existence justifiée avec $F = \operatorname{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$.

\Leftarrow

Soit $x = f + g \in E$.

$$\begin{aligned} p^2(x) &= p \circ p(f + g) \\ &= p(f) \\ &= f \\ &= p(f + g) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$, donc p est un projecteur.

21.59 Diagonalisation d'une symétrie

Théorème 21.59

On suppose que \mathbb{K} n'est pas de caractéristique 2. Soit s une symétrie de E . Alors :

$$E = \ker(s + id_E) \oplus \ker(s - id_E)$$

- Soit $x \in \ker(s - id) \cap \ker(s + id)$. Donc :

$$\begin{aligned} s(x) - x &= 0 \\ s(x) + x &= 0 \\ \text{donc } 2x &= 0 \\ \text{donc } x &= 0 \end{aligned}$$

- Pour $x \in E$, $x = \frac{1}{2}(\underbrace{x - s(x)}_{\in \ker(s+id)}) + \frac{1}{2}(\underbrace{x + s(x)}_{\in \ker(s-id)})$.

21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité

Proposition 21.63

Etant donné une base $(b_i)_{i \in I}$ de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de F , il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(b_i) = f_i$.

Soit $(b_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de F .

Soit $x \in E$. On écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ avec $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini.

On pose $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$. On définit bien une application car les λ_i sont uniques.

Montrons que $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ et $y = \sum_{i \in I} \mu_i b_i$. Ainsi :

$$x + \alpha y = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) b_i$$

Par définition :

$$\begin{aligned} u(x + \alpha y) &= \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) f_i \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f_i + \alpha \sum_{i \in I} \mu_i f_i \\ &= u(x) + \alpha u(y) \end{aligned}$$

L'existence est prouvée, et si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$\forall i \in I, v(b_i) = f_i$$

Le raisonnement précédent impose que :

$$\forall x \in E, u(x) = v(x)$$

Soit :

$$u = v$$

21.64 Exemple

Exemple 21.64

1. Déterminer l'expression générale de l'application lin de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(1, 0) = (3, 2) \quad \text{et} \quad f(0, 1) = (2, 1)$$

2. Montrer que toute application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n est de la forme $X \mapsto MX$ et décrire M à partir d'une base de \mathbb{R}^p .
3. Soit $(b_i)_{i \in I}$ de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de F , il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(b_i) = f_i$.

1. Pour tout (x, y) .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x(1, 0) + y(0, 1)) \\ &= xf(1, 0) + yf(0, 1) \\ &= x(3, 2) + y(2, 1) \\ &= (3x + 2y, 2x + y) \end{aligned}$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Soit (b_1, \dots, b_p) la base canonique de \mathbb{R}^p et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n .

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(b_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^p x_j b_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^p x_j f(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p m_{ij} x_j\right) e_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p m_{nj} x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$