Chapitre 35

Familles sommables

35.2 Reformulation

Propostion 35.2

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs. Alors $\sum_{n\geq 0} a_n$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$et

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k, J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$$

En notant, pour $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on a :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0}^{a_k}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n \in \left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Donc $\sum_{k\geq 0} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in J} a_k \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\} = S$.
Par ailleurs, pour $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, on pose $N = \max J$ et $J \subset [\![0, N]\!]$ et :

$$\sum_{k\in J} a_k \leq \sum_{k=0}^{N} a_k \leq \sum_{k>0} a_k$$

Par définition de la borne supérieure :

$$S \leq \sum_{k\geq 0} a_k$$

Donc :

$$\sum_{k\geq 0} a_k = S$$

35.5 Croissance de la somme

Propostion 35.5

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si pour tout $i \in I, a_i \leq b_i$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$. Comme :

$$\forall i \in J, a_i \leq b_i$$

Alors :

$$\sum_{i\in j} a_i \leq \sum i \in J b_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

$\sum\limits_{i\in I} b_i$ est un majorant de $\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$.
Par définition :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

35.8 Lien avec les séries à termes positifs

Propostion 35.8

Soit $\sum a_n$ une séries à termes positifs.

1. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche correspond à la somme de la série tandis que le terme de droite à la somme de la famille sommable).
2. En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

1. (35.2)
2. Théorème de la Limite Monotone

35.10 Invariance de la somme d'une série à termes positifs par permutation des termes

Corollaire 35.10

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$$

Cette égalité reste vraie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.
σ induit une bijection $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_f(\mathbb{N}); J \mapsto \sigma(J)$ de $\left\{\sum_{i\in J} | J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$ sur $\left\{\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} \mid J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\right\}$.
Ces deux ensembles ont donc la même borne supérieure. Donc :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\sigma(i)}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\sigma(i)} \text{ (35.8)}$$

35.12 Restriction

Propostion 35.12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $J \subset I$, alors :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Comme $\mathcal{P}_f(J) \subset \mathcal{P}_f(I)$:

$$\left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(J)\right\} \subset \left\{\sum_{j\in K} a_j \mid K \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$$

Donc (Chapitre 9) :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.13 Preque linéarité

Propostion 35.13

Soit (a_i) et (b_i) deux familles d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$et $(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2$. On a

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

On rappelle (Chapitre 9) que :

$$\sup(aA + bB) = a \sup A + b \sup B$$

($a \geq 0, b \geq 0$ et $\sup A, \sup B$ existent).

35.14 Sommation par paquets

Théorème 35.14

Soit I un ensemble quelconque et $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{i\in I_k} a_i \right)$$

— Montrons que $\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{k\in K} \left(\sum\limits_{i\in I_k} a_i \right)$:
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$.
Pour tout $k \in K$, on note $J_k = J \cap I_k$.
Ainsi, $J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$ et :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k\in K} J_k &= \bigsqcup_{k\in K} (J \cap I_k) \\ &= J \cap \bigsqcup_{k\in K} I_k \\ &= J \cap I \\ &= J \end{aligned}$$

On pose également $L = \{k \in K, J_k \neq \emptyset\}$.
Alors $L \in \mathcal{P}_f(K)$ et :

$$\bigsqcup_{k\in L} J_k = \bigsqcup_{k\in K} J_k = J$$

Les ensembles étant finis :

$$\sum_{i\in J} a_i = \sum_{k\in L} \sum_{i\in J_k} a_i \leq \sum_{k\in L} \sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i$$

Par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} a_i$$

— On prouve $\sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{i\in I_k} a_i \leq \sum\limits_{i\in I} a_i$.
Soit $L \in \mathcal{P}_f(K)$.
Soit, pour $k \in L, J_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. $\bigsqcup_{k\in L} J_k$ est donc une partie finie de I.

$$\underbrace{\sum_{k\in L} \sum_{i\in J_k} a_i}_{\text{car } \bigsqcup J_k \text{ est fini}} \leq \sum_{i\in I} a_i$$

En utilisant un nombre fini de fois la définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in L}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Toujours par définition de la borne supérieure :

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

35.16 Théorème de Fubini positif

Corollaire 35.16

Soit I et J deux ensembles quelconques et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}$$

$$\bigsqcup_{j\in J} I\times\{j\} = I\times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J$$

On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

35.17 Exemple

Exemple 35.17

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2}(\zeta(n)-1) = 1$.

$\left(\frac{1}{k^n}\right)_{n\geq 2, k\geq 2}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^n}-1\right) &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^n}\right)\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{k^n}\right) \text{ (Fubini positif)}\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \text{ (progresion géométrique)}\\
&= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^2-k}\\
&= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \text{ (DES)}\\
&= 1 \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

35.18 Exemple

Exemple 35.18

Montrer que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} = 2$$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\\
&= \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{2^n}\\
&= \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq k}\frac{1}{2^n}\right) \text{ (Fubini positif)}\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \text{ (progresion géométrique)}\\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^{k-1}}\\
&= 2
\end{aligned}$$

35.19 Exemple

Exemple 35.19

Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum_{p,q\in\mathbb{N}^*}\frac{pq}{(p+q)^\alpha}$ est-elle réelle ?

$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ est une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{p\geq 1,q\geq 1}\frac{pq}{(p+q)^\alpha} &= \sum_{d\geq 1}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha} \text{ (sommation par paquets)}\\
&= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\frac{p(d-p)}{d^\alpha}\\
&= \sum_{d\geq 2}\sum_{p=0}^{d}\left(\frac{p}{d^{\alpha-1}}-\frac{p^2}{d^\alpha}\right)\\
&= \sum_{d\geq 2}\left(\frac{d(d+1)}{2d^{\alpha-1}}-\frac{d(d+1)(2d+1)}{6d^{\alpha-1}}\right) \text{ (sommes usuelles)}\\
&= \sum_{d\geq 2}\frac{d+1}{d^{\alpha-1}}(3d-2d-1)\\
&= \sum_{d\geq 2}\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d^2-1}{6d^{\alpha-1}}\sim\frac{1}{6d^{\alpha-3}}$$

D'après le TCSATTPE, la somme est finie si et seulement si $\alpha>4$.

35.25 Caractérisation de la sommabilité par les parties réelles et imaginaires, parties positives et négatives

Théorème 35.5

1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ le sont.
2. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\mathrm{Re}\,(a_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}\,(a_i))_{i\in I}$ le sont.

1. On rappelle que :
$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$
et :
$$\begin{aligned} \forall i \in I, 0 \leq a_i^+ &\leq |a_i| \\ 0 \leq a_i^- &\leq |a_i| \end{aligned}$$
Si (a_i) est sommable, alors $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ le sont aussi (35.24).
Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire :
$$\forall i \in I, |a_i| \leq a_i^+ + a_i^-$$
Donc si $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(a_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables, alors (a_i) est sommable (35.24) et (35.13).
2. Démonstration similaire.

35.27 Caractérisation de la somme par les ϵ

Propostion 35.27

Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell(I)$ et $S \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $S = \sum_{i\in I} a_i$
2. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$ avec $J_\epsilon \subset K$:
$$\left| S - \sum_{i\in K} a_i \right| \leq \epsilon$$

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $S = \sum_{i\in I} a_i$ (avec (a_i) une famille de réels).
On décompose :
$$\forall i \in I, a_i = a_i^+ - a_i^-$$
Et :
$$S = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- = S^+ - S^-$$
On note également :
$$A_+ = \left\{ \sum_{i\in J} a_i^+ \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$
$$A_- = \left\{ \sum_{i\in J} a_i^- \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

Soit $\epsilon > 0$.
$S^+ - \frac{\epsilon}{2}$ ne majore pas A_+, on choisit $J_\epsilon^+ \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$S^+ - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+$$

Pour les mêmes raisons, on choisit $J_\epsilon^- \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$S^- - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^-$$

Pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$ avec $K \supset J_\epsilon = J_\epsilon^+ \cup J_\epsilon^-$.

$$\begin{aligned} S^+ - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^+} a_i^+ \leq \sum_{i \in K} a_i^+ \\ S^- - \frac{\epsilon}{2} &< \sum_{i \in J_\epsilon^-} a_i^- \leq \sum_{i \in K} a_i^- \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{i \in K} a_i \right| &= \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ - S^- + \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \left| S^+ - \sum_{i \in K} a_i^+ \right| + \left| S^- - \sum_{i \in K} a_i^- \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
SUpposons qu'il existe S et S' vérifiant la condition 2. Alors pour tout $\epsilon > 0$, n notant J_ϵ l'ensemble de l'assertion :

$$\begin{aligned} |S - S'| &= |S - \sum_{i \in J_\epsilon} a_i + \sum_{i \in J_\epsilon} a_i - S'| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc $S = S'$.

35.28 Linéarité

Théorème 35.28

L'ensemble $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $(a_i)_{i \in I} \to \sum_{i \in I} a_i$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- — $\ell^1(I) \subset \mathbb{K}^I$.
  - Soit $(a_i), (b_i)$ dans $\ell^1(I)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |\lambda a_i + \mu b_i| &\leq \sum_{i \in I} |\lambda||a_i| + |\mu||b_i| \\ &\leq |\lambda| \sum_{i \in I} |a_i| + |\mu| \sum_{i \in I} |b_i| \\ &< +\infty \end{aligned}$$

  Donc $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$.
- Soit $\epsilon > 0$. Soit $J_\epsilon^a \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que :

$$\forall K \in \mathcal{P}_f(I), K > J_\epsilon^a, \left| \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in K} a_i \right| < \epsilon$$

On pose $J_\epsilon = J_\epsilon^a \cup J_\epsilon^b$.
On a alors, pour $K \in \mathcal{P}_f(I), K > J_\epsilon$:

$$\begin{aligned}\left|\lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in K}(\lambda a_i + \mu b_i)\right| &= \left|\lambda \sum_{i\in I} a_i - \lambda \sum_{i\in K} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i - \mu \sum_{i\in K} b_i\right| \\ &\leq |\lambda| \left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in K} a_i\right| + |\mu| \left|\sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in K} b_i\right| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|)\epsilon\end{aligned}$$

D'après (35.27), on a donc :

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

35.29 Intégalité triangulaire

Propostion 25.29

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leq \sum_{i\in I} |a_i|$$

On suppose que $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{R})$.
On écrit donc :

$$\begin{aligned}\forall i \in I, a_i &= a_i^+ - a_i^- \\ |a_i| &= a_i^+ + a_i^-\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in I} a_i\right| &= \left|\sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-\right| \\ &\leq \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^- \text{ (Inégalité triangulaire sur } \mathbb{R}) \\ &= \sum_{i\in I}(a_i^+ + a_i^-) \text{ (presque linéarité)} \\ &= \sum_{i\in I} |a_i|\end{aligned}$$

On suppose que $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)(I, \mathbb{C})$.
Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in J} a_i\right| &\leq \sum_{i\in J} |a_i| \\ &\leq \sum_{i\in I} |a_i|\end{aligned}$$

On note $M = \sup \left\{ \left|\sum_{i\in J} a_i\right| \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ de tele sorte que $M \leq \sum_{i\in I} |a_i|$.
Montrons que $M = \left|\sum_{i\in I} a_i\right| = |S|$.
Pour $\epsilon > 0$, on choisit $J_\epsilon \in \mathcal{P}_f(I)$ tel que pour tout $K \in \mathcal{P}_f(I)$, $K \supset J_\epsilon$:

$$\left| |S| - \left|\sum_{i\in K}\right| \right| \leq \left|S - \sum_{i\in K} a_i\right| < \epsilon$$

Ce qui permet de conclure :

$$M = |S|$$

35.31 Associativité pour les familles sommables

Théorème 35.31

Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a=(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes. Alors a est sommable si et seulement chaque $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable de somme s_k et de somme absolue t_k et si la famille $(t_k)_{k\in K}$ est sommable. Dans ce cas, (s_k) est également sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i$$

— On traite la sommabilité.
 D'après le théorème de sommation par paquets dans le cas positif (35.14) :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} |a_i| = \sum_{k\in K} t_k \text{ (notations (35.31))}$$

i

— Si $\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$ alors :

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in t_k} |a_i| < +\infty$$

Donc (t_k) est sommable.
Et $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable.

— Si $(a_i)_{i\in I_k}$ est sommable pour tout $k\in K$ et $(t_k)_{k\in K}$ est sommable, alors :

$$\sum_{k\in K} t_k < +\infty$$

Donc :

$$\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty$$

Théorème 35.33

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

35.33 Produit de familles sommables

— Sommabilité : On note $c_{ij}=a_ib_j$ pour tout $(i,j)\in I\times J$.
 On écrit $I\times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J$.
 On pose, pour $i\in I$:

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j\in J} |c_{ij}| \\ &= \sum_{j\in J} |a_i||b_j| \\ &= |a_i| \times \sum_{j\in J} |b_j| \text{ (presque linéarité)} \\ &< +\infty \text{ ((}b_j\text{) est sommable)} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} t_i &= \sum_{i\in I} |a_i| \times \underbrace{\left(\sum_{j\in J}\right)}_{\in\mathbb{R}_+} \\ &= \left(\sum_{j\in J} |b_j|\right) \times \sum_{i\in I} |a_i| \\ &< +\infty\end{aligned}$$

D'après le théorème de sommation par paquets (35.31), la famille $(c_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.
— <u>Somme :</u>

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} c_{ij} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j \text{ (35.28)} \\ &= \sum_{i\in I} a_i \left(\sum_{j\in J} b_j\right) \\ &= \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) \quad \text{(35.28)}\end{aligned}$$

35.34 Exemple

Exemple 35.34

Montrer que la famille $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1, q\geq 1} \left|\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right| &\leq \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} \\ &= \left(\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_{q\geq 1}\frac{1}{q^2}\right) \quad \text{(Fubini positif)} \\ &= \zeta(2)^2 \\ &< +\infty\end{aligned}$$

35.35 Exemple

Exemple 35.35

Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, la famille $(z^{ij})_{i,j\in N^*}$ est sommable si et seulement si $|z|<1$.

— Si $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1, j\geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |z^i|^j \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{i\geq 1} |z|^i \frac{1}{1-|z|^i} \ (|z^i| \neq 1) \\
&= \sum_{i\geq 1}\sum_{i\geq 1} \frac{|z|^i}{1-|z|^i} \\
&\leq \sum_{i\geq 1} \frac{|z|^i}{1-|z|} \ (|z| < 1) \\
&= \frac{|z|}{(1-|z|)^2}
\end{aligned}$$

— Si $|z| \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1, j\geq 1} |z|^{ij} &= \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} |z^i|^j \\
&= \sum_{i\geq 1} +\infty \ (|z^i| \geq 1) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

35.36 Exemple

Exemple 35.36

Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum\limits_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$.

On note $(a_{n,k}) = \left(\frac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{1\leq n\leq k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq k} |a_{n,k}| &= \sum_{1\leq n\leq k} \frac{1}{nk(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k\geq n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \\
&= \zeta(2) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

La famille est donc sommable.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq k} a_{n,k} &= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2} \\
&= -\frac{1}{2}\zeta(2) \\
&= -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

35.37 Exemple

Exemple 35.37

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq k+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} = -\frac{1}{2}$.

On note $(a_{n,k}) = \left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{1\leq k\leq n}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq k\leq n} |a_{n,k}| &= \sum_{n\geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{n-1}{2^n} \\
&< +\infty \text{ (car } \frac{n-1}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} \sum_{n\geq n+1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n} &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ (Fubini positif)} \\
&= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2^n} \times (-1) \\
&= -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

35.38 Produit de Cauchy

Théorème 35.38

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Alors $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$$

La famille des $(a_i b_j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est sommable (35.38).
D'après le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) &= \sum_{i\geq 0, j\geq 0} a_i b_j \text{ (35.33)}\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n} a_i b_j\\ &= \sum_{n\geq 0} c_n\end{aligned}$$

35.39 Exemple

Exemple 35.39

Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Soit $|x| < 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x}\\ &= \left(\sum_{k\geq 0} x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} x^k\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} \text{ (produit de Cauchy)}\\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1) x^n\end{aligned}$$

35.41 Convergence de la série exponentielle

Théorème 35.41

La série exponentielle est absolument convergente pour tout paramètre $z \in \mathbb{C}$. La somme définit une fonction notée :

$$e(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Comme pour tout $n \geq 0, z \neq 0$:

$$\frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la règle d'Alembert, la série est absolument convergente pour tout $z \neq 0$.
Pour $z = 0, e(0) = 1$.