Chapitre 32

Espaces probabilisés finis

32 Espaces probabilisés finis **1**
32.19Exemple 2
32.25Exemple 2
32.26Exemple 2
32.28Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire 3
32.30Probabilité conditionnelle 3
32.31Formule des probabilités totales 4

32.19 Exemple

Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroter les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.
On note X la variable alétoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1,8]\!])$$

En notant A "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned}
A &= (X \in P_4[\![4,8]\!]) \\
P(A) &= P(X \in P_4[\![4,8]\!]) \\
&= \frac{|P_4[\![4,8]\!]|}{|P_4[\![1,8]\!]|} \\
&= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}}
\end{aligned}$$

32.25 Exemple

Exemple 32.25

On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Quelle est la loi de la variable X^2+1 ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$$

$$(X^2+1)(\omega) = \{1,2,5,10\}$$

Et :

$$\begin{aligned}
P(X^2+1=1) &= P(X=0) \\
&= \frac{1}{7} \\
P(X^2+1=2) &= P(X=-1)+P(X=1) \\
&= \frac{2}{7} \\
P(X^2+1=5) &= P(X=-2)+P(X=2) \\
&= \frac{2}{7} \\
P(X^2+1=10) &= P(X=-3)+P(X=3) \\
&= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

32.26 Exemple

Exemple 32.26

On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de $(-1)^X$?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

Théorème 32.28

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$ un ensemble et $p_1, \ldots, p_r \in [0, 1]$ des réels pour lesquels $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω, d'image E, pour lesquels pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de P.

32.30 Probabilité conditionnelle

Théorème 32.30

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour lequel $P(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est appelé la probabilité conditionnelle de A sachant B. L'application P_B est alors une probabilité sur Ω, appelée sa probabilité conditionnelle sachant B.

—

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

—

$$\begin{aligned}
P_B(A \sqcup C) &= \frac{P(B \cap (A \sqcup C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A) \sqcup (B \cap C))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\
&= P_B(A) + P_B(C)
\end{aligned}$$

32.31 Formule des probabilités totales

Théorème 32.31

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Alors, pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Soit $B \in P(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P(B \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= P(\bigsqcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \end{aligned}$$

Avec $P(A_i) > 0$ pour définir les probabilités conditionnelles.