Chapitre 17

Fractions rationnelles

17 Fractions rationnelles **1**
17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire 2
17.10 Degré d'une fraction 2
17.13 Propriété du degré 2
17.19 Théorème 3
17.20 Fraction dérivée 3

17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

Définition 17.2

Soit $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS+QR}{QS},\ \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \text{ et } \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.
Soit $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ dans $\mathbb{K}(X)$.
Montrons que :

$$\frac{PS+QR}{QS} = \frac{P_1S+Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$\begin{aligned}(PS+QR)Q_1S - (P_1S+Q_1R)QS &= S^2\underbrace{(PQ_1 - P_1Q)}_{=0} + RS\underbrace{(QQ_1 - Q_1Q)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

On raisonne de la même manière pour $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$ et ainsi, l'opération est bien définie.

17.10 Degré d'une fraction

Définition 17.10

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction. On pose $\deg(F) = -\infty$ si $F = 0$ et $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$ sinon. Le degré d'une fraction est donc un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Si $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$, alors :

$$\begin{aligned}P_1Q &= PQ_1\\ \text{donc } \deg(P_1Q) &= \deg(PQ_1)\\ \text{donc } \deg(P_1) + \deg(Q) &= \deg(P) + \deg(Q_1) \ (\mathbb{K} \text{ intègre})\\ \text{donc } \deg(P_1) - \deg Q_1 &= \deg(P) - \deg(Q)\end{aligned}$$

17.13 Propriété du degré

Théorème 17.13

Soit F et G deux fractions rationnelles. On a

$$\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \text{ et } \deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G).$$

On retrouve les mêmes propriétés que pour les polynômes.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$.

—

$$\begin{aligned}\deg(F+G) &= \deg(\frac{PS+QR}{QS})\\ &= \deg(PS+QR) - \deg(QS)\\ &\leq \max(\deg(PS), \deg(QR)) - \deg(QS)\\ &= \max(\deg(PS) - \deg(QS), \deg(QR) - \deg(QS))\\ &= \max\left(\deg\left(\frac{P}{Q}\right), \deg\left(\frac{R}{Q}\right)\right)\\ &= \max(\deg(F), \deg(G))\end{aligned}$$

— RAS

17.19 Théorème

Théorème 17.19

Soit F et G deux fractions rationnelles. Si les fonctions rationnelles $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ sont égales sur une partie infinie $\mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G$ alors les fractions rationnelles sont égales, i.e. $F = G$.

On note $F = \frac{P}{Q}$ et $G = \frac{R}{S}$ avec $P \wedge Q = 1$ et $R \wedge S = 1$.
On a :

$$\forall x \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}_G, \tilde{F}(x) = \tilde{G}(x)$$

Soit :

$$\forall x \in \mathcal{D}, P\tilde{(x)} \times S\tilde{(x)} = R\tilde{(x)} \times Q\tilde{(x)}$$

Comme $\mathcal{D}$ est infini, d'après le théorème de rigidité, $PS = RQ$, donc $F = G$.

17.20 Fraction dérivée

Définition 17.20

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle **fraction dérivée** de F la fraction notée F' (ou $\frac{dF}{dX}$) définie par

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Le résultat ne dépend pas du représentant de F choisi. On définit également les dérivées successives de F en posant $F^(0) = F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$.

On écrit $F = \frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$.
Montrons que $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2} = \frac{R'S - RS'}{S^2}$.
Comme $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$, on a $PS = RQ$.
Donc $P'S + S'P = R'Q + Q'R$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
[P'Q - PQ']S^2 - [R'S - RS']Q^2 &= P'SQ^2 + S'PQ^2 - R'QS^2 - Q'RS^2 \\
&= QS(P'S - R'Q) + Q^2RS' - S^2Q'P \\
&= QS(Q'R - S'P) + PSQS' - SQRQ' \\
&= 0
\end{aligned}$$