Chapitre 24

Comparaison locale des suites

24.18 Caractérisation de l'équivalence par la négligabilité

Propostion 24.18

On a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$$

$\boxed{\Rightarrow}$
Si $u_n \sim v_n$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = a_n v_n \text{ avec } a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{(a_n - 1)}_{=o(1)} v_n + v_n \\ &=_{n\to+\infty} v_n + o(v_n) \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \epsilon_n v_n \text{ avec } \epsilon_n = o(1) \\ &= \underbrace{(1+\epsilon_n)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} v_n \end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \sim v_n$$

24.20 Equivalent d'un polynôme

Propostion 24.20

Soit P un polynôme de monôme dominant $a_d X^d$. Alors $P(n) \sim a_d n^d$.

On note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.
Pour $k \in [\![0, d-1]\!]$:

$$n^k =_{n\to+\infty} o(n^d) \text{ et } a_k n^k =_{n\to+\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k =_{n\to+\infty} o(a_d n^d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(n) &= a_d n^d + o(a_d n^d) \\ &\sim a_d n^d \end{aligned}$$

24.31 Exemple

Exemple 24.31

Déterminons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^3\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right)\sqrt{3n+1}}$$

On note u_n l'expression de l'exemple.
But : trouver un équivalent (simple) de u_n.

—

$$e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$(e^{\frac{1}{n}}-1)^3 \sim \frac{1}{n^3}$$

—

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 &= (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}-1\\ &\sim \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

—

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

—

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) &= \ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\\ &\sim \frac{3}{n^2}\end{aligned}$$

Donc :

$$\ln^2\left(\frac{n^2+3}{n^2}\right) \sim \frac{9}{n^4}$$

—

$$\sqrt{3n+1} \sim \sqrt{3n}$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{\frac{1}{n^3}\times\frac{1}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{9}{n^4}\times\sqrt{3n}}\\ &= \frac{1}{18\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

24.36 Exemple

Exemple 24.36

Déterminer un équivalent de $\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2}{n}\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

24.43 Exemple

Exemple 24.43

Trouver un équivalent de $\ln \sin \frac{1}{n}$.

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + o\left(1\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) + o(o(1)) \\
&= \underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to -\infty} + o(1) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\sim \ln\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

24.46 Exemple

Exemple 24.46

Soit (u_n) une suite non nulle de limite nulle. On admet que $\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$, montrer que :

$$\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}$$

(au voisinage de 0).

$$\begin{aligned}
\exp\left(5n + n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &=_{n\to+\infty} \exp\left(5n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&=_{n\to+\infty} \exp\left(6n - \frac{1}{2} + o(1)\right) \\
&=_{n\to+\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}} \times e^{o(1)} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{6n}}{\sqrt{e}}
\end{aligned}$$

Exercice 24.9

Exercice 24.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$. Donner un équivalent simple de u_n.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}}) \\
&= e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}\left[(1+\frac{1}{n})^{-1} - 1\right]}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{\frac{1}{n}(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(1 - e^{-\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}) \\
&=_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)) \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Exercice 24.10

Exercice 24.10

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$$

1. Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante et de limite nulle.
2. On admet que si u est une suite de limite nulle, alors quand n tend vers $+\infty$, $\sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Déterminer le réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de Césaro à la suite (v_n), en déduire un équivalent simple de (u_n), quand $n \to +\infty$.

1. L'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par la fonction sinus.
   Comme sin est croissante, la suite (u_n) est monotone. On a $u_1 < u_0$ donc (u_n) est décroissante.
   Par stabilité, (u_n) est positive.
   D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   D'après le théorème du point fixe, car sin est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin \ell = \ell$.
   En étudiant les variations de $x \mapsto \sin x - x$, on trouve un unique point fixe : 0.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
v_n &= u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \\
&= \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha \\
&=_{n \to +\infty} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) - u_n^\alpha \\
&=_{n \to +\infty} u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha - u_n^\alpha \\
&=_{n \to +\infty} u_n^\alpha \left[1 + \alpha\left(-\frac{u_n^2}{6}\right) + o(u_n^2)\right] - u_n^\alpha \\
&=_{n \to +\infty} -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})
\end{aligned}$$

   Pour $\alpha = -2$, on a :

$$v_n =_{n \to +\infty} \frac{1}{3} + o(1)$$

   D'après le lemme de Césaro :

$$\frac{u_n^{-2} - u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n^{-2}}{n} &= \frac{u_0^{-2}}{n} + \frac{1}{3} + o(1) \\
&\sim \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   Donc :

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n}$$

   Donc :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$