Chapitre 31

Dénombrement

31.12 Exemple : parcours d'une fourmi

Exemple 31.12

La fourmi Donald se promène sur un grillage du plan de taille $2 \times p$ dont chaque arête est de longueur 1. Combien de chemins de longueur minimale peut-elle emprunter pour gagner le point d'arrivée depuis son point de départ ?

Compter ce nombre de chemins revient à dénombrer le nombre de mots de $p+2$ lettres contenant exactement p lettres D et 2 lettres B.
Pour constuire un tel mot, il suffit de choisir la place des deux B.
On a $p+1$ choix pour le premier B.
Pour chaque choix de position $k \in [\![1, p+1]\!]$, il reste $p+2-k$ choix pour le second B.
Le nombbre de choix possible final est donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p+1} (p+2-k) &= \sum_{k=1}^{p+1} k \\ &= \frac{(p+1)(p+2)}{2} \end{aligned}$$

31.19 Exemple

Exemple 31.19

Combien y-a-t-il de couples (x, y) dans $[\![1, n]\!]^2$ avec $x \neq y$?

Etape 1 : On choisit $x \in [\![1, n]\!]$, soit n choix.
Etape 2 : On choisit $y \in [\![1, n]\!] \setminus \{x\}$, soit $n-1$ choix.
Au total $n(n-1)$ choix (principe des bergers).

31.20 Exemple

Exemple 31.20

A partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Etape 1 : On choisit la première lettre : p possibilités.
Etape 2 : On choisit la deuxième lettre : $p-1$ possibilités.
Etape 3 : On choisit la troisième lettre : $p-1$ possibilités.
...
Au total : $p(p-1)^{n-1}$ possibilités.

31.27 Exemple

Exemple 31.27

De combien de façon peut-on tirer 5 cartes successivement avec remise dans un jeu de 52 cartes ?

Il s'agit de compter le nombre de 5-listes d'un ensemble de cardinal 52, soit 52^5 possibilités.

31.28 Exemple

Exemple 31.28

Combien y-a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot "OUPS" ?

Etape 1 : Choix de la place du mot "OUPS" : 4 choix possibles.
Etape 2 : On complète avec un mot de 3 lettres.
Cela revient à compter le nombre de 3-listes d'un ensemble à 26 éléments : 26^3 possibilités.
Aut total : 4×26^3 possibilités.