# Chapitre 18

# Dérivabilité

## 18.13 Condition nécessaire du premier ordre pour l'existence d'un extremum

**Théorème 18.13**

Soit $f$ une fonction définie sur $I$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.

On suppose que $f$ atteint un maximum local en $x_0$.
On choisit $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in U \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

En particulier :

$$\forall x \in U, x > x_0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
$$\forall x \in U, x < x_0, \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0$$

D'après le TCILPPL :

$$f'_{\text{droite}}(x_0) \leq 0 \text{ et } f'_{\text{gauche}}(x_0) \geq 0$$

Donc $f$ est dérivable en $x_0$.
Donc $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

## 18.17 Théorème de Rolle

**Théorème 18.17**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Soit $f$ continue sur $[a, b]$.
D'après le théorème de compacité, elle possède un maximum et un minimum.
Si ils sont tous les deux égaux à $f(a)$, alors $f$ est constante et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in ]a, b[$.
Sinon, l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$ et est atteint dans $]a, b[$.
D'après (18.13), $f'(c) = 0$.

## 18.21 Théorème des accroissements finis

**Théorème 18.21**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.
$g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{R})$.
$g(a) = f(a) = g(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

## 18.37 Caractérisation par la dérivée de la variation des fonctions

**Théorème 18.37**

Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $I \backslash X$, où $X$ est un ensemble fini. Alors :

1. $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I \backslash X$, $f'(x) \geq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement croissante.
2. $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in I \backslash X$, $f'(x) \leq 0$. Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors $f$ est strictement décroissante.

1. $\boxed{\Rightarrow}$
   On suppose $f$ croissante. Soit $a \in I \backslash X$. Soit $x \in I \backslash \{a\}$. On a :
   $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$
   D'après le TCILPPL, on a $f'(x) \geq 0$.
   $\boxed{\Leftarrow}$
   On suppose $X \neq 0$. Soit $x < y$ et $f \in \mathcal{C}^0([x, y], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]x, y[, \mathbb{R})$.
   D'après le TAF, on choisit $c \in ]x, y[$ tel que :
   $$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$
   Supposons $X = \{\alpha\}$ avec $x < \alpha < y$.
   On applique les TAF deux fois sur $[x, \alpha]$ et $[\alpha, y]$.
   et on choisit $c_1 \in ]x, \alpha[$ et $c_2 \in ]\alpha, y[$ tel que :
   $$f(\alpha) - f(x) = f'(c_1)(\alpha - x) \leq 0$$
   $$f(y) - f(\alpha) = f'(c_2)(y - \alpha) \leq 0$$
   On généralise sans difficulté quand $X$ est fini.
   Si $\varphi = \{x \in I | f'(x) = 0\}$ est fini, on utilise la même méthode, $X \equiv X \cup \varphi$.

2. RAS

## 18.43 Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ - HP

**Théorème 18.43 - HP**

Soit $I$ un intervalle et $x_0 \in I$. Soit $f$ une fonction définie de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I \backslash \{x_0\}$. Si $f^{(n)}$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.

— On prouve le théorème pour $n = 1$. On suppose $f \in \mathcal{C}^1(I \backslash \{x_0\}, \mathbb{R})$ et que $f'$ admet une limite finie en $x_0$.
  On prolonge $f'$ en une fonction $g$ par continuité en $x_0$. Ainsi, $g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
  On remarque que pour tout $x \neq x_0$ :
  $$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$
  où $a \in I \backslash \{x_0\}$ quelconque.
  $$f(x) = \underbrace{f(a) + \int_a^x g(t)\, dt}_{\text{Admet une limite finie quand } x \to x_0}$$
  Donc $f(x)$ admet également une limite finie quand $x \to x_0$.
  On prolonge alors $f$ par continuité en $\tilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

— On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$P(n)$ : "Pour tout $f \in \mathcal{C}^n(I\backslash\{x_0\}, \mathbb{R})$, si $f^{(n)}$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ se prolonge en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$".

Pour $n = 0$, c'est le prolongement par continuité.
Pour $n = 1$, c'est fait.
On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I\backslash\{x_0\}, \mathbb{R})$, etc...
Donc $f' \in \mathcal{C}^n(I\backslash\{x_0\}, \mathbb{R})$ et $f^{(n)}$ admet une limite finie en $x_0$.
D'après $P(n)$, on prolonge $f'$ en $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
En particulier, $g$ est continue sur $I$.
Donc $f'$ admet une limite finie en $x_0$.
On applique $P(1)$. On prolonge $f$ en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
Or $\tilde{f}' = g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.

## 18.45 IAF pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

**Théorème 18.45**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ et $M$ un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale :

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b f'(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_a^b |f'(t)|\, dt \\
&\leq \int_a^b M\, dt \\
&= M|b - a|
\end{aligned}$$