

# Chapitre 15

## Limites et continuité

<b>15 Limites et continuité</b>	<b>1</b>
15.6 Limite en un point du domaine	2
15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$	2
15.17 Unicité de la limite, cas réel	2
15.23 Proposition	2
15.30 Composition de limites	3
15.32 Limites et inégalités strictes	3
15.33 Limite et inégalités larges	4
15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction	4
15.39 Théorème de la limite monotone	5
15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1	5
15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2	6
15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3	6
15.65 Théorème de Heine	6
15.67 Caractérisation des intervalles compacts	7
15.68 Image d'un compact par une fonction continue	7
15.72 Théorème 15.72	7
15.73 Théorème 15.73	8

## 15.6 Limite en un point du domaine

### Proposition 15.6

Si  $a \in X$  et si  $f(x)$  admet une limite finie en  $a$ , alors cette limite est nécessairement égale à  $f(a)$ .

Comme  $f(x)$  admet une limite finie  $b$  quand  $x \rightarrow a$  :

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$|a - a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc  $\boxed{f(a) = b}$ .

## 15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$

### Proposition 15.15

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point  $a$ . Alors, si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $g$  aussi et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

On choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $W \cap X = W \cap Y$  et  $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$ .

Soit  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x)$  tend vers  $b$  quand  $x \rightarrow a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(b)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc  $g$  admet une limite en  $a$  égale à  $b$

## 15.17 Unicité de la limite, cas réel

### Théorème 15.17

Soit  $a \in \overline{X}$  et  $f$  une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de  $f(x)$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  est unique.

Par l'absurde. On suppose que  $f$  possède deux limites  $l \neq l'$  en  $a$ .

On choisit  $u \in \mathcal{V}(l)$  et  $u' \in \mathcal{V}(l')$  tels que  $u \cap u' = \emptyset$ .

Par définition, on choisit  $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$  tels que  $f(W \cap X) \subset U$  et  $f(W' \cap X) \subset U'$ .

Or  $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$  et  $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$ .

Absurde.

## 15.23 Proposition

### Proposition 15.23

Soit  $a \in \overline{X}$ . Soit  $(Z_i)_{i \in I}$  une famille **finie** de sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  tels que  $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$  (on dit que  $(Z_i)$  est un **recouvrement** de  $X$ ). La fonction  $f$  admet au point  $a$  une limite  $\ell$  (finie ou infinie) si et seulement si pour tout  $i$  tel que la limite de  $f$  en  $a$  sur  $Z_i$  est envisageable, cette limite existe et vaut  $\ell$ .

$\Rightarrow$ 

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $i \in I$  tel que  $a \in \overline{X \cap Z_i}$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f(U \cap X) \subset V$ .

EN particulier  $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$ .

 $\Leftarrow$ 

Notons  $J \subset I$  l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en  $Z_i$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . Pour tout  $i \in J$ , comme  $\lim_{x \rightarrow a, x \in Z_i} f = \ell$  on choisit  $U_i \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$ .

On pose  $U = \bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$  car  $J$  est fini.

On choisit  $U' \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $U' \cap \left( \bigcup_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$ .

$f(U \cap U' \cap X) \subset V$

Donc  $\boxed{\lim_a f = \ell}$ .

## 15.30 Composition de limites

### Proposition 15.30

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions avec  $f(X) \subset Y$ . Soit  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{Y}$  et  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\lim_a f = b$  et si  $\lim_b g = c$ , alors  $\lim_a g \circ f = c$ .

Soit  $W \in \mathcal{V}(c)$ . On choisit  $V \in \mathcal{V}(b)$  tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \quad (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

## 15.32 Limites et inégalités strictes

### Proposition 15.32

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{X}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $\lim_a f < M$  alors  $f(x) < M$  au voisinage de  $a$
2. Si  $\lim_a f > m$  alors  $f(x) > m$  au voisinage de  $a$ .

1. Notons  $b = \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $b < M$ , on choisit  $U \in \mathcal{V}(b)$  et  $U' \in \mathcal{V}(M)$  avec  $U < U'$ .

Comme  $\lim_a f = b$ , on choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

### 15.33 Limite et inégalités larges

#### Proposition 15.33

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \overline{X}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  possèdent des limites finies en  $a$ .

Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$ , alors  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

### 15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

#### Théorème 15.34

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \overline{X}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Sont équivalentes :

1.  $\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \rightarrow a, \lim f(u_n) = \ell (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite  $(u_n)$  de limite  $a$  à valeurs dans  $X$ , la suite  $(f(u_n))$  a pour limite  $\ell$ .

$1 \Rightarrow 2$

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \quad (\lim_a f = \ell)$$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$1 \Leftarrow 2$

Par contraposée. On suppose que  $f$  n'admet pas  $\ell$  comme limite en  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$V_n = \begin{cases} ]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[ & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[ & \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe  $W \in \mathcal{V}(\ell)$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}(a)$ , il existe  $x \in V \cap X$  et  $f(x) \notin W$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on choisit  $x_n \in V_n \cap X$  tel que  $f(x_n) \notin W$ .

Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

## 15.39 Théorème de la limite monotone

### Théorème 15.39

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante.

1. La limite  $\lim_{a^+} f$  existe et est finie. Plus précisément, on a  $f(a) \leq \lim_{a^+} f$ .
2. Pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $\lim_{c^-} f$  et  $\lim_{c^+} f$  existent et sont finies. Plus précisément :  $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .
3. La limite  $\lim_b f$  existe et est soit finie, soit égale à  $+\infty$ .

1. On note  $F = f(]a, b[)$ . Comme  $f$  est définie au voisinage de  $a$ ,  $]a, b[ \neq \emptyset$  et  $F \neq \emptyset$ .  
Par ailleurs, comme  $f$  est croissante sur  $]a, b[$ ,  $F$  est minorée par  $f(a)$ .  
D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $F$  possède une borne inférieure notée  $\alpha$ , avec  $f(a) \leq \alpha$ .  
Montrons par définition que  $\lim_{a^+} f = \alpha$ .

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha + \epsilon$  n'est pas un minorant de  $F$  par définition de  $\alpha$ . On choisit :

$$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

Par croissance de  $f$  sur  $]a, b[$  :

$$\forall x \in ]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

On pose  $\eta = x_0 - a > 0$ , on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in ]a - \eta[, a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$

2. Pour  $c \in ]a, b[$ , en appliquant (15.39.1) à  $f|_{[a, b[}$ , on montre que  $\lim_{c^+} f$  existe et  $f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .  
On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :

$$F = f(]a, c]), \alpha = \sup(F)$$

pour montrer que  $\lim_{c^-} f$  existe et

3. Par disjonction de cas.

- Si  $f$  est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
- Si  $f$  n'est pas majorée. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  n'est pas majorée, on choisit  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) > A$ .  
Comme  $f$  est croissante :

$$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$

Donc  $\lim_b f = +\infty$ .

## 15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

### Théorème 15.59

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  d'extrémité  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  (ou l'inverse), il existe  $c \in ]a, b[$ , tel que  $f(c) = 0$ .

On note  $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$ .

- $A \neq \emptyset$  car  $f$  est définie et strictement positive au voisinage de  $a$  (15.32).
- $A$  est majoré car  $f$  est strictement négative au voisinage de  $b$  (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $A$  possède une borne supérieure notée  $c \in ]a, b[$ .

- On a  $c \notin A$ . En effet, si  $f(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement positive sur un voisinage de  $c$ , et comme  $f$  est définie à droite de  $c$ , cela contredirait que  $c$  est un majorant de  $A$ .  
Donc  $f(c) \leq 0$ .

- Si  $f(c) < 0$ , alors  $f$  est strictement négative au voisinage à gauche de  $c$ .  
Absurde car  $c$  est le plus petit des majorants.

Conclusion,  $\boxed{f(c) = 0}$ .

## 15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

### Théorème 15.60

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $M = \sup_I f(x)$  et  $m = \inf_I f(x)$  (éventuellement infinies).

Alors  $f$  prend toutes les valeurs de l'intervalle  $]m; M[$  :

$$\forall x_0 \in ]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à  $f - x_0$ .

## 15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

### Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.

## 15.65 Théorème de Heine

### Théorème 15.65

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Rappel :

$$C^0(I) : \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$Cu(I) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On raisonne par l'absurde. Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  mais non uniformément continue sur  $[a, b]$ .

On choisit  $\epsilon$  tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

Ainsi, pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$ , on choisit un couple  $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$  tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \epsilon$$

En particulier  $(x_n)$  est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en extrait  $(x_{\varphi(n)})$  suite convergente vers  $\ell$ .

D'après le TCILPPL,  $\ell \in [a, b]$ .

Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors :

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par continuité :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$$

Donc par opération :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Absurde d'après (\*).

## 15.67 Caractérisation des intervalles compacts

### Lemme 15.67

Les intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  sont exactement les segments, c'est-à-dire les intervalles fermés bornés  $[a, b]$ .

Les segments sont bien compacts (BW et TCILPPL).

— Si  $I = ]-\infty, a[$ ,

$$u_n = a - n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \notin I$$

$$u_n = a - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \notin I$$

## 15.68 Image d'un compact par une fonction continue

### Lemme 15.68

L'image continue d'un compact est compact.

Soit  $I$  un segment, donc un intervalle.

Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle (TVI v3).

Montrons que  $f(I)$  est compact.

Soit  $(y_n) \in f(I)^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x_n \in I$  tel que :

$$y_n = f(x_n)$$

Or  $I$  est compact (15.67), on choisit :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in I$$

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ car } f \text{ est continue sur } I.$$

## 15.72 Théorème 15.72

### Théorème 15.72

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.



RAS



Supposons  $f$  non strictement monotone.

On peut supposer qu'il existe alors :

$$x < y < z$$

tels que  $f(x) < f(y)$  et  $f(z) < f(y)$ .

Soit :

$$\lambda = \frac{f(y) + \max(f(y), f(z))}{2} \in ]f(x), f(y)[$$

$$\in ]f(z), f(y)[$$

Par continuité de  $f$  sur les intervalles  $]x, y[$  et  $]y, z[$ , il existe  $\alpha \in ]x, y[$  et  $\beta \in ]y, z[$  tels que :

$$f(\alpha) = \lambda = f(\beta)$$

Donc  $f$  n'est pas injective.

## 15.73 Théorème 15.73

### Théorème 15.73

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  monotone sur  $I$ . Si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue sur  $I$ .

On suppose  $f$  croissante sur  $I$ .

On suppose que  $f$  n'est pas continue sur  $I$ .

On applique le TLM :

$$\forall a \in I, \lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f \text{ (quand tout existe)}$$

Comme  $f$  n'est pas continue sur  $I$ , on choisit  $a \in I$  tel que :

$$\lim_{a^-} f < f(a) \text{ ou } f(a) < \lim_{a^+} f$$

On pose :

$$\lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^-} f}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^+} f}{2}$$

$f(a) \neq \lambda$  et par croissance :

$$\forall x < a, f(x) < \lambda$$

$$\forall x > a, f(x) > \lambda$$

Donc  $\lambda \notin f(I)$ .

Donc  $f(I)$  n'est pas connexe, donc  $f(I)$  n'est pas un intervalle.