

# Chapitre 21

## Applications linéaires

|  |          |
|--|----------|
| <b>21 Applications linéaires</b>   | <b>1</b> |
| 21.4 Exemple . . . . .   | 2        |
| 21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .                                    | 2        |
| 21.10 Composition de deux AL . . . . .   | 2        |
| 21.13 Bilinearité de la composition . . . . .                                      | 2        |
| 21.16 Structure des images directes et réciproques . . . . .                       | 3        |
| 21.21 Famille génératrice de $Im(f)$ . . . . .                                     | 3        |
| 21.23 Réciproque d'un isomorphisme . . . . .                                       | 4        |
| 21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme . . . . . | 4        |
| 21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur . . . . .                         | 4        |
| 21.53 Diagonalisation d'un projecteur . . . . .                                    | 4        |
| 21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs . . . . .                        | 5        |
| 21.59 Diagonalisation d'une symétrie . . . . .                                     | 5        |
| 21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité . . . . .         | 6        |
| 21.64 Exemple . . . . .  | 6        |
| 21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base . . . . .            | 7        |

## 21.4 Exemple

### Exemple 21.4.1

L'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + 3y$ .

Soit  $((x, y), (x', y'), \lambda) \in (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ &= 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') \\ &= 2x + 3y + \lambda(2x' + 3y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y'). \end{aligned}$$

## 21.8 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

### Proposition 21.8

$\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

- $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$
- $\vec{0} \mathcal{L}(E, F)$
- Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Soit  $(x, y) \in E^2, \lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} (f + \alpha g)(x + \lambda y) &= f(x + \lambda y) + \alpha g(x + \lambda y) \\ &= f(x) + \lambda f(y) + \alpha g(x) + \alpha \lambda g(y) \\ &= f(x) + \alpha g(x) + \lambda(f(y) + \alpha g(y)) \\ &= (f + \alpha g)(x) + \lambda(f + \alpha g)(y). \end{aligned}$$

Donc  $f + \alpha g \in \mathcal{L}(E, F)$ .

## 21.10 Composition de deux AL

### Proposition 21.10

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\begin{aligned} g \circ f(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) \\ &= g(f(x) + \lambda f(y)) \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y). \end{aligned}$$

Donc  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

## 21.13 Bilinéarité de la composition

### Proposition 21.13

La composition d'application linéaire est bilinéaire. En termes plus précis,  $E, F$  et  $G$  étant des  $\mathbb{K}$ -ev, l'application

$$\Psi : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G); (u, v) \mapsto v \circ u$$

est une application bilinéaire.

D'après la remarque (21.11),  $\Psi$  est linéaire à droite.

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall (v, v') \in \mathcal{L}(F, G)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \Psi(u, v + \lambda v') = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u, v')$$

Soit  $(u, u') \in \mathcal{L}(E, F)^2, v \in \mathcal{L}(F, G), \lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{E}, \Psi(u + \lambda u', v)(x) &= v \circ (u + \lambda u')(x) \\ &= v(u(x) + \lambda u'(x)) \\ &= v(u(x)) + \lambda v(u'(x)) \\ &= \Psi(u, v)(x) + \lambda \Psi(u', v)(x) \end{aligned}$$

Donc  $\Psi(u + \lambda u', v) = \Psi(u, v) + \lambda \Psi(u', v)$ .

## 21.16 Structure des images directes et réciproques

### Proposition 21.16

1. Soit  $E'$  un sev de  $E$ . Alors  $f(E')$  est un sev de  $F$ .
2. Soit  $F'$  un sev de  $F$ . Alors  $f^{-1}(F')$  est un sev de  $E$ .

1. —  $f(E') \subset F$   
 —  $0 = f(0) \in f(E')$   
 — Soit  $(x, y) \in f(E')^2, \lambda \in \mathbb{K}$ . On écrit  $x = f(\alpha), y = f(\beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in E'^2$ .

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= f(\alpha) + \lambda f(\beta) \\ &= f(\alpha + \lambda \beta) \\ &\in f(E') \end{aligned}$$

2. —  $f^{-1}(F') \subset E$   
 —  $0 = f(0) \in f^{-1}(F')$   
 — Soit  $(x, y) \in f^{-1}(F')^2, \lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda f(y) \in F' \\ \text{donc } x + \lambda y &\in f^{-1}(F') \end{aligned}$$

## 21.21 Famille génératrice de $Im(f)$

### Proposition 21.21

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$ . Alors  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $Im(f)$ .

Soit

$$Im(f) = Vect(f(e_i)_{i \in I})$$

- Pour tout  $i \in I, f(e_i) \in Im(f)$ .  
 Comme  $Im(f)$  est un sev :

$$Vect(f(e_i)_{i \in I}) \subset Im(f)$$

- Soit  $a \in Im(f)$ . On choisit  $x \in E$  tel que  $a = f(x)$ .  
 Comme  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$ , on peut écrire  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$  où  $(\lambda_i)_{i \in I}$  est à support fini.

$$\begin{aligned} a &= f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) \\ &\in Vect(f(e_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

## 21.23 Réciproque d'un isomorphisme

### Théorème 12.23

Soit  $f$  un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ . Alors  $f^{-1}$  est une application linéaire, donc un isomorphisme de  $F$  vers  $E$ .

On pose  $g = f^{-1}$ . Soit  $(x, y) \in F^2, \lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(f(g(x)) + \lambda f(g(y))) \\ &= g(x) + \lambda g(y) \end{aligned}$$

Donc  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .

## 21.41 Structure de l'ensemble des polynômes annulateurs - Hors Programme

### Proposition 21.41 - HP

L'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $P$  et  $Q$  annulent  $u$ , alors :

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Si  $B \in \mathbb{K}[X]$  :

$$(PB)(u) = P(u) \circ B(u) = B(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

## 21.52 Caractérisation de l'image d'un projecteur

### Proposition 21.52

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors  $x \in \text{Im}(p)$  si et seulement si  $p(x) = x$ . Soit :

$$\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit  $p$  un projecteur. Soit  $x \in E$ .

- Si  $x \in \text{Im}(p)$ , on choisit  $y \in E$  tel que  $x = p(y)$ .  
Donc  $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$ .
- Si  $p(x) = x$ , alors  $x \in \text{Im}(p)$ .
- 

$$\begin{aligned} x \in \text{Im}(p) &\Leftrightarrow p(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - \text{id})(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(p - \text{id}) \end{aligned}$$

## 21.53 Diagonalisation d'un projecteur

### Théorème 21.53

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors :

$$E = \ker(p) \oplus \ker(p - \text{id}_E)$$

Soit  $x \in \ker(p) \cap \ker(p - \text{id}_E)$ .

Donc  $p(x) = 0$  et  $p(x) - x = 0$ .

Donc  $x = 0$ .

Soit  $x \in E$ , on écrit  $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \ker(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im}(p) = \ker(p-id)}$ .

Donc  $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$ .

## 21.57 Caractérisation géométrique des projecteurs

### Théorème 21.57

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

—  $p$  est un projecteur si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$  et

$$\forall f \in F, \forall g \in G, p(f + g) = f.$$

— Dans ce cas,  $F = \operatorname{Im}(p)$  et  $G = \ker(p)$ .

— Ainsi, un projecteur est une projection géométrique sur  $\operatorname{Im}(p)$  parallèlement à  $\ker(p)$ .

$\Rightarrow$

Existence justifiée avec  $F = \operatorname{Im}(p)$  et  $G = \ker(p)$ .

$\Leftarrow$

Soit  $x = f + g \in E$ .

$$\begin{aligned} p^2(x) &= p \circ p(f + g) \\ &= p(f) \\ &= f \\ &= p(f + g) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Donc  $p^2 = p$ , donc  $p$  est un projecteur.

## 21.59 Diagonalisation d'une symétrie

### Théorème 21.59

On suppose que  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2. Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . Alors :

$$E = \ker(s + id_E) \oplus \ker(s - id_E)$$

— Soit  $x \in \ker(s - id) \cap \ker(s + id)$ . Donc :

$$\begin{aligned} s(x) - x &= 0 \\ s(x) + x &= 0 \\ \text{donc } 2x &= 0 \\ \text{donc } x &= 0 \end{aligned}$$

— Pour  $x \in E$ ,  $x = \frac{1}{2}(\underbrace{x - s(x)}_{\in \ker(s+id)}) + \frac{1}{2}(\underbrace{x + s(x)}_{\in \ker(s-id)})$ .

## 21.63 Détermination d'une AL par l'image d'une base, ou rigidité

### Proposition 21.63

Etant donné une base  $(b_i)_{i \in I}$  de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $u(b_i) = f_i$ .

Soit  $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de  $F$ .

Soit  $x \in E$ . On écrit  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

On pose  $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f_i$ . On définit bien une application car les  $\lambda_i$  sont uniques.

Montrons que  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

On écrit  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  et  $y = \sum_{i \in I} \mu_i b_i$ . Ainsi :

$$x + \alpha y = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) b_i$$

Par définition :

$$\begin{aligned} u(x + \alpha y) &= \sum_{i \in I} (\lambda_i + \alpha \mu_i) f_i \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f_i + \alpha \sum_{i \in I} \mu_i f_i \\ &= u(x) + \alpha u(y) \end{aligned}$$

L'existence est prouvée, et si  $v \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que :

$$\forall i \in I, v(b_i) = f_i$$

Le raisonnement précédent impose que :

$$\forall x \in E, u(x) = v(x)$$

Soit :

$$u = v$$

## 21.64 Exemple

### Exemple 21.64

1. Déterminer l'expression générale de l'application lin de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$f(1, 0) = (3, 2) \quad \text{et} \quad f(0, 1) = (2, 1)$$

2. Montrer que toute application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de la forme  $X \mapsto MX$  et décrire  $M$  à partir d'une base de  $\mathbb{R}^p$ .
3. Soit  $(b_i)_{i \in I}$  de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $u(b_i) = f_i$ .

1. Pour tout  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x(1, 0) + y(0, 1)) \\ &= xf(1, 0) + yf(0, 1) \\ &= x(3, 2) + y(2, 1) \\ &= (3x + 2y, 2x + y) \end{aligned}$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ .

Soit  $(b_1, \dots, b_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(b_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$$

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ .

$$\begin{aligned}
 f(X) &= f\left(\sum_{j=1}^p x_j b_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^p x_j f(b_j) \\
 &= \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p m_{ij} x_j\right) e_i \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p m_{nj} x_j \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 21.68 Caractérisation de l'injectivité par l'image d'une base

### Proposition 21.68

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective
2. l'image de la famille libre de  $E$  par  $f$  est une famille libre de  $F$   
Si de plus  $E$  admet au moins une base, elles sont aussi équivalentes à :
3. l'image de toute base de  $E$  par  $f$  est une famille libre de  $F$
4. il existe une base de  $E$  dont l'image par  $f$  est une famille libre de  $F$

$1 \Rightarrow 2$

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ .

On suppose  $\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

Donc :

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) &= 0 \\
 \text{donc } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i &= 0 \\
 \text{donc } \forall i \in I, \lambda_i &= 0
 \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$

On suppose  $f$  non injective. Donc  $\ker(f) \neq \{0\}$ .

Soit  $x \neq 0$  tel que  $f(x) = 0$ .

Or  $(x)$  est libre ( $x \neq 0$ ) et  $(f(x))$  est liée.

On suppose que  $E$  admet une base.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$  RAF

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$  RAF

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$

Soit  $(b_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  telle que  $(f(b_i))_{i \in I}$  est libre.

Soit  $x \in \ker f$ . Donc  $f(x) = 0$  et  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$  avec  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille de scalaires à support fini.

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i f(b_i) \end{aligned}$$

Donc, car  $(f(b_i))_{i \in I}$  est libre, on a :

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Donc  $x = 0$ .

Donc  $f$  est injective.