

Chapitre 19

Convexité

19 Convexité	1
19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes	2
19.8 Inégalités des pentes	2
19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes	3
19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée	4
19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes	4
19.17 Somme de fonctions convexes	5
19.18 Composition de fonctions convexes	5
19.19 Réciproque de fonctions convexes	5
19.20 Extrema des fonctions convexes	6

19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Proposition 19.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur, soit sur $I \cap]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$.

On pose $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$.

g paramètre la sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

— Sur $[x, y]$, RAF car f est convexe.

— Soit $t > y$. On pose $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\ &= \frac{t(y-x) + x(t-y)}{t-x} \\ &= y \end{aligned}$$

Par convexité de f :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\ &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(x) \\ \text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{\lambda}f(y) - \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x}f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right)f(x) \\ &= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\ &= g(t) \end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si $t \leq x < y$.

19.8 Inégalités des pentes

Proposition 19.8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
- Si f est convexe, alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$ avec $a < b < c$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$

On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et $x < y$ dans $I \setminus \{a\}$.

— On suppose $x < a < y$. D'après (19.7) :

$$f(y) \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \times (y-a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

— Si $x < a < y$, d'après (19.7) :

$$f(y) \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \times (y - a) + f(a)$$

Donc :

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

— Les autres cas s'y ramènent.



On suppose que pour tout $a \in I$, $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.

Soit $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$. On pose $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$.

g_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, donc :

$$g_a(x) \leq g_a(y)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} x - a &< 0 \text{ et } y - a > 0 \\ (f(x) - f(a))(y - a) &\leq (f(y) - f(a))(x - a) \\ \text{donc } f(a)(y - x) &\leq f(x)(y - a) - f(y)(x - a) \\ \text{soit } f(a) &\leq f(x) \frac{y - a}{y - x} + f(y) \frac{a - x}{y - x} \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

2. Soit $a < b < c$.

$$g_a(b) \leq g_a(c) = g_c(a) \leq g_c(b)$$

19.9 Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Théorème 19.9

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert. La fonction f est alors continue et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point (où les limites sont envisageables). Pour tout $a \in I$, on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Pour $a \in I$, on note encore $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Comme g est définie à gauche et à droite de a (I est ouvert) et que g est croissante sur $I \setminus \{a\}$, d'après le TLM g admet des limites finies à gauche et à droite de a et :

$$\begin{aligned} \lim_{a^+} g &= f'_d(a) \geq f'_g(a) = \lim_{a^-} g \\ \forall x \neq a, f(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a) \end{aligned}$$

19.11 Caractérisation des fonctions convexes par les variations de la dérivée

Théorème 19.11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

\Rightarrow

On suppose f convexe. Soit $x < y$. Soit a tel que $x < a < y$.

D'après l'inégalité des pentes (f est convexe), on a :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

En considérant les limites $a \rightarrow x^+$ et $a \rightarrow y^-$ et par TCILPPL :

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Donc f' est croissante.

\Leftarrow

On suppose f' croissante sur I . Soit $x < y$. Soit $a \in]x, y[$.

On applique deux fois le TAF : on choisit $\alpha \in]x, a[$ et $\beta \in]a, y[$ tels que :

$$\frac{f(a) - f(x)}{-x + a} = f'(\alpha) \text{ et } \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\beta)$$

Comme f' est croissante, on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} &\leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{a - x}{y - x} f(y) + \frac{y - a}{y - x} f(x) \end{aligned}$$

Comme $a \in]x, y[$, $a = \lambda y + (1 - \lambda)x$ et aussi :

$$f(a) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$$

Donc f est convexe (sur I).

19.13 Caractérisation des fonctions convexes par les tangentes

Proposition 19.13

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f est convexe sur I si et seulement si le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.

\Rightarrow

On suppose f convexe. Soit $a \in I$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f'(a)(t - a) + f(a)$.

On pose $h = f - \varphi \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et $h' = f' - f'(a)$.

Or f est convexe donc f' est croissante sur I . Donc :

a	
h'	$- \quad 0 \quad +$
h	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$
h	$+$

\Leftarrow

Soit $x < y$ et $a = \lambda y + (1 - \lambda)x \in]x, y[$.

Par hypothèse, le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a .

$$\forall t \in I, f(t) \geq f'(a)(t - a) + f(a)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f'(a)(x-a) + f(a) \\ f(y) &\geq f'(a)(y-a) + f(a) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (y-a)f(x) + (a-x)f(y) &\geq (y-a)f(a) \\ \text{donc } f(a) &\leq \frac{y-a}{y-x}f(x) + \frac{a-x}{y-x}f(y) \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

19.17 Somme de fonctions convexes

Proposition 19.17

La somme de deux fonctions convexes est convexe.

Soit f et g convexes. Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ g(a) &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \end{aligned}$$

Donc :

$$(f+g)(a) \leq \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

Donc $f+g$ est convexe.

19.18 Composition de fonctions convexes

Proposition 19.18

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes avec g croissante. Alors $g \circ f$ est convexe sur I .

Soit $x < y$ et $a = \lambda x + (1-\lambda)y \in]x, y[$.

On a :

$$\begin{aligned} f(a) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ \text{donc } g \circ f(a) &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda(g \circ f(x)) + (1-\lambda)(g \circ f(y)) \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

19.19 Réciproque de fonctions convexes

Proposition 19.19

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction convexe bijective avec I ouvert. Alors $g = f^{-1}$ est soit concave, soit convexe sur J .

Comme f est convexe sur I ouvert, f est continue sur I (19.9).

Or f est bijective, donc f est strictement monotone sur I (15.72).

— Supposons f strictement croissante sur I . Soit $x < y$ dans $J = f(I)$. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Alors g est strictement croissante.

On pose $x = f(a)$ et $y = f(b)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1-\lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \\ &\leq \lambda x + (1-\lambda)y \end{aligned}$$

Or g est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned}\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) &= \lambda a + (1 - \lambda)b \\ &\leq g(\lambda x + (1 - \lambda)y)\end{aligned}$$

Donc g est concave sur J .

— Si f est strictement décroissante (et donc g strictement décroissante), alors g est concave sur J .

19.20 Extrema des fonctions convexes

Proposition 19.20

Soit f une fonction convexe définie par un intervalle I ouvert. Alors f admet un minimum global en un point a si et seulement si a est un point critique.

\Rightarrow

RAF

\Leftarrow

On suppose que a est un point critique. Donc $f'(a) = 0$.

Or le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a , soit :

$$\forall x \in I, f(x) \geq \underbrace{f'(a)}_0(x - a) + f(a) = f(a)$$

Donc $f(a)$ est un minimum global de f .