Chapitre 25

Comparaison locale des fonctions

25.6 Caractérisation séquentielle

Théorème 25.6

Soit f et g deux fonctions sur X et $a \in \overline{X}$. Alors :

1. $f \underset{a}{=} O(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = O(g(u_n))$.
2. $f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ à valeurs dans X, alors $f(u_n) = o(g(u_n))$.

1.

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(g) & \text{ ssi il existe } h \text{ bornée au voisinage de } a \text{ tel que } f = g\cdot h \\ & \text{ ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = g(u_n)\times w_n \text{ où } (w_n) \text{ est une suite bornée.} \\ & \boxed{\Rightarrow} \quad w_n = h(u_n) \text{ ssi bornée } \quad \boxed{\Leftarrow} \quad \text{ Par l'absurde avec (25.5).} \\ & \text{ ssi Pour toute suite } (u_n) \in X^{\mathbb{N}} \text{ avec } u_n \to a,\ f(u_n) = O(g(u_n)). \end{aligned}$$

2. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (nulle).

25.14 Existence, unicité et expression du développement de Taylor de f

Théorème 25.14

Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. Alors le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n existe et est unique. Il est donné explicitement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

RAS, cf. (16.56)

25.20 Formule de Taylor avec reste intégral de l'ordre n au point a

Théorème 25.20

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ Alors :

$$\forall x \in [a,b], f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

— On suppose $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a,b], \sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\, dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— On suppose le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b],\mathbb{R})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\
\text{(IPP)} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

25.22 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n au point a évaluée en b - Hors Programme

Théorème 25.22

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ dérivable sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c \in]a,b[, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

On introduit :

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

On remarque que $g(b) = f(b)$.
On choisit A de telle sorte que $g(a) = f(b)$.
On pose :

$$A = \frac{-(n+1!)}{(b-a)^{n+1}} \left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f(b)\right]$$

Par hypothèse, $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$.
D'après le théorème de Rolle, on choisit $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]a,b[, g'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - A\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - A\frac{(b-x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{A(b-c)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n$$

Or $c \neq b$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.
On conclut avec $f(b) = g(a)$.

25.27 Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0

Théorème 25.27

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0. Alors au voisinage de x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

On a $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^{(n-n+1)}(I,\mathbb{R})$.
D'après la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

Montrons que :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \underset{x\to x_0}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\,dt\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $v \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que :

$$\forall x \in v, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \leq \varepsilon$$

car $f^{(n)} \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathcal{V}, x > x_0$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)]\,dt\right| &\leq \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)|\,dt \\ &\leq \varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1}\,dt \\ &= \frac{\varepsilon(x-x_0)^n}{n!}\end{aligned}$$

Le résultat reste vrai (au signe près) pour $x \leq x_0$.
Par définition (avec les ε), on a le résultat souhaité.

25.28 Développement limité de l'exponentielle

Propostion 25.28

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de l'exponentielle donne l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$f = \exp \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

25.29 Développement limité du logarithme

Propostion 25.29

La formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ donne l'égalité suivante au voisinage de 1 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$$

$f : x \mapsto \ln(1+x) \in \mathcal{C}^n(]-1,\infty[,\mathbb{R})$.

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$
$$f^{(k+1)}(0) = (-1)^k k!$$

Donc, d'après Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

25.30 Développement limité de cosinus et sinus

Propostion 25.30

La formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+2$ pour le sinus et à l'ordre $2n+1$ pour le cosinus en 0 donne les égalités suivantes au voisinage de 0 :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$\sin \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = 1 \\ \sin^{(4k+3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Idem pour cos.

25.40 Unicité du DL

Théorème 25.40

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, alors ce développement est unique.

On suppose que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

On suppose par l'absurde que les développements sont différents.
On note $p = \min(k \mid a_k \neq b_k)$.
Or :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k &\underset{x\to x_0}{=} +o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k(x-x_0)^k &\underset{x\to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + \sum_{k=p+1}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p(x-x_0)^p &\underset{x\to x_0}{=} b_p(x-x_0)^p + o((x-x_0)^n) \\
\text{donc } a_p &= b_p + o(1)
\end{aligned}$$

Absurde car $a_p \neq b_p$.

25.41 DL de fonctions paires ou impaires

Propostion 25.41

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au voisinage de 0. Alors :
- si f est paire, son DL n'est constitué que de monômes de degré pair.
- si f est impaire, son DL n'est constitué que de monômes de degré impair.

- On suppose f paire et :

  $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

  Donc :

  $$f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k + o(x^n)$$

  Par unicité du DL :

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = (-1)^k a_k$$

  Donc pour k impair :

  $$a_k = 0$$

- Même raisonnement pour f impaire.

25.42 Remarque

Remarque 25.42

3. L'existence d'un DL à l'ordre n en x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée n-ième de f en x_0. Ainsi, tous les DL ne sont pas obtenus par la formule de Taylor-Young.

3. Si f admet un DL_0 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a + o(1)$$

Donc :

$$f(x) - a \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

Néecssairement, $a = f(x_0)$ et f est continue en x_0.
Si f admet un DL_1 en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{=} a + o(1) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$$

25.43 Exemple

Exemple 25.43.2

2. La fonction $f : t \mapsto \cos t + t^3 \sin \frac{1}{t}$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$ admet un DL d'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

2.

$$\begin{aligned} f(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) &= \cos t - 1 + \frac{t^2}{2} + t^3 \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) + t^2 \times t \sin \frac{1}{t} \\ &\underset{t \to 0}{=} o(t^2) \end{aligned}$$

Donc f admet bien un DL_2 en 0, donc un DL_1 en 0, donc est dérivable en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$ par théorème d'opérations).

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$
$$\frac{f'(x)}{x} = -\frac{\sin x}{x} + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

25.50 Forme normalisée d'un DL au voisinage de 0

Propostion 25.50

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, admettant à l'ordre n un DL non nul. Alors il existe un unique entier $m \leq n$ tel que pour h au voisinage de 0 on ait :

$$f(x_0 + h) \underset{x \to x_0}{=} h^m(a_0 + a_1 h + \ldots + a_{n-m} h^{n-m}) + o(h^{n-m})$$

avec $a_0 \neq 0$. Il s'agit de la **forme normalisée** du DL à l'ordre n de f au voisinage de x_0.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \\ &\underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=m}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k) \\ &\underset{x \to x_0}{=} (x - x_0)^m \left(\sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^{n-m}) \right) \end{aligned}$$

Puis on effectue un changment de variable : $x = x_0 + h$.

25.56 Produit de DL

Propostion 25.56

Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de 0 et P et Q deux polynômes de degré au plus n. Si au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Alors :

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} (P(x) + o(x^n))(Q(x) + o(x^n)) \\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + P(x)o(x^n) + Q(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + o(x^n) \\
&\underset{x\to 0}{=} T_n(PQ)(x) + o(x^n)
\end{aligned}$$

25.57 Exemple

Exemple 25.57

1. $\frac{\cos x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
2. $(e^x)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+x} &= \cos x \times (1+x)^{-1} \\
&\underset{x\to 0}{=} (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(e^x)^2 &\underset{x\to 0}{=} (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

25.58 Exemple

Exemple 25.58

1. $(\sin x - x)(\cos x - 1) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12} - \frac{x^7}{90} + o(x^8)$

1.

$$\begin{aligned}(\sin x - x)(\cos x - 1) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}+\left(\frac{-1}{2\times 5!}-\frac{1}{3!4!}\right)x^7+o(x^8)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{1}{5\times 3\times 3!}x^7+o(x^8)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}-\frac{x^7}{90}+o(x^8)\end{aligned}$$

25.59 Composition de DL

Propostion 25.59

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Si P et Q sont des développements limités de f et g en 0 à l'ordre n, alors $T_n(Q \circ P)$ est un DL en 0 de $g \circ f$ à l'ordre n :

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n)$$

On suppose que :

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to 0}{=} P(x)+o(x^n)\\ g(x) &\underset{x\to 0}{=} Q(x)+o(x^n)\end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on a $P(0) = 0$.

$$g\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(f(x)) + o(x^n)$$

Avec la notation $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned}g\circ f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k f(x)^k + o(f(x)^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(P(x)+o(x^n))^k + o((P(x)+o(x^n))^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}[b_k(P(x))^k + \underbrace{o(x^n)}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}O(1)}] + o(\underbrace{P(x)^k}_{P(x)\underset{x\to 0}{=}=O(x)})\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k P(x)^k + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} Q\circ P(x) + o(x^n)\\ &\underset{x\to 0}{=} T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n)\end{aligned}$$

25.60 Exemple

Exemple 25.59

1. $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
2. $e^{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &\underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)^3\right)^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}(x+O(x^3))^2+\frac{1}{6}(x+O(x^3))^3+o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{\cos x-1} &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{X^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

25.61 Exemple

Exemple 25.61

1. $\ln\cos x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$
3. $\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{2}+o(x^9)$

1.

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)^2+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{0}-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\frac{x^2}{1+x^2} &\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3+o(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6(1-x^2+O(x^4))^3+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6(1-3x^2+O(x^4))+O(x^{10}) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}x^8+o(x^9)
\end{aligned}$$

25.63 Exemple

Exemple 25.63

Montrer que $f : x \mapsto x\cos x$ est injective sur un voisinage de 0 et trouver un DL à l'ordre 3 d'une réciproque locale (on doit trouver $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$).

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

En particulier, $f'(0) = 1$, donc $f' > 0$ sur un voisinage de 0 car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc f est strictement croissante sur un voisinage de 0, où elle est surjective.
f induit une bijection $\tilde{f} : u \to f(u)$. On note $f^{-1} : f(u) \to u$ la bijection réciproque induite par $\tilde{f}$.
Comme $\tilde{f}$ ne s'annule pas sur u, d'après le théorème de la bijection dérivable, $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(f(u), u)$.
Donc en particulier f^{-1} possède un $\mathrm{DL}_3(f(0))$.
On a :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

Comme $f^{-1}(f(0)) = 0$, $a_0 = 0$.
Enfin :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1} \circ f(x) \\ &\underset{x\to 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1\left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) + a_2(x + O(x^3))^2 + a_3(x + O(x^3))^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité des DL :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_3 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

25.65 DL d'un inverse

Propostion 25.65

Soit g une fonction définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant pas en 0. Si g admet un DL donné par le polynôme P en 0 à l'ordre n, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ aussi et les DL à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{g}$ et $\frac{1}{P}$ sont identiques.
Autrement dit, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ avec $g(0) \neq 0$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$, alors :

$$\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n) \Leftrightarrow \frac{A}{P(x)} \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{P(x)} &= \frac{P(x) - g(x)}{P(x)g(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \times O(1) \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.67 Exemple

Exemple 25.67

1. (archi classique) : $\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^7)$
2. (archi classique) : $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^{10})$

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + O(x^8)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right] + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right]^2 - \left[-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right]^3 + O(x^8) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \left[-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\right] x^4 + \left[\frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{8}\right] x^6 + O(x^8) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + O(x^8)
\end{aligned}$$

2. A l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{5}{4!} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!}\right) x^5 + o(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)
\end{aligned}$$

25.70 Primitiver un DL

Propostion 25.70

Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0, dont la dérivée admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, donné par :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Alors f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

On pose $g : x \mapsto f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \in \mathcal{D}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ avec $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(0)$.
on remarque que $g(0) = 0$ et en appliquant le TAF sur $\mathcal{U}$:

Pour $x \in \mathcal{U}$, il existe c_x tel que : $\begin{cases} 0 < c_x < x \\ \text{OU} \\ x < c_x < 0 \end{cases}$ vérifiant :

$$g(x) = g(x) - g(0) = x \times g'(c_x)$$

Par théorème d'encadrement :

$$c_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Or par construction :

$$\begin{aligned} g'(x) &\underset{x\to 0}{=} o(x^{n-1}) \\ \text{donc } g'(c_x) &\underset{x\to 0}{=} o(c_x^{n-1}) \\ &= o(x^{n-1}) \text{ car } c_x \underset{x\to 0}{=} O(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{x\to 0}{=} x \times o(x^{n-1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} o(x^n) \end{aligned}$$

25.72 Exemple

Exemple 25.72

1. Donner le DL de $\arctan x$ et $\arccos x$ à tout ordre.
2. On peut faire la même chose avec $Argth(x)$, $Argsh(x)$ et $Argch(x)$.
3. Montrer que $\arctan\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right) \underset{x\to 0}{=} -\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x - \frac{12}{25}x^2 - \frac{56}{375}x^3 + o(x^3)$.
4. Voir l'exercice E-2 pour arcsin.

1. On pose $f = \arctan$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{donc } f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

On pose $f = \arccos \in \mathcal{D}^1(]-1,1[,\mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{donc } f(x) &\underset{x\to 0}{=} -1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n}) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{f(0)}_{\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}}\binom{2k}{k} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

25.74 Dérivation d'un DL

Propostion 25.74

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, admettant (donc) un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f' admet un DL à l'ordre $n-1$ en 0, égal à :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

On applique la formule de Taylor-Young à f et f' :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^k) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \end{aligned}$$

En posant $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, on obtient le résultat souhaité.

25.75 Exemple

Exemple 25.75

On a :

$$\frac{x^2-1}{x^2+x+1} \underset{x\to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2+x+1} &= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left[1 - \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right] + \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2 - \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\ &\underset{x\to+\infty}{=} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

25.78 Exemple

Exemple 25.78

1. $\frac{e^x-1}{\cos x - 1} \underset{x\to 0}{=} \frac{-2}{x} - 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$

1.

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{\cos x-1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\times\frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\times\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right]\left[1+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right]\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{2}{x}-1-\frac{1}{2}x+o(x)
\end{aligned}
$$

25.85 Exemple

Exemple 25.85

Montrer que la parabole d'équation $y = ex^2+\frac{e}{2}x+\frac{e}{24}$ est asymptote à la courbe de $f : x \mapsto x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ et que la courbe de f est située au-dessus de sa courbe asymptote (le terme d'ordre 1 est $\frac{e}{48}$).

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\\
&= x^2\exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2\exp\left((x+1)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x^2\exp\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} ex^2\left[1+\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{12x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]^2+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\\
&\underset{x\to+\infty}{=} ex^2+\frac{e}{2}x-\frac{e}{24}+\frac{e}{48x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 11

Exercice 25.11

On note f la fonction $x\mapsto x+\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$.

1. Montrer que f est bijective de $]-1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera).

1. f est strictement croissante et continue donc d'après le théorème de la bijection continue, f induit une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $]\lim_{x\to-1} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.

2. $f\in\mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in]-1,+\infty[, f'(x) = 1+\frac{1}{1+x}$$

D'après le TBD, $f^{-1}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},]-1,+\infty[)$ donc possède un DL_3 en 0.
Or :

$$f(0)=0 \text{ et } f(x)\underset{x\to 0}{=} 2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

On note $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$.
Or :

$$\begin{aligned}
x &= f^{-1}\circ f(x) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_1\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) + a_2\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 + a_3\left(2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 2a_1 x + \left(-\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3\right)x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\begin{cases} 2a_1 & = 1 \\ -\frac{a_1}{2} + 4a_2 & = 0 \\ \frac{a_1}{3} - 2a_2 + 8a_3 & = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a_1 & = \frac{1}{2} \\ a_2 & = \frac{1}{16} \\ a_3 & = -\frac{1}{192} \end{cases}$$

Donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$$