Chapitre 20

Espace Vectoriels

20.2 Propriétés du 0, régularité

Propostion 20.2

Soit E un $\mathbb{K}-ev$. Pour tout $x \in E$:

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.0_E = 0_E$
3. (-1).x = -x
4. si $x \neq 0_E$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si $x \neq 0_{\mathbb{K}}$,
$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$. Donc $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$.
2. RAS.
3. $x + (-1).x = (1-1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
4. Par l'absurde, si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, de $\lambda x = 0_E$ on tire $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$, soit $x = 0_E$. Absurde.
5. Idem.

20.10 Espace vectoriel de référence

Propostion 20.10

1. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions E^F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. RAF.
2. Soit E un $\mathbb{K}-ev$ et F un ensemble quelconque.
   E^F est un groupe abélien (cf. chap 10).
   Le produit externe est défini par :
$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$
   Vérification facile.

20.11 Transfert de structure

Lemme 20.11

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, G un ensemble quelconque et $\varphi : E \to G$ une bijection. Alors en définissant sur G une loi interne et un loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{et} \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit G d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}(x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y)+\varphi(z)) \\ &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}(y)+\varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\ &= x+(y+z) \\ x+\varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)+0) = x \ (\varphi \text{ neutre}) \\ x+\varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\ x+y=y+x\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}\lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\ &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\ &= (\lambda\mu).x \\ 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi\circ\varphi^{-1}(x) \\ &= x \\ (\mu+\lambda).x &= \varphi((\mu+\lambda).\varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)+\lambda\varphi^{-1}(x)) \\ &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x))+\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\ &= \mu.x+\lambda.x\end{aligned}$$

De même pour la dernière.

20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 20.16

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$;
2. $0 \in F$;
3. F est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

1. Oui.
2. F est un sous-groupe de E donc $0_E \in F$.
3. Pour tout $(x,y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.x \in F$ et $y \in F$. Donc $\lambda x + y \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

D'après (3) avec :

— $y = 0$: $\times$ est LCE.

— $\lambda = 1$: $+$ est LCI.

$0 \in F$ et $\lambda = -1$, F est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

20.22 Propostion 20.22

Propostion 20.22

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, D_1 et D_2 deux droites vectorielles. Alors soit $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$, soit $D_1 = D_2$.

Par définition, $0_E \in D_1 \cap D_2$.

Supposons $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$ et fixons $x \in D_1 \cap D_2$ avec $x \neq 0_E$.

Soit $v \in D_1$. Par définition, on écrit $D_1 = \mathbb{K}x_1$ et $D_2 = \mathbb{K}x_2$.
On a donc $v = \alpha x_1$, $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.
Ainsi :

$$v = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_1 x_1 = \alpha\lambda_1^{-1}x = \alpha\lambda_1^{-1}\lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc $D_1 \subset D_2$ et par symétrie, $\boxed{D_1 = D_2}$.

20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.27

Soit E une espace vectoriel et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

— $\bigcap_{i\in I} E_i \subset E$.
— $\forall i \in I, 0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap_{i\in I} E_i$.
— Soit $(x,y) \in \left[\bigcap_{i\in I} E_i\right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

Donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

20.34 Description de $Vect(X)$

Propostion 20.34

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et X un sous-ensemble de E. Alors $Vect(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X.

On note F l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de X.
F est un sous-espace vectoriel de E qui contient X.
Par définition, $Vect(X) \subset F$.
Or $Vect(X)$ est un sous-espace vectoriel qui contient X. Il doit donc contenir les combinaisons linéaiers de X soit F.
Donc $\boxed{F = Vect(X)}$.

20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.36

Soit A et B deux ensembles. On a

1. $A \subset Vect(A)$
2. Si $A \subset B$ alors $Vect(A) \subset Vect(B)$.
3. $A = Vect(A)$ si et seulement si A est un espace vectoriel.
4. $Vect(Vect(A)) = Vect(A)$.
5. $Vect(A \cup \{x\}) = Vect(A)$ si et seulement si $x \in Vect(A)$.

1. RAF
2. RAF (20.24)
3. Si $A = \underbrace{Vect(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$, alors A est un sous-espace vectoriel.
   Si A est un espace vectoriel, par minimalité, $A = Vect(A)$.

4. RAF (20.36.3)
5. On a toujours $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$(2 0.36.2) si $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$.
   Or $x \in Vect(A \cup \{x\})$.
   Donc $x \in Vect(A)$.
   Réciproquement, si $x \in Vect(A)$, d'après (20.34) :
   $$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$
   Si $u \in Vect(A \cup \{x\})$, alors :
   $$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1}(\mu_1 a_1' + \ldots + \mu_p a_p') \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$

20.41 Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

Propostion 20.41

Soit X et Y deux sous-ensembles de E. Alors
$$Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)$$

On a :
$$\begin{aligned} Vect(X) &\subset Vect(X \cup Y) \\ Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \\ \text{donc } Vect(X) + Vect(Y) &\subset Vect(X \cup Y) \end{aligned}$$

Par minimalité :
$$\boxed{Vect(X \cup Y) = Vect(X) + Vect(Y)}$$

20.43 Description d'une somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Propostion 20.43

Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des sous-espaces vectoriels de E. Sont équivalentes :
1. $F = E_1 + \ldots + E_n$;
2. $F = (\ldots((E_1 + E_2) + E_3) + \ldots + E_{n-1}) + E_n$;
3. $F = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n | (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n\}$.

2. Associativité fournie par la définition.
3. (20.39) + (20.43.2)

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, $E = Vect((1,0,0))$ et $F = Vect((0,1,0),(0,0,1))$.
Soit $u \in E \cap F$.
$u = \alpha(1,0,0) = \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$.
Donc $(-\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dans $\mathbb{R}^4$ avec $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.
$E = Vect(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$

$F = Vect(e_1 + e_3, 2e_2 + e_1 - e_4)$
Soit $u \in E \cap F$.

$$\begin{aligned} u &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) \\ &= \gamma(e_1 + e_3) + \delta(2e_2 + e_1 - e_4) = (\gamma + \delta, 2\delta, \gamma, -\delta) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \end{cases}$$
$$\text{donc } \begin{cases} \delta = 0 \ (L_1 - L_3) \\ \beta = 0 \ (L_4) \\ \alpha = 0 \ (L_2) \\ \gamma = 0 \ (L_2) \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{E \cap F = \{0\}}$$

20.47 Unicité de l'écriture de la somme directe

Remarque 20.47

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement si tout élément x de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_n$.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que la somme est directe.
Soit $x \in E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.
On écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \ldots + x_n \\ &= x_1' + \ldots + x_n' \\ \text{donc } \underbrace{x_n' - x_n}_{\in E_n} &= \underbrace{(x_1 - x_1')}_{\in E_1} + \ldots + \underbrace{(x_{n-1} - x_{n-1}')}_{\in E_{n-1}} \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1}) = \{0\} \\ \text{donc } x_n' &= x_n \end{aligned}$$

On poursuit par récurrence.

$\boxed{\Leftarrow}$
On remarque que $0 = 0 + \ldots 0$.
Soit $u \in E_n \cap (E_1 + \ldots + E_{n-1})$.
Donc :

$$\begin{aligned} u = e_n &= e_1 + \ldots + e_{n-1} \\ \text{donc } e_1 + \ldots + e_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Par unicité :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n-1]\!], e_i &= 0 \\ \text{donc } u &= 0 \end{aligned}$$

On termine le travail par récurrence.