

Chapitre 17

Fractions rationnelles

17 Fractions rationnelles	1
17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire	2

17.2 Addition, multiplication et produit par un scalaire

Définition 17.2

Soit $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS} \quad \text{et} \quad \lambda \times \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}.$$

Montrons que l'addition est bien définie.

Soit $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Montrons que :

$$\frac{PS + QR}{QS} = \frac{P_1S + Q_1R}{Q_1S}$$

On a :

$$\begin{aligned} (PS + QR)Q_1S - (P_1S + Q_1R)QS &= S^2 \underbrace{(PQ_1 - P_1Q)}_{=0} + RS \underbrace{(QQ_1 - Q_1Q)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On raisonne de la même manière pour $\frac{R}{S} = \frac{R_1}{S_1}$ et ainsi, l'opération est bien définie.