

# Chapitre 29

## Groupe symétrique

<b>29 Groupe symétrique</b>	<b>1</b>
29.26 Lemme 26 . . . . .	2
29.29 Propriété fondamentale de la signature . . . . .	2
29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des $\tau_i$ . . . . .	2
29.37 Caractère générateur des transpositions . . . . .	3
29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle . . . . .	3

## 29.26 Lemme 26

### Lemme 29.26

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On a :

$$\left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(i) - \sigma(j)) \right| = \prod_{X \in \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)} \delta_\sigma(X) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

- La première égalité est justifiée car on a une bijection entre  $\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  et  $\mathcal{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .
- La seconde égalité est justifiée d'après (28.23).

## 29.29 Propriété fondamentale de la signature

### Théorème 29.29

La signature est un morphisme de groupe de  $(\mathcal{S}_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \times)$ .

Montrons que  $\epsilon(\sigma \circ \xi) = \epsilon(\sigma) \times \epsilon(\xi)$ .

Pour  $\sigma, \xi \in \mathcal{S}_n$  :

$$\begin{aligned} \epsilon(\sigma \circ \xi) &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma \circ \xi(j) - \sigma \circ \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi(j) - \xi(i))} \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(\xi(X)) \\ &= \epsilon(\xi) \times \prod_{X \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \tau_\sigma(X) \\ &= \epsilon(\xi) \times \epsilon(\sigma) \end{aligned}$$

## 29.35 Décomposition d'une transposition à l'aide des $\tau_i$

### Proposition 29.35

soit  $1 \leq i < j \leq n$  et  $\tau = (i, j)$ . Alors :

$$\tau = \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \cdots \circ \tau_{j-1}$$

- Si  $k > j$ , alors pour tout  $p \in \llbracket i, j-1 \rrbracket$ ,  $\tau_p(k) = k$ .  
Donc  $\sigma(k) = k$ .  
Cela reste vrai si  $k < i$ .
- On a :

$$\begin{aligned} \sigma(i) &= \tau_{j-1} \circ \tau_{j-2} \circ \cdots \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i+1) \\ &= \tau_{j-1}(j-1) \\ &= j \\ \sigma(j) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-1}(j) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \circ \tau_{j-2}(j-1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i(i+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1}(i) \\ &= i \end{aligned}$$

— Si  $i < k < j$ , alors :

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_k(k) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_i \circ \cdots \tau_{k-1}(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \circ \tau_k(k+1) \\ &= \tau_{j-1} \circ \cdots \tau_{k+1}(k) \\ &= k\end{aligned}$$

## 29.37 Caractère générateur des transpositions

### Théorème 29.37

Toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est un produit de transposition.

On prouve le résultat par récurrence sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

- pour  $n = 2$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{id, (1 \ 2)\}$  et  $id = (1 \ 2)^2$ .
- On suppose le résultat vrai pour  $n \geq 2$ .

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ .

- Si  $\sigma(n+1) = n+1$ ,  $\sigma$  induit naturellement une permutation  $\tilde{\sigma}$  sur  $\mathcal{S}_n$ , donc  $\tilde{\sigma}$  est un produit de transpositions  $\tilde{\tau}$ , et chaque  $\tilde{\tau}$  se relève en une transposition  $\tau$  de  $\mathcal{S}_{n+1}$ .
- Si  $\sigma(n+1) = i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

$$\varphi = (i \ n+1) \circ \sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$$

et  $\varphi(n+1) = n+1$ .

D'après le point précédent,  $\varphi$  est un produit de transposition.

Donc  $\sigma = (i \ n+1) \circ \varphi$  est aussi un produit de transposition.

## 29.40 Effet de la conjugaison sur un cycle

### Théorème 28.40

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et  $(a_1 \ \cdots \ a_k)$  un cycle. Alors :

$$\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ \cdots \ \sigma(a_k))$$

- Si  $\sigma^{-1}(i) \notin \{a_1, \dots, a_n\}$  alors  $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma \circ \sigma^{-1}(i) = i$ .
- Si  $\sigma^{-1}(i) = a_j$ , alors  $\sigma \circ (a_1 \ \cdots \ a_k) \circ \sigma^{-1}(i) = \sigma(a_{j+1})$