

Chapitre 22

Espaces de dimension finie

22 Espaces de dimension finie	1
22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants	2
22.5 Algorithme de la base incomplète	2
22.8 Théorème de la base incomplète	2
22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres	3
22.12 Théorème de la dimension	3
22.18 Caractérisation des bases en dimension finie	3

22.3 Nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants

Proposition 22.3

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Soit G une famille génératrice de E avec $G = (g_1, \dots, g_n)$. Soit \mathcal{L} une famille libre de E .

Supposons par l'absurde que $|\mathcal{L}| > n$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note :

$$P(k) : "E \text{ est engendré par } n - k \text{ vecteurs de } G \text{ et } k \text{ vecteurs de } \mathcal{L}"$$

Pour $k = 0$, la famille convient.

On suppose que pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $E = \text{Vect}(\underbrace{g_1, \dots, g_{n-k}}_{\in G}, \underbrace{l_1, \dots, l_k}_{\in \mathcal{L}})$

Comme $l_{k+1} \in E$, on écrit $l_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$.

Comme \mathcal{L} est libre, $l_{k+1} \notin \text{Vect}(l_1, \dots, l_k)$.

Donc il existe $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$, $\alpha_i \neq 0$ et quitte à renommer les g_i , on peut supposer $\alpha_{n-k} \neq 0$ et ainsi :

$$g_{n-k} \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Ainsi :

$$E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-k}, l_1, \dots, l_k, l_{k+1})$$

Par récurrence, $P(k)$ est vraie pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en particulier, $P(n)$ est vraie.

(l_1, \dots, l_n) est une base de E . Or $l_{n+1} \in E$ et (l_1, \dots, l_{n+1}) libre. Absurde.

22.5 Algorithme de la base incomplète

Théorème 22.5

Soit $E \neq \{0\}$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une partie génératrice de E dont les p premiers vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, E possède une base constituée des vecteurs x_1, \dots, x_p et de certains vecteurs x_{p+1}, \dots, x_n .

On utilise l'algorithme suivant :

On initialise $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$. Pour tout $k \in \llbracket p + 1, n \rrbracket$:

- Si $x_k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, on laisse \mathcal{F} invariant.
- Si $x_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, on remplace \mathcal{F} par $\mathcal{F} \cup \{x_k\}$.

L'algorithme s'arrête en temps fini.

La famille \mathcal{F} obtenue est libre, elle est également génératrice car :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in \mathcal{F} \text{ ou } x_i \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Donc $E = \text{Vect}(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \subset \text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$. Donc \mathcal{F} est une base.

22.8 Théorème de la base incomplète

Théorème 22.8

Soit $E \neq \{0\}$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E .
2. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base finie de E .

En particulier, E possède une base finie.

Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie.

1. Soit \mathcal{L} une famille libre. On applique l'algorithme de la base incomplète à $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ qui fournit une base B de E contenant \mathcal{L} .

2. Comme \mathcal{G} est génératrice, on fixe $x \neq 0 \in \mathcal{G}$ comme premier vecteur de \mathcal{G} et on lui applique l'algorithme de la base incomplète.
La base obtenue est bien constituée de vecteurs de \mathcal{G} .

Remarque

Remarque

Si \mathcal{G} est une famille génératrice, elle contient nécessairement une famille génératrice finie.

22.11 Caractérisation de la dimension finie par le cardinal des familles libres

Corollaire 22.11

Soit E un espace vectoriel. Alors E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre de E est de cardinal fini.



On suppose E de dimension finie. Donc E possède une famille génératrice à n vecteurs.
Donc les familles libres de E ont un cardinal inférieur à n .
Elles sont finies.



Par contraposée, on suppose E de dimension infinie.
Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$.
On pose $x_1 = x$. Comme E est de dimension infinie, on choisit $x_2 \in E \setminus \text{Vect}(x_1)$.
On poursuit les raisonnements par récurrence pour obtenir une famille libre $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

22.12 Théorème de la dimension

Théorème 22.12

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies et sont de même cardinal.

Soit B et B' deux bases. On a :

$$|B| \leq |B'| \text{ et } |B'| \leq |B|$$

Donc :

$$|B| = |B'|$$

22.18 Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème 22.18

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \neq 0$. Une famille de n vecteurs est une base si, et seulement si, elle est libre, si, et seulement si, elle est génératrice.

Soit \mathcal{F} une famille avec $|\mathcal{F}| = \dim E = n$.

- On suppose que \mathcal{F} est libre.
On applique sur \mathcal{F} le théorème de la base incomplète.
On obtient alors une base B de E avec :

$$\mathcal{F} \subset B$$

Or $|B| = \dim E = |\mathcal{F}|$.

Donc $\mathcal{F} = B$.

— On suppose \mathcal{F} génératrice. On procède de la même manière en utilisant le théorème de la base extraite.