

# Chapitre 26

## Intégration sur un segment

<b>26 Intégration sur un segment</b>	<b>1</b>
26.12Image d'une fonction en escalier . . . . .	2
26.14Subdivision commune . . . . .	2
26.15Structure de l'ensemble des fonctions en escalier . . . . .	2
26.17Théorème . . . . .	2
26.23Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout . . . . .	3
26.24Positivité ou croissance de l'intégrale . . . . .	3

## 26.12 Image d'une fonction en escalier

### Proposition 26.12

L'image d'une fonction en escalier est un ensemble fini. En particulier, une fonction en escalier est bornée.

Si  $v = \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  est une subdivision associée à  $f$ , alors :

$$|Im(f)| \leq \underbrace{n}_{\text{valeurs sur chaque intervalle ouvert}} + \underbrace{n+1}_{\text{valeurs de } f(v_i)} = 2n+1$$

## 26.14 Subdivision commune

### Lemme 26.14

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier. Il existe une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

Si  $\sigma$  est une subdivision associée à  $f$  et  $\tau$  est une subdivision associée à  $g$  :

$$\begin{aligned} \sigma \cup \tau &\leq \sigma \\ &\leq \tau \end{aligned}$$

Donc  $\sigma \cup \tau$  est une subdivision commune associée à  $f$  et  $g$ .

## 26.15 Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

### Théorème 26.15

L'ensemble  $Esc([a, b])$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[a, b]$  (c'est même une sous-algèbre).

PRAS (26.14)

## 26.17 Théorème

### Théorème 26.17

Pour toutes subdivisions  $\sigma$  et  $\tau$  associées à  $f$ , on a :

$$I(f, \sigma) = I(f, \tau)$$

Autrement dit, la quantité  $I(f, \sigma)$  est indépendante du choix de la subdivision associée.

Dans un premier temps, on suppose  $\tau \subset \sigma$ .

Notons :

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \\ &= \{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}\} \end{aligned}$$

On note  $f_k$  la valeur constante de  $f$  sur  $] \tau_k, \tau_{k+1}[$  et ainsi :

$$\begin{aligned} I(f, \tau) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_{i_{k+1}} - \sigma_{i_k}) f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) \right] f_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=i_k}^{i_{k+1}-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\ &= \sum_{p=0}^{i_n-1} (\sigma_{p+1} - \sigma_p) f_p \\ &= I(f, \sigma) \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$I(f, \tau) = I(f, \tau \cup \sigma) = I(f, \sigma)$$

#### Proposition 26.21

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  et soit  $c \in ]a, b[$ , alors  $f$  est en escalier sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Soit  $\sigma$  associée à  $f$ ,  $\sigma \cup \{c\}$  est toujours associée à  $f$ , alors  $\sigma \cup \{c\} \cap [a, c]$  est associée à  $f|_{[a,c]}$ .  
RAS pour la suite.

## 26.23 Intégrale de deux fonctions en escalier égales presque partout

#### Proposition 26.23

Si deux fonctions en escalier ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors leurs intégrales sont égales.

Dans ce cas,  $f - g$  est nulle presque partout et on utilise la linéarité et (26.20).

## 26.24 Positivité ou croissance de l'intégrale

#### Proposition 26.24

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions en escalier sur  $[a, b]$  (avec  $a \leq b$ ) telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

En particulier, si  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  et positive, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

En reprenant la notation du (20.18), pour tout  $i$ ,  $f_i \geq 0$ . Donc :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

On obtient la croissance par linéarité.