Chapitre 14

Suites numériques

14.18 Premier théorème de comparaison

Théorème 14.18

Si à partir d'un certain rang on a
$$|u_n - l| \leq v_n$$
avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Soit $u_n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq v_n$$
Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $\epsilon > 0$, on choisit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N_2, |v_n - 0| = |v_n| < \epsilon$$
On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi :
$$\forall n \geq \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n = |v_n| < \epsilon$$
Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$

14.22 Unicité de la limite

Propostion 14.22

Si u admet une limite $l \in \mathbb{R}$, alors celle-ci est unique.

On suppose que u admet comme limite l et l' dans $\mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit N et N' dans $\mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$
$$\forall n \geq N', |u_n - l'| < \epsilon$$
Pour tout $n \geq \max(N, N')$:
$$\begin{aligned}|l - l'| &= |l - u_n + u_n - l'| \\ &\leq |l - u_n| + |u_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &< l\epsilon\end{aligned}$$
Nécessairement :
$$|l - l'| = 0$$

14.23 Limite et inégalité

Propostion 14.23

Si u converge vers l et si $\alpha < l$, alors à partir d'un certain rang, $\alpha < u_n$. De la même manière, si $\beta > l$, alors à partir d'un certain rang, $u_n < \beta$.

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Soit $\alpha < l$. On pose $\epsilon = \frac{|l-\alpha|}{2}$.
D'après la définition, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$
Soit :
$$\forall n \geq N, \underbrace{u_n}_{>\alpha} \in]\underbrace{l - \epsilon}_{>\alpha}, l + \epsilon[$$

14.24 Convergence et bornitude

Propostion 14.24

Une suite convergente est bornée.

Soit u une suite convergente. Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
On pose $\epsilon =$.
Par définition, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-1, l+1[$$

Donc $\{u_n, n \geq N\}$ est borné. Donc $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\{u_n, n \in [\![0, N-1]\!]\}}_{\text{ensemble fini}} \cup \underbrace{\{u_n, n \geq N\}}_{\text{borné}}$ est borné.

14.29 Minoration d'une extraction

Lemme 14.29

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \sigma(n).$$

Par récurrence.
Comme $\sigma(0) \in \mathbb{N}$, on a bien $\sigma(0) \geq 0$.
Si $\sigma(n) \geq n$, alors $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n$.
Donc $\sigma(n+1) \geq n+1$.

14.30 Extraction d'une suite convergente

Propostion 14.30

Toute suite extraite d'une suite qui tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ est une suite convergente vers l.

On suppose que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$ (à adapter pour $l = \pm\infty$)
Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On note $v = u \circ \sigma$.
Soit $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq \mathbb{N}, |u_n - l| < \epsilon$$

Pour $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(n) &\underset{(14.29)}{\geq} n \geq N \\ \text{donc } |u_{\sigma(n)} - l| &< \epsilon \\ \text{soit } |v_n - l| &< \epsilon \\ \text{donc } &\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l} \end{aligned}$$

14.32 Pair, impair et convergence

Propostion 14.32

Si $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim u_n = l$

Soit $\epsilon > 0$. Soit N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}$ telq que :

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| \leq \epsilon$$
$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon$$

Or pour $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.
Soit $n \geq N$.

— Si $n = 2p$, alors $p \geq N_1$
$$|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \epsilon$$
— Si $n = 2p + 1$, alors $p \geq N_2$
$$|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$$

Dans tous les cas, $\boxed{|u_n - l| \leq \epsilon}$.

14.34 Opérations usuelles sur les limites

Théorème 14.34

Soit u et v deux suites qui convergent respectivement vers l et l' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
- — $u + v$ converge ver $l + l'$
- — λu converge vers λl
- — uv converge vers ll'
- — Si $l \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, la suite des termes u_n sont tous nuls et la suite $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{l}$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \epsilon \text{ et } |v_n - l'| \leq \epsilon$$
Donc :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n - (l + l')| &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &\leq \epsilon\end{aligned}$$

— RAS ($\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$)
— Comme u converge, u est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall n \in N, |u_n| \leq M$$
Pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}|u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ &\leq |M||v_n - l'| + |l'| \times |u_n - l| \\ &\leq M \times \epsilon + |l'| \times \epsilon \\ &= (M + |l'|) \times \epsilon\end{aligned}$$
Donc $\boxed{u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ll'}$.

— On suppose $l \neq 0$. D'après (14.23), à partir d'un certain rang $u_n > 0$ (ou $u_n < 0$). Il existe en outre $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$0 < \frac{l}{2} < u_n \text{ et } |u_n - l| < \epsilon$$
Pour $n \geq N$:
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| &= \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \\ &\leq 2\frac{|l - u_n|}{l^2} \\ &< \frac{2\epsilon}{l^2}\end{aligned}$$

14.35 Conservation des inégalités larges par passage à la limite

Théorème 14.35

Soit u et v deux suites réelles. Si u converge vers l et v converge vers l' et si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.

On raisonne par l'absurde : $l > l'$.
On pose $\epsilon = \frac{|l'-l|}{2}$.
On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\text{ et } v_n \in]l'-\epsilon, l'+\epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \geq N, u_n > v_n$$

Absurde.

14.37 Théorème d'encadrement

Théorème 14.37

Soit u, v et w trois suites réelles. Si u et v convergent vers l et si à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$, alors w converge vers l.

Soit $\epsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l-\epsilon[\text{ et } v_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

A partir d'un certain rang M, par connexité de l'intervalle $]l-\epsilon, l+\epsilon[$:

$$\forall n \geq M, w_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

14.38 Produit d'une suite bornée par une limite nulle

Théorème 14.38

Soit u et v deux suites réelles. Si u converge vers 0 et si v est bornée, alors w converge vers 0.

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ telq ue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M \times |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$|u_n v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit :

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

14.39 Exemple

Exemple 14.39

Soit (u_n) une suite strictement positive et $\eta \in]0;1[$. On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$. Alors $\lim u_n = 0$.

On suppose que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2$$

Donc ($u_n > 0$) :

$$\forall n \geq n_0, 0 < u_n < \underbrace{\eta^{n-n_0}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \times u_{n_0}$$

Par encadrement :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

14.40 Comparaison puissance factorielle

Théorème 14.40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, non nul.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$$

Or :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

A partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc (14.39) :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

14.41 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 14.41

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$. Alors M est la borne supérieure (resp. inférieure) de A si et seulement si M majore (resp. minore) A et s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que $M = \sup A$. Donc M majore A.
On rappelle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, M - \epsilon < a$$

Donc :

$$\forall n \in N, \exists a \in A, M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M \text{ (M est un majorant)}$$

D'après la suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ étant ainsi définie, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
On choisit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M \text{ (majorant de } A\text{)}$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $a_n \in A$ tel que :

$$a_n \in]M - \epsilon, M + \epsilon[$$

Donc $M - \epsilon$ ne majore pas A.
Donc :

$$\boxed{M = \sup A}$$

14.42 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 14.42

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

$\boxed{\Rightarrow}$
On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, a \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$$

La suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ étant fixée ainsi :

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \text{ (théorème d'encadrement)}$$

$\boxed{\Leftarrow}$
Soit $]x, y[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
On pose $z = \frac{x+y}{2}$. On pose $\epsilon = \frac{|y-x|}{2}$.
On choisit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} z$$

On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_n \in]z - \epsilon, z + \epsilon[=]x, y[$$

Donc :

$$\boxed{A \cap]x, y[\neq \emptyset}$$

14.48 Théorème de comparaison

Théorème 14.48

Soit u et v deux suites réelles.

1. Si $\lim u = +\infty$ et si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim v = +\infty$;
2. Si $\lim v = -\infty$ et si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim u = -\infty$;
3. Si $\lim u = +\infty$ (resp. $-\infty$) et si v est minorée (resp. majorée), alors $\lim u + v = +\infty$ (resp. $-\infty$).

1. Soit $A \geq 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, A \leq u_n \text{ et } u_n \leq v_n$$

Donc :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

2. RAS
3. Si (v_n) est minorée, alors à partir d'un certain rang :

$$m + u_n \leq u_n + v_n$$

En adaptant le premier point ($A' = A - m$), on a :

$$\boxed{u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

14.49 Limites infinies et opérations

Théorème 14.49

Soit u et v deux suites réelles de limites respectives l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
- $\lim u + v = l + l'$ (sauf si $l = +\infty$ et $l' = -\infty$ ou inversement)
- $\lim \lambda u = \lambda l$ sauf si $\lambda = 0$ auquel cas la suite λu est la suite nulle.
- $\lim u \times v = l \times l'$ sauf si $\lambda = 0$ et $l' = \pm\infty$ ou inversement
- Si à partir d'un certain rang, la suite u ne s'annule pas, alors la suite $\frac{1}{u}$:
  - si $l \in \mathbb{R}^*$, tend vers $\frac{1}{l}$;
  - si $l = \pm\infty$, tend vers 0 ;
  - si $l = 0$ et $u_n > 0$, tend vers $+\infty$;
  - si $l = 0$ et $u_n < 0$, tend vers $-\infty$;
  - n'a pas de limite dans les autre cas.

- On suppose $l' \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$. Donc v est bornée.
  Donc (14.48) :

$$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- $\lambda \neq 0, \lambda > 0$ et $l = +\infty$. Pour $A \in \mathbb{R}$, on choisit un rang à partir duquel $u_n > \frac{A}{\lambda}$.
- On suppose $l > 0$ et $l' = +\infty$.

  Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors à partir d'un certain rang, $u_n > m$ avec $m = \begin{cases} 1 \text{ si } l = +\infty \\ \frac{l}{2} \text{ sinon} \end{cases}$

$$u_n v_n > m v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  Donc :

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ (14.48)}$$

- $l = +\infty$.
  Soit $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang :

$$u_n > \frac{1}{\epsilon} > 0$$

  Donc :

$$0 < \frac{1}{u_n} < \epsilon$$
$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $l = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
Pour $A \in \mathbb{R}_+^*$, à partir d'un certain rang :

$$u_n > 0 \text{ et } u_n < \frac{1}{A}$$
$$\text{donc } \frac{1}{u_n} > A$$
$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

14.50 Théorème de la limite monotone

Théorème 14.50

Si u est une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors u converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ (resp. vers $\inf_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$).
Si u est une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors u tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

— On suppose u croissante et majorée.
L'ensemble $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré. Cet ensemble possède une borne supérieure notée l (propriété fondamentale de $\mathbb{R}$).
Soit $\epsilon >$. Comme $l - \epsilon < u_n$ ne majore pas A, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \epsilon < u_n$.
Or (u_n) est croissante donc :

$$\forall n \geq N, l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

Donc :

$$\forall n \geq N, u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$$

— On suppose u croissante et non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_N \geq A \ (u \text{ non majorée})$$

Donc :

$$\forall n \geq N, A \leq u_N \leq u_n \ (u \text{ croissante})$$

Soit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

14.54 Exemple

Exemple 14.54

Soit u et v les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Ces deux suites sont adjacentes.

—
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Donc (u_n) est croissante.

—

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^2 n}[(n+1)n + n - (n+1)^2] \\ &= -\frac{1}{n!(n+1)^2 n} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

—

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

Donc :

$$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc u et v sont adjacentes et convergent alors vers une limite commune. (TCSA)

14.55 Convergence des suites adjacentes

Théorème 14.55

Deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.
Soit $w = v - u$. Par opération, w est décroissante.
Par hypothèse :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $w \leq 0$, soit $u \leq v$.
La suite u est donc majorée par v_0, et croissante donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Pour les mêmes raisons, v converge.
Or, par théorème d'opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$$

14.56 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 14.56

On peut extraire de toute suite réelle bornée une suite convergente.

Soit u une suite bornée. On note a et b un minorant et majorant de u. On construit deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante :

— On initialise $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Si l'intervalle $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ contient une infinité de valeurs de la suite (u_n), alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.
Sinon, l'intervalle $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient une infinité de valeurs, alors $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.
On note $\sigma(0) = 0$ et comme $[a_1, b_1]$ contient une infinité de valeurs, on dixe $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$ avec $n_1 > 0$.
On pose alors $\sigma(1) = n_1$.

— Supposons construits (a_n), (b_n) et σ avec le principe précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ \text{ou} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

Selon que $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de valeurs ou $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ et $v(n+1) > v(n)$ et $u_{\sigma(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\sigma(n)} \leq b_n \\
\forall n \in \mathbb{N}, |b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_n - a_n|}{2} \\
\forall n \in \mathbb{N}, |b_n - a_n| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent vers la même limite (TCSA) donc $(u_{\sigma(n)})$ converge (TE).

14.63 Exemple

Exemple 14.63

La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ diverge vers $+\infty$.

R_+ est stable par $f : x \mapsto x + e^x$.
Comme $0 \in \mathbb{R}_+$, la suite (u_n) est bien définie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{u_n} \geq u_n$$

Donc (u_n) est croissant.
Supposeons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+$.
Par théorème d'opération, $l = l + e^l$.
Absurde.
Donc d'après le TLM :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

14.64 Exemple

Exemple 14.64

La suite (u_n) défine par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$ converge vers 0.

$[0, 1]$ est stable par $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ et $1 \in [0, 1]$.
Donc (u_n) est bien définie et est minorée.
Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1})f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2+1} \leq u_n$$

Donc (u_n) est décroissante donc converge vers $l \in [0, 1]$ d'après le TLM.
Par théorème d'opération :

$$\begin{aligned}
l = \frac{l}{l^2+1} \\
\text{donc } l^2 = 0 \\
\text{donc } l = 0
\end{aligned}$$

14.66 Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 14.66

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $u_0 \in D$ et $f : D \to D$ une fonction (autrement dit, D est stable par f). On note (u_n) l'unique suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Si pour tout $x \in D, f(x) \geq x$, alors (u_n) est croissante. Si pour tout $x \in D, f(x) \leq x$, alors (u_n) est décroissante. Le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ renseigne donc sur la monotonie de la suite (u_n).
2. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone. Son sens de variation dépend alors du signe de $u_1 - u_0$.
3. Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires. Leur sens de variation est entièrement déterminé par le signe de $u_2 - u_0$.

1. Si :
$$\forall n \in D, f(x) \geq x$$
Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1} > u_n$$
Donc (u_n) est croissante.
2. On suppose f croissate et $u_0 \leq u_1$. Alors :
$$u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$$
On termine par récurrence.
3. Si f est décroissante, alors $f^2 = f \circ f$ est croissante. Or :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} &= f^2(u_{2n}) \\ u_{2n+1} &= f^2(u_{2n-1}) \end{aligned}$$
Donc (14.66.2) (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Or, si $u_2 \leq u_0$, alors $u_3 = f(u_2) \leq f(u_0) = u_1$

14.68 Exemple

Exemple 14.68

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et notons $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
Etudier la convergence de la suite (u_n).

$\mathbb{R}_+$ est stable par $f : x \mapsto x^2 + x$ et $1 \in \mathbb{R}_+$.
Donc (u_n) est bien définie.
Comme :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \geq 0$$
(u_n) est croissante.
On suppose que :
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \geq 1 = u_0$$
Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
On a $f(l) = l$ donc $l^2 = 0$.
Absurde.
Donc, d'après le TLM :
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

14.69 Exemple

Exemple 14.69

On note (u_n) la suite définie apr $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$, et notons $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
Etudier la convergence de la suite (u_n).

$[1, 2]$ est stable par $f : x \mapsto 1+ \ frac1x$ et $1 \in [1, 2]$.
Donc (u_n) est bien définie et est bornée.
Comme f est décroissante sur $[1, 2]$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monoties contraires.
Comme$u_0 = 1 = \min([1, 2])$, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) décroissante, puis convergentes (TLM) vers des points fixes de f^2 (car f^2 est continue sur $[1, 2]$)
Soit $x \in [1, 2]$.

$$\begin{aligned} f^2(x) = x &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x \\ &\Leftrightarrow x + 1 + x = x(x + 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in[1,2]}\right)\left(x - \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\notin[1,2]}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent nécessairement vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

14.72 Convergence et parties réelles et imaginaires

Théorème 14.72

Soit u une suite complexe et $l \in \mathcal{C}$. Alors la suite u converge vers l si et seulement si la suite $(Re(u_n))$ converge vers $Re(l)$ et $(Im(u_n))$ converge vers $Im(l)$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|Re(u_n) - Re(l)| \leq |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$|Im(u_n) - Im(l)| \leq |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $Im(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Im(l)$ et $Re(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Re(l)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On a :

$$\begin{aligned} |u_n - l| &= \sqrt{(Im(u_n) - Im(l))^2 + (Re(u_n) - Re(l))^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (théorème d'opérations)} \end{aligned}$$

14.73 Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes

Remarque 14.73

Si u est bornée , on peut en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

$u_n = a_n + b_n$ bornée.
(a_n) et (b_n) sont bornés.
(a_n) borneé donc $(a_{\sigma(n)})$ converge.
$(b_{\sigma(n)})$ bornée donc $(b_{\sigma\circ\varphi(n)})$ converge.
$(a_{\sigma\circ\varphi(n)})$ extraite de $(a_{\sigma(n)})$ donc converge.
$(u_{\sigma\circ\varphi(n)})$ converge.