

# Chapitre 20

## Espace Vectoriels

<b>20 Espace Vectoriels</b>	<b>1</b>
20.2 Propriétés du 0, régularité . . . . .	2
20.10Espace vectoriel de référence . . . . .	2
20.11Transfert de structure . . . . .	2
20.16Caractérisation des sous-espaces vectoriels . . . . .	3
20.22Proposition 20.22 . . . . .	3
20.27Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	4
20.34Description de $Vect(X)$ . . . . .	4
20.36Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés . . . . .	4

## 20.2 Propriétés du 0, régularité

### Proposition 20.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Pour tout  $x \in E$  :

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda.0_E = 0_E$
3.  $(-1).x = -x$
4. si  $x \neq 0_E$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
5. si  $x \neq 0_{\mathbb{K}}$ ,  

$$\lambda.x = 0_E \Rightarrow x = 0_E$$

1.  $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$ . Donc  $0_E = 0_{\mathbb{K}}.x$ .
2. RAS.
3.  $x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ .
4. Par l'absurde, si  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ , de  $\lambda x = 0_E$  on tire  $\lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}x0_E$ , soit  $x = 0_E$ . Absurde.
5. Idem.

## 20.10 Espace vectoriel de référence

### Proposition 20.10

1.  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  un ensemble quelconque. Alors l'ensemble des fonctions  $E^F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

1. RAF.
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  un ensemble quelconque.  
 $E^F$  est un groupe abélien (cf. chap 10).  
 Le produit externe est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E^F &\longrightarrow E^F \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda.f, x \mapsto \lambda.f(x)) \end{aligned}$$

Vérification facile.

## 20.11 Transfert de structure

### Lemme 20.11

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $G$  un ensemble quelconque et  $\varphi : E \rightarrow G$  une bijection. Alors en définissant sur  $G$  une loi interne et une loi externe par

$$\forall (x, y, \lambda) \in G \times G \times \mathbb{K}, x + y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) \text{ et } \lambda.x = \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)),$$

on munit  $G$  d'une structure d'espace vectoriel.

Vérifions les axiomes.

— LCI :

$$\begin{aligned}
 (x+y)+ &= \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi(z)) \\
 &= \varphi(\underbrace{\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)}_{\text{associativité dans } E}) \\
 &= x + (y+z) \\
 x + \varphi(0) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + 0) = x \quad (\varphi \text{ neutre}) \\
 x + \varphi(-\varphi^{-1}(x)) &= \varphi(\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(x)) = \varphi(0) \\
 x + y &= y + x
 \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
 \lambda.(\mu.x) &= \varphi(\lambda\varphi^{-1}(\mu x)) \\
 &= \varphi(\lambda\mu\varphi^{-1}(x)) \\
 &= (\lambda\mu).x \\
 1.x &= \varphi(1.\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\
 &= x \\
 (\mu + \lambda).x &= \varphi((\mu + \lambda).\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x) + \lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \varphi(\mu\varphi^{-1}(x)) + \varphi(\lambda\varphi^{-1}(x)) \\
 &= \mu.x + \lambda.x
 \end{aligned}$$

De même pour la dernière.

## 20.16 Caractérisation des sous-espaces vectoriels

### Théorème 20.16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

1.  $F \subset E$ ;
2.  $0 \in F$ ;
3.  $F$  est stable par combinaisons linéaire, ce qui équivaut à

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

$\Rightarrow$

1. Oui.
2.  $F$  est un sous-groupe de  $E$  donc  $0_E \in F$ .
3. Pour tout  $(x, y) \in F^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda x \in F$  et  $y \in F$ . Donc  $\lambda x + y \in F$ .

$\Leftarrow$

D'après (3) avec :

- $y = 0$  :  $\times$  est LCE.
- $\lambda = 1$  :  $+$  est LCI.

$0 \in F$  et  $\lambda = -1$ ,  $F$  est un sous-groupe, donc un groupe abélien. RAF pour les 4 dernières propriétés.

## 20.22 Propostion 20.22

### Propostion 20.22

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $D_1$  et  $D_2$  deux droites vectorielles. Alors soit  $D_1 \cap D_2 = \{0_E\}$ , soit  $D_1 = D_2$ .

Par définition,  $0_E \in D_1 \cap D_2$ .

Supposons  $D_1 \cap D_2 \neq \{0_E\}$  et fixons  $x \in D_1 \cap D_2$  avec  $x \neq 0_E$ .

Soit  $v \in D_1$ . Par définition, on écrit  $D_1 = \mathbb{K}x_1$  et  $D_2 = \mathbb{K}x_2$ .

On a donc  $v = \alpha x_1$ ,  $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$  avec  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ .

Ainsi :

$$v = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_1 = \alpha \lambda_1^{-1} x = \alpha \lambda_1^{-1} \lambda_2 x_2 \in D_2$$

Donc  $D_1 \subset D_2$  et par symétrie,  $\boxed{D_1 = D_2}$ .

## 20.27 Intersection de sous-espaces vectoriels

### Proposition 20.27

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

- $\bigcap_{i \in I} E_i \subset E$ .
- $\forall i \in I, 0 \in E_i$  donc  $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$ .
- Soit  $(x, y) \in \left[ \bigcap_{i \in I} E_i \right]^2, \lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\forall x \in I, \lambda x + y \in E_i$$

$$\text{Donc } \lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} E_i.$$

## 20.34 Description de $\text{Vect}(X)$

### Proposition 20.34

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $X$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $\text{Vect}(X)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$ .

On note  $F$  l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $X$ .

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $X$ .

Par définition,  $\text{Vect}(X) \subset F$ .

Or  $\text{Vect}(X)$  est un sous-espace vectoriel qui contient  $X$ . Il doit donc contenir les combinaisons linéaires de  $X$  soit  $F$ .

Donc  $\boxed{F = \text{Vect}(X)}$ .

## 20.36 Opérations sur les sous-espaces vectoriels engendrés

### Proposition 20.36

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles. On a

1.  $A \subset \text{Vect}(A)$
2. Si  $A \subset B$  alors  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$ .
3.  $A = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $A$  est un espace vectoriel.
4.  $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$ .
5.  $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$  si et seulement si  $x \in \text{Vect}(A)$ .

1. RAF

2. RAF (20.24)

3. Si  $A = \underbrace{\text{Vect}(A)}_{\text{sous-espace vectoriel}}$ , alors  $A$  est un sous-espace vectoriel.

Si  $A$  est un espace vectoriel, par minimalité,  $A = \text{Vect}(A)$ .

4. RAF (20.36.3)
5. On a toujours  $Vect(A \cup \{x\}) \supset Vect(A)$  (20.36.2) si  $Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$ .  
Or  $x \in Vect(A \cup \{x\})$ .  
Donc  $x \in Vect(A)$ .  
Réciproquement, si  $x \in Vect(A)$ , d'après (20.34) :

$$Vect(A \cup \{x\}) \subset Vect(A)$$

Si  $u \in Vect(A \cup \{x\})$ , alors :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} x \\ &= \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} (\mu_1 a'_1 + \dots + \mu_p a'_p) \\ &\in Vect(A) \end{aligned}$$