

Chapitre 36

Fonctions de deux variables

36 Fonctions de deux variables	1
36.15Exemple	2
36.17Exemple	2
36.24Exemple	2
36.35Exemple	3
36.38Existence de développement limité à l'ordre 1 pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1	3
36.42Règle de la chaîne	4
36.43Exemple	4
36.46Règle de la chaîne, dérivées directionnelle et gradient	5
36.49Exemple	6
36.51Points critiques et extrema locaux	6
36.52Exemple	6
36.53Exemple	7

36.15 Exemple

Exemple 36.15

Les projections $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On note :

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout $(x, y) \in B(a, \epsilon)$.

$$|p_1(x, y) - p_1(x_0, y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

Donc p_1 est bien continue en a , donc sur \mathbb{R}^2 .

36.17 Exemple

Exemple 36.17

Soient I et J deux intervalles et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Alors :

$$I \times J \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x) + g(y) \quad \text{et} \quad I \times J \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

sont continues sur $I \times J$.

— Soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.

Soit $\epsilon > 0$.

Par continuité de f et g on choisit $\alpha > 0$ tel que :

— $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

— $\forall y \in J, |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$

Soit $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$.

$$|f(x) + g(y) - f(x_0) - g(y_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(y) - g(y_0)|$$

— De la même manière (voir le produit de fonctions de \mathcal{C}^0 , chap. 15).

36.24 Exemple

Exemple 36.24

Quelles sont les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$?

Sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &= y^2 e^{xy^2} \\ \partial_2 f(x, y) &= 2xy e^{xy^2} \end{aligned}$$

Démonstration de la première :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f((x, y) + t(1, 0)) &= f(x + t, y) \\ &= e^{(x+t)y^2} \\ &= e^{xy^2 + ty^2} \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) &= y^2 e^{xy^2 + ty^2} \\ g'(0) &= y^2 e^{xy^2} \end{aligned}$$

36.35 Exemple

Exemple 36.35

La fonction $(x, y) \mapsto e^{-x} \ln y$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 f(x, y) &\mapsto -e^{-x} \ln y \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}) \\ \partial_2 f(x, y) &\mapsto \frac{e^{-x}}{y} \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})\end{aligned}$$

Par opérations.

36.38 Existence de développement limité à l'ordre 1 pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1

Théorème 36.38

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. La fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a :

$$f(a + v) \underset{v \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + o(\|v\|)$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + o(\|x - a\|)$$

Si les variables de f sont notées x et y et si $a = (x_a, y_a)$, cela revient à :

$$f(x_a + h, y_a + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(a) + \partial_1 f(a) \cdot h + \partial_2 f(a) \cdot k + o(\|(h, k)\|)$$

Par translation, on le montre pour $a = 0$.

On pose $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$.

Par hypothèse, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall v \in B(0, r), |\partial_1 f(v) - \partial_1 f(0)| &< \epsilon \\ |\partial_2 f(v) - \partial_2 f(0)| &< \epsilon\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}|f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &= |f(v) - f(0) - \partial_1 f(0)h - \partial_2 f(0)k| \\ &= |f(h, k) - f(h, 0) + f(h, 0) - f(0, 0) - \partial_1 f(0)h - \partial_2 f(0)k| \\ &= \left| \int_0^k \partial_2 f(h, t) dt - \partial_2 f(0)k + \int_0^h \partial_1 f(t, 0) dt - \partial_1 f(0)h \right| \\ \text{(Inégalité triangulaire x3)} \quad &\leq \int_0^k |\partial_2 f(h, t) - \partial_2 f(0)| dt + \int_0^h |\partial_1 f(t, 0) - \partial_1 f(0)| dt\end{aligned}$$

Pour $v \in B(0, r)$:

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, k], (0, t) &\in B(0, r) \\ \forall t \in [0, h], (h, t) &\in B(0, r)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}|f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle| &\leq \epsilon \times h + \epsilon \times k \\ &\leq \epsilon|h| + \epsilon|k| \\ &\leq 2\epsilon\|v\|\end{aligned}$$

En conclusion, $f(v) - f(0) - \langle \nabla f(0), v \rangle = o(\|v\|)$.

36.42 Règle de la chaîne

Théorème 36.42

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit x et y dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles pour tout $t \in I$, $(x(t), y(t)) \in \Omega$.

La fonction $F : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))$$

$f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ donc possède un $DL_1(t)$ en tout point.

Soit $t \in I$ et $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\ &= \underbrace{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}_{\xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0} + f(x(t), y(t)) \\ (36.36) \quad &= f(x(t), y(t)) + \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \rangle + o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} x(t+h) - x(t) & \underset{h \rightarrow 0}{=} hx'(t) + o(h) & \underset{h \rightarrow 0}{=} O(h) \\ y(t+h) - y(t) & \underset{h \rightarrow 0}{=} hy'(t) + o(h) & \underset{h \rightarrow 0}{=} O(h) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} o(\|(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))\|) &\underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|O(h), O(h)\|) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} o(h) \end{aligned}$$

Et :

$$\langle \nabla f(x(t), y(t)), (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \rangle = \partial_1 f(x(t), y(t))hx'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))hy'(t) + o(h)$$

En conclusion :

$$F(t+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + h[\partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t)] + o(h)$$

Donc F possède un $DL_1(t)$, donc $F \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\begin{aligned} \forall t, F'(t) &= \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t) \\ &\in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ par opérations} \end{aligned}$$

Donc $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

36.43 Exemple

Exemple 36.43

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $f(t^2, \sin t)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dérivée.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

$t \mapsto t^2, \sin \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

D'après la règle de la chaîne, $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) = 2t\partial_1 f(t^2, \sin t) + \cos t\partial_2 f(t^2, \sin t)$$

36.46 Règle de la chaîne, dérivées directionnelle et gradient

Théorème 36.46

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Soit I un intervalle de $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ une fonction pour laquelle $\gamma(I) \subset \Omega$. La fonction $f \circ \gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

2. La fonction f possède une dérivée directionnelle en tout point de Ω et dans toutes les directions. Plus précisément, pour tout $a \in \Omega$, tout $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \partial_1 f(a) \cdot h + \partial_2 f(a) \cdot k$$

3. Interprétation du gradient : le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

1. RAF

2. Soit $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Comme Ω est ouvert, il existe $I =]-\alpha, \alpha[$ tel que :

$$I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(a + tv) = f(x_a + th, y_a + tk)$$

est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 d'après la règle de la chaîne ($t \mapsto x_a + th \in \mathcal{C}^1(I)$, $t \mapsto y_a + tk \in \mathcal{C}^1(I)$).

$$\forall t \in I, g'(t) = h\partial_1 f(a + tv) + k\partial_2 f(a + tv)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= g'(a) \\ &= h\partial_1 f(a) + k\partial_2 f(a) \\ &= \langle \nabla f(a), v \rangle \end{aligned}$$

3. Notons $P_\lambda : z = \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

Une ligne de niveau λ est l'ensemble des solutions de $f(x, y) = \lambda$.

Soit $P_\lambda \cap S$. On suppose que $P_\lambda \cap S \neq \emptyset$ et que $P_\lambda \cap S$ n'est pas un singleton.

Soit $a \in P_\lambda \cap S$. On admet qu'il existe $I =]-\alpha, \alpha[$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(I) \subset P_\lambda \cap S \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall t \in I, f \circ \gamma(t) = \lambda$$

D'après la règle de la chaîne ($f \in \mathcal{C}^1, \gamma \in \mathcal{C}^1$) :

$$\forall t \in I, \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle (f \circ \gamma)'(t) = 0$$

Donc $\nabla f(\gamma(a))$ est bien orthogonal à $\gamma'(a)$ (vecteur tangent à $P_\lambda \cap S$ en a).

D'après (2) pour tout $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} |D_v f(a)| &= |\langle \nabla f(a), v \rangle| \\ &\leq \|\nabla f(a)\| \|v\| \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si v est colinéaire à $\nabla f(a)$ (et positif si et seulement si v est positivement linéaire à $\nabla f(a)$).

36.49 Exemple

Exemple 36.49

Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$y\partial_1 f = x\partial_2 f$$

avec la condition :

$$\forall x > 0, f(x, 0) = e^{-x}$$

On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathcal{C}^1$.

On calcule :

$$\begin{aligned}\partial_1 g(r, \theta) &= \cos \theta \partial_1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \partial_2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \partial_2 g(r, \theta) &= -r \sin \theta \partial_1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \partial_2 f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= 0 \text{ par hypothèse}\end{aligned}$$

Il existe donc $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ tel que :

$$\forall (r, \theta), g(r, \theta) = h(r)$$

Par condition initiale :

$$g(r, 0) = f(x, 0) = e^{-x} = e^{-r}$$

Donc :

$$\forall (r, \theta), g(r, \theta) = e^{-r}$$

Conclusion :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

Synthèse : ça marche

36.51 Points critiques et extrema locaux

Théorème 36.51

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. Si f possède un extremum local en a (i.e. un maximum ou minimum local) alors a est un point critique, i.e. vérifie $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Par conséquent, le plan tangent de f en un point critique est parallèle au plan abscisse et les dérivées directionnelles de f en a sont toutes nulles.

On suppose que a est un maximum local.

Soit $v \in \mathbb{R}^2$.

On pose $g : I \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto f(a + tv)$.

$f(a)$ est nécessairement un maximum local pour g .

Donc $g'(0) = 0$.

Soit $D_v f(a) = 0$.

36.52 Exemple

Exemple 36.52

Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^2 - 3x + yx + y^2$ possède un unique extremum local : un minimum local en $(2, -1)$.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(2, -1)$ est l'unique point critique.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(2+x, -1+y) - f(2, -1) &= (2+x)^2 - 3(2+x)(-1+y) + (-1+y)^2 - f(2, -1) \\ &= 4x + x^2 - 3x - x + 2y + xy - 2y + y^2 \\ &= x^2 + xy + y^2 \\ &\geq |xy| \end{aligned}$$

Donc $f(2, -1)$ est bien le seul minimum global.

36.53 Exemple

Exemple 36.53

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - x - xy - \frac{y^2}{2} + 2y$ ne possède aucun extremum local sur \mathbb{R}^2 .

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 - y = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(1+x, 1+y) - f(1, 1) &= (1+x)^2 - (1+x) - (1+x)(1+y) - \frac{1}{2}(1+y)^2 + 2(1+y) - f(1, 1) \\ &= 2x + x^2 - x - x - y - xy - y - \frac{y^2}{2} + 2y \\ &= x^2 - xy - \frac{y^2}{2} \\ &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{2} \\ \forall x \neq 0, d(x, 2x) &< 0 \\ d(x, 0) &> 0 \end{aligned}$$

$f(1, -1)$ n'est pas un minimum ni un maximum.