

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34 Espaces préhilbertiens réels	1
34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n	2
34.5 Exemple	2
34.14 Identités remarquables	2
34.15 Proposition 34.15 bis	3
34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire	3
34.17 Exemple	4
34.18 Exemple	4
34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur	5
34.21 Exemple	5
34.23 Exemple	5
34.24 Exemple	6
34.25 Propriétés des familles orthogonales	6

34.4 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

Théorème 34.4

L'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (X, Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

- ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX = {}^t({}^tXY) = {}^tXY$
- bilinéarité : RAF
- ${}^tXX = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que

$$(X, Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un exemple de produit scalaire sur \mathbb{R}^2 distinct du produit scalaire usuel.

- bilinéarité : RAF
- Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2$, ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t \left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \right) \\ &= {}^t Y {}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2 + xy + y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.

La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Proposition 34.14

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \quad (\text{bilinéarité}) \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (\text{symétrie})
\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Proposition 34.15 bis

Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x \rangle \\
&= \lambda^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E .

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Inégalité triangulaire :

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

- Inégalité triangulaire, version distance :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \|tx + y\|^2 \\
&= \langle tx + y, tx + y \rangle \\
&= t^2 \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|y\|^2
\end{aligned}$$

f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x\| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.

Or $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$. D'où le résultat.

Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0 . On a alors $\|t_0 x + y\|^2 = 0$.

Donc $t_0 x + y = 0$.

Donc (x, y) est liée.

Réciproquement, si (x, y) est liée, alors $y = t_0 x$ ($x \neq 0$) et on a encore $f(t_0) = 0$.

- Pour $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned}
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.

RAS pour l'inégalité généralisée.

Si $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :

$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1 + \alpha\| \|x\| = \|x + y\| = (1 + |\alpha|) \|x\|$$

Donc $|1 + \alpha| = 1 + |\alpha|$.

Nécessairement, $\alpha \geq 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| &\leq \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ \left| \sum_{k=1}^n 1 \times x_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2 \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b f'(t)^2 dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned} \|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\ &= \left| \int_a^b f(t)f'(t) dt \right| \\ &= \left| \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_a^b \right| \\ &= \left| \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \right| \end{aligned}$$

34.20 Vecteur orthogonal à tout vecteur

Théorème 34.20

Dans un espace préhilbertien réel, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur.

\Rightarrow RAF

\Leftarrow Si x est orthogonal à tout vecteur de E , alors $x \perp x$, donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

34.21 Exemple

Exemple 34.21

Exemple 34.21 Montrer que pour le produit scalaire

$$(X, Y) \mapsto {}^t X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

sur \mathbb{R}^2 , la base canonique n'est pas orthormale, mais la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$ l'est.

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{2} = \|(0, 1)\|$$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 1$$

Donc

$$\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)\| = 1$$

$$\text{On a } \|(1, -2)\| = \sqrt{6}$$

$$\text{Et } \langle (1, 0), (1, -2) \rangle = 0.$$

34.23 Exemple

Exemple 34.23

La famille des fonctions $t \mapsto \sin(nt)$, où $n \in \mathbb{N}$ est orthonormale dans $\mathcal{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin(nx)$.

Soit $p \neq n$.

$$\begin{aligned} \langle f_p, f_n \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t) f_p(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(pt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-p} \sin((n-p)t) - \frac{1}{n+p} \sin((n+p)t) \right]_0^{2\pi} \quad (n \neq p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $n = p$ alors :

$$\begin{aligned} \|f_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nt)) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc (f_n) est bien une famille orthonormée.

34.24 Exemple

Exemple 34.24

Dans $\mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

D'après le chapitre 4, si f est impaire :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = 0$$

Si f est paire et g impaire, alors fg est impaire et ainsi $\langle f, g \rangle = 0$.

34.25 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 34.25

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Théorème de Pythagore : pour tout $(x, y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
De surcroît, si (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

2. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, si E est de dimension finie n non nulle, toute famille orthogonale de n vecteurs est une base orthogonale.

1. RAF
2. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini. On suppose en outre que :

$$\forall i \in I, e_i \neq 0$$

On suppose que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$.

Soit $j \in I$.

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle &= 0 \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0 \text{ pour } i \neq j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \lambda_j \|e_j\|^2 &= 0 \\ \text{donc } \lambda_j &= 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est libre.