

# Maths - MP2I

Axel Montlahuc

2024/2025

<b>1</b>	<b>Calculs Algébriques</b>	<b>5</b>
1.20	Somme des carrés et des cubes . . . . .	6
1.39	Formule de Pascal . . . . .	7
1.41	Formule du capitaine . . . . .	7
1.42	Formule du binôme de Newton . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Logique</b>	<b>9</b>
2.17	Equivalence logiques . . . . .	10
2.17.1	Double négation . . . . .	10
2.17.2	Commutativité . . . . .	10
2.17.3	Associativité . . . . .	10
2.17.4	Loi de Morgan . . . . .	10
2.17.5	Double implication . . . . .	11
2.17.6	Distributivité . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ensembles et applications</b>	<b>12</b>
3.12	Propriétés du produit cartésien . . . . .	13
3.18	Associativité des relations . . . . .	13
3.20	Propriétés des relations réciproques . . . . .	13
3.23	Composition de fonctions . . . . .	14
3.30	Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijektivité . . . . .	14
3.35	Composée d'injections/surjections . . . . .	14
3.36	Condition nécessaire pour une composition injective/surjective . . . . .	15
3.37	Réciproque et bijection . . . . .	15
3.38	Inverse d'une composée de bijections . . . . .	15
3.39	Condition nécessaire et suffisante de bijectivité . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Généralités sur les fonctions</b>	<b>16</b>
4.21	Exemple . . . . .	17
4.23	Remarque . . . . .	17
4.27	Axe de symétrie . . . . .	17
4.28	Centre de symétrie . . . . .	17
4.51	Exemple . . . . .	17
4.52	Théorème de la bijection dérivable . . . . .	17
4.61	Primitives d'une fonction sur un intervalle . . . . .	18
4.62	Exemple . . . . .	18
4.65	Remarque . . . . .	18
4.66	Exemple . . . . .	19
4.69	Intégration par partie . . . . .	19
4.70	Changement de variable . . . . .	19
4.72	Exemple . . . . .	19
4.74	Méthode . . . . .	20
4.75	Exemple . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>21</b>
5.2	Propriétés du logarithme . . . . .	22
5.3	Propriété fondamentale du logarithme . . . . .	22
5.4	Limites usuelles de la fonction logarithme . . . . .	23
5.8	Propriétés de la fonction exponentielle . . . . .	24
5.9	Propriété fondamentale de l'exponentielle . . . . .	24
5.15	Dérivée d'une fonction puissance . . . . .	24
5.21	Croissances comparées en $+\infty$ . . . . .	24
5.22	Croissances comparées en 0 . . . . .	25
5.43.2	Formule de trigonométrie hyperbolique . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Structures algébriques</b>	<b>26</b>
10.3	Exemple . . . . .	27
10.6	Exemple . . . . .	27

<b>11 Matrices</b>	<b>28</b>
11.11Produit matriciel . . . . .	29
11.12Produit matriciel, lignes par colonnes . . . . .	29
11.16Produit de deux matrices élémentaires . . . . .	29
11.17Propriétés du produit matriciel, matrice identité . . . . .	30
11.24Exemple . . . . .	30
11.25Produit par bloc . . . . .	30
11.27Propriétés de la transposition . . . . .	31
11.31Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . . . . .	31
11.33Exemple . . . . .	31
11.37Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires . . . . .	32
11.41Nilpotence des matrices triangulaires . . . . .	32
11.44Opérations . . . . .	32
11.48Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$ . . . . .	33
11.49Matrices diagonales inversibles . . . . .	33
11.50Exemple . . . . .	33
11.51Matrices triangulaires inversibles . . . . .	33
11.54Exemple . . . . .	35
11.61Exemple . . . . .	35
11.65Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires . . . . .	36
11.74Système équivalents et opérations élémentaires . . . . .	36
<b>12 Arithmétique</b>	<b>37</b>
12.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$ . . . . .	38
12.4 Division euclidienne . . . . .	38
12.9 Divisibilité et multiple . . . . .	39
12.10Divisibilité et normes . . . . .	39
12.11Entiers associés . . . . .	39
12.14Intégrité de la divisibilité . . . . .	40
12.20Cas d'une divisibilité . . . . .	40
12.21Préparation à l'algorithme d'Euclide . . . . .	40
12.23Algorithme d'Euclide étendu ou théorème de Bézout . . . . .	40
12.24Application basique . . . . .	41
12.26Théorème de Bézout . . . . .	41
12.28Proposition . . . . .	42
12.29Proposition . . . . .	42
12.30Théorème de Gauss . . . . .	43
12.31Equation de Bézout . . . . .	43
12.32Proposition . . . . .	43
12.37Lien avec les idéaux . . . . .	44
12.38Préparation au calcul pratique d'un <i>pgcd</i> . . . . .	44
12.39Caractérisation du <i>pgcd</i> . . . . .	44
12.40Propriétés du <i>pgcd</i> . . . . .	45
12.44Définition du PPCM . . . . .	46
12.45Caractérisation du <i>ppcm</i> . . . . .	46
12.46Propriétés du <i>ppcm</i> . . . . .	47
12.50Propriétés . . . . .	48
12.51Petit théorème de Fermat . . . . .	48
12.52Décomposition en produit de facteurs premiers . . . . .	49
12.54Caractérisation de la valuation . . . . .	50
12.55Valuation et décomposition en produit de facteurs premiers . . . . .	50
12.56Propriétés de la valuation . . . . .	50
<b>13 Polynômes</b>	<b>52</b>
13.6 Produit de deux polynômes . . . . .	53
13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$ . . . . .	53
13.11Monômes . . . . .	54
13.12Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle . . . . .	54
13.26Dérivée de produits . . . . .	55
13.28Dérivée d'une composition . . . . .	55
13.34Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée . . . . .	56

13.36	Théorème de permanence de l'intégrité . . . . .	57
13.39	Propriété de stabilité . . . . .	57
13.42	Corollaire du degré d'une dérivée dans $\mathbb{K}[X]$ , avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	58
<b>14</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>59</b>
14.18	Premier théorème de comparaison . . . . .	60
14.22	Unicité de la limite . . . . .	60
14.23	Limite et inégalité . . . . .	60
14.24	Convergence et bornitude . . . . .	61
14.29	Minoration d'une extraction . . . . .	61
14.30	Extraction d'une suite convergente . . . . .	61
14.32	Pair, impair et convergence . . . . .	61
14.34	Opérations usuelles sur les limites . . . . .	62
14.35	Conservation des inégalités larges par passage à la limite . . . . .	63
14.37	Théorème d'encadrement . . . . .	63
14.38	Produit d'une suite bornée par une limite nulle . . . . .	63
14.39	Exemple . . . . .	63
14.40	Comparaison puissance factorielle . . . . .	64
14.41	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure . . . . .	64
14.42	Caractérisation séquentielle de la borne supérieure . . . . .	65
14.48	Théorème de comparaison . . . . .	65
14.49	Limites infinies et opérations . . . . .	66
14.50	Théorème de la limite monotone . . . . .	67
14.54	Exemple . . . . .	67
14.55	Convergence des suites adjacentes . . . . .	68
14.56	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	68
14.63	Exemple . . . . .	69
14.64	Exemple . . . . .	69
14.66	Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	70
14.68	Exemple . . . . .	70
14.69	Exemple . . . . .	71
14.72	Convergence et parties réelles et imaginaires . . . . .	71
14.73	Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes . . . . .	71
<b>15</b>	<b>Limites et continuité</b>	<b>73</b>
15.6	Limite en un point du domaine . . . . .	74
15.15	Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$ . . . . .	74
15.17	Unicité de la limite, cas réel . . . . .	74
15.23	Proposition . . . . .	74
15.30	Composition de limites . . . . .	75
15.32	Limites et inégalités strictes . . . . .	75
15.33	Limite et inégalités larges . . . . .	76
15.34	Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction . . . . .	76
15.39	Théorème de la limite monotone . . . . .	77
15.59	Théorème des valeurs intermédiaires : version 1 . . . . .	77
15.60	Théorème des valeurs intermédiaires : version 2 . . . . .	78
15.61	Théorème des valeurs intermédiaires : version 3 . . . . .	78
15.65	Théorème de Heine . . . . .	78
15.67	Caractérisation des intervalles compacts . . . . .	79
15.68	Image d'un compact par une fonction continue . . . . .	79
15.69	Image d'un segment par une fonction continue . . . . .	79
15.72	Théorème 15.72 . . . . .	79
15.73	Théorème 15.73 . . . . .	80
15.76	Théorème de la bijection . . . . .	80
<b>16</b>	<b>Arithmétique des polynômes</b>	<b>81</b>
16.1	Division euclidienne . . . . .	82

## Chapitre 1

# Calculs Algébriques

## 1.20 Somme des carrés et des cubes

— Somme des carrés :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$\sum_{k=1}^0 k^2 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— Somme des cubes :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$\sum_{k=1}^0 k^3 = 0$$

et :

$$\frac{0 \times (0+1)^2}{4} = 0$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Donc  $P(n+1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

### 1.39 Formule de Pascal

Démontrons pour tout  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$  la relation :

$$\ll \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \gg$$

La relation est vraie si  $p > n$  (on a  $0 = 0 + 0$ ) et si  $p = n$  (qui donne  $1 = 0 + 1$ ).

Soit  $1 \leq p \leq n$  :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{(p-1)!(n-1-p)! \times p(n-p)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

### 1.41 Formule du capitaine

Démontrons pour  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $1 \leq p \leq n$  la relation :

$$\ll n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p} \gg$$

On a :

$$n \binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p \binom{n}{p}$$

### 1.42 Formule du binôme de Newton

Soit  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note la proposition :

$$P(n) : \ll (x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \gg$$

Démontrons-la par récurrence.

Initialisation : Pour  $n = 0$ , on a :

$$(x + y)^0 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

Donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité : On suppose  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé dans  $\mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n \\ &= (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n+1-k}) && \text{(linéarité)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} && \text{(translation)} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n x^k y^{n+1-k} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} && \text{(formule de Pascal)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} x^k y^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc  $P(n + 1)$  est vraie aussi.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$



## Chapitre 2

# Logique

## 2.17 Equivalence logiques

### 2.17.1 Double négation

$p$	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$F$

On remarque que la première et la deuxième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \Longleftrightarrow \neg(\neg p)$$

### 2.17.2 Commutativité

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la troisième et la quatrième colonne sont identiques, on a donc :

$$p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$$

Raisonnement analogue pour la disjonction  $\vee$ .

### 2.17.3 Associativité

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la cinquième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Raisonnement analogue pour la disjonction  $\vee$ .

### 2.17.4 Loi de Morgan

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

On remarque que la quatrième et la septième colonne sont identiques, on a donc :

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

Raisonnement analogue pour  $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

### 2.17.5 Double implication

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

On remarque que la troisième et la sixième colonne sont identiques, on a donc :

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

### 2.17.6 Distributivité

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$r \vee (p \wedge q)$	$r \vee p$	$r \vee q$	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

On remarque que la cinquième et la huitième colonne sont identiques, on a donc :

$$r \vee (p \wedge q) \iff (r \vee p) \wedge (r \vee q)$$

## Chapitre 3

# Ensembles et applications

### 3.12 Propriétés du produit cartésien

Soit  $x$  et  $y$ . On a :

1.

$$(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F$$

$$\text{Donc } (x, y) \notin E \times F \Leftrightarrow x \notin E \text{ ou } y \notin F$$

2.

$$E \times F \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E \times F$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in E \text{ et } \exists y \in F$$

$$\Leftrightarrow E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{non } (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$$

3.

$$E \times F = F \times E \Leftrightarrow \begin{cases} E \times F = F \times E \text{ et } E = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } F = \emptyset \\ E \times F = F \times E \text{ et } E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall (x, y) \in E \times F, (x, y) \in F \times E \text{ et } \forall (a, b) \in F \times E, (a, b) \in E \times F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E \neq \emptyset \text{ et } F \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in E, x \in F \text{ et } \forall y \in F, y \in E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \\ E = F \end{cases}$$

4.

$$(x, y) \in (E \times F) \cup (F \times G) \Leftrightarrow (x, y) \in E \times F \text{ ou } (x, y) \in F \times G$$

$$\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F) \text{ ou } (x \in F \text{ et } y \in G)$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \cup G$$

5.

$$(x, y) \in (E \times F) \cap (G \times H) \Leftrightarrow (x, y) \in E \times F \text{ et } (x, y) \in G \times H$$

$$\Leftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } x \in G \text{ et } y \in H$$

$$\Leftrightarrow x \in E \cap G \text{ et } y \in F \cap H$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (E \cap G) \times (F \cap H)$$

### 3.18 Associativité des relations

Les ensembles de départ et d'arrivée sont bien égaux (à  $E$  et  $H$  respectivement). Soit  $(x, y) \in E \times H$

$$x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists z \in F, x(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})z \text{ et } z\mathcal{R}y$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, (x\mathcal{T}v \text{ et } v\mathcal{S}z) \text{ et } z\mathcal{R}y$$

$$\Leftrightarrow \exists z \in F, \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } (v\mathcal{S}z \text{ et } z\mathcal{R}y)$$

$$\Leftrightarrow \exists v \in G, x\mathcal{T}v \text{ et } v(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y$$

$$\Leftrightarrow x\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y$$

### 3.20 Propriétés des relations réciproques

— RAF

— Les ensembles de départ sont égaux respectivement à  $E$  et à  $G$ .

Soit  $(x, y) \in G \times E$ . On a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}y &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, x\mathcal{S}^{-1}\alpha \text{ et } \alpha\mathcal{R}^{-1}y \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \alpha\mathcal{S}x \text{ et } y\mathcal{R}\alpha \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{S} \circ \mathcal{R}x \\ &\Leftrightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}y \end{aligned}$$

### 3.23 Composition de fonctions

Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$ .

Soit  $g$  une fonction de  $E$  vers  $G$ .

$g \circ f$  est une relation de  $E$  vers  $G$

Soit  $(x, y, y') \in E \times G \times G$ . On suppose

$$\begin{cases} x(g \circ f)y \\ x(g \circ f)y' \end{cases}$$

Donc on choisit  $\alpha$  dans  $F$  tel que :

$$xf\alpha \text{ et } \alpha gy$$

et  $\beta$  dans  $F$  tel que :

$$xf\beta \text{ et } \beta gy'$$

Or  $f$  est une fonction, donc  $\alpha = \beta$ .

Donc  $\alpha gy$  et  $\alpha gy'$ , or  $g$  est une fonction, donc  $y = y'$ . Par définition,  $g \circ f$  est une fonction.

### 3.30 Schémas de raisonnement : montrer l'injectivité/surjectivité/bijektivité

Injectivité :

Soit  $(x, x') \in E^2$ .

On suppose que  $f(x) = f(x')$ .

$\vdots$

Donc  $x = x'$ .

Surjectivité :

Soit  $y \in F$ .

$\vdots$

On choisit ... tel que :

$\vdots$

Donc  $f(x) = y$

Bijektivité :

Pour la bijectivité, on montre l'injectivité et la surjectivité séparément.

### 3.35 Composée d'injections/surjections

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont injectives.  
Soit  $(x, x') \in E^2$ .

On suppose que  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$

Donc  $g(f(x)) = g(f(x'))$

Donc  $f(x) = f(x')$

( $g$  est injective)

Donc  $x = x'$

( $f$  est injective)

- On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives.

Soit  $y \in G$ .

Par surjectivité de  $g$ , on choisit  $\alpha \in F$  tel que  $g(\alpha) = y$ .

Par surjectivité de  $f$ , on choisit  $x \in E$  tel que  $f(x) = \alpha$ .

Donc  $g \circ f(x) = y$ .

Donc  $g \circ f$  est surjective.

### 3.36 Condition nécessaire pour une composition injective/surjective

- Soit  $(x, x') \in E^2$  tels que :

$$f(x) = f(x')$$

$$\text{Donc } g(f(x)) = g(f(x'))$$

$$\text{Donc } x = x'$$

Donc  $f$  est injective.

- On suppose  $g \circ f$  surjective.

Soit  $y \in G$ . Soit  $\alpha \in E$  tel que  $g \circ f(\alpha) = y$ .

On pose  $x = f(\alpha) \in F$ .

Donc  $g(x) = y$  Donc  $g$  est surjective.

### 3.37 Réciproque et bijection

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $f^{-1}$  la relation réciproque de  $f$

- $f^{-1}$  est une fonction si et seulement si  $f$  est injective.

- Si  $f^{-1}$  est une fonction, c'est une application.

ssi.  $\text{Def}(f^{-1}) = F$

ssi.  $f$  est surjective.

### 3.38 Inverse d'une composée de bijections

Propositions (3.35), (3.27) et (3.20)

### 3.39 Condition nécessaire et suffisante de bijectivité

$\Rightarrow$

On suppose que  $f$  est bijective.

On pose  $g = f^{-1}$  sa bijection réciproque.

On a bien  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ .

$\Leftarrow$

Soit  $g : F \rightarrow E$  vérifiant  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ .

En particulier,  $g \circ f$  est injective, donc  $f$  est injective.

En particulier,  $f \circ g$  est surjective, donc  $f$  est surjective.

Donc  $f$  est bijective.

Or  $f \circ g = id_F$ .

Donc  $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_F$ .

Soit  $g = f^{-1}$ .

## Chapitre 4

# Généralités sur les fonctions



## 4.21 Exemple

On suppose que  $f \geq g$ . Ainsi :

$$|f - g| = f - g \Leftrightarrow \frac{f + g + |f - g|}{2} = f$$

## 4.23 Remarque

Soit  $a \in \mathbb{Q}^*$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

— Si  $x \in \mathbb{Q}$ , alors  $x + a \in \mathbb{Q}$ , donc  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x + a) = 1 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ .

— Si  $x \notin \mathbb{Q}$ , alors  $x + a \notin \mathbb{Q}$ , donc  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x + a) = 0 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ .

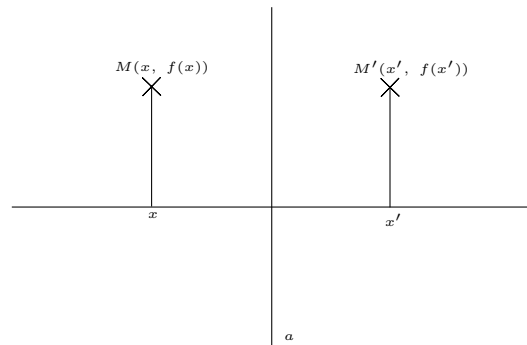
## 4.27 Axe de symétrie

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

Soit  $(x, x') \in I^2$ .

$M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport  $x = a$

$$\begin{aligned} \text{ssi. } & \begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ f(x) = f(x') \end{cases} \\ \text{ssi. } & \begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x) = f(x') \end{cases} \end{aligned}$$

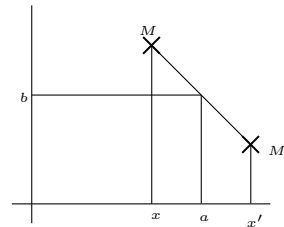


## 4.28 Centre de symétrie

On reprend les mêmes notations qu'à la (4.27).

$M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à  $A(a, b)$

$$\begin{aligned} \text{ssi. } & \begin{cases} a = \frac{x+x'}{2} \\ b = \frac{f(x)+f(x')}{2} \end{cases} \\ \text{ssi. } & \begin{cases} x' = 2a - x \\ f(x') = 2b - f(x) \end{cases} \end{aligned}$$



## 4.51 Exemple

1.  $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x+x^2)^2}$
2.  $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
3.  $f'(x) = -3\frac{e^x(x-1)}{x^2}\sin\left(\frac{e^x}{x}\right)\cos^2\left(\frac{e^x}{x}\right)$

## 4.52 Théorème de la bijection dérivable

On suppose la dérivabilité de  $f^{-1}$ . Par définition :

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_I$$

D'après la proposition (4.48.4), on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})' \circ f' \times f^{-1} &= (f \circ f^{-1})' \\ &= \text{Id}'_I \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

## 4.61 Primitives d'une fonction sur un intervalle

— Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives de  $f$  sur l'intervalle  $I$ , alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in I, (F - G)'(x) &= F'(x) - G'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme  $I$  est un intervalle,  $F - G$  est constante (4.53).

Réciproquement, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $F + a$  est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ .

— Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Or pour  $F = G + a - G(x_0)$ ,  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  et  $F(x) = a$ .

L'unicité est donnée par le point précédent.

## 4.62 Exemple

1. Sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .  
Pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\frac{-\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

La primitive de  $\tan$  sur  $I$  est :  $x \mapsto -\ln |\cos x| = \ln \cos x$ .

2. Sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

$$\forall x \in I, \tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$$

Une primitive de  $\tan^2$  sur  $I$  est :  $x \mapsto \tan x - x$ .

3. Sur  $I = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, x\sqrt{1+x^2} &= x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Une primitive de  $x \mapsto x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathbb{R}$  est :  $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ .

4. Sur  $I = \mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x > 0, \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est :  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x$ .

## 4.65 Remarque

$G : y \mapsto yg(y) - F(g(y)) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} G'(y) &= g(y) + yg'(y) - g'(y)f(g(y)) \\ &= g(y) + \cancel{yg'(y)} - \cancel{g'(y)y} \\ &= g(y) \end{aligned}$$

## 4.66 Exemple

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-1}^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \right| &\leq \int_{-1}^1 \frac{|t|^n}{1+t^2} dt && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
 &\leq \int_{-1}^1 |t|^n dt && (\forall t, \frac{|t|^n}{1+t^2} \leq |t|^n) \\
 &= (-1)^n \int_{-1}^0 t^n dt + \int_0^1 t^n dt && \text{(Relation de Chasles)} \\
 &= (-1)^n \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{2}{n+1}
 \end{aligned}$$

## 4.69 Intégration par partie

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt &= \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (fg)'(t) dt \\
 &= [f(t)g(t)]_a^b
 \end{aligned}$$

## 4.70 Changement de variable

Comme  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , on choisit une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[a, b]$ . (Théorème fondamental du calcul intégral)  
Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt &= [F(t)]_{u(a)}^{u(b)} \\
 &= F \circ u(b) - F \circ u(a)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(u(t))u'(t) dt &= \int_a^b F'(u(t)) \times u'(t) du(t) \\
 &= [F \circ u(t)]_a^b
 \end{aligned}$$

## 4.72 Exemple

Si  $x = \sin t$ , alors  $dx = \cos t dt$ .

Pour  $t = 0$ ,  $x = \sin 0 = 0$ .

Pour  $t = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

Or  $t \mapsto \sin t \in \mathcal{C}^1([0; \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ .

D'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\&= \left[ \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} \\&= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

## 4.74 Méthode

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{a; b\}$ , trouver  $c$  et  $d$  tel que  $\frac{\alpha x + \beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha x + \beta}{(x-b)} &= c + \frac{d(x-a)}{(x-b)} && \text{(On multiplie par } (x-a)) \\c &= \frac{\alpha a + \beta}{a-b} && (x=a) \\d &= \frac{\alpha b + \beta}{b-a} && (x=b)\end{aligned}$$

## 4.75 Exemple

$$f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{4}{3(x+1)} + \frac{4}{5(x-3)}$$

Une primitive de  $f$  sur  $] -1; 3[$  est :  $x \mapsto \frac{3}{4} \ln |x+1| + \frac{5}{4} \ln |x-3| = \frac{3}{4} \ln(x+1) + \frac{5}{4} \ln(x-3)$

## Chapitre 5

# Fonctions usuelles

## 5.2 Propriétés du logarithme

Par définition,  $\ln$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On montre par récurrence sur  $n \geq 1$  que

$$\text{"}\ln \text{ est dérivable } n \text{ fois et } \forall n > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\text{"}$$

Initialisation :

La propriété est vraie pour  $n = 1$ .

Hérédité :

Si elle est vraie pour  $n \geq 1$ , par théorème d'opérations,  $\ln^{(n)}$  est encore dérivable et :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \ln^{(n+1)}(x) &= \left[ \ln^{(n)} \right] (x) \\ &= (-1)^n n! x^{-n-1} \end{aligned}$$

Comme  $\ln' > 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## 5.3 Propriété fondamentale du logarithme

On montre seulement la propriété pour  $a > 0$  et  $b > 0$ .

On fixe  $b > 0$  et on considère :

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(xb)$$

Par composition,  $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  et :

$$\forall x > 0, f'(x) = b \times \frac{1}{xb} = \frac{1}{x}$$

Donc  $f$  est une primitive de  $\frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On choisit  $c \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f = \ln + c$$

En particulier :

$$f(1) = \ln 1 + c$$

Soit :

$$\ln b = c$$

Ainsi :

$$\forall x > 0, \ln(xb) = \ln x + \ln b$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 &= \ln 1 \\ &= \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + \ln \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc pour  $a > 0$  et  $b > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln a + \ln \frac{1}{b} \\ &= \ln a - \ln b\end{aligned}$$

## 5.4 Limites usuelles de la fonction logarithme

On commence par montrer que :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

On sait que  $\ln$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{ou} \quad \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda$$

Soit  $n \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}\ln n &= \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - 1\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par théorème de comparaison :

$$\ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Enfin :

$$\forall x > 0, \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc par composition :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

Par taux d'accroissement, en introduisant :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(1+x) \\ f &\in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \frac{\ln(x+1)}{x} &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{=} f'(0) = 1\end{aligned}$$

## 5.8 Propriétés de la fonction exponentielle

D'après les résultats précédents (5.2), (5.4), on applique le théorème de la bijection dérivable. La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x &= \frac{1}{\ln' \circ \exp x} \\ &= \exp x\end{aligned}$$

On obtient directement que  $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$  et que  $\exp^{(n)} = \exp n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 5.9 Propriété fondamentale de l'exponentielle

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On choisit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que :

$$x = \ln a \text{ et } y = \ln b$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\exp(x + y) &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp(\ln(ab)) \\ &= ab \\ &= \exp x \times \exp y\end{aligned}$$

Ainsi,  $\exp 0 = \exp(0 + 0) = \exp^2 0$ .

Donc  $\exp 0 \in \{0; 1\}$

Or  $\exp$  est à valeur dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $\exp 0 = 1$ , donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \times \exp(-x) = 1$$

## 5.15 Dérivée d'une fonction puissance

Soit  $y > 0$ . On pose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y^x = \exp(x \ln y)$ .

$f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , donc par composition :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \ln y \times \exp(x \ln y) \\ &= \ln y \times y^x\end{aligned}$$

## 5.21 Croissances comparées en $+\infty$

1. On commence par montrer que  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $x \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned}0 \leq \frac{\ln x}{x} &= \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{x} \left[ 2\sqrt{t} \right]_1^x \\ &= \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement,  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $a > 0$  et  $x > 0$  :

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{1}{a} \times \frac{\ln x^a}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{composition et théorème d'opérations})$$



2. On utilise le changement de variable :

$$x = (\ln y)^{\frac{1}{a}}, \text{ soit } y = e^{ax}$$

Ainsi :

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln y}{y^{\frac{1}{a}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 \text{ par composition si } a > 0 \\ 0 \text{ par théorème d'opérations si } a \leq 0 \end{cases}$$

## 5.22 Croissances comparées en 0

On utilise la proposition (5.21.1) avec  $y = \frac{1}{x}$ .

### 5.43.2 Formule de trigonométrie hyperbolique

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \frac{(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b})}{4} + \frac{(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}}{4} \\ &= ch(a+b) \end{aligned}$$

## Chapitre 10

# Structures algébriques

### 10.3 Exemple

#### Exemple

Soit  $E = ]-1; 1[$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , on pose :  $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Montrer que l'on définit ainsi une loi dans  $E$ .

On fixe  $y \in E$ . On note  $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ .  
 $\varphi \in \mathcal{D}^1([-1; 1], \mathbb{R})$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \varphi'(x) &= \frac{1 + xy - y(x + y)}{(1 + xy)^2} \\ &= \frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Comme  $E$  est un intervalle :  $\varphi$  est strictement croissante sur  $E$  et :

$$\forall x \in E, -1 = \varphi(-1) < \varphi(x) < \varphi(1) = 1$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y \in E$$

### 10.6 Exemple

#### Exemple

Soit  $E = ]-1; 1[$ . Pour  $(x, y) \in E^2$ , on pose  $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ . Montrer que  $\star$  est associative et commutative.

- Commutativité : RAF
- Associativité :  
 Soit  $(x, y, z) \in E^3$ . On a :

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star \left( \frac{y + z}{1 + yz} \right) \\ &= \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1 + yz) + y + z}{1 + yz + xy + xz} \\ &= \frac{x + y + z + xyz}{1 + yz + xy + xz} \end{aligned}$$

C'est une expression symétrique en  $x, y$  et  $z$  donc :

$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

## Chapitre 11

# Matrices

### 11.11 Produit matriciel

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 6 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

### 11.12 Produit matriciel, lignes par colonnes

$$\text{— } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} (AC_i)_{k,1} &= \sum_{l=1}^p a_{kl}(C_i)_{l,1} \\ &= \sum_{l=1}^p a_{kl}\delta_{il} \\ &= a_{ki} \end{aligned}$$

$$\text{— } L_j = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) = (\delta_{ji})_{1 \leq i \leq n}$$

$$\begin{aligned} (L_j A)_{1k} &= \sum_{l=1}^n (L_j)_{1,e} \times a_{ek} \\ &= \sum_{l=1}^n \delta_{je} a_{lk} \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

$$\text{— On note } A = (C_1 \mid \dots \mid C_p) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \sum_{k=1}^p x_k A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^p x_k C_k$$

### 11.16 Produit de deux matrices élémentaires

Soit  $1 \leq k \leq n; 1 \leq l \leq m$

$$\begin{aligned} (E_{ij} \times E_{rs})_{k,l} &= \sum_{p=1}^t (E_{ij})_{kp} \times (E_{rs})_{pl} \\ &= \sum_{p=1}^t \delta_{ik} \delta_{pj} \delta_{rp} \delta_{sl} \\ &= \delta_{rj} \delta_{ik} \delta_{sl} \\ &= \delta_{rj} (E_{is})_{kl} \end{aligned}$$

Donc  $E_{ij} \times E_{rs} = \delta_{jr} E_{is}$

## 11.17 Propriétés du produit matriciel, matrice identité

— Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_{i,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
 (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj} \\
 [(AB)C]_{il} &= \sum_{t=1}^q (AB)_{it} C_{tl} \\
 &= \sum_{t=1}^q \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kt} C_{tl} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} \sum_{t=1}^q B_{kt} C_{tl} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} (BC)_{kl} \\
 &= (A(BC))_{il}
 \end{aligned}$$

— RAF

— RAF

## 11.24 Exemple

On écrit  $A = I_3 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $I_3$  et  $N$  commutent,

$$\begin{aligned}
 A^k &= (I_3 + N)^k \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} N^i && \text{(Binôme de Newton)} \\
 &= I_3 + \binom{k}{1} N && (N^2 = 0) \\
 &= I_3 + kN \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 11.25 Produit par bloc

On le fait pour un bloc. Soit  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq s$ .

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \right]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^p \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}_{ik} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{ik} A'_{kj} + \sum_{k=1}^q C_{ik} B'_{kj} \\
 &= (AA' + CB')_{ij}
 \end{aligned}$$

## 11.27 Propriétés de la transposition

- RAF
- RAF
- Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned}
 [{}^t(AB)]_{ij} &= (AB)_{ji} \\
 &= \sum_{k=1}^p A_{jk} B_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^p [{}^tB]_{ik} [{}^tA]_{kj} \\
 &= [{}^tB {}^tA]_{ij}
 \end{aligned}$$

## 11.31 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Trace d'une somme de matrices :

$$\begin{aligned}
 tr(A + B) &= \sum_{i=1}^n (A + B)_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n A_{ii} + B_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} \\
 &= tr(A) + tr(B)
 \end{aligned}$$

- Trace d'un produit par un scalaire :

$$\begin{aligned}
 tr(\lambda A) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A)_{ii} \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^n A_{ii} \\
 &= \lambda tr(A)
 \end{aligned}$$

- Trace d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned}
 tr(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ki} A_{ik} \\
 &= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} \\
 &= tr(BA)
 \end{aligned}$$

## 11.33 Exemple

On suppose  $A$  et  $B$  solutions.

Donc  $AB - BA = I_n$

Donc  $tr(AB - BA) = tr(I_n) = n$

Or  $tr(AB - BA) = 0$

Absurde.

### 11.37 Stabilité des matrices diagonales ou triangulaires

On montre le résultat pour les matrices triangulaires supérieures (ensemble noté  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ).  
 Soit  $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$ . On a bien  $A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  et aussi  $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  
 Soit  $i > j$ , on a :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$$

— Si  $i > j$ ,  $A_{ik} = 0$ .

— Si  $i = j$ ,  $B_{kj} = 0$ .

Donc  $(AB)_{ij} = 0$ .

Donc  $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ .

Si  $(AB) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$ , alors  ${}^t(AB) = \underbrace{{}^tB}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \times \underbrace{{}^tA}_{\in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Donc  $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Le résultat est vrai pour les matrices diagonales, à la fois triangulaires supérieures et inférieures.

### 11.41 Nilpotence des matrices triangulaires

Soit  $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ .

On va montrer par récurrence sur  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que :

$${}^" T^k = \begin{pmatrix} O & - & O & - & \Delta \\ & & & & | \\ & & & & O \\ & & & & | \\ & & & & O \end{pmatrix} {}"$$

C'est-à-dire que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $i + k - 1 \geq j \Rightarrow T_{ij}^k = 0$ .

On suppose le résultat vrai pour  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

Soit  $i + k \geq j$ .

$$\begin{aligned} (T^{k+1})_{ij} &= (T^k T)_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^n T_{ip}^k T_{pj} \end{aligned}$$

— Si  $p \leq i + k - 1$ ,  $T_{ip}^k = 0$

— Si  $p \geq i + k$ ,  $T_{pj} = 0$

Donc  $(T^{k+1})_{ij} = 0$ .

Par récurrence,  $P(k)$  est vrai pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En particulier, pour  $k = n$ , on obtient  $T^n = 0$ .

### 11.44 Opérations

—  ${}^t A \times {}^t (A^{-1}) = {}^t (A^{-1} A) = {}^t I_n = I_n$

—  ${}^t (A^{-1}) \times {}^t A = {}^t (A A^{-1}) = {}^t I_n = I_n$

Donc  $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$



### 11.48 Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$

On note  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} M.N &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \det(M)I_2 \end{aligned}$$

- Si  $\det(M) \neq 0$ , alors  $M \times \left(\frac{1}{\det(M)}N\right) = I_2$ . Donc  $M$  est inversible et  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}N$ .
- Si  $\det(M) = 0$ , alors  $M.N = 0$  donc  $M$  n'est pas inversible.

### 11.49 Matrices diagonales inversibles

Soit  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .



On suppose que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} D \times \text{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) &= \text{Diag}(\lambda_1 \times \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n \times \lambda_n^{-1}) \\ &= \text{Diag}(1, \dots, 1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc  $D$  est inversible et

$$D^{-1} = \text{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$



Par contraposée, soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_i = 0$ .

$$D \times \text{Diag}(0, \dots, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ place}}, \dots, 0) = 0$$

Donc  $D$  est un diviseur de 0, donc  $D$  n'est pas inversible.

### 11.50 Exemple

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & -a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

### 11.51 Matrices triangulaires inversibles

On raisonne par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $n = 1$  RAF.

Pour  $n = 2$ , RAS (11.48).

On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soi  $T \in \mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$ . Donc  $T$  est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{U} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et } a \in \mathbb{K}$$

$\Rightarrow$

On suppose que la diagonale de  $T$  ne contient aucun 0.

Donc  $\mathcal{U}$  est inversible d'après l'hypothèse de récurrence.

On choisit  $V \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$  tel que (Hypothèse de récurrence).

$$\mathcal{U}V = I_n$$

On a :

$$\begin{aligned} T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \underbrace{a^{-1}}_{a \neq 0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{U} & X \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_n & a^{-1}X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc (11.50) :

$$T \times \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -a^{-1}X \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $T$  est inversible d'inverse dans  $\mathcal{T}_{n+1}^+(\mathbb{K})$ .

$\Leftarrow$

On suppose que la diagonale de  $T$  contient un 0.

— Si  $T_{11} = 0$ , alors  $T = \begin{pmatrix} 0 & L \\ & W \end{pmatrix}$

Et  $T \times \underbrace{E_{11}}_{\neq 0} = 0$

Donc  $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$

— On suppose que le premier 0 apparait à  $T_{kk}$  avec  $k \geq 2$ .

Donc

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F \in \mathcal{T}_{k-1}^+(\mathbb{K})$$

La diagonale de  $F$  ne contient aucun 0 donc  $F \in GL_{k-1}(\mathbb{K})$  et :

$$\begin{aligned} A \times \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -F^{-1}G \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors :

$$T \times \underbrace{\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$

Donc  $T \notin GL_{n+1}(\mathbb{K})$ .

## 11.54 Exemple

Soit  $X \in \mathbb{K}^2$ .

$$\begin{aligned}
 X \in \ker A &\Leftrightarrow AX = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = 0
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker A = \{0\}$ .

$$\begin{aligned}
 X \in \ker B &\Leftrightarrow BX = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x + y = 0 \\
 &\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\} \\
 &\Leftrightarrow X \in \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc  $\ker B = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## 11.61 Exemple

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 7y = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 - 2y \\ 3x = 3 - 7y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -3z = y \\ x = 1 - \frac{7}{3}y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{7}{3}y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{7}{3}y \\ y \\ -\frac{1}{3}y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \mathcal{S} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 11.65 Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

$\Rightarrow$

RAF : (11.63)

$\Leftarrow$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  définie par :

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, on choisit  $X_i \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$AX_i = Y_i$$

On pose  $B = (X_1 \quad \dots \quad X_n)$  et on remarque que :

$$(Y_1 \quad \dots \quad Y_n) = I_n$$

Par construction :

$$AB = I_n$$

## 11.74 Système équivalents et opérations élémentaires

Soit  $\Sigma$  un système et  $\Sigma'$  un système obtenu après avoir effectué une opération élémentaire.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  la matrice du système  $\Sigma$  et  $B \in \mathbb{K}^n$  son second membre.

Soit  $X \in \mathbb{K}^p$ . Effectuer une opération élémentaire revient à choisir une matrice  $P$  de la forme  $P_{ij}$ ,  $Q_i(\lambda)$ ,  $R_{ij}(\lambda)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned}X \in \mathcal{S}(\Sigma) &\Leftrightarrow AX = B \\ &\stackrel{P \in GL_n(\mathbb{K})}{\Leftrightarrow} PAX = PB \\ &\Leftrightarrow X \in \mathcal{S}(\Sigma')\end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\mathcal{S}(\Sigma) = \mathcal{S}(\Sigma')}$ .

## Chapitre 12

# Arithmétique

## 12.1 Propriété fondamentale de $\mathbb{Z}$

### Théorème 12.1

Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$  admet un plus petit élément.

Soit  $A$  une partie non vide et minorée de  $\mathbb{Z}$ .

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des minorants de  $A$ .

Par hypothèse,  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ .

Supposons par l'absurde que :

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \in \mathcal{M} \Rightarrow a + 1 \in \mathcal{M}$$

D'après le principe de récurrence, si  $a_0 \in \mathcal{M}$  est fixé :

$$\forall n \geq a_0, n \in \mathcal{M}$$

En particulier, pour  $n \in A$  ( $A \neq \emptyset$ ) on a :

$$n \geq a_0 \text{ (} a_0 \text{ est un minorant)}$$

Donc  $n \in \mathcal{M}$ .

Donc  $n + 1 \in \mathcal{M}$ .

Donc  $n + 1$  est un minorant de  $A$ .

Donc  $n + 1 \leq n$ .

Absurde.

Ainsi, on choisit  $a \in \mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathcal{M}$  et  $a + 1 \notin \mathcal{M}$ .

On choisit donc  $n \in A$  tel que :

$$a \leq n < a + 1$$

Donc  $n = a \in A$ .

Donc  $a = \min(A)$ .

## 12.4 Division euclidienne

### Théorème 12.4

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Il existe un unique couple  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que :

$$a = bq + r$$

avec  $0 \leq r < |b|$ . Cette égalité est appelée **division euclidienne de  $a$  par  $b$** , l'entier  $q$  est alors appelé **quotient** et l'entier  $r$  le **reste**, tandis que  $a$  porte le nom de dividende et  $b$  celui de diviseur.

#### Existence :

On suppose dans un premier temps que  $b > 0$ .

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ .

On note  $A = \{n \in \mathbb{Z}, bn \leq a\}$ .

$A$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{Z}$  et majoré.

Il admet donc un plus grand élément, noté  $q$ . On a donc  $q \in A$  et  $q + 1 \notin A$ .

$$\begin{aligned} bq &\leq a < b(q + 1) \\ \text{donc } 0 &\leq a - bq < b \end{aligned}$$

On pose alors  $r = a - bq$ . L'existence est alors prouvée pour  $b > 0$ .

Si  $b < 0$ , alors  $-b > 0$  et on choisit  $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$  tel que :

$$a = -b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < -b$$

Le couple  $(-q, r)$  convient.

#### Unicité :

On suppose  $a = bq + r = bq' + r'$  avec  $0 \leq r, r' < |b|$ .

Donc  $b(q - q') = r' - r$ .

Donc  $\underbrace{|b|}_{>0} \times |q - q'| = |r' - r| < \underbrace{|b|}_{>0}$ .

Donc  $|q - q'| < 1$ .

Donc  $q = q'$ .

Puis  $r = r'$ .

## 12.9 Divisibilité et multiple

### Proposition 12.9

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors  $a$  est divisible par  $b$  si et seulement si  $a$  est un multiple de  $b$ .

$\Rightarrow$

Si  $b|a$ , alors :

$$\begin{aligned} a &= bq + 0 \\ &= bq \\ &\in b\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

Si  $a \in b\mathbb{Z}$ ,  $a = b \times n = b \times n + 0$ .

Par unicité de la division euclidienne,  $b|a$ .

## 12.10 Divisibilité et normes

### Proposition 12.10

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers avec  $a \neq 0$  et  $b|a$ . Alors  $|b| \leq |a|$ .

Si  $b|a$ , alors  $a = b \times n$  avec  $n \neq 0$  var  $a \neq 0$ . Donc :

$$\begin{aligned} |a| &= |b| \times |n| \\ &\geq |b| \times 1 \end{aligned}$$

## 12.11 Entiers associés

### Proposition 12.11

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors

$$a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Leftrightarrow a = \pm b$$

On dit alors que  $a$  et  $b$  sont associés.

$\Leftarrow$

Si  $a = \pm b$ , alors  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow$

Si  $a = 0$  et  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ , alors  $b = 0$ .

Si  $a \neq 0$  et  $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ , alors  $b \neq 0$  et d'après (12.0) :

$$|a| \leq |b| \text{ et } |b| \leq |a|$$

Donc  $|a| = |b|$

## 12.14 Intégrité de la divisibilité

### Proposition 12.14

Soit  $a, b$  et  $c$  trois entiers, avec  $c \neq 0$ . Si  $nb|na$ , alors  $n|a$ .

Si  $cb|ca$ , alors  $ca = ncb$ .

Or  $c$  est régulier dans  $\mathbb{Z}$  donc :

$$a = nb$$

Donc  $b|a$ .

## 12.20 Cas d'une divisibilité

### Lemme 12.20

Si  $a|b$ , alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_a$$

Si  $a|b$ , si  $c|a$ , alors  $c|b$ .

Donc  $\mathcal{D}_b \supset \mathcal{D}_a$ .

Ainsi,  $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_a$

## 12.21 Préparation à l'algorithme d'Euclide

### Lemme 12.21

Soit  $a, b$  et  $q$  trois entiers, alors

$$\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a-bq,b}$$



Soit  $n \in \mathcal{D}_{a,b}$ , alors :

$$n|a \text{ et } n|b$$

$$\text{donc } n|a - bq$$

$$\text{donc } n \in \mathcal{D}_{a-bq,b}$$



Soit  $n \in \mathcal{D}_{a-bq,b}$

$$n|a - bq \text{ et } n|b$$

$$\text{donc } n|a - bq + bq$$

$$\text{soit } n|a$$

$$\text{donc } n \in \mathcal{D}_{a,b}$$

## 12.23 Algorithme d'Euclide étendu ou théorème de Bézout

### Lemme 12.23

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Soit  $r$  le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide appliqué à  $a$  et  $b$ . Il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$au + bv = r$$

On utilise les notations du lemme (12.22).

On démontre par récurrence double que :

$$\forall n, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2, au_n + bv_n = r_n$$



Initialisation :

Pour  $n = 0$  il s'agit de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  ( $u_0 =$  et  $v_0 = -q$ ).

Pour  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} a &= bq + r \\ b &= r \times q_1 + r_1 \\ \text{donc } r &= b - rq_1 \\ &= b - q_1(a - bq) \\ &= -q_1a + b(1 + q_1q) \end{aligned}$$

Hérédité :

On suppose le résultat vrai aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} a_n &= b_n q_n + r_n \\ b_n &= r_n q_{n+1} + r_{n+1} \\ r_n &= r_{n+1} q_{n+2} + r_{n+2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= r_n - r_{n+1} q_{n+2} \\ &= au_n + bv_n - (au_{n+1} + bv_{n+1})q_{n+2} \\ &= a \underbrace{(u_n - u_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} + b \underbrace{(v_n - v_{n+1} q_{n+2})}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

On utilise le principe de récurrence avec la dernière étape de l'algorithme.

## 12.24 Application basique

### Exemple 12.24

Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers 121 et 26.

$$\begin{aligned} 121 &= 26 \times 4 + 17 \\ 26 &= 17 \times 1 + 9 \\ 17 &= 9 \times 1 + 8 \\ 9 &= 8 \times 1 + 1 \\ 8 &= 1 \times 8 + 0 \end{aligned}$$

On remonte l'algorithme :

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 8 \\ &= 9 - (17 - 9) \\ &= 2 \times 9 - 17 \\ &= 2 \times (26 - 17) - 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times 17 \\ &= 2 \times 26 - 3 \times (121 - 4 \times 26) \\ &= 14 \times 26 - 3 \times 121 \end{aligned}$$

## 12.26 Théorème de Bézout

### Théorème 12.26

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers. Alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$au + bv = 1$$



On suppose  $a$  et  $b$  premiers entre eux.

Donc  $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$ .

Soit  $r$  le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide,

$$\mathcal{D}_r = \mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$$

Donc  $r = \pm 1$ .

D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que :

$$au + bv = 1$$



Réciproquement, si  $au + bv = 1$ , alors pour tout  $d \in \mathcal{D}_{a,b}$   $d|au + bv$  donc  $d|1$  donc  $d = \pm 1$ .

Donc  $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$ .

## 12.28 Proposition

### Proposition 12.28

Si  $a$  est premier avec  $b$  et  $c$ , alors  $a$  est premier avec  $bc$ .

D'après le théorème de Bézout, on écrit :

$$au_1 + bv_1 = 1$$

$$au_2 + cv_2 = 1$$

avec  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^4$ .

Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) \\ &= a \underbrace{(au_1u_2 + bv_1u_2 + cu_1v_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{v_1v_2}_{\in \mathbb{Z}} bc \end{aligned}$$

Donc  $a$  et  $bc$  sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.

## 12.29 Proposition

### Proposition 12.29

Si  $a$  est premier avec  $b$ , que  $a|c$  et  $b|c$ , alors  $ab|c$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1, (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$auc + bvc = c$$

Or  $a|c$  et  $b|c$ , donc :

$$c = ka \text{ et } c = pb$$

Donc :

$$ab \underbrace{[pu + vk]}_{\in \mathbb{Z}} = c$$

Donc  $ab|c$ .

## 12.30 Théorème de Gauss

### Théorème 12.30

Si  $a|bc$  et que  $a$  est premier avec  $b$ , alors  $a|c$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$au + bv = 1 \text{ avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc  $auc + bvc = c$ .

Or  $a|bc$  donc  $a|auc + bvc$ .

Soit  $a|c$ .

## 12.31 Equation de Bézout

### Exemple 12.31

Résoudre l'équation d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $3x - 2y = 7$ .

On remarque que 3 et 2 sont premiers entre eux.

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= 1 \\ \text{donc } 3 \times 7 - 2 \times 7 &= 7 \\ \text{donc } (7, 7) &\in \mathcal{S} \end{aligned}$$

On note  $(x_0, y_0)$  cette solution.

Soit  $(x, y) \in \mathcal{S}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} 7 &= 3x - 2y \\ 7 &= 3x_0 - 2y_0 \\ \text{donc } 3(x - x_0) &= 2(y - y_0) \end{aligned}$$

Or  $3|3(x - x_0)$  et 3 premier avec 2.

Donc  $3|y - y_0$ .

Donc  $y - y_0 = 3k$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . (Théorème de Gauss)

De la même manière,  $x - x_0 = 2l$ , avec  $l \in \mathbb{Z}$ . (Théorème de Gauss)

Réciproquement, soit  $x = x_0 + 2l$  et  $y = y_0 + 3k$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow 7 = 3x - 2y = 3x_0 - 2y_0 + 6l - 6k \\ &\Leftrightarrow 6l - 6k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = l \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S} = \{(x_0 + 2k, y_0 + 3k), k \in \mathbb{Z}\}$

## 12.32 Proposition

### Proposition 12.32

Si  $ar \equiv br \pmod{n}$  et si  $r$  et  $n$  sont premiers entre eux, alors  $a \equiv b \pmod{n}$ .

Si  $ar \equiv br \pmod{n}$ , alors  $n|r(a - b)$ .

Donc  $n|a - b$  ( $n$  premier avec  $r$  et théorème de Gauss).

Donc  $a \equiv b \pmod{n}$ .

## 12.37 Lien avec les idéaux

### Proposition 12.37

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, alors  $d$  est le  $\text{pgcd}$  de  $a$  et  $b$  si et seulement si  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .  $a\mathbb{Z}$  et  $b\mathbb{Z}$  sont des idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

Donc  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc en particulier un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

On choisit donc  $d \geq 0$  tel que  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

Montrons que  $d = \text{pgcd}(a, b) = a \wedge b$ .

D'une part :

$$\begin{array}{ll} d \in d\mathbb{Z} & \text{donc } d = au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2) \\ \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} & \\ \text{or } a \wedge b | a \text{ et } a \wedge b | b & \text{donc } a \wedge b | au + bv \\ & \text{soit } a \wedge b | d \end{array}$$

D'autre part,  $a \wedge b$  est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, donc (12.23) :

$$\begin{array}{l} a \wedge b = au + bv \text{ (avec } (u, v) \in \mathbb{Z}^2) \\ \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ \in d\mathbb{Z} \end{array}$$

Donc  $d | a \wedge b$ .

Ainsi,  $d$  et  $a \wedge b$  sont positifs et associés, donc égaux.

## 12.38 Préparation au calcul pratique d'un $\text{pgcd}$

### Lemme 12.38

Si  $a$  et  $b$  sont tous les deux non nuls, alors pour tout  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - bq, b)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{pgcd}(a,b)} &= \mathcal{D}_{a,b} \\ &\stackrel{(12.21)}{=} \mathcal{D}_{a-bq,b} \\ &= \mathcal{D}_{\text{pgcd}(a-bq,b)} \end{aligned}$$

Les deux  $\text{pgcd}$  sont associés, donc égaux car positifs.

## 12.39 Caractérisation du $\text{pgcd}$

### Proposition 12.39

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers et  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $d = \text{pgcd}(a, b)$  si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $u$  et  $v$  premiers entre eux, tels que  $a = du$  et  $b = dv$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $d = a \wedge b$ .

Donc  $d | a$  et  $d | b$ .

On écrit donc  $a = du$  et  $b = dv$  avec  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ .

Notons  $n = u \wedge v$ . On écrit  $u = n \times u'$  et  $v = n \times v'$  avec  $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ .

Donc  $a = d \times n \times u'$  et  $b = d \times n \times v'$ .

Donc  $dn \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_d$ .

Donc  $dn | d$ .

Donc  $n = 1$ .



On suppose que  $a = du$  et  $b = dv$  avec  $u \wedge v = 1$ .

D'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ (avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2)$$

Donc  $duu' + dvv' = d$ .

Soit  $au' + bv' = d$ .

Donc  $d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$ .

Donc  $a \wedge b \mid d$ .

Par ailleurs,  $d \in \mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_{a \wedge b}$ .

Donc  $d \mid a \wedge b$ .

Ainsi,  $a \wedge b$  et  $d$  sont associés (et positifs) donc égaux.

## 12.40 Propriétés du $\text{pgcd}$

### Proposition 12.40

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers tous deux non nuls.

1. pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $n \mid a$  et  $n \mid b$ , alors  $n \mid \text{pgcd}(a, b)$  ;
2. pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{pgcd}(ka, kb) = k \text{pgcd}(a, b)$  ;
3. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{pgcd}(a^n, b^n) = \text{pgcd}(a, b)^n$  ;
4. si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux, alors  $\text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, b)$ .

1. RAF (définition)

2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On écrit (12.39) :

$$\begin{aligned} a &= (a \wedge b)u \\ b &= (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} ka &= [k(a \wedge b)]u \\ kb &= [k(a \wedge b)]v \end{aligned}$$

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(ka, kb) = k(a \wedge b)$$

3. Avec une partie des notations de 2. :

$$\begin{aligned} a^n &= (a \wedge b)^n u^n \\ b^n &= (a \wedge b)^n v^n \end{aligned}$$

Avec  $(u^n) \wedge (v^n) = 1$ .

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(a^n, b^n) = (a \wedge b)^n$$

4.

$$\begin{aligned} a &= (a \wedge b)u \\ b &= (a \wedge b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \end{aligned}$$

Donc

$$bc = (a \wedge b) \times vc$$

Or, puisque  $a \wedge c = 1$  et que  $u \mid a$ , alors :

$$u \wedge c = 1$$

Donc (12.28) :

$$u \wedge (vc) = 1$$

Donc (12.39) :

$$\text{pgcd}(a, bc) = a \wedge b$$

## 12.44 Définition du PPCM

### Proposition 12.44

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls. On appelle **PPCM** (plus petit commun multiple) l'unique entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$(a\mathbb{Z}) \cap (b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}.$$

Cet entier est noté  $\text{ppcm}(a, b)$  ou encore  $a \vee b$ .

$a\mathbb{Z}$  et  $b\mathbb{Z}$  ont des idéaux de  $\mathbb{Z}$ .

Donc  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ .

Donc il existe un unique entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

Comme  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , alors  $m \neq 0$ .

## 12.45 Caractérisation du $\text{ppcm}$

### Proposition 12.45

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, et  $m \in \mathbb{N}$ . Alors  $m = \text{ppcm}(a, b)$  si et seulement si il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ , premiers entre eux tels que  $m = au = bv$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $m = a \vee b$ .

Donc  $m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ .

Donc  $m = au = bv$ .

On note  $d = \text{pgcd}(u, v)$ .

On écrit donc :

$$u = da'$$

$$v = db'$$

Donc :

$$ada' = bdb'$$

Donc :

$$aa' = bb' = m'$$

Donc :

$$\begin{aligned} m' &\in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \\ &\in m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc :

$$dm' = m|m'$$

Donc :

$$d = 1$$

$\Leftarrow$

On suppose que  $m = au = bv$  avec  $\text{pgcd}(u, v) = 1$ .

D'une part :

$$m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z}$$

Donc :

$$\text{ppcm}(a, b) | m$$

D'autre part, d'après le théorème de Bézout :

$$uu' + vv' = 1 \text{ avec } (u', v') \in \mathbb{Z}^2$$

Donc :

$$uu' \underbrace{ppcm(a, b)}_{ka} + vv' \underbrace{ppcm(a, b)}_{qb} = ppcm(a, b)$$

Donc :

$$m(u'k + vq') = ppcm(a, b)$$

Donc  $m \mid ppcm(a, b)$ .

## 12.46 Propriétés du $ppcm$

### Proposition 12.46

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls, alors :

1. pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $a \mid n$  et  $b \mid n$ , alors  $ppcm(a, b) \mid n$  ;
2. si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $ppcm(a, b) = |ab|$  ;
3. pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $ppcm(ka, kb) = kppcm(a, b)$  ;
4.  $ppcm(a, b) \times pgcd(a, b) = |ab|$  ;
5. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $ppcm(a^n, b^n) = ppcm(a, b)^n$ .

1. RAF (12.44)
2. On suppose que  $a > 0$  et  $b > 0$ .

$$ab = ba$$

avec  $a \wedge b = 1$ .

D'après (12.45) :

$$ppcm(a, b) = ab$$

3. On écrit (12.45) :

$$ppcm(a, b) = au = bv \text{ (avec } u \wedge v = 1)$$

Alors :

$$\begin{aligned} b \wedge ppcm(a, b) &= (ak)u \\ &= (bk)v \end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(ak, bk) = kppcm(a, b)$$

5. Avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} ppcm(a, b)^n &= a^n u^n \\ &= b^n v^n \text{ (avec } u^n \wedge v^n = 1) \end{aligned}$$

Donc (12.45) :

$$ppcm(a^n, b^n) = ppcm(a, b)^n$$

4. D'après (12.39) (avec  $a > 0$  et  $b > 0$ ) :

$$\begin{aligned} a &= pgcd(a, b)u \\ b &= pgcd(a, b)v \text{ (avec } u \wedge v = 1) \\ pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) &= pgcd(a, b)ppcm(pgcd(a, b)u, pgcd(a, b)v) \\ &\stackrel{(3.)}{=} pgcd(a, b)^2 ppcm(u, v) \\ &\stackrel{(2.)}{=} pgcd(a, b)^2 uv \\ &= ab \end{aligned}$$

## 12.50 Propriétés

### Proposition 12.50

1. Si  $p \in \mathbb{P}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $p|n$  soit  $\text{pgcd}(n, p) = 1$ .
2. Si  $n \geq 2$ , alors  $n$  possède au moins un diviseur premier.
3. L'ensemble  $\mathbb{P}$  est infini.
4. Si  $n > 1$  n'a pas de diviseur dans  $[2; \sqrt{n}]$ , alors  $n$  est premier.
5. Si  $p \in \mathbb{P}$ , alors pour tout  $a$  et  $b$  entiers, on a  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .

1. On suppose que  $p \nmid n$ .

Soit  $d \in \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_n$ .

$d > 0$  et  $d \neq p$ .

Donc  $d = 1$ .

Donc  $p \wedge n = 1$ .

2. On raisonne par récurrence forte  $\rightarrow$  cf. (2.41).
3. On suppose par l'absurde que :

$$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

On pose :

$$m = \prod_{i=1}^n (p_i) + 1$$

Soit  $p_i \in \mathbb{P}$  tel que  $p_i | m$  (12.50.2).

Donc  $p_i | 1$ .

Absurde.

4. On suppose  $n \notin \mathbb{P}$ .  
Soit  $n = ab$  avec  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$ .  
Si  $a > \sqrt{n}$  et  $b > \sqrt{n}$ , alors  $ab = n > \sqrt{n}^2 = n$ .  
Absurde.
5. D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (a + b)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \end{aligned}$$

Or, pour  $k \in [1; p-1]$ ,  $p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}$  (formule du capitaine).

Or  $k \wedge p = 1$  et  $p \mid p \binom{p-1}{k-1}$  soit  $p \mid \binom{p}{k}$ .

Donc :

$$p \mid \binom{p}{k}$$

Donc :

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

## 12.51 Petit théorème de Fermat

### Théorème 12.51

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{P}$ , on a  $n^p \equiv n \pmod{p}$ . En outre, si  $\text{pgcd}(n, p) = 1$ , alors  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Soit  $p \in \mathbb{P}$ . On montre le résultat pour  $n \geq 0$  par récurrence.

On a bien  $0^p = 0 \equiv 0 \pmod{p}$ . Si  $n^p \equiv n \pmod{p}$ , alors :

$$\begin{aligned} (n + 1)^p &\equiv n^p + 1^p \pmod{p} \quad (12.50.5). \\ &\equiv n + 1 \pmod{p} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .



— Si  $p \geq 3$  (donc  $p$  est impair), alors :

$$\begin{aligned} n^p &\equiv n \pmod{p} \\ (-n)^p &\equiv -n^p \pmod{p} \\ &\equiv -n \pmod{p} \end{aligned}$$

— Si  $p = 2$ ,  $-1 \equiv 1 \pmod{2}$ .

Donc :

$$\begin{aligned} (-n)^2 &\equiv n^2 \pmod{2} \\ &\equiv n \pmod{2} \\ &\equiv -n \pmod{2} \end{aligned}$$

## 12.52 Décomposition en produit de facteurs premiers

### Théorème 12.52

Soit  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ , alors il existe des nombres premiers  $p_1, \dots, p_r$  tous distincts, et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$  et  $\epsilon \in \{\pm 1\}$  tels que

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Existence :

On montre l'existence par récurrence forte sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

— RAF si  $n = 2$ .

— On suppose le résultat vrai pour tout  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ .

— Si  $n + 1 \in \mathbb{P}$  : RAF

— Si  $n + 1 \notin \mathbb{P}$ , on écrit :

$$n + 1 = k \times q \text{ avec } (k, q) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$$

Donc  $k$  et  $q$  sont des produits de facteurs premiers.

Donc  $n + 1 = kq$  est aussi un produit de facteurs premiers.

Le résultat est donc vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et par extension pour  $-n$  ( $\epsilon = -1$ ).

Unicité :

On suppose que :

$$n = \epsilon p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r} = \epsilon' q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_s^{\beta_s}$$

Nécessairement,  $\epsilon = \epsilon'$ .

Soit  $p_i \in \{p_1, \dots, p_r\}$ .

On a  $p_i | n$  donc  $p_i \mid q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_s^{\beta_s}$ .

Il existe  $p_i \in \mathbb{P}$  donc  $j \in \llbracket 1; s \rrbracket$  tel que  $p_i | q_j$ .

Donc  $p_i = \underbrace{q_j}_{\in \mathbb{P}}$ .

Ainsi :

$$\{p_1, \dots, p_r\} \subset \{q_1, \dots, q_s\}$$

Par symétrie :

$$\{p_1, \dots, p_r\} = \{q_1, \dots, q_s\}$$

Donc  $r = s$  et quitte à renommer  $q_j$ , on peut supposer que :

$$\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, p_i = q_i$$

$$\begin{aligned} p_i^{\alpha_i} | n &\text{ donc } p_i^{\alpha_i} \mid \prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j} \\ &\text{ donc } \alpha_i \leq \beta_i \end{aligned}$$

Par symétrie,  $\alpha_i = \beta_i$ .

L'unicité est prouvée.

## 12.54 Caractérisation de la valuation

### Théorème 12.54

Soit  $n \in \mathbb{Z}^*$  et  $p \in \mathbb{P}$  et  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $d = v_p(n)$  si et seulement si  $n = p^d u$ , avec  $u \wedge p = 1$ .

On a :

$$\begin{aligned} d = v_p(n) &\Leftrightarrow (p^d | n \text{ et } p^{d+1} \nmid n) \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p^{d+1} \nmid u \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } p \nmid u \\ &\stackrel{(p \in \mathbb{P})}{\Leftrightarrow} \exists u \in \mathbb{Z}, n = p^d u \text{ et } u \wedge p = 1 \end{aligned}$$

## 12.55 Valuation et décomposition en produit de facteurs premiers

### Théorème 12.55

Si  $p|n$ , alors  $v_p(n)$  est la puissance de  $p$  intervenant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de  $n$ .

On écrit la décomposition :

$$n = \epsilon \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

$$n = \epsilon \times p_k^{\alpha_k} \times \underbrace{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}}_{:=u \text{ (avec } u \wedge p_k = 1)}$$

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_{p_k}(n) = \alpha_k}$$

## 12.56 Propriétés de la valuation

### Proposition 12.56

Pout tout  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  et  $p \in \mathbb{P}$ , on a

1.  $p|n$  si et seulement si  $v_p(n) > 0$  ;
2.  $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$  ;
3.  $v_p(n + m) \geq \min(v_p(n), v_p(m))$  avec égalité si les valuations sont distinctes ;
4.  $n|m \Leftrightarrow (\forall q \in \mathbb{P}, v_q(n) \leq v_q(m))$  ;
5. si de plus  $n$  et  $m$  sont non nuls alors

$$v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m)) \text{ et } v_p(n \vee m) = \max(v_p(n), v_p(m)).$$

1. RAF

2. On écrit  $m = p^{v_p(m)} \times u$  et  $n = p^{v_p(n)} \times v$  avec  $u \wedge p = 1 = v \wedge p$  (12.54).

Donc  $mn = p^{v_p(m)+v_p(n)} \times uv$ .

Or  $p \wedge (uv) = 1$ .

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)}$$

3. On suppose que  $v_p(m) \leq v_p(n)$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} n + m &= p^{v_p(n)} \times v + p^{v_p(m)} \times u \\ &= p^{v_p(m)} \left[ u + v_p^{v_p(n)-v_p(m)} \right] \end{aligned}$$

Ainsi,  $p^{v_p(m)} | n + m$ .

Par définition :

$$\boxed{v_p(m + n) \geq v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))}$$

.

Si on suppose de plus que  $v_p(m) \neq v_p(n)$ , alors

$$p \wedge (u + v \times p^{v_p(n)-v_p(m)}) = p \wedge u = 1$$

Donc (12.54) :

$$\boxed{v_p(n + m) = v_p(m) = \min(v_p(m), v_p(n))}$$

4. On a :

$n|m$  ssi la décomposition en produit de facteurs premiers de  $n$  se retrouve dans celle de  $m$ .

(12.55) ssi pour tout  $p \in \mathbb{P}$  tel que  $p|n$ , alors  $v_p(n) \leq v_p(m)$ .

(si  $p \nmid n$ ,  $v_p(n) = 0 \leq v_p(m)$ ) ssi pour tout  $\boxed{p \in \mathbb{P}, v_p(n) \leq v_p(m)}$ .

5. On a  $(n \wedge m) | n$  et  $(n \wedge m) | m$ .

Donc (12.56.4)  $\boxed{v_p(n \wedge m) \leq \min(v_p(n), v_p(m))}$ .

On suppose par exemple que  $v_p(n) \leq v_p(m)$ .

Donc  $p^{v_p(n)} | n$  et  $p^{v_p(n)} | m$ .

Donc  $p^{v_p(n)} | n \wedge m$ .

Par définition  $\boxed{v_p(n \wedge m) \geq v_p(n)}$ .

Donc :

$$\boxed{v_p(n \wedge m) = \min(v_p(n), v_p(m))}$$

On rappelle que  $(n \wedge m) \times (n \vee m) = |nm|$ .

Donc  $v_p((n \wedge m) \times (n \vee m)) = v_p(nm)$ .

Donc (12.56.2) :

$$\begin{aligned} v_p(n \vee m) &= v_p(n) + v_p(m) - v_p(n \wedge m) \\ &= v_p(n) + v_p(m) - \min(v_p(n), v_p(m)) \\ &= \boxed{\max(v_p(n), v_p(m))} \end{aligned}$$

Les preuves ont été rédigées avec les hypothèses  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$ . Si l'un des entiers est nul, on vérifie les assertions avec la convention  $v_p(0) = +\infty$ .

## Chapitre 13

# Polynômes

## 13.6 Produit de deux polynômes

### Définition 13.6

Soit  $P = (a_n)$  et  $Q = (b_n)$  deux polynômes de  $\mathbb{A}[X]$ . Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Alors la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un polynôme. On définit alors  $PQ = (c_n)$ . La suite  $c = (c_n)$  est appelée **produit de convolution** (ou **produit de Cauchy**) des suites  $a = (a_n)$  et  $b = (b_n)$  et est parfois noté  $c = a \star b$ .

Montrons que  $(c_n)$  est un polynôme.

Soit  $N$  et  $M$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M, b_n = 0 \end{cases}$$

Soit  $n \geq M + N$ , on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

- Si  $k \geq N$ ,  $a_k = 0$ .
- Si  $k \leq N$ ,  $n - k \geq M$ , donc  $b_{n-k} = 0$ .

Donc  $c_n = 0$ .

## 13.7 Structure d'anneau de $\mathbb{A}[X]$

### Théorème 13.7

La somme et le produit définis ci-dessus munissent  $\mathbb{A}[X]$  d'une structure d'anneau commutatif.

suites d'éléments de  $\mathbb{A}$

- $(\mathbb{A}[X], +)$  est un sous-groupe de  $(\widehat{\mathbb{A}^{\mathbb{N}}}, +)$  abélien donc est bien un sous-groupe abélien.
- Montrons que  $\times$  est associative. Soit  $(P, R, Q) \in \mathbb{A}[X]$ .  
On note  $P = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $R = (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $Q = (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} (P \times (RQ))_n &= \sum_{k=0}^n p_k (RQ)_{n-k} \\ &= \sum_{i+j=n} p_i (RQ)_j \\ &= \sum_{i+j=n} \left( p_i \sum_{k+l=j} r_k q_l \right) \\ &= \sum_{i+k+l=n} p_i r_k q_l \\ &= ((PR) \times Q)_n \end{aligned}$$

- Notons  $E = (1, 0, \dots) = (\delta_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ .  
On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} (E \times P)_n &= \sum_{i+j=n} E_i \times P_j \\ &= \sum_{i+j=n} \delta_{0i} \times P_j \\ &= P_n \quad (i = 0, j = n) \\ &= (P \times E)_n \end{aligned}$$

Donc  $E$  est l'élément neutre de  $\mathbb{A}[X]$ .

—

$$\begin{aligned}
[P \times (R + Q)]_n &= \sum_{i+j=n} p_i(R + q)_j \\
&= \sum_{i+j=n} p_i(r_j + a_j) \\
&= \sum_{i+j=n} p_i r_j + \sum_{i+j=n} p_i q_j \\
&= (PR)_n + (PQ)_n \\
&= [PR + PQ]_n
\end{aligned}$$

Donc  $\times$  est distributive sur  $+$ .

— Comme  $\mathbb{A}$  est commutatif :

$$\sum_{i+j=n} p_i q_j = \sum_{i+j=n} q_j p_i$$

Donc  $\times$  est commutatif.

### 13.11 Monômes

#### Proposition 13.11

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots)$ , le 1 est donc à l'indice  $n$  (soit  $X^n = (\delta_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ )

Pour  $n = 0$ , on a bien  $X^0 = (1, 0, \dots)$

Pour  $n = 1$ , RAF

On suppose le résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
[X^{n+1}]_k &= [X^n \times X]_k \\
&= \sum_{i+j=k} [X^n]_i X_j \\
&= \sum_{i+j=k} \delta_{n,i} \times \delta_{j,1} \\
&= \delta_{k,n+1}
\end{aligned}$$

### 13.12 Expression d'un polynôme à l'aide de l'indéterminée formelle

#### Corollaire 13.12

Soit  $P = (a_n)$  un polynôme de  $\mathbb{A}[X]$ . Alors  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ , cette somme ayant un sens puisqu'elle est en fait finie, les  $a_k$  étant nuls à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned}
P &= (a_n)_{n \geq 0} \\
&= (a_0, a_1, a_2, \dots) \\
&= a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + a_2(0, 0, 1, \dots) + \dots \\
&= a_0 X^0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots
\end{aligned}$$

### 13.26 Dérivée de produits

#### Proposition 13.26

— Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$ . Alors

$$(PQ)' = P'Q + Q'P.$$

— Soit  $P_1, \dots, P_n$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$ , alors

$$(P_1 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^n P_1 \dots P_{i-1} P_i' P_{i+1} \dots P_n.$$

— **Formule de Leibniz** : Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{A}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Soit  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ ,  $P' = \sum_{k \geq 1} k a_k X^{k-1}$  et  $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$ ,  $Q' = \sum_{k \geq 1} k b_k X^{k-1}$ .

On a :

$$PQ = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Donc :

$$\begin{aligned} (PQ)' &= \sum_{n \geq 1} \left[ n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right] X^{n-1} \\ \text{et } P'Q &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n \\ \text{et } PQ' &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n a_k (n-k+1) b_{n-k+1} \right] X^n \\ \text{donc } P'Q + Q'P &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=1}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} \right] X^n + \sum_{n \geq 0} \left[ \sum_{k=0}^n (n-k+1) a_k b_{n-k+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ (n+1) a_{n+1} b_0 + \sum_{k=1}^n (n+1) a_k b_{n-k+1} + (n+1) a_0 b_{n+1} \right] X^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} \right] X^n \end{aligned}$$

### 13.28 Dérivée d'une composition

#### Proposition 13.28

Soit  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{A}[X]$ , alors

$$(Q \circ P)' = P' \times (Q' \circ P)$$

Soit  $Q = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ .

Ainsi  $Q \circ P = \sum_{k \geq 0} a_k P^k$ .

Donc :

$$\begin{aligned}
 (Q \circ P)' &= \sum_{k \geq 0} a_k (p_k)' \quad (13.24) \\
 &= \sum_{k \geq 1} k a_k p' p^{k-1} \quad (13.27) \\
 &= P' \times \sum_{k \geq 1} k a_k p^{k-1} \\
 &= P' \times Q' \circ P
 \end{aligned}$$

### 13.34 Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée

#### Proposition 13.34

Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{A}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{A}$ .

1. On a  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$  avec égalité si  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ .
2. Si  $\mathbb{A}$  est intègre et si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ .
3. Si  $\mathbb{A}$  est intègre alors  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ .
4. On a  $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ .
5. Si  $\mathbb{A}$  est intègre alors  $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) + \deg(P)$ , sauf si  $P = 0$  ou si  $Q = 0$  et  $P \in \mathbb{A}_0[X]$ .

1. On note  $p = \deg(P), q = \deg(Q)$ .

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

Supposons  $p \geq q$ .

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{k=0}^p b_k X^k \\
 \text{et ainsi } P + Q &= \sum_{k=0}^p (a_k + b_k) X^k \\
 \text{et donc } \deg(P + Q) &\leq p
 \end{aligned}$$

Si de plus  $p > q$ , alors :

$$\begin{aligned}
 P + Q &= a_p X^p + \sum_{k=0}^{p-1} (a_k + b_k) X^k \quad (b_p = 0) \\
 \text{donc } (a_p \neq 0), \deg(P + Q) &= p
 \end{aligned}$$

- 2.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$$

Or  $\lambda a_p \neq 0$  car  $a_p \neq 0$  et  $\mathbb{A}$  intègre.

- 3.

$$P \cdot Q = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$$

Si  $n > p + q$ , alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0 \quad (\text{preuve (13.6)})$$



Or :

$$\begin{aligned}(PQ)_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\ &= \underbrace{a_p}_{\neq 0} \underbrace{b_q}_{\neq 0} \\ &\neq 0 \text{ car } \mathbb{A} \text{ int\`egre}\end{aligned}$$

4. Si  $P \in \mathbb{A}_0[X]$ , l'inégalité est vérifiée.  
Sinon :

$$p' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)a_{k+1}X^k$$

et  $\deg(P') \leq d-1 = \deg(P) - 1$

5. On a :

$$Q \circ P = \sum_{k=0}^q b_k p_k$$

Or, pour  $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$ ,  $\deg(b_k p^k) < \deg(\underbrace{b_q}_{\neq 0} p^q)$  ((13.34.2) et (13.34.3) avec  $\mathbb{A}$  int\`egre)

Donc :

$$\begin{aligned}\deg(Q \circ P) &= \deg(b_q p^q) \\ &= q \times \deg(P) \\ &= \deg(Q) \times \deg(P)\end{aligned}$$

### 13.36 Théorème de permanence de l'intégrité

#### Corollaire 13.36

Si  $\mathbb{A}$  est int\`egre, alors  $\mathbb{A}[X]$  est int\`egre.

Si  $P \neq 0$  et  $Q \neq 0$

$$\begin{aligned}\deg(P \times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \text{ (}\mathbb{A} \text{ est int\`egre)} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

### 13.39 Propriété de stabilité

#### Corollaire 13.39

- $\mathbb{A}_n[X]$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{A}[X]$ .
- La dérivation  $D : \mathbb{A}[X] \rightarrow \mathbb{A}[X]$  induit un homomorphisme de groupe  $D_n : \mathbb{A}_n[X] \rightarrow \mathbb{A}_{n-1}[X]$ .
- Si  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique nulle,  $D_n$  est une surjection. Autrement dit, tout polynôme de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  est primitivable formellement dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .

- RAF
- RAF

- $\text{carac}(\mathbb{K}) = 0$ . Soit  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k = k \times 1 \neq 0$  dans  $\mathbb{K}$  car  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle.  
Donc  $k^{-1}$  est bien défini dans  $\mathbb{K}$ . On pose :

$$Q = \sum_{k=1}^n k^{-1} q_{k-1} X^k$$

Alors :

$$Q' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+1)^{-1} a_k X^k = P.$$

**13.42 Corollaire du degré d'une dérivée dans  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$** **Corollaire 13.42**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle et soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  $P' = Q'$  si et seulement si  $P$  et  $Q$  diffèrent d'une constante.

Soit  $P \in \ker(D)$ , où  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ .

Donc  $P' = 0$ .

Si  $\deg(P) > 0$ , alors  $\deg(P') \geq 0$  (13.41).

Donc nécessairement,  $\mathbb{K}_0[X] \subset \ker(D)$ .

Donc  $\ker(D) = \mathbb{K}_0[X]$ .

## Chapitre 14

# Suites numériques

## 14.18 Premier théorème de comparaison

### Théorème 14.18

Si à partir d'un certain rang on a

$$|u_n - l| \leq v_n$$

avec  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ .

Soit  $u_n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq v_n$$

Comme  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , on choisit  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N_2, |v_n - 0| = |v_n| < \epsilon$$

On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ . Ainsi :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq v_n = |v_n| < \epsilon$$

Donc  $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l}$

## 14.22 Unicité de la limite

### Proposition 14.22

Si  $u$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$ , alors celle-ci est unique.

On suppose que  $u$  admet comme limite  $l$  et  $l'$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $N$  et  $N'$  dans  $\mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

$$\forall n \geq N', |u_n - l'| < \epsilon$$

Pour tout  $n \geq \max(N, N')$  :

$$\begin{aligned} |l - l'| &= |l - u_n + u_n - l'| \\ &\leq |l - u_n| + |u_n - l'| \quad (\text{Inégalité triangulaire}) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Nécessairement :

$$|l - l'| = 0$$

## 14.23 Limite et inégalité

### Proposition 14.23

Si  $u$  converge vers  $l$  et si  $\alpha < l$ , alors à partir d'un certain rang,  $\alpha < u_n$ . De la même manière, si  $\beta > l$ , alors à partir d'un certain rang,  $u_n < \beta$ .

On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ . Soit  $\alpha < l$ . On pose  $\epsilon = \frac{l - \alpha}{2}$ .

D'après la définition, on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

Soit :

$$\forall n \geq N, \underbrace{u_n}_{> \alpha} \in ]\underbrace{l - \epsilon}_{> \alpha}, l + \epsilon[$$

## 14.24 Convergence et bornitude

### Proposition 14.24

Une suite convergente est bornée.

Soit  $u$  une suite convergente. Notons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

On pose  $\epsilon =$ .

Par définition, soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - 1, l + 1[$$

Donc  $\{u_n, n \geq N\}$  est borné. Donc  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \underbrace{\{u_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket\}}_{\text{ensemble fini}} \cup \underbrace{\{u_n, n \geq N\}}_{\text{borné}}$  est borné.

## 14.29 Minoration d'une extraction

### Lemme 14.29

Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \sigma(n).$$

Par récurrence.

Comme  $\sigma(0) \in \mathbb{N}$ , on a bien  $\sigma(0) \geq 0$ .

Si  $\sigma(n) \geq n$ , alors  $\sigma(n+1) > \sigma(n) \geq n$ .

Donc  $\sigma(n+1) \geq n+1$ .

## 14.30 Extraction d'une suite convergente

### Proposition 14.30

Toute suite extraite d'une suite qui tend vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  est une suite convergente vers  $l$ .

On suppose que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}$  (à adapter pour  $l = \pm\infty$ )

Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.

On note  $v = u \circ \sigma$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, |u_n - l| < \epsilon$$

Pour  $n \geq N$ , on a :

$$\sigma(n) \underset{(14.29)}{\geq} n \geq N$$

$$\text{donc } |u_{\sigma(n)} - l| < \epsilon$$

$$\text{soit } |v_n - l| < \epsilon$$

$$\text{donc } \boxed{v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l}$$

## 14.32 Pair, impair et convergence

### Proposition 14.32

Si  $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = l \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim u_n = l$

Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $N_1$  et  $N_2$  dans  $\mathbb{N}$  telq que :

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| \leq \epsilon$$

$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon$$

Or pour  $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ .

Soit  $n \geq N$ .

— Si  $n = 2p$ , alors  $p \geq N_1$

$$|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \epsilon$$

— Si  $n = 2p + 1$ , alors  $p \geq N_2$

$$|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$$

Dans tous les cas,  $\boxed{|u_n - l| \leq \epsilon}$ .

## 14.34 Opérations usuelles sur les limites

### Théorème 14.34

Soit  $u$  et  $v$  deux suites qui convergent respectivement vers  $l$  et  $l'$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

—  $u + v$  converge vers  $l + l'$

—  $\lambda u$  converge vers  $\lambda l$

—  $uv$  converge vers  $ll'$

— Si  $l \neq 0$ , alors à partir d'un certain rang, la suite des termes  $u_n$  sont tous nuls et la suite  $\frac{1}{u}$  converge vers  $\frac{1}{l}$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq \epsilon \text{ et } |v_n - l'| \leq \epsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n - (l + l')| &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \text{ (Inégalité triangulaire)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

— RAS ( $\lambda = 0$  et  $\lambda \neq 0$ )

— Comme  $u$  converge,  $u$  est bornée. Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - ll'| &= |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ &\leq |M| |v_n - l'| + |l'| \times |u_n - l| \\ &\leq M \times \epsilon + |l'| \times \epsilon \\ &= (M + |l'|) \times \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ll'}.$$

— On suppose  $l \neq 0$ . D'après (14.23), à partir d'un certain rang  $u_n > 0$  (ou  $u_n < 0$ ). Il existe en outre  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$0 < \frac{l}{2} < u_n \text{ et } |u_n - l| < \epsilon$$

Pour  $n \geq N$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| &= \frac{|l - u_n|}{|u_n l|} \\ &\leq 2 \frac{|l - u_n|}{l^2} \\ &< \frac{2\epsilon}{l^2} \end{aligned}$$

### 14.35 Conservation des inégalités larges par passage à la limite

#### Théorème 14.35

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles. Si  $u$  converge vers  $l$  et  $v$  converge vers  $l'$  et si à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$  alors  $l \leq l'$ .

On raisonne par l'absurde :  $l > l'$ .

On pose  $\epsilon = \frac{|l'-l|}{2}$ .

On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \text{ et } v_n \in ]l' - \epsilon, l' + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \geq N, u_n > v_n$$

Absurde.

### 14.37 Théorème d'encadrement

#### Théorème 14.37

Soit  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles. Si  $u$  et  $v$  convergent vers  $l$  et si à partir d'un certain rang,  $u_n \leq w_n \leq v_n$ , alors  $w$  converge vers  $l$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \text{ et } v_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

A partir d'un certain rang  $M$ , par connexité de l'intervalle  $]l - \epsilon, l + \epsilon[$  :

$$\forall n \geq M, w_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

### 14.38 Produit d'une suite bornée par une limite nulle

#### Théorème 14.38

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles. Si  $u$  converge vers 0 et si  $v$  est bornée, alors  $w$  converge vers 0.

Soit  $M \in \mathbb{R}_+$  telq ue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq M \times |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc :

$$|u_n v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit :

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

### 14.39 Exemple

#### Exemple 14.39

Soit  $(u_n)$  une suite strictement positive et  $\eta \in ]0, 1[$ . On suppose qu'à partir d'un certain rang, on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$ . Alors  $\lim u_n = 0$ .

On suppose que :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2$$

Donc ( $u_n > 0$ ) :

$$\forall n \geq n_0, 0 < u_n < \underbrace{\eta^{n-n_0}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \times u_{n_0}$$

Par encadrement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

## 14.40 Comparaison puissance factorielle

### Théorème 14.40

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, non nul.

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!} > 0$$

Or :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

A partir d'un certain rang :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$$

Donc (14.39) :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

## 14.41 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

### Théorème 14.41

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et soit  $M \in \mathbb{R}$ . Alors  $M$  est la borne supérieure (resp. inférieure) de  $A$  si et seulement si  $M$  majore (resp. minore)  $A$  et s'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $M$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $M = \sup A$ . Donc  $M$  majore  $A$ .

On rappelle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, M - \epsilon < a$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a \in A, M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M \text{ (} M \text{ est un majorant)}$$

D'après la suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  étant ainsi définie, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M}$$





On choisit  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M \text{ (majorant de } A)$$

Soit  $\epsilon > 0$ . On choisit  $a_n \in A$  tel que :

$$a_n \in ]M - \epsilon, M + \epsilon[$$

Donc  $M - \epsilon$  ne majore pas  $A$ .

Donc :

$$M = \sup A$$

## 14.42 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

### Théorème 14.42

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .



On suppose que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, a \in ]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}$$

La suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  étant fixée ainsi :

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \text{ (théorème d'encadrement)}$$



Soit  $]x, y[$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

On pose  $z = \frac{x+y}{2}$ . On pose  $\epsilon = \frac{|y-x|}{2}$ .

On choisit  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que :

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z$$

On choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$a_n \in ]z - \epsilon, z + \epsilon[ = ]x, y[$$

Donc :

$$A \cap ]x, y[ \neq \emptyset$$

## 14.48 Théorème de comparaison

### Théorème 14.48

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

1. Si  $\lim u = +\infty$  et si à partir d'un certain rang on a  $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim v = +\infty$  ;
2. Si  $\lim v = -\infty$  et si à partir d'un certain rang on a  $u_n \leq v_n$ , alors  $\lim u = -\infty$  ;
3. Si  $\lim u = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) et si  $v$  est minorée (resp. majorée), alors  $\lim u + v = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

1. Soit  $A \geq 0$ . On choisit  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, A \leq u_n \text{ et } u_n \leq v_n$$

Donc :

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

2. RAS

3. Si  $(v_n)$  est minorée, alors à partir d'un certain rang :

$$m + u_n \leq u_n + v_n$$

En adaptant le premier point ( $A' = A - m$ ), on a :

$$u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

## 14.49 Limites infinies et opérations

### Théorème 14.49

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles de limites respectives  $l$  et  $l'$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

- $\lim u + v = l + l'$  (sauf si  $l = +\infty$  et  $l' = -\infty$  ou inversement)
- $\lim \lambda u = \lambda l$  sauf si  $\lambda = 0$  auquel cas la suite  $\lambda u$  est la suite nulle.
- $\lim u \times v = l \times l'$  sauf si  $\lambda = 0$  et  $l' = \pm\infty$  ou inversement
- Si à partir d'un certain rang, la suite  $u$  ne s'annule pas, alors la suite  $\frac{1}{u}$  :
  - si  $l \in \mathbb{R}^*$ , tend vers  $\frac{1}{l}$  ;
  - si  $l = \pm\infty$ , tend vers 0 ;
  - si  $l = 0$  et  $u_n > 0$ , tend vers  $+\infty$  ;
  - si  $l = 0$  et  $u_n < 0$ , tend vers  $-\infty$  ;
  - n'a pas de limite dans les autres cas.

- On suppose  $l' \in \mathbb{R}$  et  $l = +\infty$ . Donc  $v$  est bornée.

Donc (14.48) :

$$u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- $\lambda \neq 0, \lambda > 0$  et  $l = +\infty$ . Pour  $A \in \mathbb{R}$ , on choisit un rang à partir duquel  $u_n > \frac{A}{\lambda}$ .
- On suppose  $l > 0$  et  $l' = +\infty$ .

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ , alors à partir d'un certain rang,  $u_n > m$  avec  $m = \begin{cases} 1 & \text{si } l = +\infty \\ \frac{l}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

$$u_n v_n > m v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc :

$$u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (14.48)$$

- $l = +\infty$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , à partir d'un certain rang :

$$u_n > \frac{1}{\epsilon} > 0$$

Donc :

$$0 < \frac{1}{u_n} < \epsilon$$

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Si  $l = 0$  et  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.

Pour  $A \in \mathbb{R}_+^*$ , à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &> 0 \text{ et } u_n < \frac{1}{A} \\ \text{donc } \frac{1}{u_n} &> A \\ \frac{1}{u_n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

## 14.50 Théorème de la limite monotone

### Théorème 14.50

Si  $u$  est une suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée), alors  $u$  converge vers  $\sup_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$  (resp. vers  $\inf_{n \in \mathbb{N}}(u_n)$ ).

Si  $u$  est une suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) alors  $u$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ).

— On suppose  $u$  croissante et majorée.

L'ensemble  $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$  est non vide et majoré. Cet ensemble possède une borne supérieure notée  $l$  (propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ).

Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $l - \epsilon < u_n$  ne majore pas  $A$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $l - \epsilon < u_N$ .

Or  $(u_n)$  est croissante donc :

$$\forall n \geq N, l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

Donc :

$$\forall n \geq N, u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Soit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l}$$

— On suppose  $u$  croissante et non majorée.

Soit  $A \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$u_N \geq A \text{ (} u \text{ non majorée)}$$

Donc :

$$\forall n \geq N, A \leq u_N \leq u_n \text{ (} u \text{ croissante)}$$

Soit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

## 14.54 Exemple

### Exemple 14.54

Soit  $u$  et  $v$  les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Ces deux suites sont adjacentes.

—

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\
&= \frac{1}{n!} \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n!(n+1)^2 n} [(n+1)n + n - (n+1)^2] \\
&= -\frac{1}{n!(n+1)^2 n} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

Donc :

$$v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $u$  et  $v$  sont adjacentes et convergent alors vers une limite commune. (TCSA)

## 14.55 Convergence des suites adjacentes

### Théorème 14.55

Deux suites adjacentes convergent vers une limite commune.

Soit  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes avec  $u$  croissante et  $v$  décroissante.

Soit  $w = v - u$ . Par opération,  $w$  est décroissante.

Par hypothèse :

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $w \leq 0$ , soit  $u \leq v$ .

La suite  $u$  est donc majorée par  $v_0$ , et croissante donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Pour les mêmes raisons,  $v$  converge.

Or, par théorème d'opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

## 14.56 Théorème de Bolzano-Weierstrass

### Théorème 14.56

On peut extraire de toute suite réelle bornée une suite convergente.

Soit  $u$  une suite bornée. On note  $a$  et  $b$  un minorant et majorant de  $u$ . On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par récurrence de la manière suivante :

— On initialise  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

— Si l'intervalle  $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$  contient une infinité de valeurs de la suite  $(u_n)$ , alors  $a_1 = a_0$  et  $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ .

Sinon, l'intervalle  $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$  contient une infinité de valeurs, alors  $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0$ .

On note  $\sigma(0) = 0$  et comme  $[a_1, b_1]$  contient une infinité de valeurs, on dit  $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$  avec  $n_1 > 0$ .

On pose alors  $\sigma(1) = n_1$ .

— Supposons construits  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $\sigma$  avec le principe précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ \text{ou} \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

Selon que  $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$  contient une infinité de valeurs ou  $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$  et  $v(n+1) > v(n)$  et  $u_{\sigma(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_n &\leq u_{\sigma(n)} \leq b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_{n+1} - a_{n+1}| &= \frac{|b_n - a_n|}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, |b_n - a_n| &= \frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Donc  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes donc convergent vers la même limite (TCSA) donc  $(u_{\sigma(n)})$  converge (TE).

## 14.63 Exemple

### Exemple 14.63

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$  diverge vers  $+\infty$ .

$\mathbb{R}_+$  est stable par  $f : x \mapsto x + e^x$ .

Comme  $0 \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(u_n)$  est bien définie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{u_n} \geq u_n$$

Donc  $(u_n)$  est croissant.

Supposons que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+$ .

Par théorème d'opération,  $l = l + e^l$ .

Absurde.

Donc d'après le TLM :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

## 14.64 Exemple

### Exemple 14.64

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$  converge vers 0.

$[0, 1]$  est stable par  $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$  et  $1 \in [0, 1]$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie et est minorée.

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \leq u_n$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante donc converge vers  $l \in [0, 1]$  d'après le TLM.

Par théorème d'opération :

$$\begin{aligned} l &= \frac{l}{l^2 + 1} \\ \text{donc } l^2 &= 0 \\ \text{donc } l &= 0 \end{aligned}$$

## 14.66 Monotonie d'une suite récurrente définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

### Théorème 14.66

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $u_0 \in D$  et  $f : D \rightarrow D$  une fonction (autrement dit,  $D$  est stable par  $f$ ). On note  $(u_n)$  l'unique suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Si pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) \geq x$ , alors  $(u_n)$  est croissante. Si pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) \leq x$ , alors  $(u_n)$  est décroissante. Le signe de la fonction  $x \mapsto f(x) - x$  renseigne donc sur la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
2. Si  $f$  est croissante, alors  $(u_n)$  est monotone. Son sens de variation dépend alors du signe de  $u_1 - u_0$ .
3. Si  $f$  est décroissante, alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et de sens contraires. Leur sens de variation est entièrement déterminé par le signe de  $u_2 - u_0$ .

1. Si :

$$\forall n \in D, f(x) \geq x$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1} > u_n$$

Donc  $(u_n)$  est croissante.

2. On suppose  $f$  croissante et  $u_0 \leq u_1$ . Alors :

$$u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$$

On termine par récurrence.

3. Si  $f$  est décroissante, alors  $f^2 = f \circ f$  est croissante. Or :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} &= f^2(u_{2n}) \\ u_{2n+1} &= f^2(u_{2n-1}) \end{aligned}$$

Donc (14.66.2)  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones.

Or, si  $u_2 \leq u_0$ , alors  $u_3 = f(u_2) \leq f(u_0) = u_1$

## 14.68 Exemple

### Exemple 14.68

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$  et notons  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ . Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

$\mathbb{R}_+$  est stable par  $f : x \mapsto x^2 + x$  et  $1 \in \mathbb{R}_+$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie.

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \geq 0$$

$(u_n)$  est croissante.

On suppose que :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \geq 1 = u_0$$

Comme  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ .

On a  $f(l) = l$  donc  $l^2 = 0$ .

Absurde.

Donc, d'après le TLM :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

## 14.69 Exemple

### Exemple 14.69

On note  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ , et notons  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ . Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

$[1, 2]$  est stable par  $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$  et  $1 \in [1, 2]$ .

Donc  $(u_n)$  est bien définie et est bornée.

Comme  $f$  est décroissante sur  $[1, 2]$ ,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de monotonies contraires.

Comme  $u_0 = 1 = \min([1, 2])$ ,  $(u_{2n})$  est croissante et  $(u_{2n+1})$  décroissante, puis convergentes (TLM) vers des points fixes de  $f^2$  (car  $f^2$  est continue sur  $[1, 2]$ )

Soit  $x \in [1, 2]$ .

$$\begin{aligned} f^2(x) = x &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = x \\ &\Leftrightarrow x + 1 + x = x(x + 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( x - \underbrace{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}_{\in [1, 2]} \right) \left( x - \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\notin [1, 2]} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent nécessairement vers  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Donc :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 14.72 Convergence et parties réelles et imaginaires

### Théorème 14.72

Soit  $u$  une suite complexe et  $l \in \mathbb{C}$ . Alors la suite  $u$  converge vers  $l$  si et seulement si la suite  $(\operatorname{Re}(u_n))$  converge vers  $\operatorname{Re}(l)$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  converge vers  $\operatorname{Im}(l)$ .

$\Rightarrow$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(l)| &\leq |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(l)| &\leq |u_n - l| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(l)$  et  $\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(l)$ .

$\Leftarrow$  On a :

$$\begin{aligned} |u_n - l| &= \sqrt{(\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(l))^2 + (\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(l))^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (théorème d'opérations)} \end{aligned}$$

## 14.73 Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes

### Remarque 14.73

Si  $u$  est bornée, on peut en extraire une suite convergente (Bolzano-Weierstrass).

$u_n = a_n + b_n$  bornée.  
 $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bornés.  
 $(a_n)$  borné donc  $(a_{\sigma(n)})$  converge.  
 $(b_{\sigma(n)})$  bornée donc  $(b_{\sigma \circ \varphi(n)})$  converge.  
 $(a_{\sigma \circ \varphi(n)})$  extraite de  $(a_{\sigma(n)})$  donc converge.  
 $(u_{\sigma \circ \varphi(n)})$  converge.



## Chapitre 15

# Limites et continuité

## 15.6 Limite en un point du domaine

### Proposition 15.6

Si  $a \in X$  et si  $f(x)$  admet une limite finie en  $a$ , alors cette limite est nécessairement égale à  $f(a)$ .

Comme  $f(x)$  admet une limite finie  $b$  quand  $x \rightarrow a$  :

$$\forall \epsilon, \exists \nu > 0, \forall x \in X, |x - a| \leq \nu \Rightarrow |f(x) - b| \leq \epsilon$$

Or pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$|a - a| \leq \nu \text{ (quelque soit } \nu)$$

Donc :

$$\forall \epsilon, |f(a) - b| \leq \epsilon$$

Donc  $\boxed{f(a) = b}$ .

## 15.15 Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au voisinage de $a$

### Proposition 15.15

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point  $a$ . Alors, si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$ , alors  $g$  aussi et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

On choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $W \cap X = W \cap Y$  et  $f|_{W \cap X} = g|_{W \cap Y}$ .

Soit  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x)$  tend vers  $b$  quand  $x \rightarrow a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(b)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V$$

Or

$$W \cap U \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \subset f(W \cap U \cap X)_{g(W \cap U \cap Y)} \subset V$$

Donc  $g$  admet une limite en  $a$  égale à  $b$

## 15.17 Unicité de la limite, cas réel

### Théorème 15.17

Soit  $a \in \overline{X}$  et  $f$  une fonction réelle. Sous réserve d'existence, la limite de  $f(x)$ , lorsque  $x$  tend vers  $a$  est unique.

Par l'absurde. On suppose que  $f$  possède deux limites  $l \neq l'$  en  $a$ .

On choisit  $u \in \mathcal{V}(l)$  et  $u' \in \mathcal{V}(l')$  tels que  $u \cap u' = \emptyset$ .

Par définition, on choisit  $(W, W') \in \mathcal{V}(a)^2$  tels que  $f(W \cap X) \subset U$  et  $f(W' \cap X) \subset U'$ .

Or  $\underbrace{W \cap W'}_{\neq \emptyset} \notin \mathcal{V}(a)$  et  $f(\underbrace{W \cap W' \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset U \cap U' = \emptyset$ .

Absurde.

## 15.23 Proposition

### Proposition 15.23

Soit  $a \in \overline{X}$ . Soit  $(Z_i)_{i \in I}$  une famille **finie** de sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  tels que  $X \in \bigcup_{i \in I} Z_i$  (on dit que  $(Z_i)$  est un **recouvrement** de  $X$ ). La fonction  $f$  admet au point  $a$  une limite  $\ell$  (finie ou infinie) si et seulement si pour tout  $i$  tel que la limite de  $f$  en  $a$  sur  $Z_i$  est envisageable, cette limite existe et vaut  $\ell$ .

$\Rightarrow$ 

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $i \in I$  tel que  $a \in \overline{X \cap Z_i}$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f(U \cap X) \subset V$ .

EN particulier  $f(\underbrace{U \cap X \cap Z_i}_{\subset U \cap X}) \subset V = f|_{X \cap Z_i}(U \cap X \cap Z_i)$ .

 $\Leftarrow$ 

Notons  $J \subset I$  l'ensemble des indices pour lesquels la limite est envisageable en  $Z_i$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . Pour tout  $i \in J$ , comme  $\lim_{x \rightarrow a, x \in Z_i} f = \ell$  on choisit  $U_i \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $f|_{Z_i \cap X}(U_i \cap Z_i \cap X) \subset V$ .

On pose  $U = \bigcap_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(a)$  car  $J$  est fini.

On choisit  $U' \in \mathcal{V}(a)$  tel que  $U' \cap \left( \bigcup_{i \in I \setminus J} Z_i \right) = \emptyset$ .

$f(U \cap U' \cap X) \subset V$

Donc  $\boxed{\lim_a f = \ell}$ .

## 15.30 Composition de limites

### Proposition 15.30

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions avec  $f(X) \subset Y$ . Soit  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{Y}$  et  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\lim_a f = b$  et si  $\lim_b g = c$ , alors  $\lim_a g \circ f = c$ .

Soit  $W \in \mathcal{V}(c)$ . On choisit  $V \in \mathcal{V}(b)$  tel que :

$$g(V \cap Y) \subset W$$

On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \cap Y \quad (\lim_a f = b)$$

On a alors :

$$\boxed{g \circ f(U \cap X) \subset W}$$

## 15.32 Limites et inégalités strictes

### Proposition 15.32

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{X}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  et  $M \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $\lim_a f < M$  alors  $f(x) < M$  au voisinage de  $a$
2. Si  $\lim_a f > m$  alors  $f(x) > m$  au voisinage de  $a$ .

1. Notons  $b = \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $b < M$ , on choisit  $U \in \mathcal{V}(b)$  et  $U' \in \mathcal{V}(M)$  avec  $U < U'$ .

Comme  $\lim_a f = b$ , on choisit  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(W \cap X) \subset U$$

### 15.33 Limite et inégalités larges

#### Proposition 15.33

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \overline{X}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  possèdent des limites finies en  $a$ .

Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$ , alors  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

Ce résultat est le plus souvent utilisé lorsqu'une des deux fonctions est constante.

RAF : absurde + (15.32)

### 15.34 Caractérisations séquentielle de la limite d'une fonction

#### Théorème 15.34

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \overline{X}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Sont équivalentes :

1.  $\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall u_n \rightarrow a, \lim f(u_n) = \ell (= f(\lim u_n))$
2. Pour toute suite  $(u_n)$  de limite  $a$  à valeurs dans  $X$ , la suite  $(f(u_n))$  a pour limite  $\ell$ .

$1 \Rightarrow 2$

On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Soit  $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$  avec  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

Soit  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ . On choisit  $U \in \mathcal{V}(a)$  tel que :

$$f(U \cap X) \subset V \quad (\lim_a f = \ell)$$

Comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , on choisit  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq N, u_n \in U \cap X$$

Donc :

$$\forall n \geq N, f(u_n) \in V$$

Donc :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$1 \Leftarrow 2$

Par contraposée. On suppose que  $f$  n'admet pas  $\ell$  comme limite en  $a$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$V_n = \begin{cases} ]a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}[ & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[ & \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Par définition, il existe  $W \in \mathcal{V}(\ell)$  tel que pour tout  $V \in \mathcal{V}(a)$ , il existe  $x \in V \cap X$  et  $f(x) \notin W$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on choisit  $x_n \in V_n \cap X$  tel que  $f(x_n) \notin W$ .

Par construction :

$$(x_n) \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \text{ et } f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

## 15.39 Théorème de la limite monotone

### Théorème 15.39

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante.

1. La limite  $\lim_{a^+} f$  existe et est finie. Plus précisément, on a  $f(a) \leq \lim_{a^+} f$ .
2. Pour tout  $c \in ]a, b[$ ,  $\lim_{c^-} f$  et  $\lim_{c^+} f$  existent et sont finies. Plus précisément :  $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .
3. La limite  $\lim_b f$  existe et est soit finie, soit égale à  $+\infty$ .

1. On note  $F = f(]a, b[)$ . Comme  $f$  est définie au voisinage de  $a$ ,  $]a, b[ \neq \emptyset$  et  $F \neq \emptyset$ .  
Par ailleurs, comme  $f$  est croissante sur  $]a, b[$ ,  $F$  est minorée par  $f(a)$ .  
D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $F$  possède une borne inférieure notée  $\alpha$ , avec  $f(a) \leq \alpha$ .  
Montrons par définition que  $\lim_{a^+} f = \alpha$ .

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $\alpha + \epsilon$  n'est pas un minorant de  $F$  par définition de  $\alpha$ . On choisit :

$$\alpha \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

Par croissance de  $f$  sur  $]a, b[$  :

$$\forall x \in ]a, x_0[, \alpha \leq f(x) \leq f(x_0) < \alpha + \epsilon$$

On pose  $\eta = x_0 - a > 0$ , on a montré que :

$$\boxed{\forall x \in ]a - \eta[, a, b[, |f(x) - \alpha| < \epsilon}$$

2. Pour  $c \in ]a, b[$ , en appliquant (15.39.1) à  $f|_{[a, b[}$ , on montre que  $\lim_{c^+} f$  existe et  $f(c) \leq \lim_{c^+} f$ .  
On adapte ensuite la preuve de (15.39.1) :

$$F = f(]a, c[), \alpha = \sup(F)$$

pour montrer que  $\lim_{c^+} f$  existe et

3. Par disjonction de cas.

- Si  $f$  est majorée : on adapte la 2ème partie de (15.39.2).
- Si  $f$  n'est pas majorée. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Comme  $f$  n'est pas majorée, on choisit  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) > A$ .  
Comme  $f$  est croissante :

$$\forall x \geq x_0, f(x) > A$$

Donc  $\lim_b f = +\infty$ .

## 15.59 Théorème des valeurs intermédiaires : version 1

### Théorème 15.59

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  d'extrémité  $a$  et  $b$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (avec existence des limites dans le cas des bornes infinies). Alors si  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$  (ou l'inverse), il existe  $c \in ]a, b[$ , tel que  $f(c) = 0$ .

On note  $A = \{x \in I, f(x) > 0\}$ .

- $A \neq \emptyset$  car  $f$  est définie et strictement positive au voisinage de  $a$  (15.32).
- $A$  est majoré car  $f$  est strictement négative au voisinage de  $b$  (et tout élément dans ce voisinage est un majorant).

D'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$ ,  $A$  possède une borne supérieure notée  $c \in ]a, b[$ .

- On a  $c \notin A$ . En effet, si  $f(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement positive sur un voisinage de  $c$ , et comme  $f$  est définie à droite de  $c$ , cela contredirait que  $c$  est un majorant de  $A$ .  
Donc  $f(c) \leq 0$ .

- Si  $f(c) < 0$ , alors  $f$  est strictement négative au voisinage à gauche de  $c$ .  
Absurde car  $c$  est le plus petit des majorants.

Conclusion,  $\boxed{f(c) = 0}$ .

## 15.60 Théorème des valeurs intermédiaires : version 2

### Théorème 15.60

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $M = \sup_I f(x)$  et  $m = \inf_I f(x)$  (éventuellement infinies).

Alors  $f$  prend toutes les valeurs de l'intervalle  $]m; M[$  :

$$\forall x_0 \in ]m; M[, \exists c \in I, f(c) = x_0.$$

RAF : (15.59) à  $f - x_0$ .

## 15.61 Théorème des valeurs intermédiaires : version 3

### Théorème 15.61

L'image d'un intervalle quelconque par une fonction continue est un intervalle.

Définition d'un intervalle par connexité.

## 15.65 Théorème de Heine

### Théorème 15.65

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Rappel :

$$C^0(I) : \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$Cu(I) : \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On raisonne par l'absurde. Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  mais non uniformément continue sur  $[a, b]$ .

On choisit  $\epsilon$  tel que :

$$\forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

Ainsi, pour tout  $b \in \mathbb{N}^*$ , on choisit un couple  $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$  tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{(*)} \geq \epsilon$$

En particulier  $(x_n)$  est bornée donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on en extrait  $(x_{\varphi(n)})$  suite convergente vers  $\ell$ .

D'après le TCILPPL,  $\ell \in [a, b]$ .

Comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors :

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Par continuité :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ et } f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$$

Donc par opération :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Absurde d'après (\*).

## 15.67 Caractérisation des intervalles compacts

### Lemme 15.67

Les intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  sont exactement les segments, c'est-à-dire les intervalles fermés bornés  $[a, b]$ .

Les segments sont bien compacts (BW et TCILPPL).

— Si  $I = ]-\infty, a[$ ,

$$u_n = a - n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \notin I$$

$$u_n = a - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \notin I$$

## 15.68 Image d'un compact par une fonction continue

### Lemme 15.68

L'image continue d'un compact est compact.

Soit  $I$  un segment, donc un intervalle.

Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle (TVI v3).

Montrons que  $f(I)$  est compact.

Soit  $(y_n) \in f(I)^{\mathbb{N}}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x_n \in I$  tel que :

$$y_n = f(x_n)$$

Or  $I$  est compact (15.67), on choisit :

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in I$$

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \text{ car } f \text{ est continue sur } I.$$

## 15.69 Image d'un segment par une fonction continue

### Corollaire 15.69

Soit  $f$  continue sur un segment  $I$ , alors  $f(I)$  est un segment.

(15.68) + TVI v3 + (15.67)

## 15.72 Théorème 15.72

### Théorème 15.72

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

$\Leftarrow$

RAS

$\Rightarrow$

Supposons  $f$  non strictement monotone.

On peut supposer qu'il existe alors :

$$x < y < z$$

tels que  $f(x) < f(y)$  et  $f(z) < f(y)$ .

Soit :

$$\lambda = \frac{f(y) + \max(f(y), f(z))}{2} \in ]f(x), f(y)[$$

$$\in ]f(z), f(y)[$$

Par continuité de  $f$  sur les intervalles  $]x, y[$  et  $]y, z[$ , il existe  $\alpha \in ]x, y[$  et  $\beta \in ]y, z[$  tels que :

$$f(\alpha) = \lambda = f(\beta)$$

Donc  $f$  n'est pas injective.

### 15.73 Théorème 15.73

#### Théorème 15.73

Soit  $I$  un intervalle et  $f$  monotone sur  $I$ . Si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue sur  $I$ .

On suppose  $f$  croissante sur  $I$ .

On suppose que  $f$  n'est pas continue sur  $I$ .

On applique le TLM :

$$\forall a \in I, \lim_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim_{a^+} f \text{ (quand tout existe)}$$

Comme  $f$  n'est pas continue sur  $I$ , on choisit  $a \in I$  tel que :

$$\lim_{a^-} f < f(a) \text{ ou } f(a) < \lim_{a^+} f$$

On pose :

$$\lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^-} f}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{f(a) + \lim_{a^+} f}{2}$$

$f(a) \neq \lambda$  et par croissance :

$$\forall x < a, f(x) < \lambda$$

$$\forall x > a, f(x) > \lambda$$

Donc  $\lambda \notin f(I)$ .

Donc  $f(I)$  n'est pas connexe, donc  $f(I)$  n'est pas un intervalle.

### 15.76 Théorème de la bijection

#### Théorème 15.76

Soit  $I$  un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone et continue. Soit

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x).$$

(ces limites existent car  $f$  est monotone). Alors  $f(I)$  est un intervalle d'extrémité  $\alpha$  et  $\beta$ , et  $f$  est un homéomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

Plus précisément, la borne  $\alpha$  de  $f(I)$  est ouverte si et seulement si la borne  $a$  de  $I$  est ouverte (et de même pour  $\beta$ ).

—  $f(I)$  est un intervalle : (15.61).

—  $f$  induit une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  (15.72  $\Leftarrow$ ).

—  $f^{-1}$  est strictement monotone et définie sur  $f(I)$  intervalle, d'image  $I$  intervalle donc  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  (15.73  $\Rightarrow$ ).

Ainsi,  $f$  induit un homéomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$ .

La nature des bornes (fermées ou ouvertes) provient de la monotonie de  $f$ .



## Chapitre 16

# Arithmétique des polynômes

## 16.1 Division euclidienne

### Théorème 16.1

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  et  $B \in \mathbb{K}[X]$  non nul, il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que  $A = BQ + R$  avec  $\deg R < \deg B$ . Le polynôme  $Q$  est appelé **quotient** et  $R$  le **reste**.

#### Existence :

On raisonne par récurrence sur le degré de  $A$ .

- Pour  $n = \deg A = 0$ . Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$ .
  - Si  $\deg B > 0$ , alors  $(0, A)$  convient.
  - Si  $\deg B = 0$ , le couple  $(B^{-1} \times A, 0)$  convient (comme  $B$  est constant et non nul), alors  $B \in \mathbb{K}^*$  donc inversible).
- On suppose le résultat vrai pour tout  $A \in \mathbb{K}_n[X]$ .  
 Soit  $A \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$  avec  $\deg A = n + 1$ .  
 On écrit  $A = \underbrace{a}_{\neq 0} X^{n+1} + A_1$  avec  $A_1 \in \mathbb{K}_n[X]$ .
  - Si  $\deg A < \deg B$ , le couple  $(0, A)$  convient.
  - Si  $\deg A \geq \deg B$  et on note  $b$  le coefficient dominant de  $B$  :

$$A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} \in \mathbb{K}_n[X]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on choisit  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $\deg R < \deg B$  et  $A - ab^{-1}B \times X^{n+1-\deg B} = QB + R$ .

Donc :

$$A = [Q + ab^{-1}X^{n+1-\deg A}] \times B + R$$

#### Unicité :

On suppose que  $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$ .

Donc :

$$\begin{aligned} B(Q - Q_1) &= R_1 - R \\ \text{donc } \underbrace{\deg(B(Q - Q_1))}_{\deg B + \deg Q - Q_1} &= \deg(R_1 - R) \\ &\leq \max(\deg R_1, \deg R) \\ &< \deg B \\ \text{donc } \deg(Q - Q_1) &< 0 \\ \text{donc } Q - Q_1 &= 0 \\ \text{puis } R_1 - R &= 0 \end{aligned}$$

## 16.7 Proposition 16.7

### Proposition 16.7

On a :

1. Soit  $A$  et  $P$  deux polynômes non nuls. Si  $A|P$  et si  $P|A$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  tel que  $P = \alpha A$ . (La relation de divisibilité n'est pas antisymétrique)
2. Si  $A|B$  et si  $B|C$ , alors  $A|C$ . La relation de divisibilité est transitive.
3. Pour tout  $A \in \mathbb{K}[X]$  non nul,  $A|A$ . La relation de divisibilité est réflexive.

1.  $P \neq 0, A \neq 0$ . Si  $A|P$  et  $P|A$ , alors (16.6.2) :

$$\deg A \leq \deg P \text{ et } \deg P \leq \deg A$$

Donc :

$$\deg P = \deg A$$

Or  $A|P$ , alors :

$$P = A \times Q$$

Puis :

$$\deg P = \deg(AQ) = \deg A + \deg Q \text{ (}\mathbb{K} \text{ est int\`egre)}$$

Donc :

$$\deg Q = 0$$

Donc :

$$Q = \alpha \in \mathbb{K}^*$$

2. RAS

3. RAS

## 16.15 Principauté de $\mathbb{K}[X]$

### Théorème 16.15

Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  non réduit à  $\{0\}$ . Il existe un unique polynôme unitaire  $D$  tel que

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

Existence :

Soit  $I \neq \{0\}$  un idéal.

On note  $A = \{\deg P, P \in I \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{N}$ .

$A \neq \emptyset$  ( $I \neq \{0\}$ ), d'après la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ ,  $A$  possède un plus petit élément noté  $n \geq 0$ .

Comme  $n \in A$ , on choisit  $D \in I$  tel que  $\deg D = n$ .

Comme  $I$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  et que  $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}[X]$ , on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha D \in I$$

On peut donc supposer  $D$  unitaire. Comme  $I$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , on a :

$$D \times \mathbb{K}[X] \subset I$$

Soit  $P \in I$ . On effectue la division euclidienne de  $P$  par  $D$  ( $\neq 0$ ) :

$$P = BD + R$$

avec  $\deg R < \deg D$ .

Or :

$$R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{BD}_{\in I} \in I$$

Par définition de  $\deg D = n$ ,  $R = 0$ .

Unicité :

$$I = D\mathbb{K}[X] = J\mathbb{K}[X]$$

avec  $D$  et  $J$  unitaires.

Or ils sont associés, donc égaux.

## 16.17 Existence de $\text{pgcd}$

### Proposition 16.17

Si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes non nuls, de tels PGCD existent.

Soit  $A, B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ ,  $(A, B) \neq (0, 0)$ .

On note  $\mathcal{C} = \{\deg P, P|A \text{ et } P|B \text{ et } P \neq 0\} \subset \mathbb{N}$ .

$\mathcal{C} \neq \emptyset$  car  $0 \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est majoré par  $\deg B$  ( $\max(\deg A, \deg B)$ ).

L'existence est assurée par la propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ .

## 16.18 Principauté de $\mathbb{K}[X]$

### Proposition 16.18

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non tous deux nuls. Soit  $D \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $D$  est un PGCD de  $A$  et  $B$  si et seulement si

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X].$$

D'après (16.15), on choisit  $F \in \mathbb{K}[X]$  tel que :

$$A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Soit  $D \in \mathbb{K}[X]$ .

$\Rightarrow$

On suppose que  $D$  est un PGCD.

Donc  $D|A$  et  $D|B$ .

Donc  $D|F$  (combinaison  $F \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ ).

Or  $F|A$  et  $F|B$  ( $A \in F\mathbb{K}[X]$ ,  $B \in F\mathbb{K}[X]$ ).

Par maximalité de  $\deg D$ , on a  $F$  et  $D$  associés.

$\Leftarrow$

$$D\mathbb{K}[X] = A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = F\mathbb{K}[X]$$

Donc  $D|A$  et  $D|B$ .

Pour tout diviseur commun  $P$  de  $A$  et  $B$ ,  $P|A$  et  $P|B$ .

Donc  $P|D$  ( $D \in A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X]$ ).

Donc  $\deg D$  est maximal pour la divisibilité.

## 16.24 Lemme de préparation au calcul pratique du PGCD unitaire

### Lemme 16.24

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes tels que  $B \neq 0$ . Pour tout  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $A \wedge B = (A - BQ) \wedge B$ .

En particulier, si  $Q$  et  $R$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  Alors  $A \wedge B = B \wedge R$ .

$$\begin{aligned} (A \wedge B)\mathbb{K}[X] &= A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= (A - BQ)\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] \\ &= ((A - BQ) \wedge B)\mathbb{K}[X] \end{aligned}$$

Donc  $A \wedge B$  et  $(A - BQ) \wedge B$  sont associés, unitaires par définition, donc égaux.