10.15 Exercice

$$x \mapsto x^{-1} \text{ est un morphisme de } G \Leftrightarrow \forall (x,y) \in G^2, (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

Or :

$$\begin{aligned} (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \\ \Leftrightarrow x^{-1}y^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

Donc G est commutatif.

11.1 Exercice

$$\begin{aligned} AB \text{ est symétrique } &\Leftrightarrow AB =^t (AB) \\ &\Leftrightarrow AB =^t B \times^t A \\ &\Leftrightarrow AB = BA \end{aligned}$$

11.4 Exercice

Analyse :
On suppose que :

$$\begin{aligned} X + tr(X)A &= B \\ \text{Donc } X &= B - tr(X)A \\ \text{Donc } tr(X) &= tr(B) - tr(X)tr(A) \\ \text{Donc } tr(X) &= \begin{cases} \frac{tr(B)}{1+tr(A)} \text{ si } tr(A) \neq -1 \\ tr(X) + tr(B) \text{ si } tr(A) = -1 \end{cases} \\ \text{Donc } X &= B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A \end{aligned}$$

Synthèse :
On pose $X = B - \frac{tr(B)}{1+tr(A)}A$

11.15 Exercice

$$
\begin{aligned}
MX = 0 &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ -x + 4y + 7z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2y + 8z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

12.1 Exercice

On remarque que $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
Donc $2^{123} \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{11}$ et $3^{121} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{11}$.
Donc $\boxed{2^{123} + 3^{121} \equiv 0 \pmod{11}}$.

12.2 Exercice

On raisonne par disjonction de cas :

$n \pmod 6$	$n+2 \pmod 6$	$7n-5 \pmod 6$	$n(n+2)(7n-5) \pmod 6$
0	2	1	0
1	3	2	0
2	4	3	0
3	5	4	0
4	0	5	0
5	1	0	0

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, n(n+2)(7n-5) \equiv 0 \pmod 6}$.

12.3 Exercice

1. On cherche une puissance cyclique de 3 (mod 25).

$$\begin{aligned}
3 &\equiv 3 \pmod{25} \\
3^2 &\equiv 9 \pmod{25} \\
3^3 &\equiv 2 \pmod{25} \\
3^4 &\equiv 6 \pmod{25} \\
3^5 &\equiv 18 \pmod{25} \\
3^6 &\equiv 4 \pmod{25} \\
3^7 &\equiv 12 \pmod{25} \\
3^8 &\equiv 11 \pmod{25} \\
3^9 &\equiv 8 \pmod{25} \\
3^{10} &\equiv 24 \equiv -1 \pmod{25}
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{3^{2189} \equiv 3^{2180} \times 3^9 \equiv (3^{10})^{218} \times 3^9 \equiv (-1)^{218} \times 8 \equiv 8 \pmod{25}}$.

2. On cherche une puissance cyclique de 55 (mod 8).

$$\begin{aligned}
55 &\equiv 7 \pmod{8} \\
55^2 &\equiv 1 \pmod{8}
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{55^{970321} \equiv 55^1 \equiv 7 \pmod{8}}$.

3. On cherche une puissance cyclique de 1234^{4312} (mod 7) et de 4321^{1234} (mod 7).

$$\begin{aligned}
1234^1 &\equiv 2 \pmod{7} \text{ et } 4321^1 \equiv 2 \pmod{7} \\
1234^2 &\equiv 4 \pmod{7} \text{ et } 4321^2 \equiv 4 \pmod{7} \\
1234^3 &\equiv 1 \pmod{7} \text{ et } 4321^3 \equiv 1 \pmod{7}
\end{aligned}$$

   Donc $1234^{4312} \equiv 1234^{3\times1437+1} \equiv 2 \pmod{7}$ et $4321^{1234} \equiv 4321^{3\times411+1} \equiv 2 \pmod{7}$.
   Donc $\boxed{1234^{4321} + 4321^{1234} \equiv 4 \pmod{7}}$.

12.4 Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On remarque que $4|100$, donc $\forall k \geq 2 \in \mathbb{N}, 4|a_k$.
   Et :

$$\begin{aligned} 4|n &\Leftrightarrow k|\sum_{k=0}^{r} a_k \times 10^k \\ &\Leftrightarrow k|\sum_{k=2}^{r}(a_k \times 10^k) + a_1 \times 10 + a_0 \end{aligned}$$

   Or comme on sait que $k|\sum_{k=2}^{r}(a_k \times 10^k)$, nécessairement, $k|(a_0 + a_1 \times 10)$.

12.8 Exercice

1. $$a^n - 1 = (a-1)\sum_{n-1}^{k=0} a^k$$