Chapitre 32

Espaces probabilisés finis

32.19 Exemple

Exemple 32.19

Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire simultanément 4 boules. Avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Sans perte de généralité, on peut numéroter les boules de 1 à 8, les 3 premières boules sont blanches et les 5 suivantes noires.
On note X la variable alétoire donnant la 4-combinaison des boules obtenues.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(P_4[\![1,8]\!])$$

En notant A "on ne tire que des boules noires", on a :

$$\begin{aligned} A &= (X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ P(A) &= P(X \in P_4[\![4,8]\!]) \\ &= \frac{|P_4[\![4,8]\!]|}{|P_4[\![1,8]\!]|} \\ &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

32.25 Exemple

Exemple 32.25

On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Quelle est la loi de la variable X^2+1 ?

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-3,3]\!])$$

$$(X^2+1)(\omega) = \{1,2,5,10\}$$

Et :

$$\begin{aligned} P(X^2+1=1) &= P(X=0) \\ &= \frac{1}{7} \\ P(X^2+1=2) &= P(X=-1)+P(X=1) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=5) &= P(X=-2)+P(X=2) \\ &= \frac{2}{7} \\ P(X^2+1=10) &= P(X=-3)+P(X=3) \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

32.26 Exemple

Exemple 32.26

On choisit un entier X au hasard entre 1 et $2n$. Quelle est la loi de $(-1)^X$?

$$\begin{aligned}
X &\hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket) \\
(-1)^X &\hookrightarrow \{-1, 1\} \\
P((-1)^X = 1) &= P(X \text{ pair}) \\
&= \frac{n}{2n} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= P((-1)^X = -1)
\end{aligned}$$

32.28 Définition implicite d'un espace probabilisé par la donnée d'une loi de variable aléatoire

Théorème 32.28

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_r\}$ un ensemble et $p_1, \ldots, p_r \in [0, 1]$ des réels pour lesquels $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Il existe alors un espace probabilisé (Ω, P) et une variable aléatoire X sur Ω, d'image E, pour lesquels pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = p_i$$

$$\omega = E \text{ et } X = \text{id}$$

On applique (32.12) pour avoir l'existence de P.