Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

34.4 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 34.4

L'application
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (X,Y) \mapsto {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire canonique.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

— ${}^tXY \in \mathbb{R}$ donc ${}^tYX =^t ({}^tXY) = {}^tXY$

— bilinéarité : RAF

— ${}^tXX = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$

34.5 Exemple

Exemple

Montrer que
$$(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$
est un exemple de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ distinct du produit scalaire usuel.

— bilinéarité : RAF

— Pour $X, Y \in \mathbb{R}^2, {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y \in \mathbb{R}$, donc :
$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y &= {}^t\left({}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y\right) \\ &=^t Y^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \\ &= {}^tY \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

On a :
$$\begin{aligned} {}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \\ &= \underbrace{2(x^2+xy+y^2)}_{\geq 0 \text{ car } x^2+xy+y^2 \geq |xy|} \end{aligned}$$

En particulier, si ${}^tX \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ alors $|xy| = 0$, puis $x = y = 0$.
La forme est définie positive.

34.14 Identités remarquables

Propostion 34.14

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a :
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$$
et
$$\langle x+y, x-y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \text{ (bilinéarité)} \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \text{ (symétrie)}\end{aligned}$$

Idem pour la seconde identité.

34.15 Proposition 34.15 bis

Propostion 34.15 bis

Soit $\|.\|$ une norme euclidienne. Soit $x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^2 &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle \\ &= \lambda^2\|x\|^2\end{aligned}$$

34.16 Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire

Théorème 34.16

Soit E un espace préhilbertien réel et x et y dans E.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire :
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.
- Inégalité triangulaire, version distance :
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

- Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée pour tout $y \in E$.
On suppose $x \neq 0$. On considère, pour $y \in E$ fixé :
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \|tx+y\|^2 \\ &= \langle tx+y, tx+y\rangle \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$
f est une fonction polynomiale de degré 2 ($\|x| \neq 0$) positive donc de discriminant $\Delta \leq 0$.
Or $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. D'où le résultat.
Si $\Delta = 0$, alors f s'annule une unique fois en t_0. On a alors $\|t_0x+y\|^2 = 0$.
Donc $t_0x + y = 0$.
Donc (x,y) est liée.
Réciproquement, si (x,y) est liée, alors $y = t_0x$ $(x \neq 0)$ et on a encore $f(t_0) = 0$.
- Pour $(x,y) \in E^2$:
$$\begin{aligned}\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|\end{aligned}$$
La dernière assertion est vraie d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la première l'est tout autant.
RAS pour l'inégalité généralisée.
Si $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz affirme que (par ex) :
$$y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Mais alors (en supposant $x \neq 0$) :

$$\|1+\alpha\|\|x\| = \|x+y\| = (1+|\alpha|)\|x\|$$

Donc $|1+\alpha| = 1+|\alpha|$.
Nécessairement, $\alpha \geq 0$

34.17 Exemple

Exemple 34.17

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right| &\leq \left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \\ \left|\sum_{k=1}^{n} 1 \times x_k\right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \\ &= \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \end{aligned}$$

34.18 Exemple

Exemple 34.18

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a;b], \mathbb{R})$, on a

$$f(b)^2 - f(a)^2 \leq 2\sqrt{\int_a^b f(t)^2\, dt}\sqrt{\int_a^b f'(t)^2\, dt}$$

On munit $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \cdot \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs f et f' :

$$\begin{aligned} \|f\| \times \|f'\| &\geq |\langle f, f' \rangle| \\ &= \left|\int_a^b f(t)f'(t)\, dt\right| \\ &= \left|\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_a^b\right| \\ &= \left|\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right| \end{aligned}$$