Chapitre 19

Convexité

19.7 Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes

Propostion 19.7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.
Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur, soit sur $I \cap]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$.

On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x) + f(x)$.
g paramètre la sécante passant par les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

— Sur $[x, y]$, RAF car f est convexe.
— Soit $t > y$. On pose $\lambda = \frac{y-x}{t-x} \neq 0 \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda t + (1-\lambda)x &= \frac{y-x}{t-x}t + \left(1 - \frac{y-x}{t-x}\right)x \\
&= \frac{t(y-x) + x(t-y))}{t-x} \\
&= y
\end{aligned}$$

Par convexité de f :

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(\lambda t + (1-\lambda)x) \\
&\leq \lambda f(t) + (1-\lambda) f(x) \\
\text{donc } f(t) &\geq \frac{1}{y} f(y) - \left(\frac{1}{y} - 1\right) f(x) \\
&= \frac{t-x}{y-x} f(y) - \left(\frac{t-x}{y-x} - 1\right) f(x) \\
&= \frac{t-x}{y-x} \times (f(y) - f(x)) + f(x) \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

— On raisonne de la même manière si $t \leq x < y$.