

Chapitre 30

Déterminant

30 Déterminant	1
30.4 Exemple	2
30.11Détermination d’une application n-linéaire sur une base	2

30.4 Exemple

Exemple 30.4

On considère l'application :

$$\delta : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}; ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc$$

Montrer que cette application est bien 2-linéaire.

$$\begin{aligned} \delta \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) &= \delta \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c + \lambda c' \\ d + \lambda d' \end{pmatrix} \right) \\ &= a(d + \lambda d') - b(c + \lambda c') \\ &= ad - bc + \lambda(ad' - bc') \\ &= \delta \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \lambda \delta \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

30.11 Détermination d'une application n-linéaire sur une base

Proposition 30.11

Soit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ une base de E_i et pour tout $(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket$, $f_{j_1, \dots, j_n} \in F$.

Alors il existe une unique application n -linéaire $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ telle que :

$$\forall (j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, d_n \rrbracket, \varphi(e_{1,j_1}, \dots, e_{n,j_n}) = f_{j_1, \dots, j_n}$$

Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ est une base de E_i alors $((e_{1,2}, 0, \dots, 0, \dots, e_{1,d}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, e_{n,1}, \dots, (0, \dots, 0, e_{n,d})))$ est une base de $E_1 \times \dots \times E_n$. (22.16), théorème de rigidité.