DISTRIBUCIONES DISCRETAS

POISSON

La distribución de Poisson se emplea para describir varios procesos, entre otros:

- ⇒ El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- ⇒ El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- ⇒ El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- ⇒ El número de servidores web accedidos por minuto.
- ⇒ El número de defectos en una longitud específica de una cinta magnética.
- ⇒ El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- ⇒ El número de defectos por metro cuadrado de tela.
- ⇒ El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- ⇒ Ocurrencia del sismo en un determinado periodo de tiempo.
- ⇒ El número de camas que un hospital necesita en cuidados intensivos por día.

Cada una de las variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno en un continuo. Expresa la probabilidad de un número k de ocurrencias acaecidas en un continuo (por ejemplo el tiempo) fijo, si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del continuo (por ejemplo tiempo) discurrido desde la última ocurrencia o suceso.

Esta distribución fue descubierta por Siméon Denis Poisson (1781-1840) y publicada, junto con su teoría de probabilidades, en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile*

En un determinado punto de recarga de tarjeta "Sube" su dueño sabe por experiencias que pasan a recargar su tarjeta 60 clientes por hora.

¿Cuál es la probabilidad de que lleguen a recargar su tarjeta exactamente 2 clientes en un minuto?.
¿Cuál es el modelo de probabilidad adecuado para resolver este problema?

Razonemos detenidamente y realicemos los supuestos que sea necesario hacer en los dos casos especiales que se proponen:

-Es posible dividir al intervalo continuo considerado en subintervalos.
-La probabilidad de un acierto permanece constante a lo largo de los intervalos.
-La probabilidad de más de dos aciertos en un subintervalo es suficientemente pequeña como para ignorarla.
-Los aciertos son independientes ya que los intervalos no se superponen.
- La probabilidad de que un acierto sencillo ocurra en un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo.

La distribución de probabilidad de Poisson es una distribución de probabilidad de una variable discreta que nos proporciona la probabilidad de que ocurra un determinado suceso un número de veces "k" en un intervalo determinado de tiempo, espacio, volumen, etc.
Donde el parámetro λ es el número medio de veces que ocurre el suceso en un intervalo continuo que puede ser: tiempo, espacio, volumen, etc. Su función de probabilidad es:

$$p(x=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Siendo la letra "e" la base del sistema de logaritmos naturales cuyo valor aproximado es 2.71828.

Para que sea función de probabilidad se debe cumplir:
1. p(xi) ≥0, ∀i = 1,....n
2. ∑p(xi) = 1

1.- se cumple ya que:
Al ser λ el promedio de aciertos que ocurren en un intervalo continuo es λ>0 entonces $e^{-\lambda}$>0 ; λ^{x} siempre es >0 y por propiedad de los números factoriales x! es >0 por lo tanto:

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} > 0$$

2.- se debe cumplir ∑p(xi) = 1
Si la función de distribución acumulada

$$F(x) = P_x(X) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{para } x\ \varepsilon N \geq 0$$

$P_x(X) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$ Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Maclaurin de la función exponencial donde: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$ entonces

$P_x(X) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1$

La *esperanza* de la distribución de Poisson es E(x)=λ

Demostración de la esperanza

$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x.\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$ se toma x a partir del valor 1 porque el primer sumando es cero.

$E(x) = \lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$ se aplica el cambio de variable y=x-1; entonces

E(x)=λ.1 ya que la expresión $\sum_{y=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$ corresponde a la suma de probabilidades de la distribución de Poisson.

E(x)=λ

La *Varianza* de la distribución de Poisson es Var(x)=λ

Demostración de la Varianza

Debemos calcular $E(x^2)$ entonces

$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2.\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{x^2.e^{-\lambda}\lambda^x}{x.(x-1)!}$ el sumando correspondiente a x=0 se anula por ello "x" parte del valor 1. Si simplificamos las "x" y se define x=s+1 nos queda

$E(x^2) = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1).\frac{e^{-\lambda}\lambda^{s+1}}{s!} = \lambda\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1).e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}$ aplicamos la propiedad distributiva

$E(x^2) = \lambda\left[\sum_{s=0}^{\infty}s.\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!} + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}\right]$ Dentro del corchete el primer término corresponde a la esperanza de Poisson y el segundo término es 1, ya que es la sumatoria de todas las probabilidades de Poisson entonces…

$E(x^2)=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda$

$Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

$Var(x)= \lambda^2+\lambda- \lambda^2$

Var(x)=λ

Veamos el caso I

Como proceso de Poisson

Si consideramos:

x: número de sucesos que ocurren en un continuo.

λ: promedio de aciertos que ocurren en un intervalo continuo

Entonces:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Se tiene Intervalo continuo: 1 hora (el tiempo es un continuo), dividida en 60 subintervalos (de 1 minuto c/u).

Esto define el parámetro λ = promedio de aciertos (clientes que ingresan a recargar su tarjeta “Sube”) que ocurren en el intervalo continuo (tiempo).

λ = 60 clientes/60 min = 1 cliente/min

Los aciertos (cantidad de clientes que ingresan a recargar su tarjeta “Sube”) son independientes ya que los intervalos no se superponen.

* La probabilidad de que un acierto sencillo ocurra en un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo.

x : n° de sucesos que ocurren en un continuo en este caso **la cantidad de clientes que ingresan en un determinado punto a recargar su tarjeta.**

Pero ¿cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 2 clientes a recargar su tarjeta en un minuto?

Aplicando la fórmula anterior y reemplazando resulta:

$$P(x=2) = \frac{e^{-1}1^{2}}{2!} = 0{,}184$$

La probabilidad de que lleguen exactamente 2 clientes en un minuto es 0,184.

¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 2 clientes en un minuto a recargar la tarjeta “Sube”?

$$P(x \geq 2) = 1 - \left\{ \frac{e^{-1}1^{0}}{0!} + \frac{e^{-1}1^{1}}{1!} \right\} = 0{,}264$$

la probabilidad de que lleguen al menos 2 clientes en un minuto a recargar la tarjeta “Sube” es 0,264.

Estime el número de clientes que se espera lleguen a un determinado punto de recarga de tarjeta “Sube” en un minuto.

$E(x) = \lambda = 1$

Se espera que ingrese a recargar su tarjeta "Sube" un cliente por minuto.

Veamos el caso II

Distribución de Poisson como una aproximación a la Binomial

Cuando una variable aleatoria presenta las características correspondientes a una distribución Binomial y el cálculo resulta difícil o imposible de realizar con la calculadora, se puede aproximar mediante la distribución de Poisson en los casos en que en un proceso aleatorio la probabilidad de ocurrencia "p" sea pequeña (evento poco frecuente) y constante con una gran cantidad de pruebas o muestras "n".

Recordemos que la expresión de la distribución binomiales:

Bin (x=.. p=.,n=..)= $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ para x = 0,1,…..n

La distribución Binomial converge a la distribución de Poisson en el límite cuando "n" tiende a ∞, "p" tiende a 0 y "np" permanece constante e igual a λ, entonces sólo a los efectos de realizar el cálculo de probabilidades se utiliza

$$P(x) = \frac{e^{-np}(np)^x}{x!} \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

La media o esperanza y la varianza, se obtienen mediante el mismo procedimiento, tomando los límites cuando n tiende a ∞, p tiende a 0 y np tiende a λ:

$E(X) = \lim_{np \to \lambda} np = \lambda$

$Var(x) = \lim_{np \to \lambda} \left(np(1-p)\right) = \lambda$

La distribución de probabilidad de Poisson proporciona buenas aproximaciones cuando np ≤ 5.

Ejemplo:

Suponga que una compañía de seguros asegura las vidas de 5000 hombres de 42 años de edad. Si los estudios actuariales muestran que la probabilidad de que un hombre muera en cierto año es 0.001, entonces la probabilidad de que la empresa pague exactamente 4 indemnizaciones en un cierto año es:

np=5000x0,001=5

Cumple con las condiciones vistas en la distribución Binomial. Si reemplazamos los datos en Bin (x=.. p=.,n=..)= $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

Bin (x=4 p=0,001,n=5000)= $\binom{5000}{4} 0{,}001^4 0{,}999^{5000-4}$

Bin (x=4 p=0,001,n=5000) $= \frac{5000!}{4!*4996!}(0.001)^4(0.999)^{4996}$

Resulta complicado de calcular pero si utilizamos Poisson

P(x)= $\frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$ para x = 0, 1, 2, 3, …… y remplazamos

$np = \lambda = 5000x0{,}001 = 5$

P(x=4)= $\frac{e^{-5}(5)^4}{4!}$ =0,1745

La probabilidad de que la empresa pague exactamente 4 indemnizaciones en un cierto año es 0,1745.