Probabilités numériques

Méthodes de Monte Carlo et applications

Feuille d'exercices N° 2

Simulation de loi et intervalle de confiance

Exercice 1 (Loi exponentielle et intervalles de confiance)

Soient $Y_1, \dots Y_n \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et donc de densité $f_\lambda(x) = \lambda \exp\ (-\lambda x) 1_{\{x \geq 0\}}$.

1) Calculer $E\,[Y_n]$ et $Var\,[Y_n]$ (suggestion : utiliser une intégration par parties).
2) Donner
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\lambda\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 356\right)$$
3) Construire un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre λ de niveau de fiabilité 96 %.

Illustration de la loi des grands nombres

Exercice 2

On rappelle que si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et ayant une espérance m, alors $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ converge presque sûrement vers m lorsque n tend vers l'infini, il s'agit de la Loi des grands nombres.

a) Simuler un grand nombre N de variables aléatoires de loi uniforme sur [0,1], tracer sur un même graphe la représentation de la suite $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ (pour n variant de 1 à N) et la courbe d'équation $y = m$, et observer cette convergence.
b) Faire de même pour des variables aléatoires de loi de Wigner.
La densité de la loi de Wigner (ou du demi-cercle) est la fonction $x \to \sqrt{4 - x^2}/2\pi$ sur [-2, +2]).

Approximation numérique d'intégrale

Rappel : pour évaluer une intégrale de la forme

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx$$

Avec f une densité de probabilité (c'est à dire f positive et $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$), on peut écrire $I = \mathrm{E}(g\,(X))$ avec X de loi de densité f. L'évaluation de l'intégrale I est donc tout simplement équivalent à un calcul d'espérance d'une variable aléatoire réelle, à condition que g soit une fonction mesurable.
Ainsi on peut reformuler des intégrales en terme d'espérance pour pouvoir les estimer à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo.

Exercice 3 (calcul d'intégrale à l'aide de la méthode MC)

1) A l'aide du rappel ci-dessus, donner au moins deux méthodes de Monte-Carlo différentes d'approximation de l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^1 cos(x^3) exp(-x) dx$$

à l'aide d'une moyenne empirique impliquant des variables aléatoires de loi connue.
Même question avec

$$I_2 = \int_0^1 sin(x^4) exp(-2x) \exp\,(-\frac{x^2}{2}) dx$$

et

$$I_3 = \int_0^1 ln(1 + x^2) \exp\,(-x^2) dx$$

2) Proposer un programme R permettant d'approcher par au moins une méthode de Monte Carlo le calcul de l'intégrale I1 de la question 1)

Exercice 4 (**Evaluation numérique du volume d'une sphère**)

On souhaite évaluer le volume V d'une sphère de rayon 1 (volume de la boule unité) en définissant un cube qui contient la sphère et en générant n points indépendant dans ce cube à l'aide d'une distribution uniforme.
On rappelle que le volume V de la « boule unité » est donné par l'intégrale suivante :

$$V = \int_{[-1,1]^3} 1_{x^2+y^2+y^2 \leq 1} dxdydz$$

1) Proposer un estimateur de V. Quelle est sa loi ? (Indication : $\int_{[-1,1]^3} 1_{x^2+y^2+y^2 \leq 1} dxdydz = 8\mathbb{E}[1_{U_1{}^2+U_2{}^2+U_3{}^2 \leq 1}]$, ou U_1, U_2, U_3 sont des variables aléatoire indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$)

2) Utiliser une méthode de Monte Carlo pour évaluer V à l'aide de différentes valeurs de n.
3) Le volume de l'espace délimité par une sphère (on parle alors du volume de la boule unité) est égale à 4/3 multiplié par π et par son rayon R au cube.
   Le volume d'une boule unité est donné par la formule : $\frac{4\pi}{3} \times R^3$. Calculer le volume de la sphère unité à l'aide de la formule $\frac{4\pi}{3} \times R^3$ et comparer le résultat à la valeur V calculée à l'aide de la méthode Monte-Carlo.
4) Représenter graphiquement l'approximation réalisée à l'aide de la fonction de R plot3d (NB : afin d'utiliser la fonction plot3d pensez à télécharger le package rgl comme suit :
   install.packages("rgl") # installer la librairie
   library(rgl) # charger la librairie rgl

Exercice 5

Soient $X_1, X_2, \ldots.$ des variables i.i.d uniformes dans le carré C = $[-1;\, 1] \times [-1;\, 1]$. Soit D le disque (dans $\mathbb{R}^2$) de centre (0,0) et de rayon 1.

1) Implémenter en R le calcul par une méthode de Monte-Carlo de la valeur de $\mathbb{E}(1_{X \in D})$.
2) Estimer la variance (sous R) de la méthode.
3) Trouver n un nombre de boucles à réaliser en 1) pour que l'estimation soit précise à 0,1 près avec une probabilité ≥ 95%.

Exercice 6

On aimerait évaluer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx$$

1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée). Dans la suite, on notera σ^2 la variance de cette méthode.
2) Implémenter un programme R qui permet de calculer I (de manière approchée).
3) Trouver un nombre de boucle n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2) telle que la méthode ci-dessus approche I à 0,01 près avec une probabilité ≥ 0,9 (il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression trouvée).