Probabilités numériques

Méthodes de Monte Carlo et applications

Feuille d'exercices N° 3

Simulation de variables aléatoires par inversion de la fonction de répartition

Rappels : Principe de la méthode de simulation par inversion

Pour simuler (générer) une variable aléatoire X de loi de répartition F dont on sait calculer l'inverse généralisée F^{-1}, on peut simuler une variable aléatoire de loi uniforme U sur l'intervalle $[0; 1]$ et poser $X = F^{-1}(U)$.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right) cos(x) 1_{\left\{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}}$.

Donner sa fonction de répartition et proposer une méthode de simulation de X à partir de sa fonction de répartition.

Exercice 2

Par la méthode d'inversion de la fonction de répartition, simuler en R des variables aléatoires de lois :

- Exponentielle de paramètre lambda = 1;
- de Cauchy.

Tracer leurs histogrammes empiriques et comparer avec la densité théorique.

Pour rappel ci-après les densité des lois exponentielle et de Cauchy :

Densité de la loi exponentielle :

$$f_X(x) = 1_{[0,+\infty[}(x) \lambda e^{-\lambda x}, x \in \mathbb{R}$$

Densité de la loi de Cauchy :

$$g_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Simulation de variables aléatoires discrètes

<u>Exercice 3</u> (TP sous scilab et R)

À partir d'un recensement (États-Unis 1920) les probabilités p(k) d'avoir k-1 fils ont été estimées
p(1) = 0.4982 p(2) = 0.2103 p(3) = 0.1270
p(4) = 0.0730 p(5) = 0.0418 p(6) = 0.0241
p(7) = 0.0132 p(8) = 0.0069 p(9) = 0.0035
p(10)= 0.0015 p(11)= 0.0005 p(k) = 0.0000 si k > 11

Soit, en notation Scilab,

```
p = [0.4982, 0.2103, 0.1270, 0.0730, 0.0418, ..
      0.0241, 0.0132, 0.0069, 0.0035, 0.0015, 0.0005 ];
```

1) Écrire le code d'une fonction Scilab simulant une variable aléatoire X de loi P(X = k) = p(k).
2) Tracer l'histogramme d'un grand nombre de tirages indépendants.
3) Comparer avec les probabilités théoriques p(k)

Et pour aller plus loin…

4) Calculer l'espérance de X et comparer avec la moyenne empirique des tirages.
5) Même question pour la variance.

Simulation de variables aléatoires par la méthode du rejet

<u>Rappels</u> : Principe de la méthode du rejet

Pour simuler (ou générer) une variable aléatoire de densité f bornée par M et à support compact sur $[a;b]$, on simule des variables aléatoires uniformes sur $[a;b]\times[0;M]$ (qui représente le pavé contenant le graphe de f), jusqu'à ce que l'un des points tirés appartiennent à l'hypographe de f. **On prend alors pour réalisation de la loi f l'abscisse de ce point**.

<u>Exercice 4</u>

1) Simuler des variables exponentielles par une méthode du cours.
2) Tracer un histogramme des variables simulées par cette méthode. Comparer avec un tracé de la densité de la loi exponentielle.

Exercice 5

La densité de la loi de Wigner (ou du demi-cercle) est la fonction
$f(x) = \frac{\sqrt{(4-x^2)}}{2\pi}$ Sur $[-2;\ 2]$. Elle a donc pour support l'intervalle $[-2; 2]$.

1) simuler des variables aléatoires de loi de Wigner par la méthode du rejet. (suggestion : trouver un majorant M de f tel que $f(x) \leq M$ afin de simuler deux variables aléatoires uniformes sur le pavé $[-2;\ 2]\times[0;\ M]$ et d'utiliser l'algorithme du rejet).
2) Tracer leurs histogrammes empiriques et comparer avec la densité théorique.

Exercice 6 (en faire sur papier)

Soit $\lambda \in]0, 1[$ fixé.

1) Utiliser la méthode du rejet pour simuler une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ à partir d'une variable aléatoire Y de loi suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(Y = n) = (1 - \lambda)\lambda^n$$

2) Comment peut on simplement simuler Y ?

Indication : rappelons que $\mathbb{P}(X = n) = \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!}$ Car X suit une loi de Poisson de paramètre λ.