Probabilités numériques
Méthodes de Monte Carlo et applications
Feuille d'exercices N° 4

Réduction de variance

Exercice 1 : Variables antithétiques

On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 exp^u du$$

Indication : penser à calculer la valeur de I (qui vaut e-1)

1) Rappeler l'estimateur de Monte-Carlo standard $\hat{I}_n$ (voir chapitre 4, section 4.2 et s'en inspirer). Rappeler le théorème central limit auquel ce estimateur obéit et **calculer la variance $\boldsymbol{\sigma^2}$** qu'il fait intervenir. Donner un estimateur $\hat{\sigma}_n^2$ de σ^2 (vu en cours, voir section 2.3.1 du chapitre 2)
2) Illustrer sous R les convergences de $\hat{\sigma}_n^2$ vers σ^2.
3) Donner un estimateur $\hat{J}_n$ de I à l'aide de variables antithétiques (voir section 4.2 du chapitre 4). Quelle est sa variance théorique s^2. Par rapport à l'estimateur de Monte Carlo classique, par combien (approximativement) a-t-on divisé le a-t-on divis´e le temps de calcul pour atteindre la même précision ?

Exercice 2

On veut calculer l'espérance suivante :

$$I = \mathbb{E}\left(1_{X>0} e^{\beta X}\right)$$

Où X suit une loi normale centrée et réduite avec $\beta = 5$. $1_{X>0}$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 si $(X > 0)$ et 0 sinon.

On estimera la variance à chaque étape de l'exercice.

1) Calculer par une méthode de Monte Carlo la variance de la méthode « naive » c'est à dire quand on tire $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d de loi normale centrée et réduite et que l'on approche I par son estimateur Monte Carlo classique (i.e. $\boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i>0} e^{\beta X_i}}$).

   Indication :
2) Proposer une méthode échantillonnage préférentiel à l'aide du cours et l'implémenter sous R.

3) Proposer une méthode de variable de contrôle à l'aide des du cours et l'implémenter sous R.
4) Améliorer la méthode à l'aide d'une technique de variable antithétique et l'implémenter sous R.