ENSAE 3ème année

Rodrigue Rillardon
Tom Ciffreo
Axel Marchand

# Simulation de vraisemblance continue pour des modèles SV-Garch via un filtre à particule

# Introduction

L'objectif de ce projet est de répliquer la méthode d'implémentation du papier *Simulated Likelihood Inference for Stochastic Volatility Models using Continuous Particle Filtering* , Pitt, Malik, Doucet 2014.
Ce dernier propose une méthode d'estimation de la vraisemblance d'un modèle SV-Garch. La méthode décrite permet d'obtenir une estimation continue en le paramètre d'intérêt $\theta$ de la vraisemblance du modèle à l'aide d'un filtre à particule.
Nous rappelerons dans un premier temps la définition d'un modèle SV-Garch, puis nous verrons le problème que pose l'estimation de la vraisemblance. Enfin, nous présenterons la méthode d'estimation proposée par l'article puis appliquerons cette dernière à des données SP500.

# 1 Modèle SV-Garch

Le modèle SV-Garch est un modèle hybride qui regroupe les propriétés d'un modèle à volatilité stochastique standard et d'un modèle Garch.

## 1.1 Modèle à volatilité stochastique

Un modèle à volatilité stochastique standard (Taylor 1986) est défini de la manière suivante :

$$y_t = e_t exp(h_t/2)$$
$$h_{t+1} = \mu(1-\phi) + \phi h_t + \sigma_\eta \eta_t, t = 1, ..., T$$

Avec $e_t$ et $\eta_t \sim N(0,1)$, $y_t$ le rendement prévu, et $h_t$ les log-volatilités non observées. En posant $\eta_t = \rho e_t + \sqrt{1-\rho^2}\xi_t$ avec $\xi_t \sim N(0,1)$, on peut réécrire l'équation en

$$h_{t+1} = \mu(1-\phi) + \phi h_t + \sigma_\eta \rho e_t + \sigma_\eta \sqrt{1-\rho^2}\xi_t$$

## 1.2 Modèle GARCH

Le modèle GARCH est défini de la manière suivante :

$$y_t = \sqrt{v_t}\epsilon_t$$
$$v_{t+1} = \gamma + \alpha v_t + \beta y_t^2$$

Avec $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ iid.
De plus, $v_t = \sigma_t^2$ correspond à la volatilité du modèle. Il s'agit d'un modèle à espace d'état où l'on observe une série de variables de rendement $(y_t)_t$ qui dépendent de variables latentes $(v_t)_t$ que l'on n'observe pas mais que l'on souhaite estimer.

## 1.3 Modèle SV GARCH

Posons le terme de perturbation suivante :

$$\zeta_t = \phi\epsilon_t + \sqrt{1-\phi^2}\xi_t \text{ avec } \xi_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \gamma + \alpha v_t + \beta v_t \zeta_t^2 \\ &= \gamma + \alpha v_t + \beta v_t(\phi\epsilon_t + \sqrt{1-\phi^2}\xi_t)^2 \end{aligned}$$

On cherche à estimer le paramètre $\theta = (\gamma, \alpha, \beta)$ avec $|\phi| < 1$.
L'objectif est donc d'estimer la volatilité du modèle.

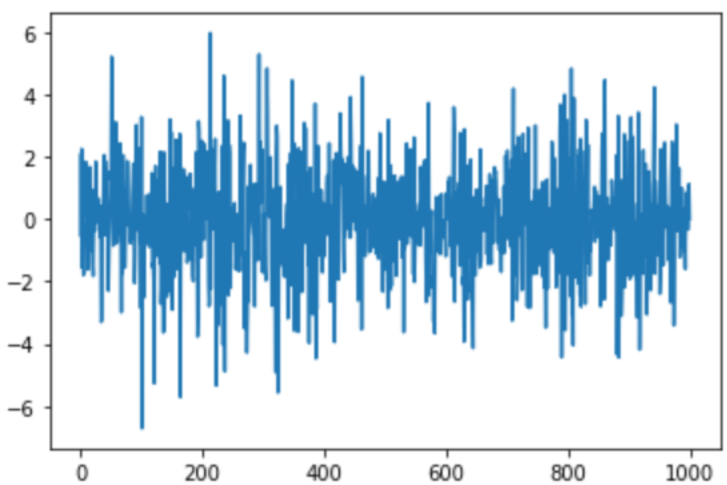


FIGURE 1: Simulation d'un modèle SV-Garch avec $\theta = (1, 0.3, 0.4)$

# 2 Méthode d'estimation

L'article propose une méthode d'estimation des paramètres du modèle à l'aide d'un filtre à particules.
L'objectif est d'obtenir une estimation continue en les paramètres de la vraisemblance afin de maximiser cette dernière et d'obtenir les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres.
L'algorithme de filtre à particule de l'article permet d'obtenir une estimation de la densité $f(h_{t+1}|Y_{t+1})$.
Il suffit ensuite de calculer l'estimateur de la lo-vraisemblance suivant :

$$
\begin{aligned}
&\hat{l}(\theta) \\
&= \prod_{t=1}^{T} f(Y_{t+1}|\theta, Y_t) \\
&= \prod_{t=1}^{T} \int f(Y_{t+1}|h_{t+1}, \theta) f(h_{t+1}|Y_{t+1}) dh_{t+1} \\
&= \prod_{t=1}^{T} (\sum_{i=1}^{M} f(Y_{t+1}|h_{t+1}^{i}, \theta) f(h_{t+1}^{i}|Y_{t+1}))
\end{aligned}
$$

L'algorithme fonctionne de la manière suivante (décrire méthode d'obtention des $v_0$) :
Pour $t = 1, ..., T$ :

1. Input : $v_t^i \sim f(v_t|Y_t)$ pour $i = 1, ..., M$.
2. simuler $\tilde{v}_{t+1}^i \sim f(v_{t+1}|v_t^i)$.
3. calculer les poids normalisés :

$$
\lambda_{t+1}^{i} = \frac{\omega_{t+1}^{i}}{\sum_{k=1}^{M} \omega_{t+1}^{k}} \text{ avec } \omega_{t+1}^{i} = (2\pi \tilde{v}_{t+1}^{i})^{-\frac{1}{2}} exp\{-\frac{1}{2} \frac{y_{t+1}^{2}}{\sqrt{\tilde{v}_{t+1}^{i}}}\} \tag{1}
$$

4. simuler $v_{t+1}^i \sim \sum_{k=1}^{M} \lambda_{t+1}^k G_{\tilde{v}_{t+1}^k}(v_{t+1})$

Dans notre cas, $G$ est la fonction de répartition de la loi uniforme, construite de la même manière que dans le papier de Malik et Pitt afin d'obtenir une estimation continue en les paramètres de la vraisemblance.