

Rodrigue Rillardon  
Tom Ciffreo  
Axel Marchand

**Simulation de vraisemblance  
continue pour des modèles  
SV-Garch via un filtre à particule**

# Introduction

L'objectif de ce projet est de répliquer la méthode d'implémentation du papier *Simulated Likelihood Inference for Stochastic Volatility Models using Continuous Particle Filtering*, Pitt, Malik, Doucet 2014.

Ce dernier propose une méthode d'estimation de la vraisemblance d'un modèle SV-Garch. La méthode décrite permet d'obtenir une estimation continue en le paramètre d'intérêt  $\theta$  de la vraisemblance du modèle à l'aide d'un filtre à particule.

Nous rappellerons dans un premier temps la définition d'un modèle SV-Garch, puis nous verrons le problème que pose l'estimation de la vraisemblance. Enfin, nous présenterons la méthode d'estimation proposée par l'article puis appliquerons cette dernière à des données S&P500.

## 1 Modèle SV-Garch

Le modèle SV-Garch est un modèle hybride qui regroupe les propriétés d'un modèle à volatilité stochastique standard et d'un modèle Garch.

### 1.1 Modèle à volatilité stochastique

Un modèle à volatilité stochastique standard (Taylor 1986) est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= e_t e^{h_t/2} \\ h_{t+1} &= \mu(1 - \phi) + \phi h_t + \sigma_\eta \eta_t, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (1)$$

Avec  $e_t$  et  $\eta_t \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, 1)$ ,  $y_t$  le rendement prévu,  $h_t$  les log-volatilités non observées,  $\mu$  représente le drift de l'équation,  $\sigma_\eta$  la volatilité de la log-volatilité et  $\phi$  le paramètre de persistance.

On peut réécrire ce modèle a volatilité stochastique et le modifier de sorte à incorporer l'effet levier, pour obtenir un modèle SVL (stochastic volatility model with leverage). En effet, en posant  $\eta_t = \rho e_t + \sqrt{1 - \rho^2} \xi_t$ , avec  $\xi_t \sim N(0, 1)$ , on peut réécrire l'équation (1) de la manière suivante :

$$h_{t+1} = \mu(1 - \phi) + \phi h_t + \sigma_\eta \rho e_t + \sigma_\eta \sqrt{1 - \rho^2} \xi_t \quad (2)$$

L'avantage de ce modèle est qu'il est beaucoup plus simple à évaluer lorsque l'on utilise un filtre à particules (que l'on va voir dans la suite).

## 1.2 Modèle GARCH

Le modèle GARCH est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= \sqrt{v_t} \epsilon_t \\ v_{t+1} &= \gamma + \alpha v_t + \beta y_t^2, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (3)$$

Avec  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  iid,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ , et  $\beta \geq 0$ . Pour que le processus soit stationnaire, il faut également que  $\alpha + \beta < 1$

De plus, on pose  $v_t = \sigma_t^2$  correspond à la volatilité du modèle. Il s'agit d'un modèle non linéaire à espace d'état où l'on observe une série de variables de rendement  $(y_t)_t$  qui dépendent de variables latentes  $(v_t)_t$  que l'on n'observe pas mais que l'on souhaite estimer.

## 1.3 Modèle SV GARCH

Posons le terme de perturbation suivante :

$$\zeta_t = \varphi \epsilon_t + \sqrt{1 - \varphi^2} \xi_t \text{ avec } \xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

On a alors, en remplaçant dans (3)  $\epsilon_t$  par  $\zeta_t$  :

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \gamma + \alpha v_t + \beta v_t \zeta_t^2 \\ &= \gamma + \alpha v_t + \beta v_t (\varphi \epsilon_t + \sqrt{1 - \varphi^2} \xi_t)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

On cherche à estimer le paramètre  $\theta = (\gamma, \alpha, \beta, \varphi)$  avec  $|\varphi| < 1$  et les mêmes restriction que pour (3) sur  $\gamma$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

L'objectif est donc d'estimer la volatilité du modèle.

## 2 Méthode d'estimation

L'article propose une méthode d'estimation des paramètres du modèle à l'aide d'un filtre à particules. En effet, dans le contexte de modèles à volatilité stochastique, il n'est pas possible d'obtenir une expression de la densité  $f(h_t | Y_t)$  ; on doit donc l'approcher numériquement.

L'objectif est d'obtenir une estimation continue de la vraisemblance, comme fonction des paramètres du modèle, afin de maximiser cette dernière et d'obtenir les estimateurs du

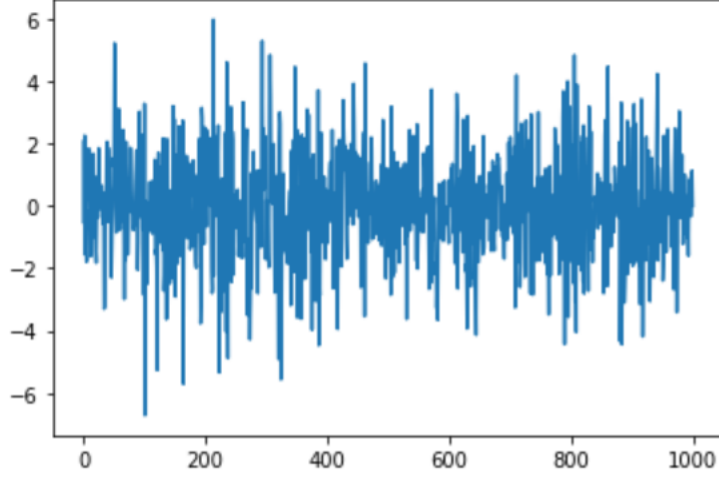


FIGURE 1: Simulation d'un modèle SV-Garch avec  $\theta = (1, 0.3, 0.4)$

maximum de vraisemblance des paramètres. L'algorithme de filtre à particule de l'article permet d'obtenir une estimation de la densité  $f(h_{t+1}|Y_{t+1})$ .

Il suffit ensuite de calculer l'estimateur de la log-vraisemblance suivant :

$$\begin{aligned}
 \hat{L}(\theta) &= \prod_{t=1}^T f(Y_{t+1}|\theta, Y_t) \\
 &= \prod_{t=1}^T \int f(Y_{t+1}|h_{t+1}, \theta) f(h_{t+1}|Y_{t+1}) dh_{t+1} \\
 &= \prod_{t=1}^T \left( \sum_{i=1}^M f(Y_{t+1}|h_{t+1}^i, \theta) f(h_{t+1}^i|Y_{t+1}) \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

## 2.1 Filtre à particules (directement appliqué au modèle SV-Garch)

Supposons que l'on ait un ensemble d'échantillons aléatoires, appelés 'particules',  $v_t^1, \dots, v_t^M$ , et associés à des probabilités discrètes (représentant des poids),  $\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^M$ , issus de la densité de  $f(v_t|Y_t)$ , où  $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$ . Il est possible de construire  $f(v_{t+1}|Y_{t+1})$  à partir d'un prior et d'une vraisemblance, grâce à un algorithme de filtre à particules, qui fonctionne sur un principe de récursivité. A partir de ces particules, et de leur mise à jour,

on peut obtenir un échantillon dont la distribution est proche de celle de  $f(v_{t+1}|Y_{t+1})$ <sup>1</sup>. L'algorithme fonctionne de la manière suivante :

- Inialisation : on commence, à  $t=0$ , par simuler  $M$  échantillons  $v_0^i \sim f(v_0)$  (qui représente la loi stationnaire), pour  $i=1, \dots, M$ . Pour se faire, on peut simplement simuler les valeurs  $v_{-l}^i$  entre le lag  $-l$  et  $0$ , en itérant selon l'équation de transition (4). On va alors obtenir les échantillons  $v_{-l+1}^i, v_{-l+2}^i, \dots, v_0^i$  pour  $i=1, \dots, M$ , avec finalement  $v_0^i \sim f(v_0)$ . Ainsi, avec un lag assez grand, et si les conditions de stationnarité sont respectées pour le modèle SV-Garch, notre  $v_0^i$  convergera vers la loi invariante de la série temporelle.

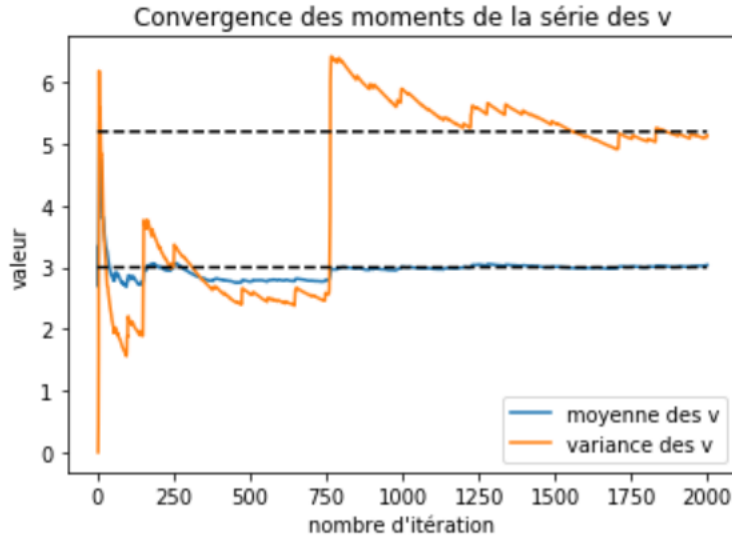


FIGURE 2: On voit bien graphiquement une convergence des moments d'ordre 1 et 2 de notre série simulée (d'où convergence en loi). On considère donc qu'à partir d'un certain rang, les  $v_t$  sont simulés selon la loi stationnaire  $f(v_0)$ . On choisit par exemple  $v_0^i = v_{1000}$  dans notre série simulée

1.  $f(v_{t+1}|Y_{t+1}) \propto f(y_{t+1}|v_{t+1}) \int f(v_{t+1}|y_t, v_t) f(v_t|Y_t) dv_t$

Pour  $t = 1, \dots, T$  :

1. Input :  $v_t^i \sim f(v_t|Y_t)$  pour  $i = 1, \dots, M$ .
2. simuler  $\tilde{v}_{t+1}^i \sim f(v_{t+1}|v_t^i)$  pour  $i = 1, \dots, M$ .
3. calculer les poids normalisés pour  $i = 1, \dots, M$  :

$$\lambda_{t+1}^i = \frac{\omega_{t+1}^i}{\sum_{k=1}^M \omega_{t+1}^k} \text{ avec } \omega_{t+1}^i = f(v_{t+1}|\tilde{v}_{t+1}^i)^2$$

4. simuler  $v_{t+1}^i \sim \sum_{k=1}^M \lambda_{t+1}^k G_{\tilde{v}_{t+1}^k}(v_{t+1})$

Dans notre cas,  $G$  est la fonction de répartition de la loi uniforme, construite de la même manière que dans le papier de Malik et Pitt afin d'obtenir une estimation continue en les paramètres de la vraisemblance.

Cet algorithme permet d'obtenir une approximation de la loi a posteriori désirée  $f(v_{t+1}|Y_{t+1})$ .

On obtient donc au final des simulations de  $v_{t+1} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_{t+1}^i$ . Il ne reste qu'à calculer la log-vraisemblance de  $y_{t+1}|y_t$  afin d'estimer nos paramètres.

## 2.2 Estimation de la log vraisemblance

Notre modèle dépend de paramètres  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \varphi)$ . Afin d'estimer ces paramètres nous devons estimer la fonction de log vraisemblance, donnée par :

$$\begin{aligned} \log L(\theta) &= \log f(y_1, \dots, y_T | \theta) \\ &= \sum_{t=1}^T \log f(y_t | \theta; Y_{t-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

avec :

$$f(y_{t+1} | \theta; Y_t) = \int f(y_{t+1} | v_{t+1}, \theta) f(v_{t+1} | Y_t, \theta) dv_{t+1} \quad (7)$$

Etant donné que le filtre à particules permet d'obtenir différents échantillons  $\tilde{v}_{t+1}^i$  à partir de la loi  $f(v_t|Y_t, \theta)$  (étape 1 de l'algorithme), on peut estimer la loi prédictive (7) de la manière suivante :

---


$$2. \text{ Dans notre cas, } f(t_{t+1}|\tilde{v}_{t+1}^i) = (2\pi\tilde{v}_{t+1}^i)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{y_{t+1}^2}{\tilde{v}_{t+1}^i}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y_{t+1}|Y_t, \theta) &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M f(y_{t+1}|\tilde{h}_{t+1}^k, \theta) \\
&= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \omega_{t+1}^k
\end{aligned} \tag{8}$$

Et finalement, un estimateur de la log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned}
\log \hat{L}_M(\theta) &= \sum_{t=1}^T \log \hat{f}(y_t|\theta, Y_{t-1}) \\
&= \sum_{t=1}^T \log \left( \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \omega_t^k \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Comme on a utilisé une fonction  $G$ , continue (comme le suggère Malik & Pitt), et non une fonction de Dirac (comme proposé par Kitagawa) dans l'étape 4 de l'algorithme, le problème de la continuité de l'estimateur de la log vraisemblance ne se pose pas ici.

### 3 Résultats sur des données réelles

## **Bibliographie**

1. *Simulated Likelihood Inference for Stochastic Volatility Models using Continuous Particle Filtering* - Pitt, Malik, Doucet 2014
2. *Particle filter for continuous likelihood evaluation and maximization* - Pitt, Malik, Doucet 2011