Elementaire statistiek

Bachelor in de informatica

Oefeningen: – Centrale limietstelling en Schatters

1. Het gemiddeld aantal geboortes per dag in een streek is 228, met een standaarddeviatie σ gelijk aan 20. Bepaal de kans dat er in 1 jaar tijd meer dan 82000 baby's geboren worden (1 jaar = 365 dagen).

2. Het gehalte van stikstofoxide (NOX) in de uitlaat van een bepaald automodel varieert met gemiddelde 1.4g/mi en standaarddeviatie 0.3 g/mi. Een firma heeft 125 auto's van dit model in haar wagenpark. Indien $\bar{X}$ het gemiddelde NOX gehalte is voor deze auto's, hoe groot is dan het gehalte L zodat de kans dat $\bar{X}$ groter is dan L slechts 0.01 is?

3. Zij $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ en zij $Y \sim N(\mu, 4\sigma^2)$ met μ en σ^2 ongekend, en X en Y onafhankelijke stochastische veranderlijken. Definieer $W = aX + bY$. Welke waarden voor a en b leiden tot een onvertekende schatter voor μ? Tussen alle mogelijke waarden voor a en b, welke verkies je? En waarom?

4. De echte gemiddelde opbrengst van twee chemische processen is in beide gevallen gelijk aan μ, doch de variantie bij proces 1 is σ^2 terwijl ze bij het tweede proces $4\sigma^2$ bedraagt. $X_1, \ldots, X_m$ zijn m onafhankelijke opbrenstgegevens van proces 1; $Y_1, \ldots, Y_n$ zijn n onafhankelijke observaties van het tweede proces.

   (a) Toon aan dat voor elke waarde $a \in [0, 1]$, $\hat{\mu} = a\bar{X}_m + (1 - a)\bar{Y}_n$ een zuivere schatter voor μ is.

   (b) Bij gegeven m en n, zoek die waarde van a die de variantie van $\hat{\mu}$ het kleinst mogelijk maakt.

5. Beschouw een stochastische variabele $X \sim B(n, p)$.

   (a) Is $X - \frac{X^2}{n}$ een zuivere schatter voor de variantie van X? Werk uit.

   (b) Construeer uit het voorgaande een schatter die wel zuiver is voor $Var(X)$.

6. Beschouw een steekproef $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ met $n \geq 2$. Definieer $T = c\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$. Bereken $E(T)$ en $Var(T)$. Zoek c zodat T als schatter van σ^2 minimale MSE heeft.