Calcolo Numerico - Domande

Laurea Triennale in Informatica a.a. 2023-2024

Domanda 1. Dato un problema test di dimensioni variabili

$$Ax = b$$

la cui soluzione esatta è il vettore $\bar{x} = (1, \dots, 1)^T$ e b è il termine noto, ottenuto come $A\bar{x}$ calcolare:

- il numero di condizionamento della matrice A
- la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$ mediante la fattorizzazione LU con pivoting.

Considerare come matrice A la matrice quadrata, di numeri casuali generati mediante la funzione `randn` di Numpy, con n variabile tra 10 e 1000.

Domanda 2 (Sistemi lineari)**.** Dato un problema test di dimensioni variabili

$$Ax = b$$

la cui soluzione esatta è il vettore $\bar{x} = (1, \dots, 1)^T$ e b è il termine noto, ottenuto come $A\bar{x}$ calcolare:

- il numero di condizionamento della matrice A
- la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$ mediante la fattorizzazione di Cholesky

Considerare come matrice A la matrice tridiagonale simmetrica definita positiva, avente sulla diagonale principale elementi uguali a 9 ed elementi nella sopra e sottodiagonale uguali a -4, con n variabile.

Domanda 3 (Sistemi lineari)**.** Dato un problema test di dimensioni variabili

$$Ax = b$$

la cui soluzione esatta è il vettore $\bar{x} = (1, \dots, 1)^T$ e b è il termine noto, ottenuto come $A\bar{x}$ calcolare:

- il numero di condizionamento della matrice A
- la soluzione x del sistema lineare $Ax = b$ mediante la fattorizzazione di Cholesky

Considerare come matrice A la matrice di Hilbert di dimensioni n tra 2 e 15.

Domanda 4 (Compressione SVD)**.** Discutere la compressione di un'immagine ottenuta approssimandola con diadi calcolate mediante la decomposizione in valori singolari, visualizzando le immagini ottenute al variare del numero p di diadi. Analizzare inoltre i grafici dell'errore relativo e del fattore di compressione c_p al variare di p.

Domanda 5 (Approssimazione minimimi quadrati)**.** Discutere l'approssimazione a m dati equispaziati ottenuti campionando la funzione $f(x) = \exp(x/2)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ usando polinomi di grado $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
Si risolva il problema dei minimi quadrati sia mediante le equazioni normali che con SVD, calcolando l'errore di approssimazione in norma 2 per entrambi i metodi. Infine graficare le approssimazioni polinomiali ottenute.

Domanda 6 (Approssimazione minimimi quadrati)**.** Discutere l'approssimazione a m dati equispaziati ottenuti campionando la funzione $f(x) = \frac{1}{1+25*x^2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$ usando polinomi di grado $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
Si risolva il problema dei minimi quadrati sia mediante le equazioni normali che con SVD, calcolando l'errore di approssimazione in norma 2 per entrambi i metodi. Infine graficare le approssimazioni polinomiali ottenute.

Domanda 7 (Approssimazione minimimi quadrati). Discutere l'approssimazione a m dati equispaziati ottenuti campionando la funzione $f(x) = sin(x) + cos(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ usando polinomi di grado $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
Si risolva il problema dei minimi quadrati sia mediante le equazioni normali che con SVD, calcolando l'errore di approssimazione in norma 2 per entrambi i metodi. Infine graficare le approssimazioni polinomiali ottenute.

Domanda 8 (Calcolo zero funzione). Discutere i risultati ottenuti per calcolare lo zero della funzione $f(x) = e^x - x^2$ nell'intervallo $[-1, 1]$ utilizzando:

- metodo di Newton
- il metodo delle approssimazioni successive con $g(x) = x - f(x)e^{x/2}$
- il metodo delle approssimazioni successive con $g(x) = x - f(x)e^{-x/2}$

mostrando la distanza tra due iterate consecutive e l' errore commesso al variare delle iterazioni ($x^* \approx -0.703467$).

Domanda 9 (Calcolo zero funzione). Discutere i risultati ottenuti per calcolare lo zero della funzione $f(x) = x^3 + 4xcos(x) - 2$ nell'intervallo $[0, 2]$ utilizzando:

- il metodo delle approssimazioni successive con $g(x) = \frac{2-x^3}{4cos(x)}$
- il metodo di Newton

mostrando l' errore commesso al variare delle iterazioni ($x^* \approx 0.5369$).

Domanda 10 (Calcolo zero funzione). Discutere i risultati ottenuti per calcolare lo zero della funzione $f(x) = x - x^{1/3} - 2$ nell'intervallo $[3, 5]$ utilizzando:

- il metodo delle approssimazioni successive con $g(x) = x^{1/3} + 2$
- il metodo di Newton

mostrando l' errore commesso al variare delle iterazioni ($x^* \approx 3.5213$).

Domanda 11 (Metodo del gradiente). Discutere la minimizzazione della funzione quadratica:

$$f(x, y) = 3(x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

(che ha un minimo globale in $(2, 1)$) utilizzando il metodo del gradiente con passo sia fisso che variabile calcolato con algoritmo di backtracking. Discutere i grafici dell'errore, del valore della funzione e della norma del gradiente al variare delle iterazioni.

Domanda 12 (Metodo del gradiente). Discutere la minimizzazione della funzione di Rosenbrock:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

(che ha un minimo globale in $(1, 1)$) utilizzando il metodo del gradiente con passo sia fisso che variabile calcolato con algoritmo di backtracking. Discutere i grafici dell'errore, del valore della funzione e della norma del gradiente al variare delle iterazioni.

Domanda 13 (Deblur). Discutere la ricostruzione di un'immagine corrotta da blur e rumore, mostrando la soluzione naive, ottenuta risolvendo il problema dei minimi quadrati e la soluzione ottenuta con il metodo di regolarizzazione di Tikhonov. Mostrare inoltre le immagini ricostruite e i grafici dei parametri PSNR e MSE al variare del numero di iterazioni. Infine discutere i risultati al variare del parametro di regolarizzazione λ.

Domanda 14 (Super Resolution). Discutere la ricostruzione di un'immagine corrotta da blur, downsampling e rumore, mostrando la soluzione naive, ottenuta risolvendo il problema dei minimi quadrati e la soluzione ottenuta con il metodo di regolarizzazione di Tikhonov. Mostrare inoltre le immagini ricostruite e i grafici dei parametri PSNR e MSE al variare del numero di iterazioni. Infine discutere i risultati al variare del parametro di regolarizzazione λ.