Calcolo Numerico - Esercitazione 2

Laurea Triennale in Informatica a.a. 2023-2024

1 Matrici e norme

Exercise 1.1. Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.499 & 1.001 \end{pmatrix}$$

- Calcolare la norma 1, la norma 2, la norma Frobenius e la norma infinito di A con `numpy.linalg.norm()` (guardare l'help della funzione).
- Calcolare il numero di condizionamento di A con `numpy.linalg.cond()` (guardare l'help della funzione).
- Considerare il vettore colonna $x = (1, 1)^T$ e calcolare il corrispondente termine noto b per il sistema lineare $Ax = b$.
- Considerare ora il vettore $\tilde{b} = (3, 1.4985)^T$ e verifica che $\tilde{x} = (2, 0.5)^T$ è soluzione del sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$
- Calcolare la norma 2 della perturbazione sui termini noti $\Delta_b = \|b - \tilde{b}\|_2$ e la norma 2 della perturbazione sulle soluzioni $\Delta_x = \|x - \tilde{x}\|_2$. Confrontare Δ_b con Δ_x.

2 Metodi diretti

Exercise 2.1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Creare il problema test in cui il vettore della soluzione esatta è $x = (1, 1, 1, 1)^T$ e il vettore termine noto è $b = Ax$.
- Guardare l'help del modulo `scipy.linalg.decomp_lu` e usare una delle sue funzioni per calcolare la fattorizzazione LU di A con pivoting. Verificare la correttezza dell'output.
- Risolvere il sistema lineare con la funzione `lu_solve` del modulo decomp_lu oppure con la funzione `scipy.linalg.solve_triangular`.
- Stampare la soluzione calcolata e valutarne la correttezza.

NB L'inversa di una matrice viene calcolata con la funzione `np.linalg.inv`

Exercise 2.2. Si ripeta l'esercizio precedente sulla matrice di Hilbert, che si può generare con la funzione `A = scipy.linalg.hilbert(n)` per $n = 5, \dots, 10$. In particolare:

- Calcolare il numero di condizionamento di A e rappresentarlo in un grafico al variare di n.
- Considerare il vettore colonna $x = (1, \dots, 1)^T$, calcola il corrispondente termine noto b per il sistema lineare $Ax = b$ e la relativa soluzione $\tilde{x}$ usando la fattorizzazione di Cholesky come nel caso precedente.
- Si rappresenti l'errore relativo al variare delle dimensioni della matrice.

NB La decomposizione di Cholesky viene calcolata con la funzione `np.linalg.cholesky`.