# Ισοστάθμιση Ιστογράμματος

# (histogram equalization)

# Ιστόγραμμα Εικόνας

Το ιστόγραμμα μιας ψηφιακής εικόνας με επίπεδα γκρίζου στο διάστημα [0, 255] είναι μια διακριτή συνάρτηση

$$h(r_k) = n_k$$

όπου:

- $r_k$ είναι το k-στο επίπεδο γκρίζου
- $n_k$ είναι το πλήθος των pixels που έχουν επίπεδο γκρίζου ίσο με $r_k$
- $h(r_k)$ είναι το ιστόγραμμα της εικόνας με επίπεδα γκρίζου $r_k$

# Το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα

προκύπτει με διαίρεση των τιμών $h(r_k)$ του ιστογράμματος με το συνολικό πλήθος n των pixels της εικόνας

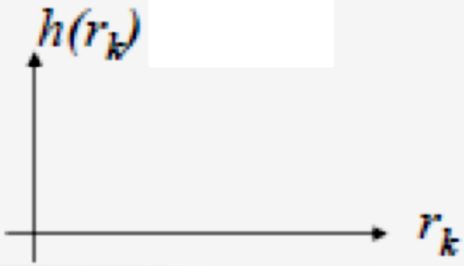
$$p(r_k) = n_k/n \qquad \text{για } k = 0, \ldots, 255$$

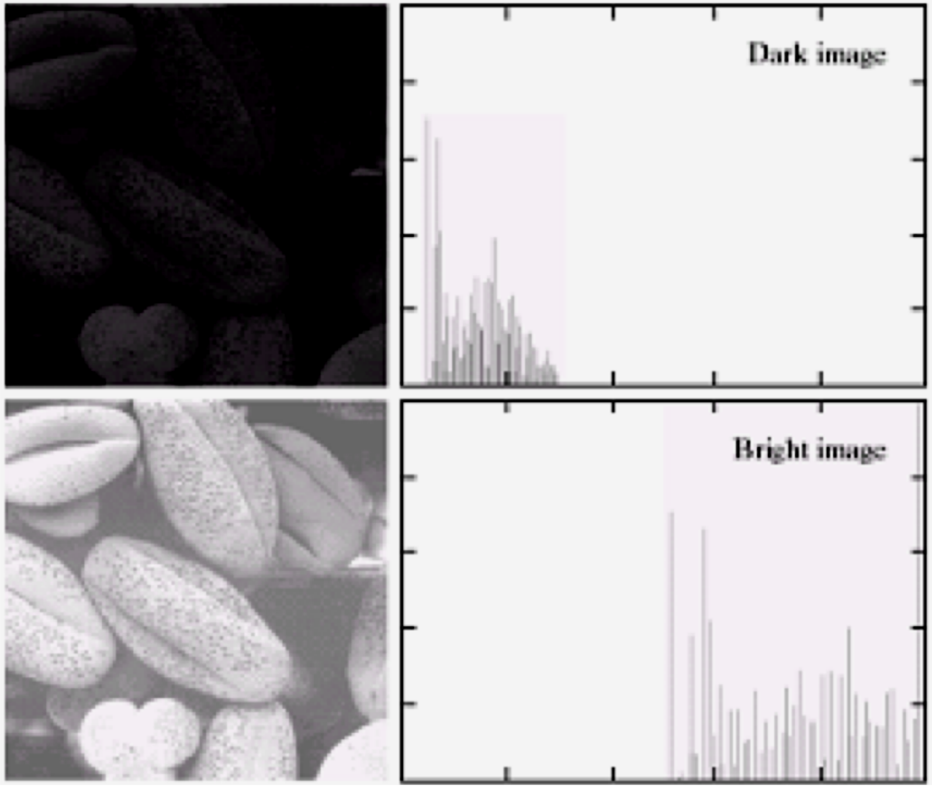
- το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα $p(r_k)$ παρέχει μια εκτίμηση της πιθανότητας το επίπεδο γκρίζου κάποιου pixel να είναι $r_k$
- το άθροισμα όλων των τιμών ενός κανονικοποιημένου ιστογράμματος είναι ίσο με 1

# Επεξεργασία ιστογράμματος

- βασική σε πλήθος τεχνικών επεξεργασίας στο χωρικό πεδίο
- χρησιμοποιείται αποτελεσματικά για τονισμό της εικόνας
- η πληροφορία που εμπεριέχεται σε ένα ιστόγραμμα είναι επίσης χρήσιμη στη συμπίεση εικόνας και στην κατάτμηση εικόνας

# Παράδειγμα

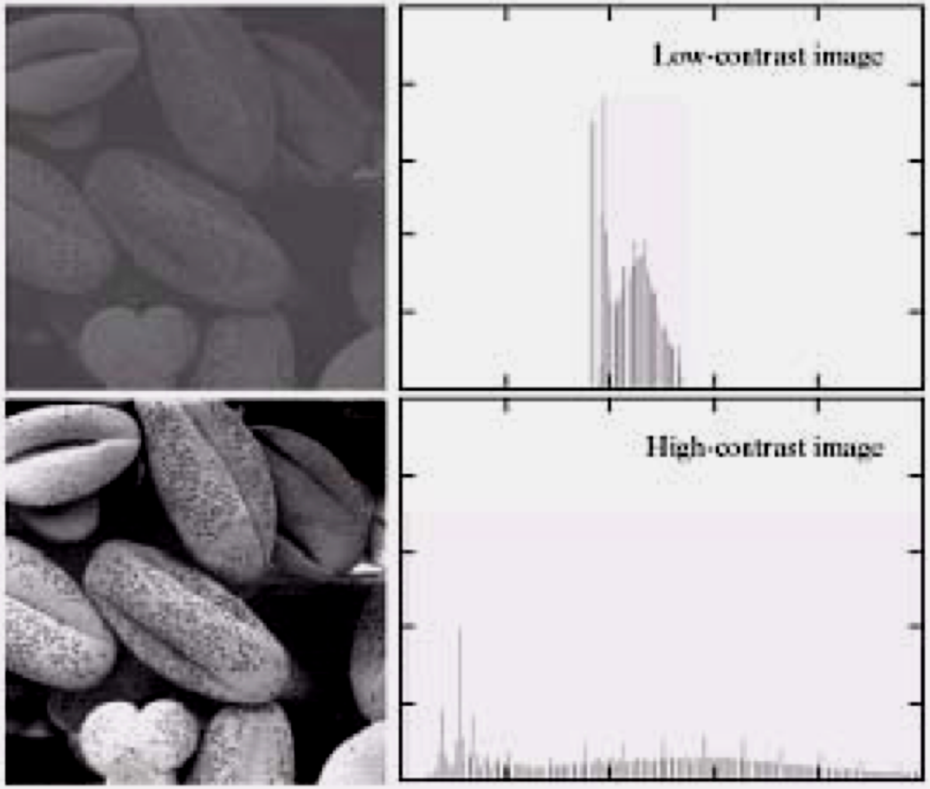



*Σκοτεινή εικόνα*

*Φωτεινή εικόνα*

# Παράδειγμα




*Εικόνα χαμηλής αντίθεσης*

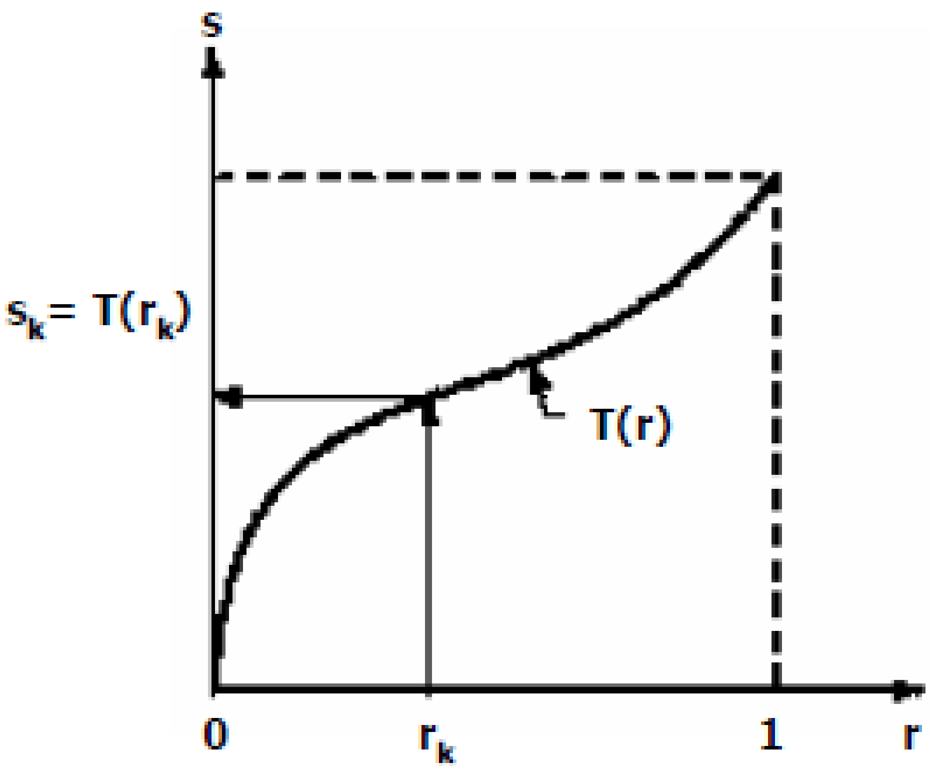
*Εικόνα υψηλής αντίθεσης*

# Ισοστάθμιση ιστογράμματος

- Η ποιότητα μιας εικόνας χαμηλής χρωματικής αντίθεσης (π.χ. με ιστόγραμμα συγκεντρωμένο κοντά στο κέντρο της κλίμακας του γκρίζου) μπορεί να βελτιωθεί με ανακατανομή του ιστογράμματος σε μια ευρύτερη περιοχή αποχρώσεων γκρίζου.

- Αυτό επιτυγχάνεται με ρύθμιση του αρχικού ιστογράμματος ώστε η πιθανότητα να κατενέμεται όσο γίνεται πιο ομοιόμορφα στην κλίμακα του γκρίζου.

# Μετασχηματισμός ιστογράμματος




Κριτήρια που πρέπει να ικανοποιούνται από τον T(r):

1. T(r) είναι μονοσήμαντη και μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση στο $0 \le r \le 1$
2. $0 \le T(r) \le 1$ για $0 \le r \le 1$

**υπάρχει αντίστροφος Μ/Τ: $r = T^{-1}(s)$ για $0 \le s \le 1$**

# Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF)

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τις τιμές γκρίζου σε μια εικόνα ως τυχαία μεταβλητή στο διάστημα [0, 1]
- Βασικός περιγραφέας μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function ή pdf)
- Μια τυχαία μεταβλητή x είναι μια συνάρτηση στο $\Re$ ορισμένη στα γεγονότα του δειγματικού χώρου S, δηλαδή: $\forall \mathbf{s} \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{x(s)} \in \Re$
- Με άλλα λόγια, **μια τυχαία μεταβλητή απεικονίζει κάθε γεγονός του S στην πραγματική ευθεία**.

# Τυχαίες Μεταβλητές

- Αν η x είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή πιθανότητας πάνω στις διακριτές τιμές της x (π.χ. στο πείραμα ρίψης ενός τίμιου νομίσματος, αν ορίσουμε την x ως x(“κεφάλι”) = 0, x(“γράμματα”) = 1, θα έχουμε $P(x=0) = P(x=1) = ½$)
- Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (π.χ. στο πείραμα μέτρησης της διάρκειας ζωής t ενός λαμπτήρα με $x(t) = t$) δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(x = t_0)$ καθώς αυτές θα είναι μηδέν. Αντ’ αυτών, υπολογίζουμε πιθανότητες σε διαστήματα: $P(t_0 \le x \le t_1)$

# Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

- Συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα η x να είναι μικρότερη ή ίση από μια καθορισμένη σταθερά α
- Αυτό το γράφουμε ως $F(\alpha) = P(x \le \alpha)$
- Αν υπολογίσουμε την F(α) για κάθε α στο $(-\infty, +\infty)$ τότε η F( ) θα ονομάζεται συνάρτηση σωρευτικής κατανομής πιθανότητας (Cumulative Distribution Function ή CDF)
- Μερικές φορές, στην περίπτωση πολλών τυχαίων μεταβλητών, προς αποφυγή σύγχυσης, βάζουμε και έναν δείκτη στη CDF με το όνομα της τυχαίας μεταβλητής: $F_x(\alpha) = P(x \le \alpha)$

## Ιδιότητες της CDF

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(x_1) \leq F(x_2)$ αν $x_1 \leq x_2$
- $P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) – F(x_1)$
- $F(x + \varepsilon) = F(x)$ για $\varepsilon \to 0$

## Ορισμός της PDF

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) της τυχαίας μεταβλητής x ορίζεται ως η παράγωγος της CDF:

$$\boxed{p(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

# Ιδιότητες της PDF

- $p(x) \geq 0$ για κάθε $x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\alpha)\, d\alpha$
- $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(\alpha)\, d\alpha$

# Τυχαίες Μεταβλητές

Αν μια τυχαία μεταβλητή x μετατραπεί μέσω ενός μονοτονικού μετασχηματισμού T(x) σε μια νέα τυχαία μεταβλητή y = T(x),

τότε η PDF της y μπορεί να υπολογισθεί μέσω της PDF της x και του T(x) ως εξής:

$$p_y(y) = p_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

όπου οι κατακόρυφες γραμμές σημαίνουν απόλυτη τιμή.

# Εφαρμογή σε εικόνες

Έστω $p_r(r)$ η PDF της τυχαίας μεταβλητής r της αρχικής εικόνας και $p_s(s)$ η PDF της τυχαίας μεταβλητής s της τελικής εικόνας.

Αν οι $p_r(r)$ και $T(r)$ είναι γνωστά και υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός $T^{-1}(s)$, τότε η $p_s(s)$ μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\boxed{p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|}$$

# Επιλογή T(r)

Ένας μετασχηματισμός T(r) που ικανοποιεί τις συνθήκες της μονοσήμαντης μονοτονικά αύξουσας συνάρτησης είναι η CDF της τυχαίας μεταβλητής r:

$$\boxed{s = T(r) = \int_0^r p_r(w)\, dw}$$

*Σημείωση*: ο T(r) εξαρτάται από την $p_r(r)$.

# Υπολογισμός της $p_s(s)$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr}$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)dw\right]$$

$$= p_r(r)$$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right|$$

$$= p_r(r)\left|\frac{1}{p_r(r)}\right|$$

$$= 1 \quad \text{όπου} \quad 0 \le s \le 1$$

με αντικατάσταση

*η $p_s(s)$ είναι η ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας ανεξαρτήτως της μορφής της $p_r(r)$*

# Η διακριτή περίπτωση

Οι προηγούμενες έννοιες εφαρμόζονται και σε διακριτές τυχαίες μεταβλητές (π.χ. στο κανονικοποιημένο ιστόγραμμα ψηφιακής εικόνας).

Στην περίπτωση αυτή το πλήθος των γεγονότων είναι πεπερασμένο και συνεπώς μιλάμε για πιθανότητες αντί για πυκνότητες πιθανότητας.

Τα ολοκληρώματα τώρα αντικαθίστανται από αθροίσματα.

Παράδειγμα

Έστω ότι η **x** παίρνει τιμές από το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Οι πιθα-νότητες των γεγονότων θα συμβολίζονται με $P(x_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, N$ και η CDF θα δίνεται από την $F_x(x) = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$

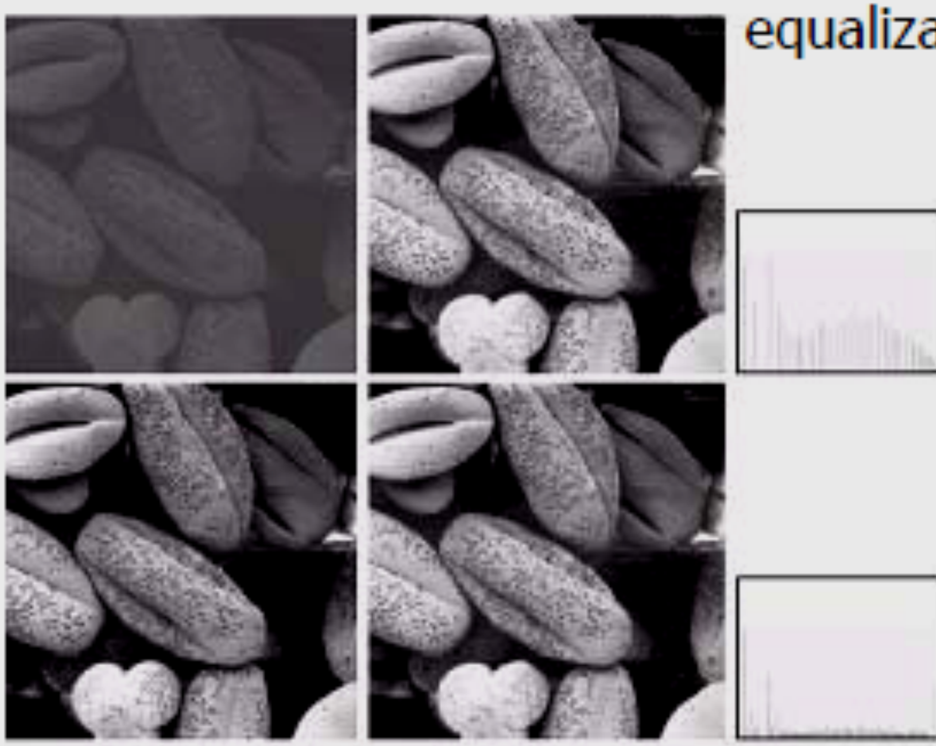
# Ισοστάθμιση ιστογράμματος

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η τελική εικόνα λαμβάνεται μέσω απεικόνισης του κάθε pixel της αρχικής εικόνας με τιμή γκρίζου $r_k$ στο αντίστοιχο pixel της τελικής εικόνας με τιμή γκρίζου $s_k = T(r_k)$.

Όμως, στη γενική περίπτωση, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε ότι το μετασχηματισμένο διακριτό ιστόγραμμα θα παρουσιάζει ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας.

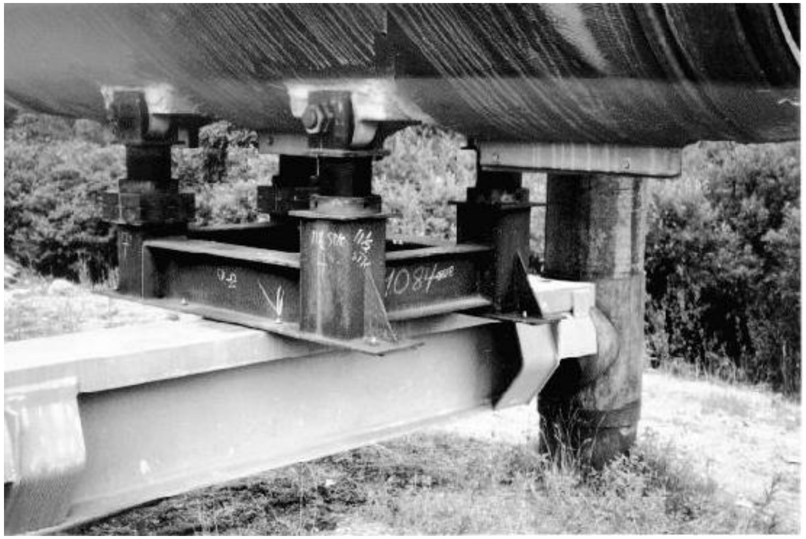
# Example

before after Histogram equalization



The quality is not improved much because the original image already has a broaden gray-level scale

# Ισοστάθμιση ιστογράμματος



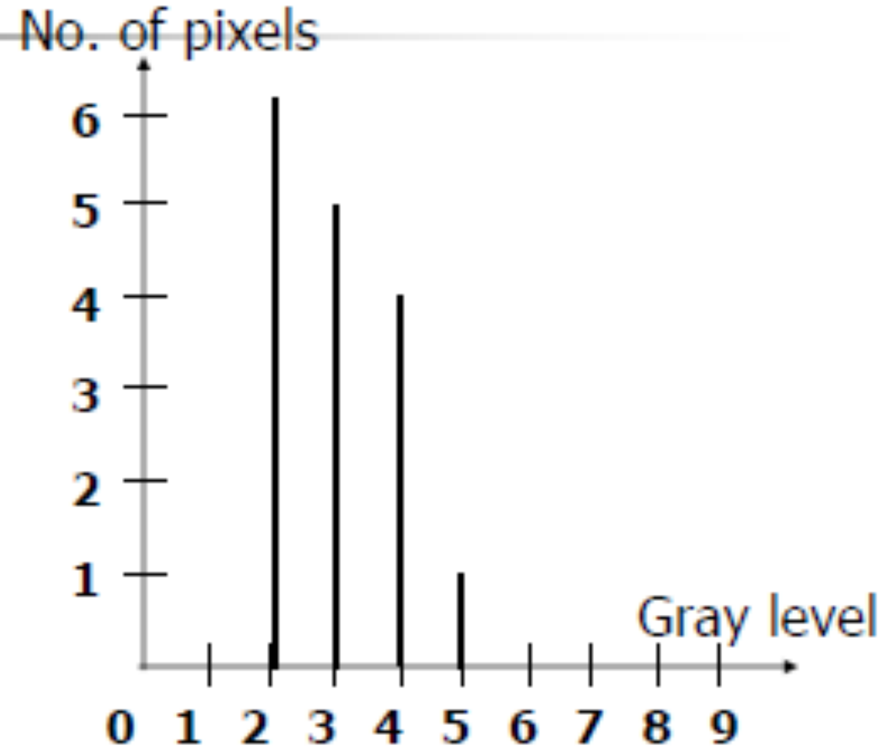
Η αριστερή εικόνα δεν χρησιμοποιεί όλες τις διαθέσιμες τιμές γκρίζου. Με την ισοστάθμιση ιστογράμματος τροποποιούνται οι τιμές γκρίζου έτσι ώστε να αξιοποιείται όλη η διαθέσιμη δυναμική περιοχή προσεγγίζοντας όσο είναι δυνατόν την ομοιόμορφη κατανομή.

# Παράδειγμα

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 2 | 4 |

4x4 image

Gray scale = [0,9]




histogram

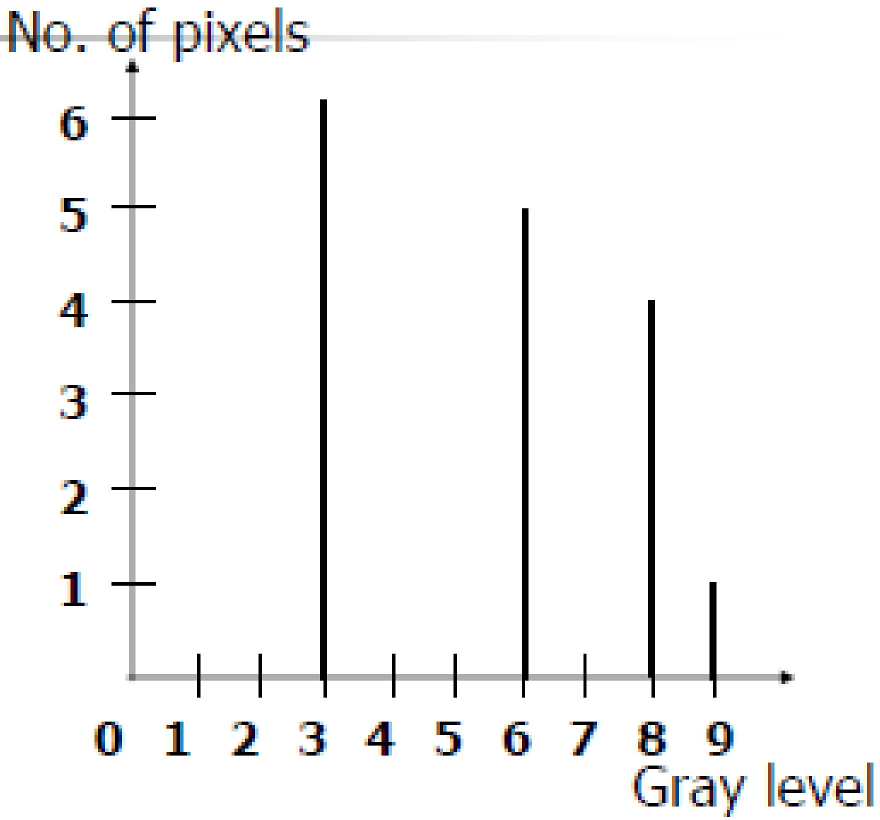
| Gray Level(j) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| No. of pixels | 0 | 0 | 6 | 5 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\sum_{j=0}^{k} n_j$ | 0 | 0 | 6 | 11 | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| $s = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n}$ | 0 | 0 | 6 / 16 | 11 / 16 | 15 / 16 | 16 / 16 | 16 / 16 | 16 / 16 | 16 / 16 | 16 / 16 |
| $s$ x $9$ | 0 | 0 | 3.3 ≈3 | 6.1 ≈6 | 8.4 ≈8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |

# Παράδειγμα

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 6 | 3 |
| 8 | 3 | 8 | 6 |
| 6 | 3 | 6 | 9 |
| 3 | 8 | 3 | 8 |

Output image

Gray scale = [0,9]




Histogram equalization

# Βιβλιογραφία

Οι παρούσες διαφάνειες έχουν δημιουργηθεί από τον Καθηγητή κ. Ν. Βασιλά για το μάθημα «Επεξεργασία Εικόνας», ακαδημαϊκό έτος 2017-2018.