顶 级 牛 马 大 学

研究生课程报告封面

课 程 名 称 机器人系统设计与应用

教 师 姓 名 田所浩二 松本一香

研究生姓名 桥本有菜

研究生学号 1145141919810

研究生专业 母猪的产后护理

所 在 院 系 STAR

类别: 学术型硕士

日期: 2114 年 5 月 14 日

评　语

对课程论文的评语: 你是一个一个一个一个硕士啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊啊 一眼顶针，鉴定为喝了昏睡红茶

平时成绩：114	课程论文成绩：114
总 成 绩：514	评阅人签名：田所浩二

注：1、无评阅人签名成绩无效；
2、必须用钢笔或圆珠笔批阅，用铅笔阅卷无效；
3、如有平时成绩，必须在上面评分表中标出，并计算入总成绩。

机器人系统设计与应用 大作业

1 实验系统概述

本系统为一个倒立摆系统，系统的简化图如图 1 所示，其中包含：质量为 M 的小车；小车上接有一质量 m 、长度 $2l$ 、近似均匀的细杆，可绕小车自由转动，连杆与竖直方向的夹角 θ 可由编码器读出。

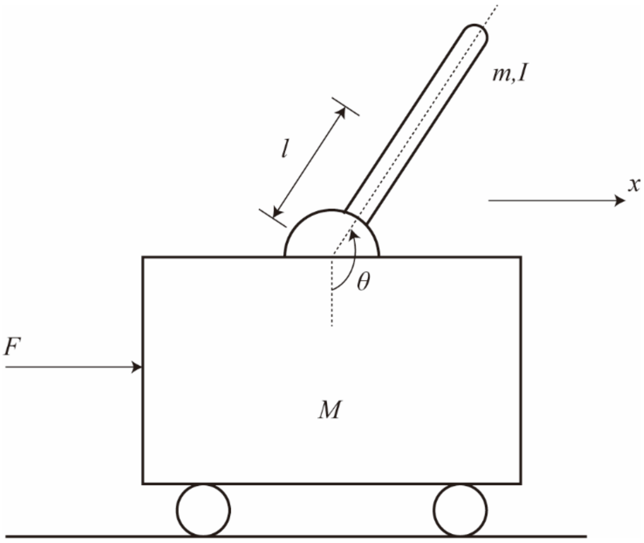

图 1 小车倒立摆系统示意图

实验中，小车被置于一组水平导轨上，与电机相连，其水平位置 x 可由导轨上的编码器读出。电机通过 Q4 DAQ I/O 模块与电脑连接。在实验过程中，可以控制电脑发出的电信号 V ，给与小车一个大小为 F 的推进力。推进力 F 的大小可表示为：

$$F = \frac{\eta_g K_g K_t}{R_m r_{mp}} \left(-\frac{K_g K_m \dot{x}}{r_{mp}} + \eta_m V \right) \tag{1}$$

其中物理量的参数大小由下表给出：

表 1 倒立摆实验系统参数表

物理量	名称	数值	单位
η_g	Planetary Gearbox Efficiency	100	%
η_m	Motor Efficiency	100	%
K_g	Planetary Gearbox Gear Ratio	3.71	
K_t	Motor Torque Constant	0.00767	$\mathrm{N \cdot m/A}$
K_m	Back-ElectroMotive-Force Constant	0.00767	$\mathrm{V \cdot s/rad}$
R_m	Motor Armature Reistance	2.6	Ω
r_{mp}	Motor Pinion Radius	6.35×10^{-3}	m
M	Cart Mass	0.57	Kg

小车受力运动，同时细杆受迫摆动。

为了获得系统的参数，设计了两个实验。

实验一：为了获得倒立摆的具体参数，将小车固定，让摆做从某一初始角度 $\theta = q_0$ 开始的自由摆动，并记录了摆角 θ 随时间 t 的变化关系；
实验二：为了获得小车的相关参数，让小车运动：让系统输出如下电压信号：

$$V = 4.0\sin 4.2t\mathrm{V} \tag{2}$$

则倒立摆系统会在上述输入下产生受迫摆动，记录对应的 x 与 θ 随时间变化的数据。

控制目标为设计输入电压，实现倒立摆系统的摇起控制。

2 系统动力学方程

规定小车向右为正方向，刚体逆时针旋转为正方向，摩擦均考虑为粘性摩擦。对小车进行受力分析

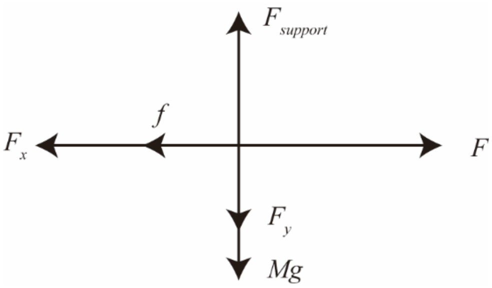

图 2 对小车受力分析图

由受力分析可知小车水平受力方程为

$$M\ddot{x} + F_x + k_1\dot{x} = F \tag{3}$$

其中，F_x 为杆对小车的作用力，k_1 为小车与地面的摩擦系数。
对杆进行受力分析

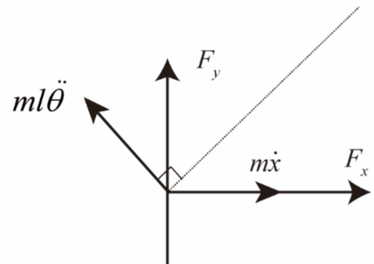

图 3 对杆受力分析图

由受力分析可知，沿杆垂直方向受力方程为

$$F_y\sin\theta + F_x\cos\theta - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \tag{4}$$

其中，$ml\ddot{\theta}$ 为杆转动的切向力，$m\ddot{x}\cos\theta$ 为杆相对于地面水平的加速度在干垂直方向的分量。
杆水平方向受力方程为

$$F_x = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - m\dot{\theta}^2 l\sin\theta \tag{5}$$

其中，$ml\ddot{\theta}\cos\theta$为杆转动的切向力在水平方向的分量，$m\dot{\theta}^2 l\sin\theta$为杆转动的向心力在水平方向的分量。

由杆绕定轴转动的动力学公式可知

$$-F_y l\sin\theta - F_x l\cos\theta - k_2\dot{\theta} = I\ddot{\theta} \tag{6}$$

其中，$k_2\dot{\theta}$为杆与转轴之间的粘性摩擦，k_2为摩擦系数。
由(3)(5)得

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta + k_1\dot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \tag{7}$$

由(4)(6)得

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + ml\ddot{x}\cos\theta + k_2\dot{\theta} = 0 \tag{8}$$

整理成为矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & I+ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

由于细杆为均匀杆，因此转动惯量为

$$I = \frac{4}{3}ml^2 \tag{10}$$

因此矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & \frac{7}{3}ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

由于本系统并不是理想的系统，小车运动的平台并不水平，因此模型可能出现误差，此处考虑对速度和重力相进行补偿，实际系统的矩阵可以化归为

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & \frac{7}{3}ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -ml\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mgl\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(F+b) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中，k,b为补偿项，可以视为对输入力F进行线性变换。

3 模型参数辨识

3.1 实验模型分析

3.1.1 实验一

实验中固定小车，摆杆在初始角度静止释放，记录了实验时间与摆杆的角度，因此可以得出$\ddot{x}=0, \dot{x}=0$，根据式(8)(10)可以得到方程

$$\frac{7}{3}ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + k_2\dot{\theta} = 0 \tag{13}$$

选择对应的状态变量$[x_1, x_2] = [\theta, \dot{\theta}]$，建立微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\dfrac{3}{7}\dfrac{mgl\sin\theta + k_2\dot{\theta}}{ml^2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

自此实验一系统模型建立完毕。

3.1.2 实验二

实验中解除小车固定，摆杆垂直向下，给定输入电压，驱动小车运动，同时带动车上的倒立摆向上摆动，记录小车的位移与摆杆的角度。根据式(12)选择对应的状态变量$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]$，建立系统的微分方程。式(12)可简化为

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & c_{12} \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中，

$$\begin{aligned} & M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} k_1 & c_{12} \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} F_o \\ 0 \end{bmatrix} \\ & m_{11} = M + m; m_{12} = m_{21} = ml\cos\theta; m_{22} = \frac{7}{3}ml^2; \\ & c_{12} = -ml\dot{\theta}\sin\theta; g_{21} = mgl\sin\theta; \\ & F_o = k(F + b); \end{aligned} \tag{16}$$

易知惯性矩阵为正定矩阵，因此可以对矩阵求逆，则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = M^{-1}\left(U - G - C(\theta, \dot{\theta})\right) \tag{17}$$

根据选择的状态变量，系统微分方程可以表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{m_{22}}{|M|}(u - c_{12}\dot{\theta} - k_1\dot{x}) + \dfrac{m_{12}}{|M|}(g_{21} + k_2\dot{\theta}) \\ x_4 \\ -\dfrac{m_{21}}{|M|}(u - c_{12}\dot{\theta} - k_1\dot{x}) - \dfrac{m_{11}}{|M|}(g_{21} + k_2\dot{\theta}) \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中，$|M| = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$，自此实验二系统模型建立完毕。

3.2 辨识思路

由于倒立摆系统为欠驱动系统，是一个非线性系统。对于非线性系统的参数辨识有很多种方法，这里使用最为简单有效的非线性最小二乘辨识法。参数辨识的流程如图 4 所示，其中在适应度函数计算中包含了最小二乘辨识法。使模型函数对于所有的观测数据来说，其预测值和实际观测值之间的差异最小化。非线性最小二乘法有两种迭代方法，第一种是 Gauss-Newton 方法，适用于近似

线性的问题，第二种是 Levenberg-Marquardt 方法，结合了 Gauss-Newton 方法和梯度下降法的一种方法，能够处理更多的非线性问题。由于系统在起摇阶段不能严密反馈线性化，只有在系统进入摇起平衡状态才能近似线性化。因此本实验采用 Levenberg-Marquardt 方法进行迭代。

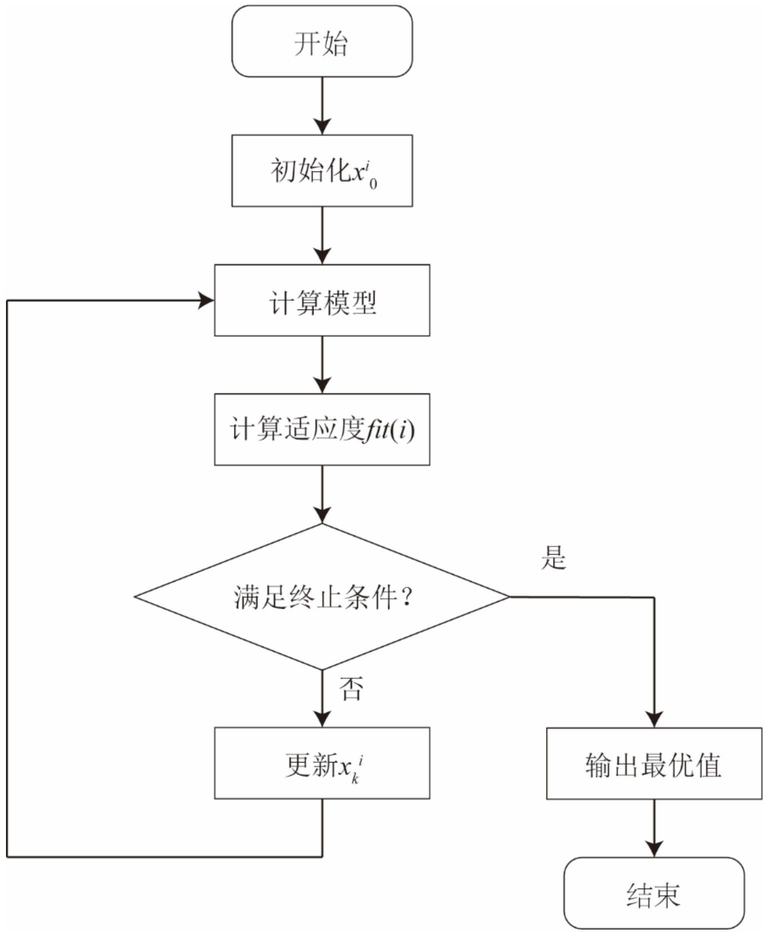

图 4 辨识流程图

4 控制

4.1 控制策略分析

由于倒立摆是一个非线性系统，在摇起过程中不能被严密反馈线性化。因此，很难设计一个控制器来实现倒立摆摇起并稳定在垂直向上位置。在这里介绍一种分区切换策略，即先为倒立摆系统的两个子区间设计控制器，然后通过控制器的切换来实现整体的稳定控制目标。分区切换控制的策略首先需要对倒立摆系统的运动空间进行划分，不妨记 Σ 为倒立摆的整个运动空间，将 Σ 划分为摇起区 Σ_1 和吸引区 Σ_2 。如图 8 所示，吸引区 Σ_2 为垂直向上位置周围的一个小邻域，而摇起区 Σ_1 为除了这一部分外其他运动领域。当倒立摆从摇起区到吸引区时需要速度变化量小，这样才能做到平滑切换控制。

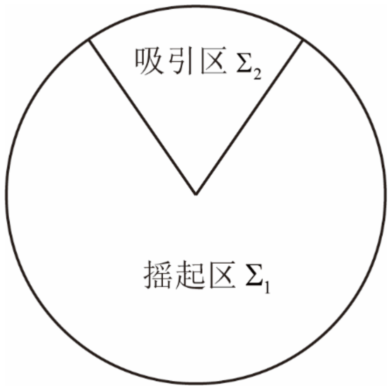

图 8 分区控制图

4.2 控制器设计

4.2.1 摇起控制器设计

吸引区 Σ_2 是一个非常小的区域，在摇起区 Σ_1 线性近似模型失效。因此如何在摇起区设计控制器使倒立摆能快速进入到吸引区 Σ_2，是能否快速实现倒立摆稳定控制目标的关键。这里选择 PID 控制器来对角度进行控制，让倒立摆能快速进入吸引区，控制框图如图 9 所示。

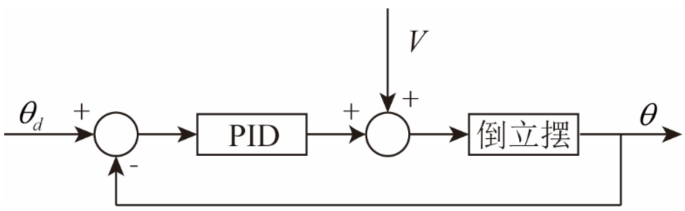

图 9 摇起控制器控制框图

4.2.2 平衡控制器

由于吸引区 Σ_2 为垂直向上位置周围的一个小邻域，在此区域内小车位移的大小与速度，摆杆的角度和角速度都很接近零，因此在 Σ_2 内可做如下近似化处理。非线性倒立摆系统在 Σ_2 区域内可近似为能控的线性模型，因此，只要倒立摆进入到 Σ_2 中，那么便可以通过线性系统理论设计一个平衡控制器以实现他在平衡点处的渐近稳定。本节介绍一种 LQR 优化设计方法。

对动力学方程的角度进行重新换算，令 $\theta = \alpha + \pi$，且对方程进行如下近似线性化

$$\cos\alpha = -1; \sin\alpha = \alpha; \dot{\alpha}^2 = 0 \tag{19}$$

由(16)(18)(19)可得近似线性化后的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \\ 0 \\ B_{41} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{20}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&a_1=-\frac{K_g{}^2K_tK_m\eta_g}{R_m r_{mp}{}^2};a_2=\frac{K_gK_t\eta_m\eta_g}{R_m r_{mp}};\\
&p=ka_1;q=ka_2;r=-kb;\\
&M_{11}=M+m;M_{12}=M_{21}=-ml;M_{22}=\frac{7}{3}ml^2;\\
&C_{11}=\frac{k_1-p}{q};C_{22}=\frac{k_2}{q};G_{11}=r;G_{21}=-\frac{mgl}{q};\\
&S=\det M=M_{11}M_{22}-M_{12}M_{21};\\
&A_{22}=-\frac{M_{22}C_{11}}{S};A_{23}=\frac{M_{12}G_{21}}{S};A_{24}=\frac{M_{12}C_{22}}{S};\\
&A_{42}=\frac{M_{21}C_{11}}{S};A_{43}=-\frac{M_{11}G_{21}}{S};A_{44}=-\frac{M_{11}C_{22}}{S};\\
&B_{21}=\frac{M_{22}}{S};B_{41}=-\frac{M_{12}}{S}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

接下来设计 LQR 控制器，选择 Q,R

$$
Q=\begin{bmatrix}10&&&\\&5&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix};R=0.01;
$$

得到的反馈矩阵 K 为

$$
K=\begin{bmatrix}-31.6228 & -50.9468 & 167.9691 & 36.3179\end{bmatrix}
$$

初始状态为平衡区内的仿真结果如图 10 所示，由图可知设计的控制器能快速在平衡区内稳定。

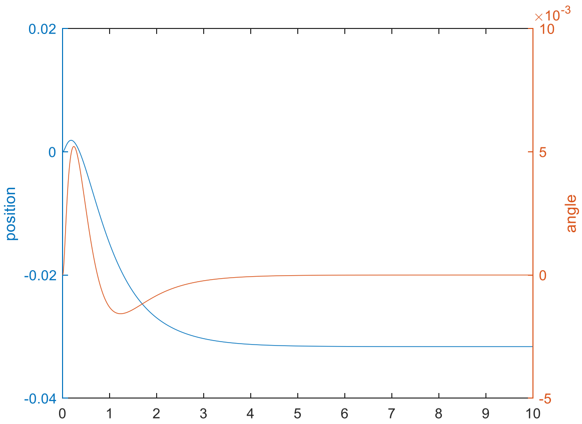

图 10 平衡区仿真结果