

# Homework 1.

$n$  - die  $y$  - weather

$$p(n=1) = 0,5$$

$$p(n=2) = 0,5$$

$$p(y=\text{rainy}) = 0,2$$

$$p(y=\text{sunny}) = 0,8$$

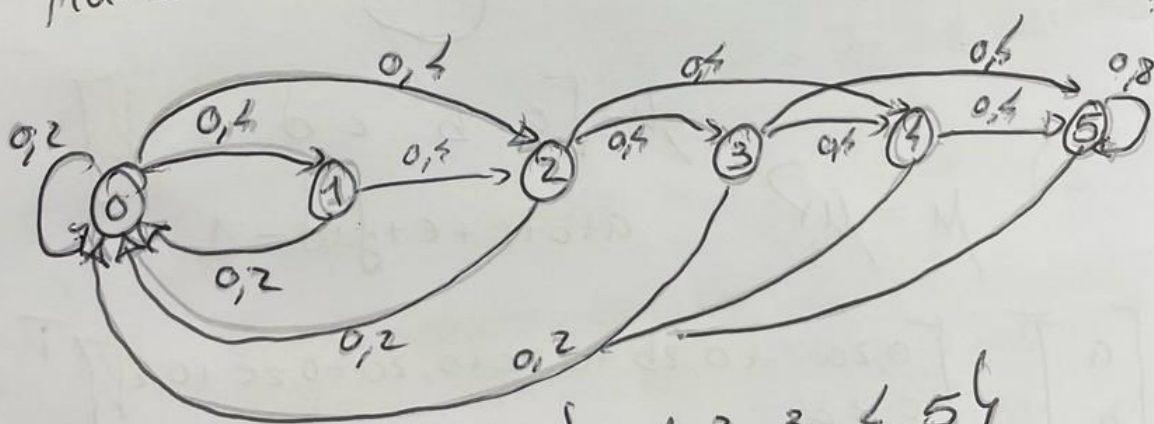
$$P(\text{"voltar ao 0"}) = p(y=r|n=1)p(n=1) + p(y=r|n=2)p(n=2)$$

$$= 0,2$$

$$p(\text{"avançar 2"}) = p(y=s|n=2)p(y=s) = 0,4$$

$$p(\text{"avançar 1"}) = p(y=s|n=1)p(y=s) = 0,4$$

a) Markov chain!



$$H = (X, P) \quad X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$n_0 = 0$$

b)  $\xrightarrow{3 \text{ steps}}$   
 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

$$\mu^{(3)} = \mu_0 P^{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}^3$$

probability of this  
happening is 12,8%

$$= [0,2; 0,08; 0,112; \textcircled{0,128}; 0,224; 0,256]$$

$$\mu = [a \ b \ c \ d \ e \ f]$$

c)  $\mu^* = \mu P$

$$a+b+c+d+e+f=1$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0,2a + 0,2b + 0,2c + 0,2d + 0,2e + 0,2f \\ 0,4a \\ 0,4a + 0,4b \\ 0,4b + 0,4c \\ 0,4c + 0,4d \\ 0,4d + 0,8e + 0,8f \end{bmatrix}^T$$



$$a = 0,2 \quad \rightarrow \text{da } 1^{\text{a}} \text{ coluna}$$

$$b = 0,08$$

$$c = 0,112$$

$$d = 0,4 \times 0,08 + 0,4 \times 0,112 = 0,0768$$

$$e = 0,07552 = 0,4 \times 0,112 + 0,4 \times d$$

$$f = 0,45568 = \frac{0,4 \times 0,0768 + 0,8 \times 0,07552}{0,2}$$

$$P(\text{level } 0) = 0,2$$

$$P(\text{level } 5) = 0,45568$$

• Positive recurrence

0. Time-homogeneous Markov chain

d)

1. Every state can be reached by any state. Irreducibility ✓

2. Aperiodic. There are no cycles ✓

3.  $\mu = \mu P$  has a unique solution ✓

→ This Markov chain is ergodic!