AMALIY KO‘NIKMA

# 14-MAVZU TAQSIMOT NOMA’LUM PARAMETRLARINING STATISTIK BAHOLARI.

## Statistik baho.

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi noma’lum parametr $\theta$ ga bog‘liq bo‘lgan t.m. $X$ berilgan bo‘lsin. Boshqacha qilib aytganda, kuzatilayotgan t.m. $X$ ning taqsimot funksiyasi $f(x,\theta)$ bitta parametrli parametrik taqsimot funksiyalar oilasiga tegishli bo‘lsin. Endi tajriba natijasida olingan ma’lumotlar yordamida noma’lum parametr $\theta$ ni “tiklash”, ya’ni ma’lum ma’noda unga yaqin bo‘lgan va tajribalar asosida to‘liq tiklanadigan biron-bir miqdorni tuzish masalasini ko‘raylik. $\Theta$ orqali $\theta$ ning qiymatlari to‘plamini belgilaymiz.

Faraz qilaylik, $(X_1,\cdots,X_n)$ $X$ t.m.ning xajmi n ga teng bo‘lgan tanlanmasi bo‘lsin.

**1-ta’rif.** $X_1,\cdots,X_n$ kuzatilmalarning ixtiyoriy $T_n=T(X_1,\cdots,X_n)$ funksiyasi ***statistik baho*** yoki ***statistika*** deyiladi.

- Agarda statistik bahoning matematik kutilmasi noma’lum parametrga teng, ya’ni

$$MT_n=MT(X_1,\cdots,X_n)=\theta$$

bo‘lsa, statistik baho *siljimagan baho* deyiladi.

- Faraz qilaylik, $T_1(X_1,\cdots,X_n)$ va $T_2(X_1,\cdots,X_n)$ lar noma’lum $\theta$ parametr uchun siljimagan baholar bo‘lsin, $T_1(X_1,\cdots,X_n)\in U$ va $T_2(X_1,\cdots,X_n)\in U$. Agarda shu statistikalar uchun

$$D\,T_1(X_1,\cdots,X_n)<D\,T_2(X_1,\cdots,X_n)$$

munosabat bajarilsa, $T_1(X_1,\cdots,X_n)$ baho $T_2(X_1,\cdots,X_n)$ bahoga nisbatan ***effektiv baho*** deyiladi.

- Agarda n cheksizlikka intilganda $T(X_1,\cdots,X_n)$ statistika ehtimol bo‘yicha noma’lum parametr $\theta$ ga yaqinlashsa, ya’ni ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\{|T(X_1,\cdots,X_n)-\theta|<\varepsilon\}=1$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $T(X_1,\cdots,X_n)$ statistik baho ***asosli baho*** deyiladi.

**1-misol.**

Tanlanmaning o‘rta qiymati tasodifiy miqdorning noma’lum matematik kutilmasi uchun siljimagan baho bo‘lishini isbotlang.

**Yechish.** Siljimagan baho ta’rifiga ko‘ra, tanlanma o‘rta qiymatining matematik kutilmasi tasodifiy miqdorning noma’lum matematik kutilmaga teng ekanligini ko‘rsatish kerak. Ma’lumki X tasodifiy miqdor ustida n ta bog‘liqsiz tajribalar o‘tkazib, $X_1, \ldots, X_n$ tanlanma hosil qilamiz. Bu esa $X_i$ lar o‘zaro bog‘liqsiz va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ekanligini anglatadi. Demak $MX_i=MX$, $i=1,..,n$ bo‘ladi. Su ma’lumotlardan foydalanamiz:

$$M\bar{x} = M\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}(MX_1 + ..+MX_n) = \frac{1}{n}(MX + \cdots + MX) = MX\,.$$

**2-misol.**

Tanlanma o‘rta qiymat $\bar{x}$ noma‘lum matematik kutilma $MX = \theta$ ga asosli baho ekanligini ko‘rsating.

Chebishev tengsizligiga ko‘ra ixtiyoriy kichik $\varepsilon$ >0 son uchun

$$P\{|\bar{x} - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\bar{x}}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{n\varepsilon^2}\,.$$

Oxirgi tengsizlikda dispersiya chekli bo‘lsa, $n \to \infty$ da limitga o‘tsak, haqiqatan ham $\bar{x}$ statistikaning asosli baholigi kelib chiqadi.

## Nuqtaviy baholash usullari

**Momentlar usuli:** Faraz qilaylik $X$ tasodifiy miqdorning birinchi $r$ ta $\alpha_k = MX^k$, $k = 1, \ldots, r$ momentlari mavjud bo‘lsin. Tabiiyki, ular noma’lum $\theta$ parametrning $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$ funksiyalari bo‘ladilar. $A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k = 1, \ldots, r$, tanlanma momentlarini mos ravishda $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, r$, larda tenglashtirib $r$ ta tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta) = A_{n1}, \\ \alpha_2(\theta) = A_{n2}, \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_r(\theta) = A_{nr}. \end{cases}$$

Mana shu tenglamalar sistemasini $\theta_1, \ldots, \theta_r$ larga nisbatan yechib, $\theta_k = \theta_k(X_1, \cdots, X_n),\ k = 1, \ldots, r$ yechimlarga ega bo‘lamiz. Shunday topilgan $\theta_k$, $k = 1, \ldots, r$ statistikalar ***momentlar usuli*** bilan noma’lum $\theta_k$, $k = 1, \ldots, r$ paramertlar uchun tuzilgan statistik baholar bo‘ladi.

**3-misol.**

Matematik kutilmasi va dispersiyasi no‘malum bo‘lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo‘lgan normal qonunni qaraylik. Noma’lum $\theta_1$ va $\theta_2$ parametrlarni momentlar usulida baholaylik. Bu holda (7.2.1) tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\theta_1 = A_{n1} \text{ va } \theta_2+\theta_1^2 = A_{n2}.$$

Natijada momentlar usuli bilan tuzilgan statistik baholar

$$\tilde{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{x},\ \ \tilde{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2=S^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Momentlar usuli bilan topilgan statistik baholar ayrim hollarda siljimagan, asosli va eng aniq baholar bo‘ladi.

**4-misol.** Binomial taqsimotning noma’lum ehtimolligi uchun momentlar usulida statistik baho topilsin.

**Yechish.** Binomial taqsimotning matematik kutilmasi MX=*np* ekanligini eslab,

$MX=\bar{x}$ tenglamani p ga nisbatan yechamiz.

$np=\bar{x}, \quad p^*=\frac{\bar{x}}{n}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n^2}$ , topilgan baho momentlar usulida olingan statistic baho bo‘ladi.

**Eng katta o‘xshashlik usuli:** Kuzatilmalari $X_1,\ldots,X_n$ lardan va umumlashgan zichlik funksiyasi $p(x,\theta)$ dan iborat $X$ t.m.ni olaylik. Agar $X$ diskret t.m. bo‘lsa, $p(x,\theta)=P\{X=x;\theta\}$ ehtimolliklardan, $X$ uzluksiz t.m. bo‘lgan holda esa $p(x,\theta)=f(x;\theta)$ zichlik funksiyadan iborat bo‘ladi. Quyidagi funksiyaga $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)=p(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot p(x_n,\theta)$ eng katta o‘xshashlik funksiyasi deyiladi. Faraz qilaylik, $L(x_1,\ldots,x_n,\theta)$ funksiya $\theta\in\Theta$ yopiq sohada biror $\theta^*$ nuqtada eng katta qiymatga erishsin:

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta^*)=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,\ldots,x_n,\theta).$$

Eng katta o‘xshashlik funksiyasi maxsimumga erishadigan $\theta^*$ qiymat noma’lum $\theta$ parametr uchun eng katta o‘xshashlik usuli bilan tuzilgan statistik baholar deb ataladi. Ularni quyidagi tenglamalr sistemasidan ham topish mumkin:

$$\left.\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta=\theta^*} = 0,\ \ k=1,\ldots r.$$

**5-misol.**

Matematik kutilmasi va dispersiyasi noma'lum bo'lgan, zichlik funksiyasi $f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$ bo'lgan normal qonunni olaylik. Eng katta o'xshashlik funksiyasini tuzamiz:

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}e^{-\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta_2}\right)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2\right\}.$$

Bundan

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\theta_2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}.$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}2(X_i-\theta_1)=0\,.$$

Soddalashtirgandan so'ng $\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta_1 = 0$ tenglamaga kelamiz.

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_n,\theta)}{\partial\theta_k} = -n\cdot\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2=0\,.$$

Soddalashtirgandan so'ng $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2 - n\theta_2^2 = 0$ tenglamaga kelamiz.

Natijada $\theta_1$ va $\theta_2^2$ lar uchun

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{x},\quad \hat{\theta}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2=S^2$$

Ko'rinishdagi statistik baholarni topamiz.

Demak, normal qonun uchun momentlar va eng katta o'xshashlik usullari bilan tuzilgan statistik baholar aynan bir xil ekan.

6-misol.

Bosh to'plamdan *n=60* hajmli tanlanma olingan.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 6 | 26 |
| $n_i$ | 8 | 40 | 10 | 2 |

Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish. Bosh o‘rtacha qiymatning siljimagan bahosi tanlanma o‘rtacha bo‘ladi.

$$\overline{x_T} = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{1\cdot 8 + 3\cdot 40 + 6\cdot 10 + 26\cdot 2}{60} = \frac{240}{60} = 4 .$$