AMALIY KO‘NIKMA

9-MAVZU **Amaliyotda ko‘p uchraydigan uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari.**

Tekis taqsimot.

Agar uzluksiz ***X*** tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & agar\ \ x\in[a,b]\\ 0, & agar\ \ x\notin[a,b]\end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

$[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorni $X\sim R[a,b]$ ko‘rinishda belgilanadi. $X\sim R[a,b]$ uchun taqsimot funksiyasini topamiz.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

formulaga ko‘ra agar $a\le x\le b$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_a^x \frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$$

agar $x<a$ bo‘lsa, $F(x)=0$ va $x>b$ bo‘lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0\,dt+\int_a^b\frac{dt}{b-a}+\int_b^x 0\,dt=\frac{t}{b-a}\bigg|_a^b=1$$

bo‘ladi. Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & agar\ \ x<a\ \ bo'lsa\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agar\ \ a\le x\le b\ \ bo'lsa\\ 1, & agar\ \ b<x\ \ bo'lsa\end{cases}$$

1-misol. $X\sim R[a,b]$ uchun matematik kutilma va dispersiya hisoblang.

Yechish:

$$MX=\int_a^b \frac{1}{b-a}xdx=\frac{a+b}{2},$$
$$MX^2=\int_a^b \frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$
$$DX=MX^2-(MX)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ko‘rsatkichli taqsimot.

Agar uzluksiz X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & agar\ \ x\geq 0\\ 0, & agar\ \ x<0\end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, X tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda λ biror musbat son. λ parametrli ko‘rsatkichli taqsimot $E(\lambda)$ orqali belgilanadi.

Taqsimot funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & agar\ \ x\geq 0,\\ 0, & agar\ \ x<0.\end{cases}$$

2-misol.

$E(\lambda)$ ko‘rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.

Yechish:

$$MX=\lambda\int_0^\infty ue^{-\lambda u}du=\lim_{b\to\infty}\lambda\int_0^b ue^{-\lambda u}du=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^b ude^{-\lambda u}\right)=$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left(-ue^{-\lambda u}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda u}du\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\Big|_0^b\right)=\frac{1}{\lambda}$$
$$DX=MX^2-(MX)^2=\lambda\int_0^\infty u^2e^{-\lambda u}du-\frac{1}{\lambda^2}$$

Bo‘laklab integrallash formulasini ikki marta qo‘llaymiz. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lambda\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{u^2}{\lambda}e^{-\lambda u}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{u}{\lambda}e^{-\lambda u}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda u}\right)\right)\Bigg|_0^b\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Demak, $E(\lambda)$ ko‘rsatkichli taqsimot uchun $MX=\frac{1}{\lambda}$ va $DX=\frac{1}{\lambda^2}$.

Normal taqsimot.

X uzluksiz tasodifiy miqdor normal qonun bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lsa

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$$

a va $\sigma>0$ parametrlar bo‘yicha normal taqsimot $N(a,\sigma)$ orqali belgilanadi. X normal tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}du\,.$$

Agar normal taqsimot parametrlari $a=0$ va $\sigma=1$ bo‘lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}dt$$

ko‘rinishga ega va u Laplas funksiyasi deyiladi.

3-misol.

$N(a,\sigma)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.

Yechish: Avval xususiy holni qaraylik, ya’ni tasodifiy miqdor $Y \quad N(0,1)$ taqsimotli tasodifiy miqdor bo`lsin, ya’ni zichlik funksiyasi quyidagiga teng:

$$p_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Unda

$$MY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$$

va bo`laklab integrallashni qo`llab,

$$DY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

ekanligini ko`ramiz. Ya'ni standart normal taqsimotli tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi 0 va dispersiyasi 1 ekan. Endi, $X = \sigma Y + a$ tasodifiy miqdorni ko`raylik, bu tasodifiy miqdor $N(a, \sigma^2)$ taqsimotga egadir (buni tekshirishni mashq sifatida talabalarning o`ziga qoldiramiz). Matematik kutilma va dispersiyaning xossalaridan quyidagiga ega bo`lamiz:

$$MX = \sigma MY + a = a, \quad DX = \sigma^2 DY = \sigma^2.$$

Shunday qilib, $N(a, \sigma^2)$ taqsimotli tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a va dispersiyasi σ^2 ekan.

4-misol.

X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, zichlik funksiyasi ***f(x)=A*exp{-x2+4x+4}*** ko'rinishda bo'lsa, A soni topilsin.

Yechish. a va σ^2 parametrli normal taqsimotning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

ko'rinishda bo'ladi. Yuqoridagi funksiyani shu ko'rinishga keltiramiz:

$$f(x) = A \cdot \exp\{-(x-2)^2 + 8\} = A\frac{\sqrt{2\pi}2}{\sqrt{2\pi}2} e^{-\frac{(x-2)^2}{2*4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} e^{-\frac{(x-2)^2}{2*4}};$$

bu yerda $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2}$ bo'ladi.

5-misol.

Yuqoridagi misolda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

Yechish. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

ko‘rinishda bo‘lgan tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo‘lib, uning matematik kutilmasi a ga va dispersiyasi σ^2 ga teng bo‘ladi.
Demak MX=2 va DX=4 ekan.

6-misol.

X tasodifiy miqdor $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ ga teng bo‘lgan zichlik funksiyaga ega. Shu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emasligini isbotlang.
Yechish. Matematik kutilmani hisoblaymiz:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi(x^2+1)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{\pi} \ln(x^2+1) /_{-\infty}^{\infty}$$

bu integral uzoqlashuvchi , demak tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud emas.