AMALIY KO‘NIKMA

13-MAVZU TANLAMANING STATISTIK TAQSIMOTI. EMPIRIK TAQSIMOT FUNKSIYASI. POLIGON VA GISTOGRAMMA.

Tasodifiy hodisalar ustida o‘tkaziladigan kuzatish natijalariga asoslanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijalarini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ishlab chiqishdan iboratdir.

Biror X tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega, deylik. X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olingan $X_1, X_2, \ldots X_n$ qiymatlar to‘plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $X_1, X_2, \ldots X_n$ qiymatlarni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $X_1, X_2, \ldots X_n$ tanlanma $F(x)$ nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan bosh to’plamdan olingan, deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, $x_1, x_2, \ldots x_n$ berilgan $X_1, X_2, \ldots X_n$ tanlanmaning mos ravishdagi kuzatish natijasi bo`lsin va $x^*_{(1)} < x^*_{(2)} < \ldots < x^*_{(n)}$ tanlanma kuzatish natijasi uchun qurilgan variatsion qator $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ ning bir-biridan farq qiluvchi elementlaridan tuzilgan yangi qator bo’lsin, ya`ni $x^*_{(1)}$ qiymat n_1 marta, $x^*_{(1)}$ qiymat n_2 marta, va hokazo, kuzatilgan bo‘lsin. U holda kuzatilgan $x^*_{(i)}$ qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chastotalar deb ataladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$w_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deganda, ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan tajriba natijalari (tanlanma) uchun chastotalarning statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x -tajriba natijalarining (tanlanma elementlarining) x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni (x dan kichik variantalar soni); n – kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi) bo‘lsin, u holda taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymati uchun $\{X<x\}$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga, ya`ni

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

ga aytiladi. Tanlanmaning statistik taqsimotini ko‘rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X miqdorning taqsimot qonuni haqida aniqroq tasavvur hosil qilish uchun poligon va gistogramma, deb ataluvchi grafiklardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb, $(x^*_{(1)}, n_1),\ (x^*_{(2)}, n_2), ...,\ (x^*_{(k)}, n_k)$ nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x^*_{(1)}, w_1),\ (x^*_{(2)}, w_2), ...,\ (x^*_{(k)}, w_k)$ nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan tutashtirishdan hosil bo‘lgan siniq chiziqli grafikka aytiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan va ketma-ket joylashtirilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat shaklga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo‘lgan va ketma-ket joylashtirilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat shaklga aytiladi.

1-misol. $n=30$ hajmli bo’lgan tanlanmaning chastotalar taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo‘lamiz.

$$w_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad w_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \qquad w_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Demak, nisbiy chastotalar taqsimoti quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

2-misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish. $n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$

$$w_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2; \qquad w_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3; \qquad w_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

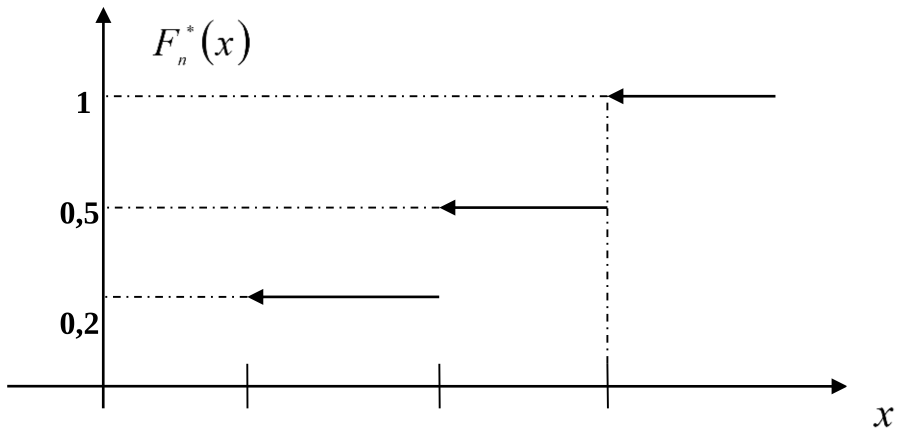
Demak, nisbiy chastotalar taqsimoti:

x_i	1	4	6
w_i	0,2	0,3	0,5

Empirik taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \le 1; \\ 0,2, & agar \quad 1 < x \le 4; \\ 0,5, & agar \quad 4 < x \le 6; \\ 1, & agar \quad x > 6. \end{cases}$$

Endi empirik taqsimot funksiyasining grafigini yasaymiz.



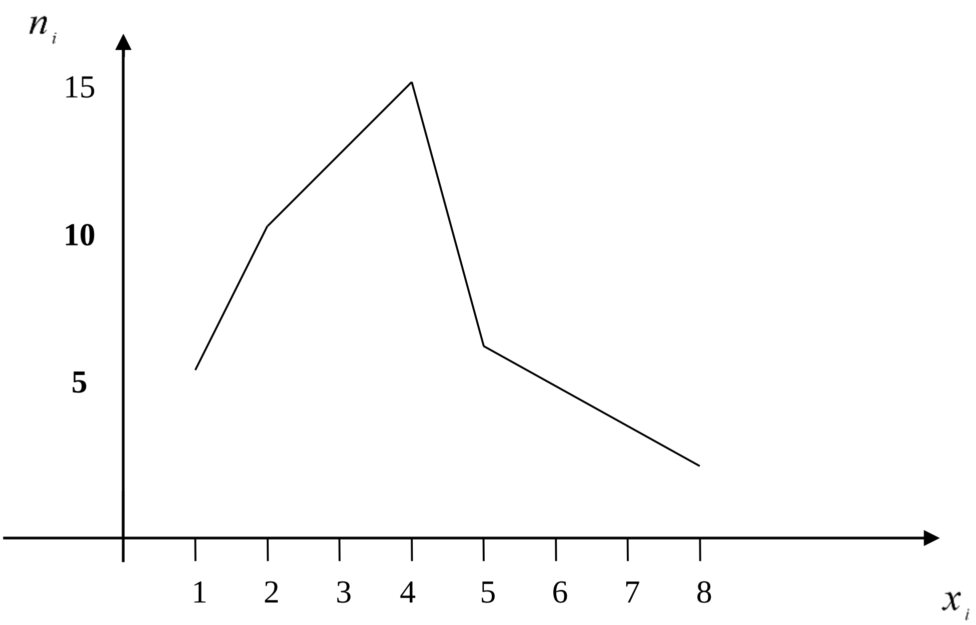
11.1-rasm

3-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti boyicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish.

n=5+10+15+7+3+=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo’ladi:



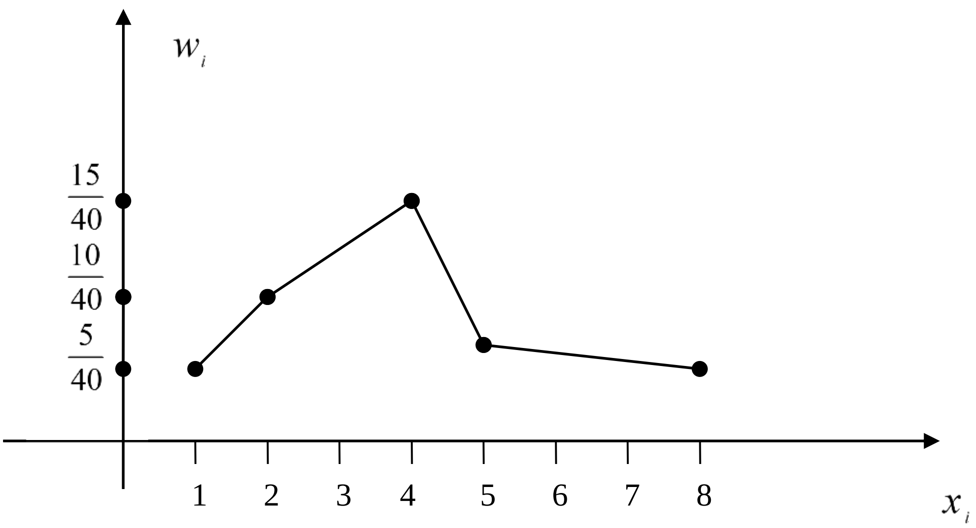
11.2-rasm

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$w_t = \frac{5}{10}; \qquad w_2 = \frac{10}{40}; \qquad w_3 = \frac{15}{40}; \qquad w_4 = \frac{7}{40}; \qquad w_5 = \frac{3}{40};$$

x_i	1	2	4	5	8
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

Nisbiy chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

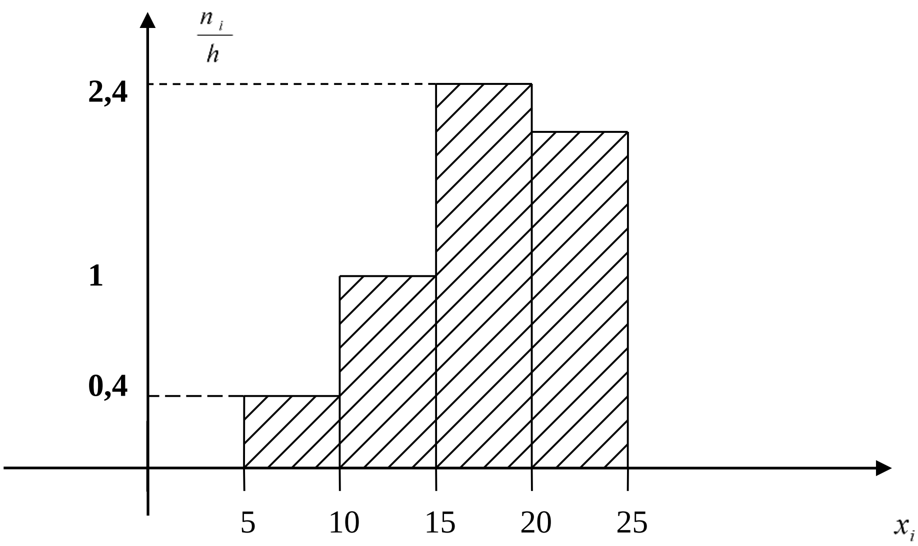


11.3-rasm

4-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

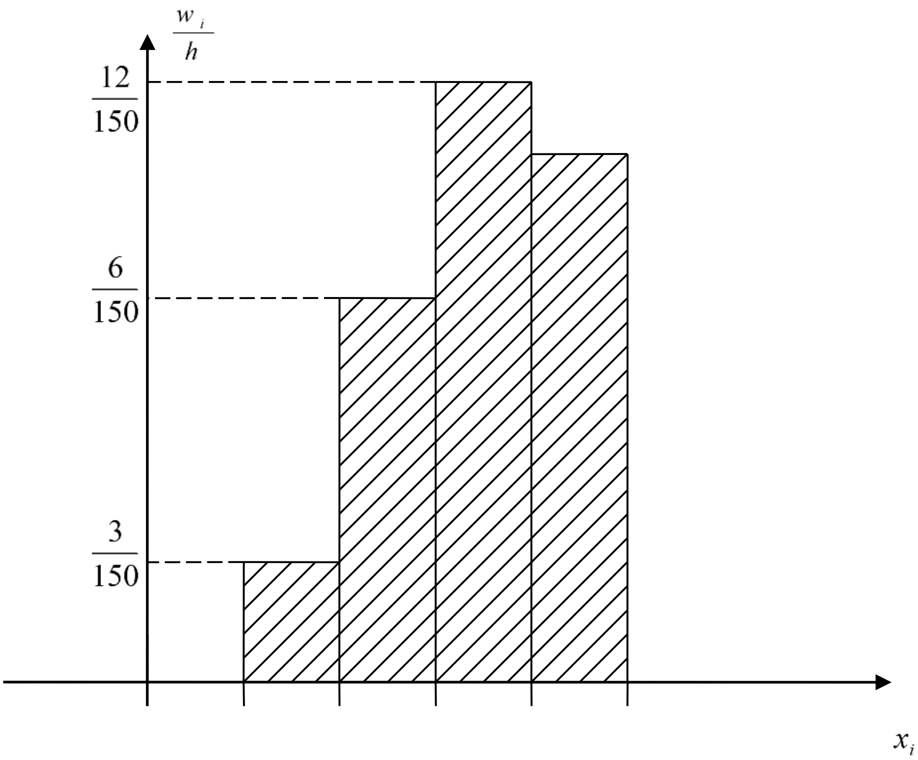
Interval ro'yxati	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i /h	w_i	w_i /h
1	5-10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10-15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15-20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20-25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



11.4- rasm

Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



11.5-rasm

5-misol. Quyida berilgan tanlanma jadvali uchun variatsion qator tuzing va ko‘rsatilgan interval bo‘yicha gistogramma yasang. Bunda *n=40, h=2* deb olinsin.

15,9;	14,0;	16,3;	10,0;	18,8;	14,1;	15,3;	17,0;	13,9;	14,6;
12,6;	14,2;	17,2;	13,3;	15,1;	16,1;	12,1;	14,7;	16,8;	15,5;
14,5;	17,7;	20,0;	14,3;	14,9;	11,5;	14,7;	14,5;	15,7;	15,3;
18,3;	15,8;	17,5;	14,8;	15,6;	17,9;	14,7;	14,9;	14,6;	13,7.

Yechish. Variatsion qator tuzamiz.

10,0<11,5<12,1<12,6<13,3<13,7<13,9<14,0<14,1<14,2<14,3<
<14,5=14,5<14,6=14,6<14,7=14,7=14,7<14,8<14,9=14,9<15,1<15,3=
=15,3<15,5<15,6<15,7<15,8<15,9<16,1<16,3<16,8<17,0<17,2<17,5<
<17,7<17,9<18,3<18,8<20,0.

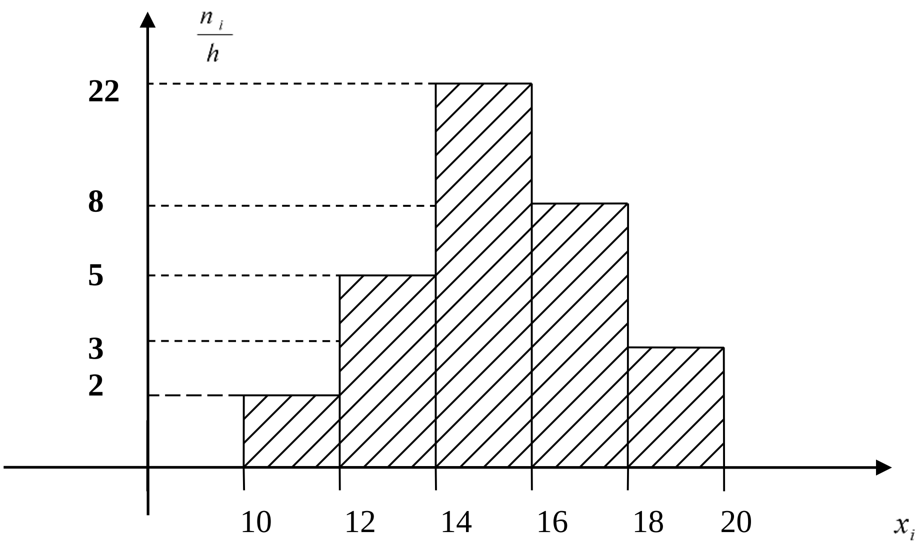
$x_{(1)} = 10, \quad x_{(40)} = 20;$

$$k = \frac{x_{(40)} - x_{(1)}}{h} = 5;$$

Demak, 5 ta teng oraliq bo‘yicha gistogrammalar jadvalini yasaymiz.

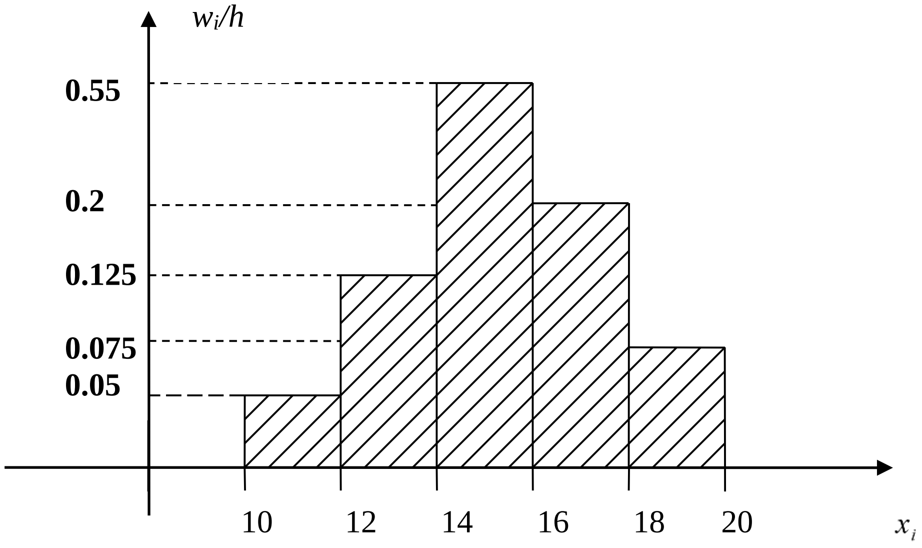
I	II	III	IV	V	VI
1	10-12	2	1	0,05	0,025
2	12-14	5	2,5	0,125	0,0625
3	14-16	22	11	0,55	0,275
4	16-18	8	4	0,2	0,1
5	18-20	3	1,5	0,075	0,0375

Gistogrammalar jadvali bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasaymiz.



11.6-rasm

Nisbiy chastotalar gistogrammasi qiyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



11.7-rasm

Tanlanma o'rta qiymati.

Tanlanma elementlarining o'rta arifmetigi tanlanma o'rtachasi deyiladi.

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

6-misol. 0,0,2,2,4,1,2,3,4,5 tanlanmaning o'rta qiymati topilsin.

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(0+0+1+2+2+2+3+4+4+5) = \frac{23}{10} = 2{,}3$$

Tanlanma dispersiyasi.

Empirik dispersiya yoki tanlanma dispersiyasi esa quyidagicha aniqlanadi

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,, \qquad \bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i$$

7-misol. 1,0,1,2,0,3 tanlanmaning dispersiyasi topilsin.

$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i$ formuladan foydalanamiz:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(0*2 + 1*2 + 2 + 3) = 1$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{6}((0-1)^2 * 2 + (1-1)^2 * 2 + (2-1)^2 + (3-1)^2) = \frac{7}{6}$$

Tanlanmaning boshlang'ich va markaziy momentlari.

k- tartibli boshlang'ich momentlar va markaziy momentlar deb, quyidagilarga aytiladi:

$$\boldsymbol{m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\,,\quad M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k}$$

8-misol. 1,1,2,1,2,3,0,0,0,0 tanlanmaning boshlang'ich va markazlashgan ikkinchi momentlari topilsin.

$$\boldsymbol{m_k = (0^2*4+1^2*3+2^2*2+3^2)/10=2,}$$
$$\boldsymbol{M_k=((0-2)^2*4+(1-2)^2*3+(2-2)^2*2+(3-2)^2)/10=2}$$

Tanlanma o'rta kvadratik og'ishi.

Tanlanmaning o'rta kvadratik og'ishi deb , tanlanma dispersiyasidan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

9-misol.

7-misolda berilgan tanlanmaning o'rta kvadratik chetlanishi topilsin. $\bar{S} = \sqrt{S^2}$ formuladan topamiz. Yuqorida $\bar{S}^2 = 7/6$ hisoblangandi. U holda $\bar{S} = \sqrt{7/6}$ bo'ladi.

Tanlanma modasi va medianasi.

Eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta (agar u mavjud bo'lsa), ***tanlanma modasi*** (Mo) deyiladi. Variatsion qatorni teng ikki qismga ajratuvchi varianta ***tanlanma medianasi*** (Me) deyiladi.

1. Agar o'rganilayotgan tasodifiy miqdor diskret turda bo'lsa, olingan tanlanmaning modasi yuqorida keltirilgan ta'rif bo'yicha topiladi; medianasi esa quyidagi formula orqali topiladi:

$$M_e = \begin{cases} x_{(k)}, & agar \quad n = 2k-1; \\ \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, & agar \quad n = 2k. \end{cases}$$

2. Agar tasodifiy miqdor uzluksiz turda bo‘lsa, olingan tanlanmaning modasi va medianasi quyidagi formulalar yordamida topiladi:

Moda. $M_0 = x_0 + k\dfrac{n_i - n_{i-1}}{n_i - n_{i-1} + n_i - n_{i+1}}$

bu yerda x_0-moda oralig‘ining quyi chegarasi, k - oraliq uzunligi, n_i - moda oralig‘i chastotasi.

Mediana. $M_e = x_e + k\dfrac{\frac{n}{2} - S_{i-1}}{n_i}$

bu yerda x_e – mediana oralig‘i quyi chegarasi, k - oraliq uzunligi, n_i – mediana oralig‘i chastotasi, $S_{i-1}=n_1+\dots+n_{i-1}$.

Oraliq qator	Nisbiy chastota
$x_i - x_{i+1}$	n_i/n
0-5	5
5-10	10
10-15	25
15-20	6
20-25	4

Oraliq qatorning modasi va medianasi topilsin.

1.Modani [10;15) oraliqdan qidiramiz; $x_i=10$, $n_i=25$, $k=5$ larni yuqoridagi modani hisoblash formulasiga qo‘yamiz:

$$Mo = 10 + 5\frac{25-10}{25-10+25-6} = 12{,}21.$$

2.Medianani ham [10;15) oraliqdan qidiramiz, chunki $n/2=25$ ga teng hamda 5+10<25, 5+10+25>25 bo‘ladi va $x_i=10$, $n_i=25$, $k=5$, $S_{i-1}=5+10=15$. Shularni mediana formulasiga qo‘ysak

$$Me = 10 + 5\frac{25-15}{25} = 12 \quad \text{bo‘ladi.}$$