AMALIY KO‘NIKMA

# 12-MAVZU KATTA SONLAR QONUNI. MARKAZIY LIMIT TEOREMALARI.

## Katta sonlar qonuni.(KSQ)

Faraz qilaylik, $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin va bu tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari mavjud bo‘lib, ular mos ravishda $a_1, a_2, \ldots a_n$ bo‘lsin.

**Ta’rif.** Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

munosabat bajarilsa, $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli deyiladi.

Bu ta’rifning ma’nosi: *n* ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

tasodifiy miqdorni tasodifiy bo‘lmagan

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

son bilan almashtirish mumkin ekanligidadir.

**1-teorema**. (KSQ ning yetarlilik sharti)

$X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan va chekli matematik kutilmaga ega bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun **KSQ** o‘rinli bo‘ladi.

Keltirilgan teorema erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonunini ifodaslaydi. Lekin shuni aytish lozimki, katta sonlar qonuni bo‘yicha qilingan dastlabki fundamental kashfiyotlar rus akademigi P. L. Chebishev nomi bilan chambar-chas bog‘langan. Bu sohada qilingan kashfiyotlarning deyarli barchasini isbotlash jarayonida Chebishev tengsizliklari yetakchi rol o’ynaydi.

**2-teorema(Chebishev tengsizligi).** Musbat aniqlangan $X$ tasodifiy miqdor matematik kutilmaga ega bo‘lsa, u holda ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun quyidagi munosabat har doim o‘rinli

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Bu teoremadan qator natijalar kelib chiqadi.

**1-natija.**

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

**2-natija.**

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

**3-teorema. (Chebishev katta sonlar qonuni haqida).** $X_1, X_2, \ldots X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o’zaro erkli bo‘lib, ularning har biri $C$ soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

**4-teorema. (Bernulli katta sonlar qonuni haqida).** $n$ ta erkli tajribada $A$ hodisaning ro‘y berishlari soni $\mu$ bo‘lsin, har bir tajribada $A$ hodisa o‘zgarmas $p$ ehtimol bilan ro‘y bersin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremaning ma’nosi quyidagicha: $n$ yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{\mu}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan $p$ ga teng, deb olish mumkin, ya’ni $\frac{\mu}{n}$ ning qiymatlari $p$ ehtimol atrofida joylashgan bo‘ladi.

Bundan tashqari, bu teorema tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik hossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

**1-misol.**

$X_1, X_2,... X_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lib, $X_n$ tasodifiy miqdor – $n$, o, $n$ qiymatlarni mos ravishda $\frac{1}{n^2}, 1-\frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^2} (n>1)$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Shu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladimi?

**Yechish**. Chebishev teoremasidan foydalanamiz.

$$M(X_n) = -n \cdot \frac{1}{n^2} + 0 \cdot \left(1-\frac{2}{n^2}\right) + n \cdot \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2 \cdot \left(1-\frac{2}{n^2}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 2.$$

Ko‘rinib turibdiki, hamma tasodifiy miqdorlarning dispersiyasi bir xil. Demak, ular yagona son bilan chegaralangan bo‘ladi. Chebishev teoremasining shartlari bajarilganligi sababli, bu ketma-ketlikka katta sonlar qonunini tadbiq qilsa bo‘ladi.

**2-misol.**

*A* hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Agar 100 ta erkli tajriba o‘tkaziladigan bo‘lsa, *A* hodisaning ro‘y berishlari soni 40 dan 60 gacha bo‘lgan oraliqda yotish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang.

**Yechish.** $X$ tasodifiy miqdor qaralayotgan *A* hodisaning 100 ta erkli tajribada ro‘y berishi sonining matematik kutilmasini va dispersiyasini topamiz:

$$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Hodisa ro‘y berishining berilgan soni bilan *M(X)=50* matematik kutilmasi orasidagi maksimal ayirmani topamiz.

$$\varepsilon = 60 - 50 = 10$$

va quyidagi Chebishev tengsizligidan foydalamiz:

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Bunga *M(X)=50, D(X)=25,* $\varepsilon > 10$ ni qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz.

$$P(|x-50|<10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0,75$$

## Markaziy limit teoremasi (MLT)

Markaziy limit teorema t.m.lar yig‘indisi taqsimoti va uning limiti – normal taqsimot orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi. Bir xil taqsimlangan t.m.lar uchun markaziy limit teoremani keltiramiz.

**5-teorema.** $X_1, X_2, \ldots X_n$ bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan, $MX_i = a$ chekli matematik kutilma va $DX_i = \sigma^2, i = \overline{1,n}$ dispersiyaga ega bo‘lsin, $0 < \sigma^2 < \infty$ u holda $Z_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$ t.m.ning taqsimot qonuni $n \to \infty$ da standart normal taqsimotga intiladi

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Agar $X$ t.m. uchun $MX = 0, DX = 1$ bo‘lsa $X$ t.m. markazlashtirilgan va normallashtirilgan(yoki standart) t.m. deyiladi. Keltirilgan teorema yordamida yetarlicha katta *n* larda t.m.lar yig‘indisi bilan bog‘liq hodisalar ehtimolligini hisoblash mumkin. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ t.m.ni standartlashtirsak, yetarlicha katta *n* larda

$$P\left\{\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \beta\right\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

yoki

$$P\{\alpha \leq S_n \leq \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

**3-misol.**

$X_i$ bog‘liqsiz t.m.lar [0,1] oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lsa, $Y=\sum_{i=1}^{100} X_i$ t.m.ning taqsimot qonunini toping va $P\{55<Y<70\}$ ehtimollikni hisoblang.

Markaziy limit teorema shartlari bajarilganligi uchun, $Y$ t.m.ning zichlik funksiyasi $f_Y(y)\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-MY)^2}{2\sigma_y^2}}$ bo‘ladi. Tekis taqsimot matematik kutilmasi va dispersiyasi formulasidan $MX_i=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$, $DX_i=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$ bo‘ladi. U holda

$$MY=M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=\sum_{i=1}^{100} MX_i=100\cdot\frac{1}{2}=50,$$

$$DY=D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)=\sum_{i=1}^{100} DX_i=100\cdot\frac{1}{12}=\frac{25}{3}, \qquad \sigma_Y=\frac{5\sqrt{3}}{3},$$ shuning uchun,

$$f_Y(y)\approx\frac{3}{5\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}.$$ Yuqoridagi formulaga ko‘ra,

$$P\{55<S_n<70\}\approx\Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right)-\Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right)=\Phi\left(4\sqrt{3}\right)-\Phi\left(\sqrt{3}\right)\approx 0.04.$$

Endi markaziy limit teoremasining boshqa formalarini ko‘rib chiqamiz:

**6-teorema**. (Lyapunov teoremasi)

Agar $X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz va chekli dispersiyaga ($b_k^2=DX_k<\infty$) ega bo‘lib, $n\to\infty$ da $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n|X_k-a_k|^3}{B_n^{3/2}}=\mathbf{0}$ $(B_n^2=\sum_1^n b_k^2=D(\sum_1^n X_k))$ bo‘lsa, bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun MLT o‘rinli bo‘ladi.

**7-teorema.** (Laplas teoremasi)

Agar n ta bog‘liqsiz tajribalarning har birida A tasodifiy hodisa P(A)=p ehtimollik bilan ro‘y bersa, u holda $n\to\infty$ da quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$P\left\{\alpha<\frac{Y_n-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right\}\approx\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$

bu yerda *q=1-p*, $Y_n$ – n ta tajribada A hodisaning ro‘y berishlar soni, Φ(x)- Laplas funksiyasi.

**4-misol.**

Agar DX=0.001 bo‘lsa, |X-MX|<0,1 ning ehtimolligini Chebishev tengsizligi yordamida baholang.

**Yechish.** Chebishevning ushbu tengsizligidan foydalanamiz:

$P(|X-MX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ , bu yerda ε=0,1 va DX=0,001 larni formulaga qo‘ysak,

$P(|X-MX|<0{,}1)\geq 1-\frac{0{,}001}{0{,}1^2}=0{,}9$ bo‘ladi.

**5-misol.**

X tasodifiy miqdor uchun MX=2 , DX=0,04 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 1,5<X<2,5 tengsizlik ehtimolligini baholang.

**Yechish.**

$P(|X-MX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ tengsizlikdan foydalanamiz: 1,5<X<2,5 munosabatdan ε=0,5 ekanligini aniqlab olamiz, u holda

$P(|X-2|<\varepsilon)\geq 1-\frac{0{,}04}{0{,}25}=1-0{,}16=0{,}84$ bo‘ladi.

**6-misol.**

X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan bo‘lsa, |*X-M(X)*|<0,5 tengsizlikning ehtimolligini baholang:

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0,6 | 0,4 |

**Yechish.** Chebishevning $P(|X-MX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$ tengsizligidan foydalanamiz, buning uchun MX va DX larni topamiz:

*MX=0*0,6+1*0,4=0,4* ,
$MX^2=0^2*0{,}6+1^2*0{,}4=0{,}4$ ,
*DX=0,4-0,16=0,24.*

U holda so‘ralayotgan ehtimollik $P(|X-0{,}4|<0{,}5)\geq 1-\frac{0{,}24}{0{,}25}=0{,}04$ bo‘ladi.