AMALIY KO'NIKMA

15-MAVZU **ORALIQ BAHOLAR. ISHONCHLILIK EHTIMOLLIGI VA ISHONCHLILK ORALIG'I**

Intervalli baholar. Ishonchlilik ehtimoligi va ishonchlilik oralig`i.

Faraz qilaylik, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ tanlanma berilgan bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F_\theta(x)$ hamda $\theta_n = \theta_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ statistika θ parametr uchun statistik baho bo'lsin. Bunday baho nuqtaviy baho deyiladi. Tanlanma hajm unchalik katta bo`lmaganda nuqtaviy baho parametrning haqiqiy qiymatidan sezilarli farq qiladi hamda nuqtaviy baholardan boshqa baholarni o`rganishga zaruriyat paydo bo`ladi.

Agar ixtiyoriy $\gamma \in (0;1)$ son uchun $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma$ munosabatni qanoatlantiruvchi, shunday $\theta_1 < \theta_2$ son topish mumkin bo`lsa, u holda $(\theta_1;\theta_2)$ oraliq $\gamma$ ishonchlilik ehtimoliga mos keluvchi ishonchlilik oralig`i deyiladi. Ko`pincha $\theta_1;\theta_2$ sonlar $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ tanlanmaga bog`liq qilib olinadi. Bu esa $(\theta_1;\theta_2)$ ni intervalli baho sifatida qabul qilishga olib keladi.

Dastlab normal taqsimot parametrlarining ishonchlilik oraliqlarini baholarini keltiramiz.

Normal taqsimot a va σ^2 parametrlarga bog`liq.

1. Normal taqsimlangan bosh to'plamning matematik kutilmasi a uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi.

a) agar σ - o'rtacha kvadratik chetlanish ma`lum bo`lsa, γ – ishonchlilik ehtimoli bilan matematik kutilma uchun

$$\overline{x_T} - t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{\frac{\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (1)$$

ishonchlilik oralig'ini topamiz. Bu yerda $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun, $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$ tenglamaning ildizi.

b) Agar σ – o'rtacha kvadratik chetlanish noma`lum bo`lsa, tanlanma hajmi $n<30$ bo'lganda

$$\overline{x_T} - t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_T} + t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

bu yerda, s_n - tuzatilgan tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish va $t_p(k)$ - ozodlik darajasi k bo`lgan Student taqsimotining p - tartibli kvantilli.

2. Normal taqsimlangan bosh to'plamning dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchlilik oralig'idan foydalaniladi:

a) agar a matematik kutilmasi ma`lum bo`lsa,

$$\frac{ns_0^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{ns_0^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}, \qquad (3)$$

bu yerda $s_o^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - a)^2$ va $\chi^2_p(k)$ - ozodlik darajasi k ga teng bo`lgan "*xi-kvadrat*" taqsimotining p –tatibli kvantilli.

b) agar a matematik kutilmasi noma`lum bo`lsa,

$$\frac{ns_n^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{ns_n^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}, \qquad (4)$$

bu yerda $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x_n})^2$.

Bernulli sxemasida γ ishonchlilik ehtimoli bilan muvoffaqiyatlar ehtimoli p ning ishonchlilik oralig`ini topish uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$h-t_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}<p<h+t_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}, \qquad (5)$$

bu yerda h - A hodisa yuz berishlar sonining nisbiy chastotasi, $t_{\frac{\gamma}{2}}$ - Laplas funksiyasi $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})$ uchun, $\Phi(t_{\frac{\gamma}{2}})=\frac{\gamma}{2}$ tenglamaning ildizi.

Xuddi shunga o`xshash agar $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma no`malum λ parametrli Puasson taqsimot qonuniga ega bo`lgan bosh to`plamdan olingan bo`lsa, u holda $\lambda$ uchun $\gamma$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchlilik oralig`i

$$\overline{x}_n-t_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}{n}}<\lambda<\overline{x}_n+t_{\frac{\gamma}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\overline{x}_n(1-\overline{x}_n)}{n}}, \qquad (6)$$

bu yerda $t_{\frac{\alpha}{2}}$ huddi yuqoridagidek ma`noga ega.

1-misol. Bosh to'plam $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan bo`lsin. Noma'lum matematik kutilma (a) ni $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma=5$, tanlanma o'rtacha $\overline{x}_n=14$ va tanlanma hajmi $n=25$ berilgan.

Yechish. $\Phi(t)=\frac{1}{2}\gamma$ munosabatdan $\Phi(t)=\frac{0,95}{2}=0,475$ bo'lib, jadvaldan $t=1,96$ ni topamiz. Topilganlarni

$$\overline{x}_n-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_n+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ formulaga qo'yib,

$$\left(14+1,96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}};14-1,96\cdot\frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

yoki

(12,04; 15,96)

ishonchli oralig'ini aniqlaymiz.

2-misol. Bosh to'plamning $N(a,\sigma)$ normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha $\overline{x}_n = 20{,}2$ va tanlanmaning tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanish s_n=0,8 topilgan. Noma'lum matematik kutilmaning ishonchli oralig'ini $\gamma=0,95$ ishonchlilik ehtimoli bilan baholang.

Yechish. $t(n-1)_{\frac{1+\gamma}{2}}$ ni jadvaldan topamiz. $\gamma=0,95$; $n=16$; $t(n-1)_{0.975}$ =2,13. Bu qiymatlarni

$$\overline{x}_n - t(n-1)_{0.975}\frac{s_n}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_n + t(n-1)_{0.975}\frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak,

$$(20{,}2 - 2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}}; 20{,}2 + 2{,}13\cdot\frac{0{,}8}{\sqrt{16}})$$

yoki (19,774; 20,626) hosil bo'ladi.

Demak, noma'lum a parametr 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan (19.774; 20.626) ishonchli oralig'ida yotadi.

3-misol. Bosh to'plamning normal taqsimlangan $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish $s_n=1$ topilgan. Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ni 0,95 ishonchlilik ehtimoli bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Yechish. Masalada matematik kutilmasi noma`lum bo`lib, $\gamma=0,95$ va $n=16$ bo'yicha jadvaldan

$$\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1) = 27{,}5; \qquad \chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}}(n-1) = 6{,}26$$

ekanligini topamiz. Topilgan qiymatlarni (4) formulaga qo'yamiz va

$0.5818 < \sigma^2 < 2.5959$ yoki $0.7628 < \sigma < 1.5987$ ishonchli oralig'ini hosil qilamiz.