AMALIY KO‘NIKMA

10-MAVZU KO‘P O‘LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR. TASODIFIY VEKTORNING TAQSIMOT FUNKSIYASI VA UNING XOSSALARI. DISKRET VA UZLUKSIZ TURDAGI TASODIFIY VEKTORLAR.

Tasodifiy vektor.

Faraz qilaylik, (Ω, F, P) ehtimollik fazosida aniqlangan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo‘lsin.

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vektorga tasodifiy vektor yoki n-o‘lchovli tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Ko ‘p o ‘lchovli tasodifiy miqdorlar har bir elementar hodisa ω ga n ta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlarini mos qo ‘yadi.

Tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi.

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}$$

n o‘lchovli funksiya $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi. Qulaylik uchun $F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taqsimot funksiyani $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indekslarini tushirib qoldirib $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko ‘rinishida yozamiz.

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo‘lsin. Ko ‘p o‘lchovli $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. Ixtiyoriy x_i lar uchun $0 \le F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 1$, ya‘ni taqsimot funksiya chegaralangan.
2. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas va chapdan uzluksiz.

3. Agar biror $x_i \to +\infty$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x_i \to +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = F_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (1)$$

4. Agar biror $x_i \to -\infty$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor.

(X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimot qonunini

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}; \; i = \overline{1, n}; \;\; j = \overline{1, m} \quad (2)$$

formula yordamida yoki quyidagi jadval ko‘rinishida berish mumkin:

1-jadval

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

bu yerda barcha p_{ij} ehtimolliklar yig‘indisi birga teng, chunki

$$\{X = x_i, Y = y_j\} \; i = \overline{1, n}; \;\; j = \overline{1, m}$$

birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la gruppani tashkil etadi $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$. (1) formula ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, 1-jadval esa birgalikdagi taqsimot jadvali deyiladi.

(X, Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa, har bir komponentaning alohida (marginal) taqsimot qonunlarini topish mumkin. Har bir $i = \overline{1, n}$ uchun $\{X = x_i, Y = y_1\}$, $\{X = x_i, Y = y_2\}$, $\dots$, $\{X = x_i, Y = y_m\}$ hodisalar birgalikda bo‘lmagani sababli: $p_{x_i} = P\{X = x_i\} = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{im}$. Demak,

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},\ i = \overline{1,n},\ p_{y_j} = P\{Y = y_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij},\ j = \overline{1,m}.$$

1-misol.

Ichida 2 ta oq, 1 ta qora, 1 ta ko'k shar bo'lgan idishdan tavakkaliga ikkita shar olinadi. Olingan sharlar ichida qora sharlar soni X tasodifiy miqdor va ko'k rangdagi sharlar soni Y tasodifiy miqdor bo'lsin. (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot qonunini tuzing. X va Y tasodifiy miqdorlarning alohida taqsimot qonunlarini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin qiymatlari: *0* va *1*: Y tasodifiy miqdorning qiymatlari ham *0* va *1*. Mos ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$

$$p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{6};\ p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{6};$$

$$p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6}.$$

(X,Y) vektorning taqsimot jadvali quyidagicha ko'rinishga ega:

$X \backslash Y$	*0*	*1*
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bu yerdan

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2},\ P\{X = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

$$P\{Y = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2},\quad P\{Y = 1\} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$ kelib chiqadi. X va Y tasodifiy miqdorlarning alohida taqsimot qonunlari quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} X: 0, & 1 \\ p: \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} Y: 0, & 1 \\ p: \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va uning xossalari.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini $F(x,y)$ orqali belgilaymiz.

Ikki o‘lcholi (X,Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi, x va y sonlarning har bir jufti uchun $\{X \le x\}$ va $\{Y \le y\}$ hodisalarning birgalikdagi ehtimolligini aniqlaydigan $F(x,y)$ funksiyasidir: ya‘ni

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P\left((X,Y) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y) = D\right) \quad (3)$$

(X,Y) ikki o‘lchovlik diskret tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi quyidagi yig‘indi orqali aniqlanadi:

$$F(x,y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_i<y} p_{ij} \quad (4)$$

Ikki o‘lchovlik tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $F(x,y)$ taqsimot funksiya chegaralangan: $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas:

$$\text{agar } x_2 > x_1 \text{ bo ‘lsa, } F(x_2, y) \ge F(x_1, y),$$

$$\text{agar } y_2 > y_1 \text{ bo ‘lsa, } F(x, y_2) \ge F(x, y_1).$$

3. $F(x,y)$ funksiyaning biror argumenti $-\infty$ bo‘lsa(limit ma‘nosida), u holda $F(x,y)$ funksiya nolga teng, $F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

4. Agar $F(x,y)$ funksiyaning bitta argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma‘nosida), u holda

$$F(x,+\infty) = F_1(x) = F_X(x); \; F(+\infty, y) = F_2(y) = F_Y(y). \quad (5)$$

4^1. Agar ikkala argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma‘nosida), u holda $F(+\infty,+\infty) = 1$.

5. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha chapdan uzluksiz, ya‘ni $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x,y) = F(x_0, y)$, $\lim\limits_{y \to y_0 - 0} F(x,y) = F(x, y_0)$.

2-misol.

1-misoldagi (X,Y) ikki o‘lchovlik tasodifiy miqdorning hamda X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalarini toping.

Yechish: $F(x) = \sum\limits_{x_i<x} p_i$ formuladan:

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & agar\ \ x\le 0,\\ 0.5, & agar\ \ 0<x\le 1,\\ 1, & agar\ \ x>1,\end{cases}\qquad F_2(y)=\begin{cases}0, & agar\ \ y\le 0,\\ 0.5, & agar\ \ 0<y\le 1,\\ 1, & agar\ \ y>1,\end{cases}$$

(X,Y) ikki o'lchovlik tasodifiy miqdorning $F(x,y)$ taqsimot funksiyasini (4) formulaga ko'ra topamiz:

$X \backslash Y$	$y\le 0$	$0<y\le 1$	$y>1$
$x\le 0$	0	0	0
$0<x\le 1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$
$x>1$	0	$\frac{1}{2}\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)$	$1\left(=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)$

Ikki o'lchovlik uzluksiz tasodifiy miqdor.

Ikki o'lchovlik tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi $F(x,y)$:

1. uzluksiz bo'lsa;
2. har bir argumenti bo'yicha differensiyallanuvchi;
3. $F''_{xy}(x,y)$ ikkinchi tartibli aralash hosila mavjud bo'lsa.

Ikki o'lchovlik (X,Y) tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y) \tag{6}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

$f(x,y)$ zichlik funkiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $f(x,y)\ge 0$.
2. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ (7)
3. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv$ (8)

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$

5. X va Y tasodifiy miqdorlarning bir o‘lchovlik zichlik funksiyalarini quyidagi tengliklar yordamida topish mumkin:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f_X(x); \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = f_Y(y). \qquad (9)$$

3-misol.

(X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning birgalikdagi zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x,y) = \begin{cases} Ce^{-x-y}, & \text{agar } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$$

O‘zgarmas son C ni toping.

3) $F_X(x)$ va $F_Y(y)$

4) $f_X(x)$ va $f_Y(y)$;

5) $P\{X > 0, Y < 1\}$.

Yechish:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$$

tenglikdan

$$C\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x-y}\,dxdy = C\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y}\,dy = C = 1$$

4-misol. 3-misoldagi tasodifiy vektorning va komponentalarining taqsimot funksiyasi topilsin.

1) $F(x,y) = \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y} e^{-u-v}\,dudv = \int\limits_{0}^{x} e^{-u}\,du \cdot \int\limits_{0}^{y} e^{-v}\,dv = (1-e^{-x})(1-e^{-y}), x \ge 0, y \ge 0,$

ya’ni

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}), x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, \quad aks\ holda. \end{cases}$$

$$2)\ \ F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_0^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} e^{-v} dv \right) du = \int_0^x 1 \cdot e^{-u} du = 1 - e^{x},\ \ x \ge 0$$

demak,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Aynan shunday,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

5-misol. 3-misoldagi tasodifiy vector komponentalarining zichlik funksiyasi topilsin.

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-x}\right)'_x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \ \text{va shu kabi}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \left(1 - e^{-y}\right)'_y, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

6-misol. Yuqoridagi misolda $P\{X>0,Y<1\}$ ehtimollik topilsin.

$$P\{X > 0,\ Y < 1\} = \int_0^{\infty} e^{-x} dx \int_0^{1} e^{-y} dy = -\left(e^{-y} - 1\right) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63.$$