



## AMALIY KO'NIKMA

## 11-MAVZU | IKKI O'LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI.

$(X, Y)$  tasodifiy vektorning sonli xarakteristikallari sifatida turli tartibdagi momentlar ko'riladi. Amaliyotda eng ko'p I va II – tartibli momentlar bilan ifodalanuvchi matematik kutilma, dispersiya va korrelatsion momentlardan foydalaniladi.

Ikki o'lchovli diskret  $(X, Y)$  tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi  $(MX, MY)$  bo'lib, bu yerda

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij} \quad (1)$$

va  $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ .

Agar  $(X, Y)$  tasodifiy miqdor uzluksiz bo'lsa, u holda

$$MX = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad MY = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy \quad (2)$$

### Korrelatsiya koeffitsiyenti va uning xossalari.

$X$  va  $Y$  tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M((X - m_x)(Y - m_y)) = \mu_{1,1} \quad (3)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar  $(X, Y)$  tasodifiy miqdor diskret bo'lsa, uning kovariatsiyasi

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} \quad (4)$$

agar uzluksiz bo'lsa,

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy \quad (5)$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Kovariatsiyani quyidagicha hisoblash ham mumkin:

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = MXY - MX \cdot MY \quad (6)$$

Kovariatsiyaning xossalari:

1.  $K_{XY} = K_{YX}$  ;
2. Agar  $X \perp Y$  bo'lsa, u holda  $K_{XY} = 0$  ;
3. Agar  $X$  va  $Y$  ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda  $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2K_{XY}$  ;
4.  $K_{CX, Y} = CK_{XY} = K_{X, CY}$  yoki  $\text{cov}(CX, Y) = C \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, CY)$  ;
5.  $K_{X+C, Y} = K_{XY} = K_{X, Y+C} = K_{X+C, Y+C}$  yoki  $\text{cov}(X + C, Y) = \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, Y + C) = \text{cov}(X + C, Y + C)$  ;
6.  $|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$  .

$X$  va  $Y$  tasodifiy miqdorlarning *korrelatsiya koeffitsienti*

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} \quad (7)$$

formula bilan aniqlanadi.

Korrelyatsiya koeffitsiyentining xossalari:

1.  $|r_{XY}| \leq 1$ , ya'ni  $-1 \leq r_{XY} \leq 1$  ;
2. Agar  $X \perp Y$  bo'lsa, u holda  $r_{XY} = 0$  ;
3. Agar  $|r_{XY}| = 1$  bo'lsa, u holda  $X$  va  $Y$  tasodifiy miqdorlar chiziqli funksional bog'liq bo'ladi, teskarisi ham o'rinli.

Shunday qilib, bogliqsiz tasodifiy miqdorlar uchun  $r_{XY} = 0$  chiziqli bog'langan tasodifiy miqdorlar uchun  $|r_{XY}| = 1$ , qolgan hollarda  $-1 < r_{XY} < 1$ . Agar  $r_{XY} > 0$  bo'lsa, tasodifiy miqdorlar musbat korrelatsiyalangan va aksincha agar  $r_{XY} < 0$  bo'lsa, ular manfiy korrelyatsialangan deyiladi.

**1-misol.**  $(X, Y)$  tasodifiy vektorning taqsimot qonuni quyida keltirilgan.  $MX$  va  $MY$  topilsin.

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.3



1	0.2	0.3	0.1
---	-----	-----	-----

**Yechish.** Yuqoridagi (1) formuladan foydalanamiz:

$$MX = 0 * (0,1 + 0,3 + 0,1) + 1 * (0,2 + 0,3 + 0,1) = 0,6$$

$$MY = -1 * (0,1 + 0,2) + 0 * (0,2 + 0,3) + 1 * (0,3 + 0,1) = 0,1$$

**2-misol.** (X,Y) tasodifiy vektor  $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$  sohada tekis taqsimlangan. Shu tasodifiy vektorning komponentalarining matematik kutilmasi topilsin. MX, MY-?

**Yechish.** Ma'lumki (X,Y) tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$  ko'rinishda bo'ladi. U holda (2) formuladan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$MX = \int_0^1 \int_0^1 x * f(x,y) dx dy = \int_0^1 (\int_0^1 x dx) dy = \int_0^1 (\frac{1}{2}) dy = \frac{1}{2},$$

$$MY = \int_0^1 \int_0^1 y * f(x,y) dy dx = \int_0^1 (\int_0^1 y dy) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

**3-misol.** (X,Y) tasodifiy vektorning taqsimot qonuni quyida keltirilgan. MXY topilsin.

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.3
1	0.2	0.3	0.1

**Yechish.**

$$MXY = 0 * (-1) * 0,1 + 0 * 0 * 0,2 + 0 * 1 * 0,3 + 1 * (-1) * 0,2 + 1 * 0 * 0,3 + 1 * 1 * 0,1 = -0,1.$$

**4-misol.** (X,Y) tasodifiy vektorning taqsimot qonuni quyida keltirilgan. X va Y tasodifiy miqdorlarning kovariatsiya koeffitsienti topilsin.

$X \backslash Y$	-1	0	1
------------------	----	---	---



$X \backslash$			
0	0.1	0.1	0.3
1	0.1	0.1	0.3

**Yechish.** Yuqoridagi (6) formuladan foydalanamiz. Avval  $MXY$ ,  $MX$ ,  $MY$  larni topamiz:

$$MXY = 0 * (-1) * 0,1 + 0 * 0 * 0,1 + 0 * 1 * 0,3 + 1 * (-1) * 0,1 + 1 * 0 * 0,1 + 1 * 1 * 0,3 = 0,2$$

$$MX = 0 * (0,1 + 0,1 + 0,3) + 1 * (0,1 + 0,1 + 0,3) = 0,5$$

$$MY = -1 * (0,1 + 0,1) + 0 * (0,1 + 0,1) + 1 * (0,3 + 0,3) = 0,4$$

$$K_{XY} = cov(X, Y) = MXY - MX * MY = 0,2 - 0,5 * 0,4 = 0.$$

**5-misol.** 4-misolda berilgan tasodifiy vektor komponentalarining dispersiyalari topilsin.

**Yechish.**  $DX = MX^2 - (MX)^2$  formuladan foydalanamiz:

$$MX^2 = 0^2 * 0,5 + 1^2 * 0,5 = 0,5 ;$$

$$DX = 0,5 - (0,5)^2 = 0,25 .$$

Xuddi shunday  $DY$  ni topamiz:

$$MY^2 = (-1)^2 * 0,2 + 0 * 0,2 + 1 * 0,6 = 0,8 ;$$

$$DY = 0,8 - (0,4)^2 = 0,64 .$$

**6-misol.**  $(X, Y)$  tasodifiy vektorning taqsimot qonuni quyida berilgan. Komponentalari orasidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti topilsin.

$X \backslash Y$	0	1
0	0.2	0.3
1	0.4	0.1



**Yechish.** (7) formuladan foydalanamiz. Avval quyidagilarni topamiz.

$$MX=0*0,5+1*0,5=0,5, \quad MX^2=0^2*0,5+1^2*0,5=0,5, \quad DX=0,5-0,5^2=0,25.$$

$$MY=0*0,6+1*0,4=0,4, \quad MY^2=0^2*0,6+1^2*0,4=0,4, \quad DY=0,4-0,4^2=0,24.$$

$$MXY=0*0*0,2+0*1*0,3+1*0*0,4+1*1*0,1=0,1$$

$$K_{XY}=MXY-MX*MY=0,1-0,5*0,4=-0,1$$

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X * \sigma_Y} = \frac{-0,1}{\sqrt{0,25*0,24}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} = -0,41.$$