Estructuras Discretas
Tarea 9 **Por: Pérez Servin Darshan Israel**
Fecha de entrega: martes 21 de noviembre de 2023

Profesor: Nestaly Marín Nevárez
Ayudantes de teoría: Eduardo Pereyra Zamudio
Ricardo López Villafán
Ayudantes de laboratorio: Edgar Mendoza León
David Valencia Rodríguez

Resuelva de manera limpia y ordenada los siguientes ejercicios. Indique claramente el número de pregunta que se esta resolviendo.

1. Traduzca los siguientes enunciados a lógica de predicados. Indique de manera clara el universo de discurso, los predicados que utilizará, y a qué inciso corresponde cada fórmula. Defina un único universo de discurso para todos los predicados.

   Universo: Criaturas
   D(x): x es un dragón
   G(x): x es un grifo
   M(x,y): x es más fuerte que y

   (a) Existen a lo más dos dragones.

   $$\exists x \exists y (D(x) \land D(y) \land \neg \exists z (D(z) \land z \neq x \land z \neq y))$$

   (b) Existen exactamente dos dragones.

   $$\exists ! x \exists ! y (D(x) \land D(y))$$

   (c) Sólo existe un grifo que es más fuerte que todos los dragones.

   $$\exists ! x (G(x) \land \forall y (D(y) \to M(x,y)))$$

   (d) Para todo dragón hay un grifo que es más fuerte que él.

   $$\forall x (D(x) \to \exists y (G(y) \land M(y,d)))$$

2. Considere los siguientes predicados:

   - $P(x)$ x es un número par.
   - $M(x,y)$ x es menor que y.

- $D(x, y)$ la división de x entre y está dentro del conjunto.

(Por ejemplo, la división de los números naturales 6 entre 2 es 3, así que $D(6, 2)$ es verdadero en los números naturales. La división de los números enteros -5 entre 2 es $-5/2$, por lo que $D(-5, 2)$ es falso en los números enteros, mientras que en el dominio de los números reales es verdadero.) Y los siguientes enunciados:

"Cabe aclarar que los contraejemplos no estan estrictamente relacionados con los enunciados, osea que no son directamente una negación de los enunciados y solo se usó lenguaje lógico para explicar los contraejemplos."

1) $\forall x \forall y \left(M\left(x, y\right) \rightarrow \exists z \left(M\left(x, z\right) \land M\left(z, y\right)\right)\right)$
   a) **Es falso para los naturales.**
   Entonces: $\exists x \exists y(((x = 2) \land (y = 3)) \rightarrow \neg \exists z(M(x, z) \land M(z, y)))$
   b) **Es falso para los enteros.**
   Entonces: $\exists x \exists y(((x = -5) \land (y = -4)) \rightarrow \neg \exists z(M(x, z) \land M(z, y)))$
   c) **Es verdadero para los reales.**

2) $\forall x \left(\left(P\left(x\right) \land x \neq 0\right) \rightarrow M\left(0, x\right)\right)$
   a) **Es verdadero para los naturales.**
   b) **Es falso para los enteros.**
   Entonces: $\exists x((x = -2) \rightarrow \neg M(0, x))$
   c) **Es falso para los reales.**
   Entonces: $\exists x((x = -4.6) \rightarrow \neg M(0, x))$

3) $\forall x \forall y \left(x \neq 0 \land y \neq 0 \rightarrow \left(D\left(x, y\right) \land D\left(y, x\right)\right)\right)$
   a) **Es falso para los naturales.**
   Entonces: $\exists x \exists y(x = 2 \land y = 3 \rightarrow (\neg D(x, y) \land \neg D(y, x)))$
   b) **Es falso para los enteros.**
   Entonces: $\exists x \exists y(x = -4 \land y = -7 \rightarrow (\neg D(x, y) \land \neg D(y, x)))$
   c) **Es verdadero para los reales.**

4) La negación del inciso 3)
   $\equiv \neg(\forall x \forall y(x \neq 0 \land y \neq 0 \rightarrow (D(x, y) \land D(y, x))))$
   $\equiv (\exists x \exists y((x \neq 0 \land y \neq 0) \lor \neg(D(x, y) \land D(y, x))))$

   a) **Es verdadero para los naturales.**
   b) **Es verdadero para los enteros.**
   c) **Es falso para los reales.**
   Entonces:
   $(\exists x \exists y((x = 1 \land y = 3) \rightarrow ((x \neq 0 \land y \neq 0) \lor \neg(D(x, y) \land D(y, x)))))$
   $(\exists x \exists y((x = 1 \land y = 3) \rightarrow ((false) \lor \neg(true))))$

$(\exists x \exists y((x = 1 \wedge y = 3) \rightarrow ((false) \vee (false))))$
$(\exists x \exists y((x = 1 \wedge y = 3) \rightarrow (false)))$

Evalúe el valor de verdad de cada enunciado con respecto a cada uno de los siguientes universos de discurso. Para aquellos enunciados que sean falsos, exhiba un contraejemplo (una asignación de individuos del universo en cuestión a las variables tales que el enunciado sea falso).

(a) Los números naturales (incluyendo el 0).

(b) Los números enteros.

(c) Los números reales.

3. Demuestre utilizando inducción que las siguientes fórmulas se cumplen.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

Inducción sobre n:

- Caso base: $n = 1$

  P.D $\sum_{k=1}^{1} k\,(k!) = (1+1)! - 1$

- Demostramos lado izquierdo de la fórmula primero:
  $\sum_{k=1}^{1} k\,(k!) = 1\,(1!)$ Por que la sumatoria solo se repite una vez
  $1\,(1!) = 1, /(1)$ Por matemática
  $1\,(1) = 1$ Por matemática

- Ahora demostramos lado derecho de la fórmula:
  $(0+1)! - 1 = (1)! - 1$ Por inducción matemática
  $(1)! - 1 = 1 - 1$ Por inducción matemática
  $1 - 1 = 0$ Por inducción matemática
  Como en abmbos dan = 0, entonces ya demostramos el caso **base**

- Hipótesis inductiva
  (Suponer que la propiedad se cumple para "n")

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+2)! - 1$$

Probar P(n+1) siendo n+1 = m

$$\sum_{k=1}^{m} k\,(k!) = (n+2)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) + (n+1)\,((n+1)!) =$$

$$= [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)!(1+(n+1)) - 1!$$
$$= (n+1)!(n+2) - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$

(b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ Caso base n=1

Hipótesis inductiva suponesmos P(n) Suponemos $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

Probamos para P(n+1) y que $m = n+1$

Suponemos $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^3$

P.D $= (n+1)^2(2(n+1)^2-1)$

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + (2(n+1)-1)^3$

$n^2(2n^2-1) + (2(n+1)-1)^3$ Por hiótesis inductiva

$n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3$

$n^2(2n^2-1) + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$

$2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

$n^2(2n^2 + 8n + 11n^2 + 6n + 1$