第一章 预备知识

CONTENTS

目录

第 1 节

集合、关系和函数

1.1.1 集合

定义1.1.1 设A,B是任意两个集合, 假如A的每一个元素都是B的成员, 则称A为B的子集, 记作$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$或$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$,读作$A$包含于$B$, 或$B$包含$A$. 符号化表示为

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B),$$

其中“∀”表示“任意”，“⇔”表示命题“等价”，“→”表示“蕴涵”（命题内）.

定义1.1.2 如果集合A的每一个元素都属于B, 但集合B中至少有一个元素不属于A, 则称A为B的真子集, 记作$A \subset B$,读作A真包含于B, 或B真包含A. 符号化表示为

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

或

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge x \notin A).$$

定义1.1.3 设A, B是任意给定的两个集合,如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$,则称集合A和集合B**相等**,记作$A = B$. 符号化表示为

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A,$$

否则,称A与B**不相等**,记作$A \neq B$.

定义1.1.4 不含任何元素的集合称为**空集**,记作$\emptyset$. 符号化表示为

$$\emptyset = \{x|p(x) \wedge \sim p(x)\},$$

其中$p(x)$是任意谓词(谓词是用来描述客体的性质或关系的语句),“~”表示“否”.

定理1.1.1 对于任意一个集合A, $\emptyset \subseteq A$.

由空集和子集的定义可知,对于每个非空集合A,至少有两个不同的子集A和$\emptyset$. 我们称A和$\emptyset$是A的**平凡子集**.

定理1.1.2 空集是唯一的.

定义1.1.5 给定集合A, 由集合A的所有子集组成的集合称为集合A的**幂集**, 记作$\rho(A)$ 或2^A ,

$$\rho(A) = \{B|B \subseteq A\}.$$

例　$A = \{a,b,c\}$, 则$\rho(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

定义1.1.6 在一定范围内, 如果所有集合均为某一集合的子集, 则称该集合为**全集**, 记作E.

对于任一$x \in A$, 因为$A \subseteq E$, 故$x \in E$. 符号化表示为

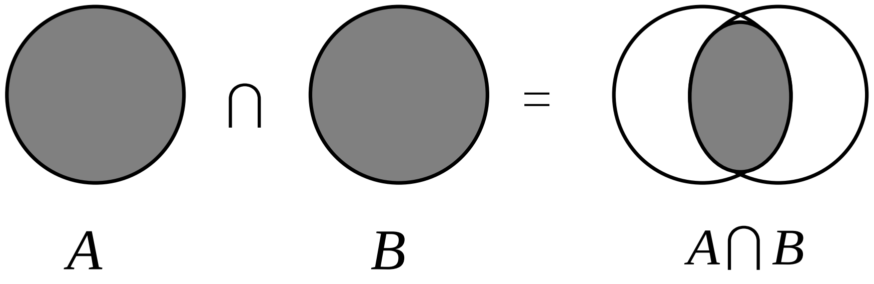
$$E = \{x|p(x) \vee \sim p(x)\},$$

其中$p(x)$是任意谓词, "$\vee$"表示“或”.

定义1.1.7 设任意两个集合A和B, 由集合A和B的所有共同元素组成的集合S, 称为A和B的交集, 记作$A \cap B$. 显然

$$S = A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

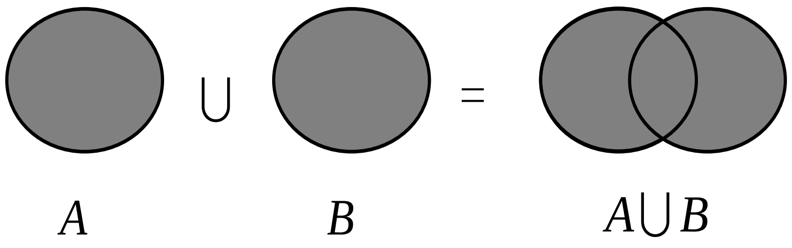
其文氏图下图所示：



定义1.1.8 设任意两个集合A和B, 所有属于A或属于B的元素组成的集合S, 称为A和B的**并集**, 记作$A \cup B$. 显然

$$S = A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

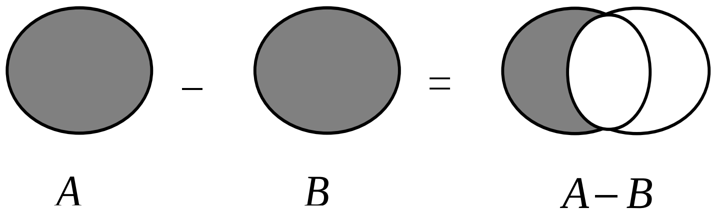
文氏图表示如下：



定义1.1.9 设任意两个集合A和B, 所有属于A而不属于B的一切元素组成的集合S,称为B对A的补集, 或称对称补, 记作$A - B$. 显然

$$S = A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge \sim (x \in B)\}.$$

$A - B$也称为集合A和B的差. 文氏图表示如下图:



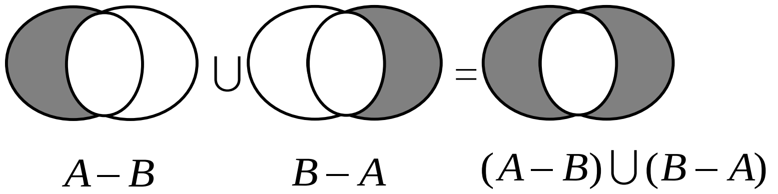
定义1.1.10 设E为全集, 对任一集合A关于E的补集$E - A$, 称为集合A的**绝对补**, 记作$\sim A$或者$\bar{A}$. 显然

$$\sim A = E - A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}.$$

定义1.1.11 设任意两个集合A和B, A和B的**对称差**为集合S, 其元素或属于A, 或属于B, 但不能既属于A又属于B, 记作$A \oplus B$. 显然

$$S = A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

文氏图表示如下图所示：



定理1.1.3 设A,B,C是全集E的任意子集.

(1) 幂等律 $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \oplus B = B \oplus A$

(3) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(4) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

预备知识

(5) 同一律 $A \cup \emptyset = A$

$A \cap E = A$

$A - \emptyset = A$

$A \oplus \emptyset = A$

(6) 零律 $A \cup E = E$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

(7) 互补律 $A \cup \sim A = E$

$A \cap \sim A = \emptyset$

$\sim E = \emptyset$

$\sim \emptyset = E$

(8) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

预备知识

(9) 摩根定律 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

(10) 双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

(11) $A\oplus A=\emptyset$ $A-A=\emptyset$ $A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$

(12) $A\subseteq A\cup B$ $B\subseteq A\cup B$ $A-B\subseteq A$ $A-B=A\cap\sim B$

(13) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$

1.1.2 关系

定义1.1.12 由两个具有给定次序的个体x和y(允许$x = y$)所组成的序列, 称为**序偶**, 记作$<x,y>$. 其中x称为**第一分量**, y称为**第二分量**.

定义1.1.13 设$<a,b>$,$<x,y>$是两个序偶, 则$<a,b>$ $<x,y>$当且仅当$a = x$且$b = y$.

定义1.1.14 由n个具有给定次序的个体$a_1,a_2,\ldots,a_n$组成的序列, 称为**有序n元组**, 记作$<a_1,a_2,\ldots,a_n>$.

定义1.1.15 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是任意给定的n个集合, 若有序n元组$<a_1,a_2,\ldots,a_n>$的第一个分量是取自集合A_1里的元素, 第二个分量是取自集合A_2里的元素, ..., 第n个分量是取自集合A_n里的元素, 则由所有这样的有序n元组所组成的集合称为集合$A_1,A_2,\ldots,A_n$的笛卡儿积, 并用$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$表示, 即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, a_2, \ldots, a_n > | a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

定理1.1.4 笛卡儿积的性质如下：

(1)交换律不成立, 即当$A \neq B$时, $A \times B \neq B \times A$.

(2)结合律不成立, 即$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

(3)下列分配律是成立的：

① $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$；

② $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$；

③ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$；

④ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ ；

⑤ $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$；

⑥ $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

(4) 若$C \neq \emptyset$, 则$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$.

(5) 设A,B,C,D是四个非空集合, 则$A \times B \subseteq C \times D$当且仅当$A \subseteq C$且$B \subseteq D$.

定义1.1.16 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是任意给定的集合, 笛卡儿积$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的任何一个子集$R$称为$A_1,A_2,\ldots,A_n$上的一个***n*元关系**.

特别地, 设A,B是任意两个集合, 则笛卡儿积$A\times B$的任意一个子集R称为从集合A到集合B的一个**二元关系**, $<a,b>\in R$也可表示为aRb. 如果一个二元关系是从集合A到其自身的关系，则这样的二元关系称为集合A上的关系.

对于有限集合上的二元关系R除了可以用序偶集合表示外，还可以用矩阵（通常称作**关系矩阵**）表示. 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$, R为从A到B的一个二元关系，则对应于关系R的关系矩阵为$M_R=[r_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, 当 <a_i,a_j>\in R\\ 0, 当 <a_i,a_j>\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n).$$

预备知识

定义1.1.17 设R是从集合A到集合B的一个二元关系，则由R中所有序偶的第一个分量组成的集合称为关系R的**定义域**，记作$D(R)$，由R中所有序偶的第二个分量组成的集合称为关系R的**值域**，记作$V(R)$，即

$$D(R) = \{a|a \in A \wedge (\exists b)(< a, b >\in R)\},$$
$$V(R) = \{b|b \in B \wedge (\exists a)(< a, b >\in R)\}.$$

显然，$D(R) \subseteq A$，$V(R) \subseteq B$.

定义1.1.18 设R是从集合A到集合B的一个二元关系，若$R = \emptyset$，则称R为**空关系**，若$R = A \times B$，则称R为**全域关系**.

定义1.1.19 设I_X是集合X上的二元关系，如果$I_X = \{< x, x > |x \in X\}$，则称$I_X$为$X$中的**恒等关系**.

预备知识

定义1.1.20 设R是集合X上的二元关系，如果对于任意的$x \in X$，有xRx，则称R是**自反的**，即

$$R\text{在X上自反} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \rightarrow xRx).$$

定义1.1.21 设R是集合X上的二元关系，如果对于任意的$x \in X$，都有$< x, x > \notin R$，则称R为**反自反的**，即

$$R\text{在X上反自反} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \Rightarrow < x, x > \notin R)$$

定义1.1.22 设R是集合X上的二元关系，对于任意的$x, y \in X$，若有xRy时，就有yRx,则称R是**对称的**，即

$$R\text{在X上对称} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx).$$

定义1.1.23 设R是集合X上的二元关系，对于任意的$x, y \in X$，若有xRy, yRx, 就有$x = y$，则称R是**反对称的**，即

$$R\text{在X上反对称} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

定义1.1.24 设R是集合X上的二元关系，对于任意的$x, y, z \in X$，若有xRy, yRz, 就有xRz, 则称R是**传递的**, 即

$$R\text{在X上传递} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y))(\forall \mathrm{z})(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz).$$

定义1.1.25 设R是集合X上的二元关系，若R是自反、对称和传递的，则称R为X上的**等价关系**.

定义1.1.26 设R为X到Y的关系，S为Y到Z的关系，则$S \circ R$称为R和S的**复合关系**, 即

$$S \circ R = \{< x, z > | x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S)\}.$$

定理1.1.5 复合运算的性质如下：

(1)满足结合律，即$(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$；

(2)不满足交换律，即$R \circ S \neq S \circ R$；

(3)复合运算对并运算满足分配律，即

$$R \circ (S \cup P) = (R \circ S) \cup (R \circ P),$$
$$(S \cup P) \circ R = (S \circ R) \cup (P \circ R);$$

(4)复合运算对交运算满足下面的包含关系，即

$$R \circ (S \cap P) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ P),$$
$$(S \cap P) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (P \circ R);$$

(5)设R是X到Y的关系，I_X是X中的恒等关系，I_Y是Y中的恒等关系，则

$$I_X \circ R = R \circ I_Y = R.$$

定义1.1.27 设R是集合A上的二元关系, n为自然数, 则R的n次幂记作R^n, 并且规定

(1)$R^0 = I_A$;

(2)$R^{n+1} = R^n \circ R$.

定理1.1.6 设R是集合X中的二元关系, $m.n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

(2) $(R^m)^n = R^{m\times n}$.

定义1.1.28 设R是X到Y的二元关系, 若将R中每一序偶的元素顺序互换, 则所得到的集合称为R的逆关系, 记作R^c, 即

$$R^c = \{< y,x > \mid < x,y >\in R\}.$$

定理1.1.7 设R_1,R_2,R_3都是从A到B的二元关系, 则下列各式成立.

(1) $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$;

(2) $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$;

(3) $(A \times B)^c = B \times A$;

(4) $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$(或$(\sim R)^c = \sim R^c$);

(5) $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$.

1.1.3 函数

定义1.1.29 设X和Y是任意两个集合, 而f是X到Y的一个关系, 若对每一个$x\epsilon X$, 都有唯一的$y\epsilon Y$, 使得$<x,y>\epsilon f$, 则称关系f为**函数**, 记作$f:X\rightarrow Y$或$X\xrightarrow{f}Y$若$<x,y>\epsilon f$, 则x称为**自变元**, y称为在f作用下x的**象**. $<x,y>\epsilon f$也可以记作$y=f(x)$,且记$f(X)=\{f(x)|x\epsilon X\}$.

定义1.1.30 设f,g都是从A到B的函数, 若它们有相同的定义域和值域, 并且对任意的$x\in A$都有$f(x)=g(x)$, 则称函数f与g**相等**, 记作$f=g$.

定义1.1.31 对于$X\xrightarrow{f}Y$的映射中, 如果$ran\ f=Y$, 即Y的每一个元素是X中一个或多个元素的象,则称这个映射为**满射**.

定义1.1.32 从X到Y的映射中, 若X中没有两个元素有相同的象, 则称这个映射为**入射**。

定义1.1.33 从X到Y的映射,若既是满射又是入射,则称这个映射是**双射**的，也称这样的映射是一一对应的.

定理1.1.8 令X和Y为有限集,若X和Y的元素个数相同,记为$|X| = |Y|$,则$f: X \to Y$是入射的,当且仅当它是一个满射.

定理1.1.9 设f:X→Y是一双射函数,那么f^c是$Y \to X$的双射函数.

定义1.1.34 设f:X→Y是一双射函数,称$Y \to X$的双射函数f^c为f的**逆函数**,记作f^{-1}.

定义1.1.35 设函数f:X→Y,$g: W \to Z$,若$f(X) \subseteq W$,则

$$g \circ f = \{< x, z > | x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y)\left(y \in Y \wedge y = f(X) \wedge z = g(y)\right)\},$$

称g在函数f的左边可复合.

定理1.1.10 两个函数的复合是一个函数.

定理1.1.11 令$g \circ f$是一个复合函数.

(1) 若g和f是满射的, 则$g \circ f$是满射的;

(2) 若g和f是入射的, 则$g \circ f$是入射的;

(3) 若g和f是双射的, 则$g \circ f$是双射的.

定义1.1.36 函数$f: X \rightarrow Y$叫作**常函数**, 如果存在某个y_0, 则对于每个$y_0 \epsilon y$都有$f(x) = y_0$, 即$f(X) = y_0$.

定义1.1.37 如果$I_X = \{< x, x > | x \in X\}$, 则称$I_X = X \rightarrow X$为**恒等函数**.

定理1.1.12 设函数$f: X \rightarrow Y$, 则$f = f \circ I_X = I_Y \circ f$.

定理1.1.13 若$f: X \rightarrow Y$是双射函数, 则$(f^{-1})^{-1} = f$.

定理1.1.14 若$f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$都是双射函数, 则$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

定义1.1.39 当且仅当在集合A与集合B之间存在一一对应的函数时, 集合A与集合B称为**等势的**(或称**同浓的**), 记作$A \sim B$.

定理1.1.15 在集合族上等势关系是一个等价关系.

定义1.1.40 如果有一个从集合{0,1,...,n-1}到A的双射集合, 那么称集合A是有限的；如果集合A不是**有限的**, 则它是**无限的**.

定理1.1.16 自然数集合N是无限的.

第 2 节

组合数学初步知识

1.2.1 排列与组合

定义1.2.1 设$S_1, S_2, \ldots, S_m$是集合S的子集, 且

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m, \text{其中} S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j,$$

则称$S_1, S_2, \ldots, S_m$是S的一个**划分**.

定理1.2.1(加法原理) 设$S_1, S_2, \ldots, S_m$是集合S的一个划分, 则

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m|.$$

定理1.2.2(乘法原理) 设$S_1, S_2, \ldots, S_m$是m个有限集, 则

$$|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_m|.$$

定理1.2.3(减法原理) 设E为全集, 则

$$|A| = |E| - |E - A|.$$

定理1.2.4(除法原理) 设S为有限集合, 它被划分为m个部分, 且每个部分所含元素数量相同, 则

$$m = \frac{|S|}{\text{单独一个部分中的元素数量}}$$

定义1.2.2 设S是一个n集, r是正整数, 则笛卡儿积

$$\underbrace{S \times S \times \cdots S}_{r} = \{<a_1, a_2, \ldots, a_r>| a_i \in S, i = 1, 2, \ldots, r\}$$

的元素$<a_1,a_2,\ldots,a_r>$称为S的一个**r重排列**, 其个数记为$RP(\infty, r)$.

定理1.2.5 n集S的r重排列的个数为$RP(\infty, r) = n^r$.

定义1.2.3 若n集S的r重排列$<a_1,a_2,\ldots,a_r>$中的分量互不相同, 则称这个r重排列为S的r排列, 或称n集的***r*排列**. n集中所有不同r排列的个数记为$P(n,r)$. 当$n = r$时, n集的r排列简称为n集的**全排列**.

定理1.2.6 $P(n,r)=n(n-1)\ldots(n-r+1)$.

推论 $\mathrm{P}(n,n)=n!$.

定理1.2.7 $CP(n,r)=\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$.

定义1.2.4 设S是一个n集, r是一个非负整数, 则称$[b_1,b_2,\ldots,b_r]$为S的***r*可重组合**, 其中$b_1,b_2,\ldots,b_r\in S$, 但未必互不相同. S中的元素b在r可重组合$[b_1,b_2,\ldots,b_r]$中出现的次数称为b在这个可重组合中的**重数**.

定义1.2.5 设S是一个n集, $[b_1,b_2,\ldots,b_r]$为S的r可重组合, 若S中的每个元素在此r可重组合中的重数均为0或1, 即$\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\ldots,\mathrm{b}_\mathrm{r}$互不相同, 则称$[\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2,\ldots,\mathrm{b}_\mathrm{r}]$为$S$的**r组合**, 或称$n$集的$r$组合. n集中所有不同r组合的个数记为$C(n,r)$或$\left\{\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right\}$.

定理1.2.8 $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$

推论 对于$r\leq n, C(n,r)=C(n,n-r)$

定理1.2.9 n集中所有不同的r可重组合的个数为

$$RC(\infty,r)=C(n-r+1,r).$$

定理1.2.10(加法公式) $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1).$

定理1.2.11(乘法公式) $C(n,k)C(n,r)=C(n,r)C(n-r,k-r).$

定理1.2.12

$$C(n+r+1,r)=\sum_{i=0}^{r}C(n+i,i)=C(n+r,r)+C(n+r-1,r-1)+\cdots+C(n,0)$$

预备知识

定理1.2.13(二项式定理) 设n为正整数, 则

$$(a+b)^n\sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^r b^{n-r}.$$

定理1.2.14(和式公式) $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)=2^n.$

定理1.2.15(范德蒙恒等式)

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

推论 若$m\leq n$, 则

$$\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{i}$$

1.2.2 生成函数

定义1.2.6 对于数列$\{a_n\}$, 称

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

为该数列的**生成函数**. 同时, 称$\{a_n\}$为$G(x)$的**生成数列**.

定理1.2.16

(1) $A(x) = B(x)$, 当且仅当$a_k = b_k$, $k = 0,1,2,\ldots$;

(2) $A(x) + B(x) = C(x)$, 当且仅当$a_k + b_k = c_k$, $k = 0,1,2,\ldots$;

(3) $A(x)B(x) = C(x)$, 当且仅当

$$c_0 = a_0 b_0,$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

$$\vdots$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0,$$

$$\vdots$$

定理1.2.17 若$b_k=\begin{cases}0, k<r\\ a_{k-r}, k\geq r\end{cases}$, 则$B(x)=x^r A(x)$.

定理1.2.18 若$b_k=a_{k+r}$, 则

$$B(x)=\frac{A(x)-\sum_{i=0}^{r-1}a_i x^i}{x^r}.$$

定理1.2.19 若$b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$, 则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}.$$

定理1.2.20 若$\sum_{i=0}^{\infty}a_i$收敛, 且$b_k=\sum_{i=k}^{\infty}a_i$, 则

$$B(x)=\frac{A(1)-xA(x)}{1-x}.$$

定理1.2.21 若$b_k = ka_k$, 则

$$B(x) = xA'(x).$$

定理1.2.22 若$b_k = \frac{a_k}{1+k}$, 则$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$.

定义1.2.7 将一个正整数n分解成k个正整数之和, 即

$$\begin{cases} n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, k \geq 1 \\ \quad n_i \geq 1, i = 1,2,\dots,k \end{cases}$$

我们称该分解是n的一个***k*拆分**, 并称n_i为**分项**.

根据是否需要考虑分项n_i之间的顺序, 可将拆分分为两类. 例如,

$$6 = 2 + 2 + 1 + 1 \text{和} 6 = 1 + 2 + 1 + 2$$

都是6的4拆分. 若考虑n_i之间的顺序, 则这两个拆分被认为是不同的, 我们称这样的拆分为**有序拆分**. 否则, 不考虑n_i之间的顺序, 则这两个拆分被认为是相同的, 我们称这样的拆分为**无序拆分**.

定理1.2.23 对于n的k有序拆分

$$\begin{cases} n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, k \geq 1 \\ 1 \leq n_i \leq r_i, \quad i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

其k有序拆分的个数的数列$\{q_k(n)\}$的生成函数为

$$G(x) = (x + x^2 + \cdots + x^{r_1})(x + x^2 + \cdots + x^{r_2}) \ldots (x + x^2 + \cdots + x^{r_k}).$$

定义1.2.8 正整数n的所有(无序)拆分的个数称为n的拆分数, 记作$p(n)$, 即

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$