环

1. 在$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$中定义加法和乘法: 对于任意$(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac,bd)$$

证明$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$是一个有零因子的交换环.

2. 证明$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\times)$是整环也是域.

3. 设C是实数域$\mathbb{R}$上的所有实函数构成的集合, 定义加法与乘法为: 对于任意$f,g\in C,\ x\in\mathbb{R}$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(fg)(x)=f(g(x))$$

试问C对于上述加法、乘法是否构成环?

4. 设在非空集合R中定义了加法与乘法两种运算, 且
1) R对加法为群;
2) R对乘法为幺半群;
3) 加法与乘法间有分配律.
证明R为幺环.

5. 若环R的非零元素e满足$e^2=e$, 则称e为**幂等元**. 证明若无零因子环R 有幂等元e, 则R为整环, 且e为R的幺元.

6. 设R是交换整环, $R[x]$是R上的一元多项式环, $f, g \in R[x]$. 证明$\text{deg} fg = \text{deg} f + \text{deg} g$.

7. 证明交换环R的任意一族理想的交是R的理想.

8. 设R是环, $a \in R$. 若$\exists m \in \mathbb{N}$使得$a^m = 0$, 则称a是一个**幂零元**. 证明交换环R的幂零元集合是R的理想.

9. 证明$\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$.

10. 证明$u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$在$\mathbb{Q}$上是代数的, 并求出$\mathbb{Q}[x]$中的理想I, 使得$\mathbb{Q}[u] \cong \mathbb{Q}[x]/I$.

11. 设$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, 证明$\mathbb{Q}[\omega] \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$.

12. 证明$\sqrt{-3}$是$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$的素元素.

13. 在高斯整数环中, 对2,3,5进行素元素分解.

14. 证明$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$不是唯一析因环.

15. 设R是主理想整环, I是R的理想, 且$I \neq \{0\}$. 试证:

(1) R/I的每个理想都是主理想;

(2) R/I中仅有有限多个理想.

16. 设R是交换整环, 但不是域. 证明$R[x]$不是主理想整环.

17. 证明$R = \{a + \frac{b}{2}(1 + \sqrt{-3}) | a, b \in \mathbb{Z}\}$为Euclid环.

18. 设R为Euclid环, 且$\delta(ab) = \delta(a)\delta(b)$. 证明$a \in U \Leftrightarrow \delta(a) = \delta(1)$.

19. 试证$\langle x \rangle$是$\mathbb{Z}[x]$中的素理想而非极大理想.

20. 取$m \in \mathbb{N}, m > 1$, 令$A = \{f(x) | f(x) \in \mathbb{Z}[x], m | f(0)\}$, 证明:

(1) A是$\mathbb{Z}[x]$的理想;

(2) $\langle x\rangle \subset A \subset \mathbb{Z}[x]$;

(3) m为素数时, A是素理想.

选做题

1. 设f是环R到环R'的同态映射, $K = \mathrm{ker} f$, 证明:

(1) f建立了R中包含K的子环与R'的子环的一一对应;

(2) f把理想映射为理想;

(3) 若I是R的理想且$K \subseteq I$, 则$R/I \cong R'/f(I)$.

2. (中国剩余定理) 若R的理想I, J满足$I + J = R$, 则称I, J互素. $I_1, \ldots, I_n$是R中两两互素的理想, 证明:

$$R/\cap_{i=1}^{n} I_i \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

3. 设R是一个无限的主理想整环. 试证若R中只有有限个可逆元, 则R中有无限多个素理想.

4. 证明$\mathbb{Z}_p[x]$(p 为素数)有无限多个不可约多项式.