

第1章习题

1. (1) 设 $A = \{a, \{a\}\}$, 下列各式成立吗? (2) 若 $A = \{a, \{b\}\}$, 下列各式成立吗?

$$\{a\} \in \rho(A); \quad \{a\} \subseteq \rho(A); \quad \{\{a\}\} \in \rho(A); \quad \{\{a\}\} \subseteq \rho(A).$$

2. 设 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$, 求:

- (1) $A \cap \sim B$;
- (2) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (3) $\sim (A \cup B)$;
- (4) $\rho(A) - \rho(C)$.

3. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明下列各式:

- (1) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;
- (2) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

4. 对于任意三个集合 A, B, C , 试证明: 若 $A \times B = A \times C$, 且 $A \neq \emptyset$, 则 $B = C$.

5. 证明若 S 为集合 X 上的二元关系, 则

- (1) S 是传递的, 当且仅当 $(S \circ S) \subseteq S$;
- (2) S 是自反的, 当且仅当 $I_X \subseteq S$.

6. 下列关系中哪些是函数? 哪些是满射? 哪些是单射? 对于每一个函数写出它的逆函数.

(1) $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_1(x) = x^2 + 1;$

(2) $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f_2(x) = \frac{1}{x};$

(3) $f_3 : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\alpha, \beta, \chi\}, f_3 = \{< 1, \alpha >, < 2, \beta >, < 3, \chi >\}.$

7. 试证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$

(2) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$

8. 给定实数域 \mathbb{R} 上的 n 阶方阵 A , v 为实数域上的任意 n 维向量, 证明: 映射 $v \mapsto Av$ 是单射当且仅当方阵 A 的行列式值 $\det(A) \neq 0$

9. 证明素数集合和合数集合都是可数集.

10. 试给出正整数集合 \mathbb{Z}^+ 到 $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ 的一一映射.