第 1 章 预备知识

集合、关系、函数、映射与势和拓扑空间等概念是构成近代数学体系的基础内容，也是信息安全专业“信息安全数学基础”课程的基本概念和基础知识．本章将介绍这些朴素的概念，为后续章节的学习做必要的知识准备.

1.1 集合

1. 集合的概念

集合论是德国数学家康托尔（Georg Cantor）于十九世纪末创立的，康托尔当时建立的集合论称为朴素集合论．二十世纪初，德国数学家策梅罗（Zermelo）给出了第一个集合论的公理系统，并在此基础上逐步形成了公理化集合论和抽象集合论，使该学科成为在数学领域中发展较快的一个分支.

集合论是现代数学的基础，通俗地讲，数学所研究的一切概念都可以用集合来定义，甚至包括很多我们已经非常熟悉的概念，如整数、实数和函数等，都可以用集合表示．此外，集合概念的引入，也使得我们能够摆脱一些具体要求的束缚，建立和研究很多抽象的数学概念和对象，从而得到很多抽象层次上的具有更多普遍含义的结论，这一点将在本书的第 6 章等后续章节中得到较多的体现．现在，集合论观点已经渗透到了现代代数学、几何学、分析学概率论和信息论等各个领域．本节将介绍集合论的基础知识，从而引入后续的包括集合与关系、集合运算、函数和等势的概念及规则.

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一．一般来讲，把具有共同性质的一些事物汇集成一个整体，就形成一个**集合**，而这些事物称为**元素**或**成员**．例如，所有 0 和 1 之间的实数，坐标平面中的所有点，所有整数，整数中的所有素数，实数域上的所有连续函数，等等.

我们通常用大写英文字母 $A, B, \ldots$ 表示集合，小写英文字母 $a, b, \ldots$ 表示集合中的元素.

若元素 a 是集合 S 中的元素，记作 $a \in S$，读作 a 属于 S，或 a 在 S 之中．若元素 a 不是集合 S 中的元素，记作 $a \notin S$，读作 a 不属于 S，或 a 不在 S 之中.

对于一个集合 S，如果它是由有限个元素组成的，称 S 为**有限集**；否则称 S 为**无限集**.

集合通常有两种表示方法．第一种方法是把集合中的所有元素列举出来，称作**列举法**.
例如

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

第二种方法称为**叙述法**，即用一种规则来限定某个元素是否属于该集合．例如

$$S_1 = \{x \mid x\text{是正整数}\}, \quad S_2 = \{x \mid x \in N \wedge x \leqslant 9\}, \quad S_3 = \{x \mid x \in R \wedge 5x^2 - 1 = 0\},$$

其中“$\wedge$”表示“并且”.

定义 1.1.1 设 A, B 是任意两个集合，假如 A 的每一个元素都是 B 的成员，则称 A 为 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作 A **包含于** B，或 B **包含** A．符号化表示为

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B),$$

其中“$\forall$”表示“任意”，“$\Leftrightarrow$”表示命题“等价”，“$\rightarrow$”表示“蕴涵”（命题内）.

例如，设$\mathbb{N}$为自然数集，$\mathbb{Q}$为有理数集，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1\}$，则

$$A\subseteq\mathbb{N},\quad B\subseteq A,\quad B\subseteq\mathbb{N},\quad \mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}.$$

定义 1.1.2 如果集合A的每一个元素都属于B，但集合B中至少有一个元素不属于A，则称A为B的**真子集**，记作$A\subset B$，读作A**真包含于**B，或B**真包含**A. 符号化表示为

$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B,$$

或

$$A\subset B\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(\exists x)(x\in B\wedge x\notin A).$$

例如，整数集$\mathbb{Z}$是有理数集$\mathbb{Q}$的真子集.

定义 1.1.3 设A，B是任意给定的两个集合，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称集合A和集合B**相等**，记作$A=B$. 符号化表示为

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A,$$

否则，称A与B**不相等**，记作$A\neq B$.

几乎在数学的所有分支中，都会经常遇到需要证明两个集合相等的问题，请注意，这个定义就是证明两个集合相等的关键所在，一般的证明步骤总结如下：

第一步：从集合A中任意选择一个元素，我们能够证明这个元素也属于集合B，根据定义 1.1.1，我们可以推得$A\subseteq B$；

第二步：从集合B中任意选择一个元素，我们能够证明这个元素也属于集合A，根据定义 1.1.1，我们可以推得$B\subseteq A$；

第三步：根据定义 1.1.3，我们可以推得$A=B$.

例如，若$A=\{3, 6, 9\}$，$B=\{6, 9, 3\}$，$C=\{3, 9\}$，则可知$A=B$，$A\neq C$.

从这个例子中可以看出，集合中元素的排列顺序是无关紧要的.

定义 1.1.4 不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$. 符号化表示为

$$\varnothing=\{x\mid p(x)\wedge\sim p(x)\},$$

其中$p(x)$是任意谓词(谓词是用来描述客体的性质或关系的语句)，“$\sim$”表示“否”.

定理 1.1.1 对于任意一个集合A，$\varnothing\subseteq A$.

证明 假设$\varnothing\subseteq A$是假，则至少存在一个元素x，使$x\in\varnothing$且$x\notin A$. 因为空集$\varnothing$不包含任何元素，所以假设不成立，产生矛盾. 定理得证.

由空集和子集的定义可知，对于每一个非空集合A，至少有两个不同的子集A和$\varnothing$. 我们称A和$\varnothing$是A的**平凡子集**.

定理 1.1.2 空集是唯一的.

证明 用反证法. 假设存在两个空集$\varnothing_1$和$\varnothing_2$. 因为空集被包含于每一个集合中，于是有

$$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$$

且

$$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1,$$

故$\varnothing_1=\varnothing_2$，即空集是唯一的.

定义 1.1.5 给定集合A，由集合A的所有子集组成的集合称为集合A的**幂集**，记作$\rho(A)$或2^A，即

$$\rho(A)=\{B\mid B\subseteq A\}.$$

例如，对于$A=\{a, b, c\}$，我们有$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$.

定义 1.1.6 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为**全集**，记作$\boldsymbol{E}$.

对于任一$x\in A$，因为$A\subseteq E$，故$x\in E$. 符号化表示为

$$E = \{x \mid p(x) \vee \sim p(x)\},$$
其中 $p(x)$是任意谓词，“$\vee$”表示“或”.

需要说明的是，全集是一个相对的概念，研究的问题不同，所取的全集也往往不同.

2. 集合运算

集合的运算就是以给定的集合为对象，按照确定的规则得到另外一些集合. **文氏图**(Venn Diagram)可以直观、形象地表示集合间的关系及运算结果. 在文氏图中，通常用一个矩形表示全集 E，然后在矩形的内部画一些圆（或其他封闭的曲线），圆的内部代表集合，不同的圆代表不同的集合.

定义 1.1.7 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合 S，称为 A 和 B 的**交集**，记作 $A \cap B$. 显然
$$S = A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$
其文氏图如图 1.1.1 所示.

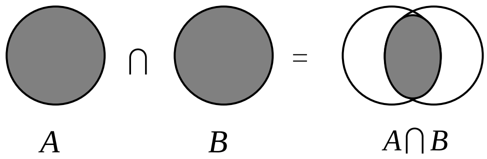

图 1.1.1 集合的交集

例 1.1.1 设 $A = \{0, 2, a, 7, c\}$，$B = \{r, m, 0, c, 2\}$，求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{0, 2, c\}$.

例 1.1.2 设 $A \subseteq B$，C 是任意集合，求证 $A \cap C \subseteq B \cap C$.

证明 由 $A \subseteq B$ 可知，若 $x \in A$，则 $x \in B$. 对于任意的 $x \in A \cap C$，由集合$\cap$的定义，有 $x \in A$ 且 $x \in C$，即 $x \in B$ 且 $x \in C$，故 $x \in B \cap C$. 因此，$A \cap C \subseteq B \cap C$.

定义 1.1.8 设任意两个集合 A 和 B，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合 S，称为 A 和 B 的**并集**，记作 $A \cup B$. 显然
$$S = A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$
文氏图表示如图 1.1.2 所示.

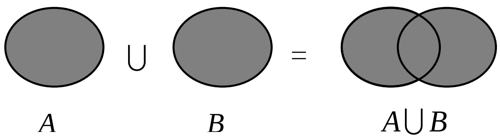

图 1.1.2 集合的并集

例 1.1.3 设 $A = \{a, 2\}$，$B = \{2, m\}$，求 $A \cup B$.

解 $A \cup B = \{a, 2, m\}$.

例 1.1.4 设 $A \subseteq B$，$C \subseteq D$，求证 $A \cup C \subseteq B \cup D$.

证明 对任意 $x \in A \cup C$，有 $x \in A$ 或 $x \in C$. 若 $x \in A$，则由 $A \subseteq B$，有 $x \in B$，故 $x \in B \cup D$. 若 $x \in C$，则由 $C \subseteq D$，有 $x \in D$，故 $x \in B \cup D$. 因此，$A \cup C \subseteq B \cup D$.

例 1.1.5 求证下列命题.

(1) $A \subseteq B$，当且仅当 $A \cup B = B$；

(2) $A \subseteq B$，当且仅当 $A \cap B = A$.

证明 (1) 若 $A \subseteq B$，则对任意的 $x \in A$，必有 $x \in B$．又由于对任意的 $x \in A \bigcup B$，有 $x \in A$ 或 $x \in B$，故 $x \in B$，所以 $A \bigcup B \subseteq B$．又 $B \subseteq A \bigcup B$，于是得到 $A \bigcup B = B$．反之，若 $A \bigcup B = B$，因为 $A \subseteq A \bigcup B$，所以 $A \subseteq B$.

(2) 其证明过程与(1)类似，留给读者完成.

定义 1.1.9 设任意两个集合 A 和 B，所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合 S，称为集合 B 对 A 的**补集**，或称集合 B 对 A 的**对称补**，记作 $A-B$．显然

$$S = A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge \sim (x \in B)\}.$$

$A - B$ 也称为集合 A 和 B 的**差**．文氏图表示如图 1.1.3 所示.

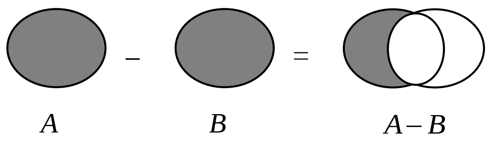

图 1.1.3 集合的对称补集

例 1.1.6 设 $A = \{a, 7, c\}$，$B = \{m, c, 2\}$，求 $A - B$.

解 $A - B = \{a, 7\}$.

定义 1.1.10 设 E 为全集，对任一集合 A 关于 E 的补集 $E - A$，称为集合 A 的**绝对补**，记作 $\sim A$ 或者 $\bar{A}$．显然

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}.$$

例 1.1.7 设 A, B 为任意两个集合，则 $A - B = A \bigcap \sim B$.

证明 对于任意的 x，有

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B \Leftrightarrow x \in A \bigcap \sim B,$$

所以 $A - B = A \bigcap \sim B$.

定义 1.1.11 设任意两个集合 A 和 B，A 和 B 的**对称差**为集合 S，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B，记作 $A \oplus B$．显然

$$S = A \oplus B = (A - B) \bigcup (B - A) = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

文氏图表示如图 1.1.4 所示.

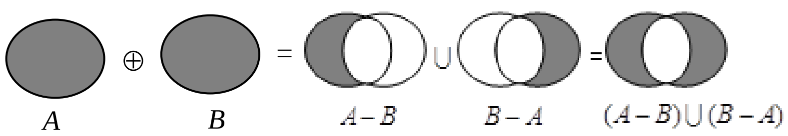

图 1.1.4 集合的对称差集

例 1.1.8 设 $A = \{4, 6, 8\}$，$B = \{1, 4, 8\}$，求 $A \oplus B$.

解 $A \oplus B = \{1, 6\}$.

下面给出集合运算性质中最主要的几条定律.

定理 1.1.3 设 A, B, C 是全集 E 的任意子集.

(1) 幂等律 $A \bigcup A = A$

$A \bigcap A = A$

(2) 交换律 $A \bigcup B = B \bigcup A$

$A \bigcap B = B \bigcap A$

$A \oplus B = B \oplus A$

(3) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(4) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(5) 同一律 $A \cup \varnothing = A$

$A \cap E = A$

$A - \varnothing = A$

$A \oplus \varnothing = A$

(6) 零律 $A \cup E = E$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

(7) 互补律 $A \cup \sim A = E$

$A \cap \sim A = \varnothing$

$\sim E = \varnothing$

$\sim \varnothing = E$

(8) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(9) 摩根定律 $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(10)双重否定律 $\sim (\sim A) = A$

(11) $A \oplus A = \varnothing$ $A - A = \varnothing$ $A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$

(12) $A \subseteq A \cup B$ $B \subseteq A \cup B$ $A - B \subseteq A$ $A - B = A \cap \sim B$

(13) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$

对于上面的集合基本定律，下面以例题的形式证明其中的一部分，其余的留给读者作为习题完成.

例 1.1.9 证明幂等律 $A \cup A = A$.

证明 对于任意的 x，有

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A,$$

所以 $A \cup A = A$.

例 1.1.10 证明交换律 $A \cap B = B \cap A$.

证明 对于任意的 x，有

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A,$$

所以 $A \cap B = B \cap A$.

例 1.1.11 证明分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

证明 对于任意给定的 x，有

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

所以$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

例 1.1.12 证明吸收律，即$A \cup (A \cap B) = A$.

证明 $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B) = A \cap (E \cup B) = A \cap E = A$.

例 1.1.13 证明摩根定律$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$.

证明

$$
\begin{aligned}
\sim (A \cup B) &= \{x \mid x \in \sim (A \cup B)\} = \{x \mid x \notin A \cup B\} = \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} \\
&= \{x \mid (x \in \sim A) \wedge (x \in \sim B)\} = \sim A \cap \sim B
\end{aligned}
$$

例 1.1.14 证明分配律$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

证明 由于

$$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \sim C) = A \cap B \cap \sim C,$$

又

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \sim (A \cap C) \\
&= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C) \\
&= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B \cap \sim C) \\
&= A \cap B \cap \sim C
\end{aligned}
$$

故可知$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

习题 1.1

A 组

1. (1) 设$A = \{a, \{a\}\}$，下列各式成立吗？

$$\{a\} \in \rho(A)\text{；}\quad \{a\} \subseteq \rho(A)\text{；}\quad \{\{a\}\} \in \rho(A)\text{；}\quad \{\{a\}\} \subseteq \rho(A).$$

   (2) 若$A = \{a, \{b\}\}$, (1)中的各式成立吗？

2. 设$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $C = \{2, 4\}$，求

   (1) $A \cap \sim B$；

   (2) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$；

   (3) $\sim (A \cup B)$；

(4) $\rho(A)-\rho(C)$.

3. 证明集合运算定律定理 1.1.3 中其余部分.

B 组

4. 设 A, B, C 是任意三个集合，证明下列各式：

(1) $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$；

(2) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

1.2 关系

关系的概念在日常生活中是普遍存在的. 在数学中，关系用来表达集合中元素间的联系. 在介绍关系的概念之前，我们首先介绍一下序偶和笛卡儿积的概念.

定义 1.2.1 由两个具有给定次序的元素 x 和 y（允许 $x = y$）所组成的序列，称为**序偶**或**数对**，记作 $<x, y>$. 其中称 x 为**第一分量**, 称 y 为**第二分量**.

序偶可以看作是具有两个元素的集合，但它与一般集合不同的是，序偶具有确定的次序. 例如，在集合中, 有 $\{a, b\} = \{b, a\}$，但对于序偶 $<a, b> \neq <b, a>$.

定义 1.2.2 设 $<a, b>$, $<x, y>$ 是两个序偶，则 $<a, b> = <x, y>$ 当且仅当 $a = x$ 且 $b = y$.

注意，这个定义告诉我们证明两个序偶相等的关键在于，分别证明两个位置上的对应元素相等.

定义 1.2.3 由 n 个具有给定次序的个体 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 组成的序列，称为**有序 n 元组**，记作 $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$.

有序 n 元组的实质依然是序偶，可将其表示为

$<a_1, a_2, \ldots, a_n> = <<a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}>, a_n> = \cdots = <<<\cdots<<a_1, a_2>, a_3>, \cdots>, a_{n-1}>, a_n>$,

其中 a_i 称为第 i 个分量. $<a_1, a_2, \ldots, a_n> = <b_1, b_2, \ldots, b_n>$ 当且仅当 $a_i = b_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$.

定义 1.2.4 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意给定的 n 个集合，若有序 n 元组 $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$ 的第一个分量是取自集合 A_1 里的元素，第二个分量是取自集合 A_2 里的元素，…， 第 n 个分量是取自集合 A_n 里的元素，则由所有这样的有序 n 元组所组成的集合称为集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的**笛卡儿积**，并用 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 表示, 或记为 $\prod\limits_{1\le i\le n} A_i$ 即

$$\prod_{1\le i\le n} A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n = \{<a_1, a_2, \ldots, a_n> \mid a_i\in A_i,\ i=1,2,\ldots,n\}.$$

特别地，两个集合的笛卡儿积可以叙述为: 任意给定两个集合 A 和 B，若序偶的第一个分量是 A 的元素，第二个分量是 B 的元素，则所有这样的序偶的集合称为 A 和 B 的笛卡儿积或直积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B = \{<x, y> \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例 1.2.1 设 $A = \{0, 1\}$，$B = \{a, b\}$，$C = \varnothing$，则

$$A\times B = \{<0, a>, <0, b>, <1, a>, <1, b>\},$$
$$B\times A = \{<a, 0>, <a, 1>, <b, 0>, <b, 1>\},$$
$$A\times A = \{<0, 0>, <1, 1>, <1, 0>, <0, 1>\},$$
$$B\times B = \{<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, a>\},$$
$$A\times C = \varnothing,$$
$$C\times A = \varnothing.$$

显然，$A\times B \neq B\times A$，即笛卡儿积不满足交换律.

例 1.2.2 设 $A = \{1\}$，$B = \{a, b\}$，$C = \{x, y\}$，则

$$(A\times B)\times C = \{<<1, a>, x>, <<1, a>, y>, <<1, b>, x>, <<1, b>, y>\},$$

$$A\times(B\times C) = \{<1, <a, x>>, <1, <a, y>>, <1, <b, x>>, <1, <b, y>>\}.$$

显然，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，即笛卡儿积不满足结合律.

定理 1.2.1 笛卡儿积的性质如下：

(1) 交换律不成立，即当 $A\neq B$ 时，$A\times B\neq B\times A$.

(2) 结合律不成立，即$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$.

(3) 下列分配律是成立的：

① $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$；

② $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；

③ $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$；

④ $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$；

⑤ $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$；

⑥ $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$.

(4) 若 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$.

(5) 设 A, B, C, D 是四个非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$.

例 1.2.3 证明分配率 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

证明 对任意的$<x, y>$，有

$$\begin{aligned}<x,y>\in A\times(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)\end{aligned}$$

所以

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

例 1.2.4 证明分配律 $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.

证明 对任意的$<x, y>$，有

$$\begin{aligned}<x,y>\in(A\cap B)\times C &\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\wedge <x,y>\in B\times C\\ &\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times C)\cap(B\times C)\end{aligned}$$

所以

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C).$$

例 1.2.5 设 A, B, C 是三个任意集合，且 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B$ 当且仅当 $A\times C\subseteq B\times C$.

证明 先证必要性. 设 $A\subseteq B$ 成立，则对任意的 x，若 $x\in A$，则必有 $x\in B$. 现对任意的$<x, y>$，有

$$<x,y>\in A\times C\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\Rightarrow x\in B\wedge y\in C\Leftrightarrow <x,y>\in B\times C,$$

所以 $A\times C\subseteq B\times C$.

再证充分性．设 $A\times C\subseteq B\times C$ 成立，因为 $C\neq\varnothing$，故存在 $y\in C$．对于任意的 x，有

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge y\in C\Leftrightarrow <x,y>\in A\times C\Rightarrow <x,y>\in B\times C\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C\Rightarrow x\in B,$$

其中“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”（命题间），所以 $A\subseteq B$．证毕.

例 1.2.6 设 A, B, C, D 是四个非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$.

证明 先证必要性．设 $A\times B\subseteq C\times D$ 成立，则对任意的 $x\in A$ 和 $y\in B$，有

$$x\in A\wedge y\in B\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\Rightarrow <x,y>\in C\times D\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D,$$

所以 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$.

再证充分性．设 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 成立，则对任意的 $x\in A$ 和 $y\in B$，有

$$<x,y>\in A\times B\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\Rightarrow x\in C\wedge y\in D\Leftrightarrow <x,y>\in C\times D,$$

所以 $A\times B\subseteq C\times D$．证毕.

定义 1.2.5 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意给定的集合，笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的任何一个子集 R 称为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 上的一个 ***n* 元关系**.

特别地，设 A, B 是任意两个集合，则笛卡儿积 $A\times B$ 的任意一个子集 R 称为从集合 A 到集合 B 的一个**二元关系**，$<a,b>\in R$ 也可表示为 aRb．如果一个二元关系是从集合 A 到其自身的关系，则这样的二元关系称为集合 A 上的关系.

例如，设 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{a, b\}$，则

$$A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>,<3,a>,<3,b>\},$$
$$B\times B=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$$

$A\times B$ 的任意一个子集都是一个关系，如 $R_1 = \{<1, a>\}$，$R_2 = \{<2, a>, <3, b>\}$ 等都是从 A 到 B 的关系；$R_3=\{<a, a>, <a, b>, <b, b>\}$ 是集合 B 上的一个二元关系.

对于有限集合上的二元关系 R 除了可以用序偶集合表示外，还可以用矩阵（通常称作**关系矩阵**）表示．设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，R 为从 A 到 B 的一个二元关系，则对应于关系 R 的关系矩阵为 $\mathbf{M}_R=[r_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当} <a_i,b_j>\in R\\ 0, & \text{当} <a_i,b_j>\notin R\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

例如在上例中，R_1 和 R_2 对应的关系矩阵分别为

$$\mathbf{M}_{R_1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{M}_{R_2}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

定义 1.2.6 设 R 是从集合 A 到集合 B 的一个二元关系，则由 R 中所有序偶的第一个分量组成的集合称为关系 R 的**定义域**，记作 $D(R)$，由 R 中所有序偶的第二个分量组成的集合称为关系 R 的**值域**，记作 $V(R)$，即

$$D(R)=\{a\mid a\in A\wedge(\exists b)(<a,b>\in R)\},$$
$$V(R)=\{b\mid b\in B\wedge(\exists a)(<a,b>\in R)\}.$$
显然，$D(R)\subseteq A$，$V(R)\subseteq B$.

例 1.2.7　设 A = {1, 2, 3, 4}, 求 A 上的整除关系, 并求相应的定义域和值域.

解　整除关系 R = {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 4>, <4, 4>}，对应此整除关系 R 的定义域

$$D(R) = \{1, 2, 4\},$$

值域

$$V(R) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

定义 1.2.7　设 R 是从集合 A 到集合 B 的一个二元关系，若 $R=\varnothing$，则称 R 为**空关系**，若 $R = A\times B$，则称 R 为**全域关系**.

定义 1.2.8　设 I_X 是集合 X 上的二元关系，如果 $I_X=\{<x,x>\mid x\in X\}$，则称 I_X 为 X 中的**恒等关系**.

例如，设 A = {1, 2, a}，则 A 中的恒等关系为

$$I_X = \{<1, 1>, <2, 2>, <a, a>\}.$$

注意：空关系、全域关系和恒等关系都是唯一的.

有了表达关系的各种方法，下面就可以对关系做进一步的讨论．我们应该特别注意的是在集合 X 上的二元关系 R 的一些特殊性质.

定义 1.2.9　设 R 是集合 X 上的二元关系，如果对于任意的 $x\in X$，有 xRx，则称 R 是**自反的**，即

$$R\text{ 在 }X\text{ 上自反}\Leftrightarrow(\forall x)(x\in X\to xRx).$$

定义 1.2.10　设 R 是集合 X 上的二元关系，如果对于任意的 $x\in X$，都有 $<x,x>\notin R$，则称 R 为**反自反的**，即

$$R\text{ 在 }X\text{ 上反自反}\Leftrightarrow(\forall x)(x\in X\Rightarrow<x,x>\notin R).$$

例 1.2.8　设 X = {1, 2, 3}，给出 X 上的几个自反关系和反自反关系.

解　由定义可知

$$R_1 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 3>, <2, 3>\},$$
$$R_2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>\},$$
$$R_3 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <3, 2>\}$$

都是 X 上的自反关系．另外，我们还注意到，X 上的全域关系和恒等关系也都是自反关系．而

$$R_4 = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\},$$
$$R_5 = \{<3, 2>\}$$

都是反自反关系.

$$R_6 = \{<1, 1>, <1, 3>, <3, 2>\},$$
$$R_7 = \{<3, 2>, <3, 3>\}$$

既不自反，也不反自反的.

定义 1.2.11　设 R 是集合 X 上的二元关系，对于任意的 $x,y\in X$，若有 xRy 时，就有 yRx，则称 R 是**对称的**，即

$$R\text{ 在 }X\text{ 上对称}\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy\to yRx).$$

例如，在同一班级学习的同学关系是对称的，平面上三角形的相似关系是对称的，即若三角形 A 和三角形 B 相似，则 B 就相似于 A.

例 1.2.9　设 A = {2, 3, 5, 7}，$R=\{<x,y>\mid\dfrac{x-y}{2}\text{是整数}\}$，证明 R 在 A 上是自反和对称

的.

证明　因为对任意 $x \in A$，$\dfrac{x-x}{2}=0$，即 $<x,x>\in R$，所以 R 是自反的．又设 $x,y\in A$，如果 $<x,y>\in R$，即 $\dfrac{x-y}{2}$ 是整数，则 $\dfrac{y-x}{2}$ 也必是整数，即 $<y,x>\in R$，因此 R 是对称的.

定义 1.2.11　设 R 是集合 X 上的二元关系，对于任意的 $x,y\in X$，若有 xRy，yRx，就有 $x=y$，则称 R 是**反对称的**，即

$$R\text{ 在 }X\text{ 上反对称}\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy\wedge yRx\to x=y).$$

例如，$A=\{1, 2, 3\}$，$S=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>\}$，则 S 在 A 上是对称的也是反对称的. 若 $S=\{<1, 2>, <1, 3>, <3, 1>\}$，则 S 既不是对称关系，也不是反对称关系.

定义 1.2.12　设 R 是集合 X 上的二元关系，对于任意的 $x,y,z\in X$，若有 xRy，yRz，就有 xRz，则称 R 是**传递的**, 即

$$R\text{ 在 }X\text{ 上传递}\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in X\wedge y\in X\wedge z\in X\wedge xRy\wedge yRz\to xRz).$$

例如，在实数集合中关系＜, ＞和=关系，都是传递的．又如，设 A 是人的集合，R 是 A 上的二元关系，若 $<a,b>\in R$ 当且仅当 a 是 b 的祖先，则显然祖先关系 R 是传递的.

定义 1.2.13　设 R 是集合 X 上的二元关系，若 R 是自反、对称和传递的，则称 R 为 X 上的**等价关系**.

常见的等价关系有同一班级中的同学关系、直线间的平行关系等．其主要意义在于它证实了应用抽象的一般原理的正确性，即在某些性质等价的个体中产生等价类，对全体的等价类进行分析往往比对全体本身进行分析更简单．等价关系在后面章节中具有重要的应用.

二元关系是以序偶为元素的集合，所以它们也可以进行集合的运算，如交、并、补等而产生新的集合．当然关系也可以进行一些其他的运算，如复合运算、逆运算、幂运算等.

定义 1.2.14　设 R 为 X 到 Y 的关系，S 为 Y 到 Z 的关系，则 $S\circ R$ 称为 R 和 S 的**复合关系**，即

$$S\circ R=\{<x,z>|\, x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in S)\}.$$

所谓关系的复合运算或合成运算就是求 R 和 S 的复合关系 $S\circ R$．例如，设 R 是人群中的父子关系，则 R 与 R 的复合关系就是祖孙关系.

复合运算是关系的二元运算，它能够由两个关系生成一个新关系，并且可以依次类推. 例如，R 是从 X 到 Y 的关系，S 是从 Y 到 Z 的关系，P 是从 Z 到 W 的关系，于是 $(P\circ S)\circ R$ 和 $P\circ(S\circ R)$ 都是从 X 到 W 的关系. 容易证明 $(P\circ S)\circ R=P\circ(S\circ R)$，因此关系的复合运算是满足结合律的.

例 1.2.10　设集合 $X=\{1, 2, 3\}$，$Y=\{a, b, c\}$，$Z=\{\alpha,\beta,\chi\}$，R 是从 X 到 Y 的关系, $R=\{<1, a>, <2, b>, <2, c>\}$，$S$ 是从 Y 到 Z 的关系，$S=\{<a,\beta>,<b,\alpha>,<c,\beta>,<c,\chi>\}$，求 $S\circ R$.

解　$S\circ R=\{<1,\beta>,<2,\alpha>,<2,\beta>,<2,\chi>\}$.

复合关系的关系矩阵也可以通过关系矩阵的逻辑乘法来求得．设关系 R_1 的关系矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和关系 R_2 的关系矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

则复合关系 $R_2 \circ R_1$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

其中 $c_{ik}=\bigvee_{j=1}^{n}(a_{ij}\wedge b_{jk})$， a_{ij} 和 b_{jk} 都只取 0 或 1，这里的运算是逻辑乘和逻辑加．如例 1.2.10 中， R 和 S 的关系矩阵分别为

$$\mathbf{M}_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{M}_S=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

而 $S\circ R$ 的关系矩阵为

$$\mathbf{M}_{S\circ R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 1.2.2 复合运算的性质如下：

(1) 满足结合律，即 $(R\circ S)\circ P=R\circ(S\circ P)$；

(2) 不满足交换律，即 $R\circ S\neq S\circ R$；

(3) 复合运算对并运算满足分配律，即

$$R\circ(S\cup P)=(R\circ S)\cup(R\circ P),$$

$$(S\cup P)\circ R=(S\circ R)\cup(P\circ R);$$

(4) 复合运算对交运算满足下面的包含关系，即

$$R\circ(S\cap P)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ P),$$

$$(S\cap P)\circ R\subseteq(S\circ R)\cap(P\circ R);$$

(5) 设 R 是 X 到 Y 的关系，I_X 是 X 中的恒等关系，I_Y 是 Y 中的恒等关系，则

$$I_X\circ R=R\circ I_Y=R.$$

定义 1.2.15 设 R 是集合 A 上的二元关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂记作 R^n，并且规定

(1) $R^0 = I_A$；

(2) $R^{n+1} = R \circ R^n$.

由定义可以看出，对于集合 A 上任意一个关系 R，都有 $R^0 = I_A$，$R^1 = R$.

例 1.2.11 设 $X = \{1, 2, 3\}$，X 中的二元关系 $R = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 2>\}$，求 R 的各次幂.

解 由题意可知

$$
\begin{aligned}
R^0 &= I_X = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>\} \\
R^1 &= R = \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} \\
R^2 &= R \circ R = \{<1,3>,<2,2>,<3,3>\} \\
R^3 &= R \circ R^2 = \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} \circ \{<1,3>,<2,2>,<3,3>\} \\
&= \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} = R \\
R^4 &= R \circ R^3 = \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} \circ \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} = R^2 \\
&\vdots \\
R^{2n+1} &= R = \{<1,2>,<2,3>,<3,2>\} \\
R^{2n+2} &= R^2 = \{<1,3>,<2,2>,<3,3>\}
\end{aligned}
$$

定理 1.2.3 设 R 是集合 X 中的二元关系，$m,n \in \mathbb{N}$，则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$；

(2) $(R^m)^n = R^{m \times n}$.

证明 (1) 对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}$，对 n 用数学归纳法. 当 $n = 0$ 时，

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_X = R^m = R^{m+0}.$$

假设当 $n = k$ 时，有 $R^m \circ R^k = R^{m+k}$. 当 $n = k+1$ 时，

$$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R \circ R^k) = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}.$$

所以，对所有 $m,n \in \mathbb{N}$，都有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

(2) 读者可以模仿(1)进行证明.

定义 1.2.16 设 R 是 X 到 Y 的二元关系，若将 R 中每一序偶的元素顺序互换，则所得到的集合称为 R 的**逆关系**，记作 R^c，即

$$R^c = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}.$$

定理 1.2.4 设 R_1, R_2 都是从 A 到 B 的二元关系，则下列各式成立.

(1) $(R_1 \cup R_2)^c = R_1^c \cup R_2^c$；

(2) $(R_1 \cap R_2)^c = R_1^c \cap R_2^c$；

(3) $(A \times B)^c = B \times A$；

(4) $(\overline{R})^c = \overline{R^c}$（或 $(\sim R)^c = \sim R^c$）；

(5) $(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$.

证明 (1) 可知

$$
\begin{aligned}
<x,y>\in(R_1\cup R_2)^c &\Leftrightarrow <y,x>\in R_1\cup R_2\\
&\Leftrightarrow <y,x>\in R_1\vee<y,x>\in R_2\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in R_1^c\vee<x,y>\in R_2^c\\
&\Leftrightarrow <x,y>\in R_1^c\cup R_2^c
\end{aligned}
$$

类似地，读者可以自己证明(2)和(3).

(4) $<x,y>\in(\overline{R})^c \Leftrightarrow <y,x>\in\overline{R} \Leftrightarrow <y,x>\notin R \Leftrightarrow <x,y>\notin R^c \Leftrightarrow <x,y>\in\overline{R^c}$.

(5) 因为 $R_1-R_2=R_1\cap\overline{R_2}$，故

$$(R_1-R_2)^c=(R_1\cap\overline{R_2})^c=R_1^c\cap(\overline{R_2})^c=R_1^c\cap\overline{R_2^c}=R_1^c-R_2^c.$$

习题 1.2

A 组

1. 证明若 S 为集合 X 上的二元关系，则
   (1) S 是传递的，当且仅当 $(S\circ S)\subseteq S$；
   (2) S 是自反的，当且仅当 $I_X\subseteq S$.
2. 试给出整数集合 $\mathbb{Z}$ 中的几类不同的等价关系.

B 组

3. 证明矩阵的相似关系是等价关系.

1.3 函数

1. 函数的定义

在这里我们定义函数的概念为一组特殊的关系，函数的定义域和值域都是集合.

定义 1.3.1 设 X 和 Y 是任意两个集合，而 f 是 X 到 Y 的一个关系，若对每一个 $x\in X$，都有唯一的 $y\in Y$，使得 $<x, y>\in f$，则称关系 f 为**函数**，记作 f: $X\to Y$ 或 $X\xrightarrow{f}Y$. 若 $<x, y>\in f$，则 x 称为**自变元**，y 称为在 f 作用下 x 的**像**. $<x, y>\in f$ 也可以记作 $y=f(x)$, 且记 $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

从函数的定义可以知道它与关系有以下两点区别：(1) 函数的定义域是 X，而不能是 X 的某个真子集；(2) 一个 $x\in X$ 只能对应于唯一的一个 y. 即如果 $f(x)=y$ 且 $f(x)=z$，那么 $y=z$，这称为函数的“单值性”. 从 X 到 Y 的函数也叫作从 X 到 Y 的**映射**.

在 $<x, y>\in f$ 中，f 的第一个分量组成的集合就是函数 $y=f(x)$的**定义域**，记作 $\mathrm{dom}\, f=X$, f 的**值域** $\mathrm{ran}\, f\subseteq Y$，有时也记作 R_f，即

$$R_f=\{y\mid(\exists x)(x\in X\wedge y=f(x))\}.$$

集合 Y 称为 f 的**共域**，$\mathrm{ran}\, f$ 亦称为函数的**像集合**，很明显，$\mathrm{ran}\, f=f(X)$.

注意：根据函数的记法 f: $X\to Y$，我们可以看出，即使两个函数的定义域和值域相同

且它们包含的有序对也完全相同，但是它们的共域不同，那么这两个函数就是不同的函数，二者不等，这与我们在中学学习的初等数学中的函数概念有略微的区别. 如此定义的原因在于，对于很多复杂的函数，我们很难一下就能够确定它的值域，但是确定它的共域要容易得多.

例 1.3.1 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$，$Y = \{a, b, c, d\}$，下列关系中哪些是函数？哪些不是函数？

$$f_1 = \{<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, d>\},$$
$$f_2 = \{<1, a>, <2, b>, <3, d>, <4, b>\},$$
$$f_3 = \{<1, a>, <3, b>, <4, d>\},$$
$$f_4 = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>, <3, c>, <4, d>\}.$$

解 f_1 和 f_2 都是函数. f_3 不是函数，因为 $2 \in X$，但没有对应的 y 值. f_4 也不是函数，因为 $x = 1$ 对应了两个不同的值.

定义 1.3.2 设 f, g 都是从 A 到 B 的函数，若它们有相同的定义域和值域，并且对任意的 $x \in A$ 都有 $f(x) = g(x)$，则称函数 f 与 g **相等**，记作 $f = g$.

从函数的定义可以知道，$X \times Y$ 的子集并不都能成为 X 到 Y 的函数.

例如，设 $X = \{a, b, c\}$，$Y = \{0, 1\}$, 则

$$X \times Y = \{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>, <a, 1>, <b, 1>, <c, 1>\}$$

有 2^6 个可能的子集，但其中只有 2^3 个子集定义为从 X 到 Y 的函数，即

$$f_0 = \{<a, 0>, <b, 0>, <c, 0>\}, \qquad f_1 = \{<a, 0>, <b, 0>, <c, 1>\},$$
$$f_2 = \{<a, 0>, <b, 1>, <c, 0>\}, \qquad f_3 = \{<a, 0>, <b, 1>, <c, 1>\},$$
$$f_4 = \{<a, 1>, <b, 0>, <c, 0>\}, \qquad f_5 = \{<a, 1>, <b, 0>, <c, 1>\},$$
$$f_6 = \{<a, 1>, <b, 1>, <c, 0>\}, \qquad f_7 = \{<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>\}.$$

设 X 和 Y 都为有限集，分别有 m 个和 n 个不同元素，由于从 X 到 Y 任意一个函数的定义域是 X，在这些函数中每一个恰有 m 个序偶. 另外，任何元素 $x \in X$，可以有 Y 的 n 个元素中的任何一个作为它的像，故共有 n^m 个不同的函数. 在上例中 $n = 2$，$m = 3$，故应有 2^3 个不同的函数. 今后我们用符号 Y^X 表示从 X 到 Y 的所有函数的集合，甚至当 X 和 Y 是无限集时，也用这个符号.

下面我们讨论函数的几类特殊情况.

定义 1.3.3 对于 $X \xrightarrow{f} Y$ 的映射中，如果 $\operatorname{ran} f = Y$，即 Y 的每一个元素是 X 中一个或多个元素的像，则称这个映射为**满射**.

设 f: $X \to Y$ 是满射，即对于任意 $y \in Y$，必存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$ 成立. 例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{1, 2, 3\}$，若 $A \xrightarrow{f} B$ 为 $f(a) = 1$，$f(b) = 1$，$f(c) = 3$，$f(d) = 2$，则 f 是满射的.

定义 1.3.4 从 X 到 Y 的映射中，若 X 中没有两个元素有相同的像，则称这个映射为**单射**.

设 f: $X \to Y$ 是单射，即对于任意 $x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ 或者 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. 例如，函数 $f: \{a, b\} \to \{2, 4, 6\}$为 $f(a) = 2$，$f(b) = 6$，则这个函数是单射，但不是满射.

定义 1.3.5 从 X 到 Y 的映射，若既是满射又是单射，则称这个映射是**双射**的，也称这样的映射是一一对应的.

例如，令$[a, b]$表示实数的闭区间，即$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，令 $f: [0, 1] \to [a, b]$，这里 $f(x) = (b-a)x + a$，这个函数是双射的.

定理 1.3.1 令 X 和 Y 为有限集，若 X 和 Y 的元素个数相同，记为$|X| = |Y|$，则 f: $X \to Y$ 是单射的，当且仅当它是一个满射.

证明 若 f 是单射，则$|X| = |f(X)|$，$|f(Y)| = |Y|$. 从 f 的定义我们有 $f(X) \subseteq Y$，而

$|f(Y)| = |Y|$，又因为$|Y|$是有限的，故 $f(X) = Y$，因此，f 是满射.

若 f 是一个满射，根据满射定义，$f(X) = Y$，于是$|X| = |Y| = |f(X)|$．因为$|X| = |f(X)|$，又$|X|$是有限的，故 f 是一个单射，因此 f 是单射.

这个定理必须在有限集情况下才能成立，在无限集上不一定有效．如 $f: I \to I$，这里 $f(x) = 2x$，在这种情况下整数映射到偶整数，显然这是一个单射，但不是满射.

2. 逆函数和复合函数

在讨论二元关系时我们定义了逆关系，即从 X 到 Y 的关系 R，其逆关系 R^c 是 Y 到 X 的关系，符号化表示为$<y,x>\in R^c \Leftrightarrow <x,y>\in R$．但是对于函数就不能用简单的交换序偶的元素而得到逆函数，这是因为若有函数 $f: X \to Y$，但 f 的值域 R_f 可能只是 y 的一个真子集，即 $R_f \subset Y$，这不符合函数定义域的要求．此外，若 $X \xrightarrow{f} Y$ 的映射是多对一的映射，即对于 $x_1 \neq x_2$，有$<x_1,y>\in f$，$<x_2,y>\in f$，其逆关系将有$<y,x_1>\in f^c$，$<y,x_2>\in f^c$，这就违反了函数值唯一性的要求. 为此，我们对函数求逆需要规定一些条件.

定理 1.3.2　设 $f: X \to Y$ 是一双射函数，那么 f^c 是 $Y \to X$ 的双射函数.

证明　设 $f = \{<x,y>| x\in X \wedge y \in Y \wedge f(x)=y\}$，$f^c = \{<y,x>|<x,y>\in f\}$．因为 f 是满射，故每一个 $y\in Y$ 必存在$<x, y>\in f$，因此必有$<y, x>\in f^c$，即 f^c 第一个分量的集合为 Y．又因为 f 是单射，对每一个 $y\in Y$ 恰有一个 $x\in X$，使$<x, y>\in f$，因此仅有一个 $x\in X$，使$<y, x>\in f^c$，即 y 对应唯一的 x，故 f^c 是函数.

又因为 $\operatorname{ran} f^c = \operatorname{dom} f = X$，故 f^c 是满射．又若 $y_1 \neq y_2$，有 $f^c(y_1) = f^c(y_2)$，因为 $f^c(y_1) = x_1$，$f^c(y_2) = x_2$，即 $x_1 = x_2$，故 $f(x_1) = f(x_2)$，即 $y_1 = y_2$，得出矛盾结果. 因此 f^c 是一个双射函数.

定义 1.3.6　设 $f: X \to Y$ 是一双射函数，称 $Y \to X$ 的双射函数 f^c 为 f 的**逆函数**，记作 f^{-1}.

例如，设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, 若 $f: A\to B$ 为 $f = \{<1, a>, <2, c>, <3, b>\}$，则 $f^{-1} = \{<a, 1>, <c, 2>, <b, 3>\}$；若 $f = \{<1, a>, <2, b>, <3, b>\}$，则 $f^{-1} = \{<a, 1>, <b, 2>, <b, 3>\}$就不是一个函数.

定义 1.3.7　设函数 $f: X \to Y$，$g: W \to Z$，若 $f(X) \subseteq W$，则

$$g\circ f = \{<x,z>| x\in X \wedge z\in Z \wedge (\exists y)(y\in Y \wedge y = f(X) \wedge z = g(y))\},$$

称 g 在函数 f 的左边可复合.

定理 1.3.3　两个函数的复合是一个函数.

证明　设 $g: W \to Z$，$f: X \to Y$ 为左复合，即 $f(X) \subseteq W$．对于任意 $x\in X$，因为 f 为函数，故必有唯一的序偶$<x, y>$使 $y = f(x)$成立，而 $f(x)\in f(X)$，即 $f(x)\in W$．又因为 y 是函数，故必有唯一的序偶$<y, z>$使 $z = g(y)$成立．根据复合定义，$<x,z>\in g\circ f$，即 X 中每个 x 对应 Z 中某个 z.

假定 $g\circ f$ 中包含序偶$<x, z_1>$和$<x, z_2>$, 且 $z_1 \neq z_2$，这样在 Y 中必存在 y_1 和 y_2，使得在 f 中有$<x, y_1>$和$<x, y_2>$，在 g 中有$<y_1, z_1>$和$<y_2, z_2>$．因为 f 是一个函数，故 $y_1 = y_2$．于是 g 中有$<y, z_1>$和$<y, z_2>$，但 g 是一个函数，故 $z_1 = z_2$，即每个 $x\in X$ 只能有唯一的$<x, z>\in g\circ f$．因此，$g\circ f$ 是一个函数.

例 1.3.2　设 $X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{p, q\}$，$Z = \{a, b\}$，而 $f = \{<1, p>, <2, p>, <3, q>\}$，$g=\{<p, b>, <q, b>\}$，求 $g\circ f$.

解　$g\circ f = \{<1, b>, <2, b>, <3, b>\}$.

定理 1.3.4　令 $g\circ f$ 是一个复合函数.

(1)　若 g 和 f 是满射的，则 $g\circ f$ 是满射的；

(2)　若 g 和 f 是单射的，则 $g\circ f$ 是单射的；

(3) 若 g 和 f 是双射的，则 $g\circ f$ 是双射的.

证明 (1) 设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，令 z 为 Z 的任意一个元素，因 g 是满射，故必有某个元素 $y\in Y$，使得 $g(y)=z$. 又因为 f 是满射，故必有某个元素 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，故

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z.$$

因此 $R_{g\circ f}=Z$，$g\circ f$ 是满射的.

(2) 令 x_1，x_2 为 X 的元素，假定 $x_1\neq x_2$，因为 f 是单射的，故 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 又因为 g 是单射的且 $f(x_1)\neq f(x_2)$，故 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$，于是 $x_1\neq x_2\Rightarrow g\circ f(x_1)\neq g\circ f(x_2)$，因此，$g\circ f$ 是单射的.

(3) 因为 g 和 f 是双射的，根据(1)和(2)，$g\circ f$ 是满射和单射的，即双射.

由于函数的复合仍然是一个函数，故可求三个函数的复合.

例 1.3.3 设 R 为实数集合，对 $x\in R$，有 $f(x)=x+2$，$g(x)=x-2$，$h(x)=3x$，求 $g\circ f$ 与 $h\circ(g\circ f)$.

解 由已知可得

$$g\circ f=\{<x,x>|\,x\in R\},\qquad h\circ(g\circ f)=\{<x,3x>|\,x\in R\}.$$

一般地，我们有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. 函数的复合函数是可结合的，故可以去掉上式中的括号.

定义 1.3.8 函数 $f: X\to Y$ 叫作**常函数**，如果存在某个 $y_0\in Y$，则对于每个 $x\in X$ 都有 $f(x)=y_0$，即 $f(X)=y_0$.

定义 1.3.9 如果 $I_X=\{<x,x>|\,x\in X\}$，则称 $I_X: X\to X$ 为**恒等函数**.

定理 1.3.5 设函数 $f: X\to Y$，则 $f=f\circ I_X=I_Y\circ f$.

这个定理的证明可以由定义直接得到.

定理 1.3.6 若 $f: X\to Y$ 是双射函数，则 $(f^{-1})^{-1}=f$.

证明 因为 $f: X\to Y$ 是双射函数，故 $f^{-1}: Y\to X$ 也是双射函数，因此

$$(f^{-1})^{-1}: X\to Y$$

也为双射函数，显然 $\mathrm{dom}\,f=\mathrm{dom}(f^{-1})^{-1}=X$. 又由

$$x\in X\Rightarrow f: x\to f(x)\Rightarrow f^{-1}: f(x)\to x\Rightarrow (f^{-1})^{-1}: x\to f(x),$$

可知 $(f^{-1})^{-1}=f$.

定理 1.3.7 若 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 都是双射函数，则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

证明 因为 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 都是双射函数，所以 f^{-1} 和 g^{-1} 都是双射函数，即 $f^{-1}: Y\to X$，$g^{-1}: Z\to Y$，所以 $f^{-1}\circ g^{-1}: Z\to X$. 又 f, g 是双射函数，故 $g\circ f$ 是双射函数，所以 $(g\circ f)^{-1}$ 是双射的，即 $(g\circ f)^{-1}: Z\to X$. 因此

$$\mathrm{dom}(f^{-1}\circ g^{-1})=\mathrm{dom}(g\circ f)^{-1}=Z.$$

由 $\forall z\in Z\Rightarrow$ 存在唯一 $y\in Y$，使得 $g(y)=z\Rightarrow$ 存在唯一 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，故

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(y)=x,$$

又 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$，故 $(g\circ f)^{-1}(z)=x$，因此对 $\forall z\in Z$ 有

$$(g\circ f)^{-1}(z)=(f^{-1}\circ g^{-1})(z).$$

因此 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

习题 1.3

A 组

1. 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵 A, v 为实数域上的任意 n 维向量，证明：映射 $A: v\mapsto Av$ 是

单射当且仅当方阵 A 的行列式值 $\det(A)\neq 0$.

2. 给定实数域上的 n 阶方阵 A, T 为实数域上的任意 n 阶方阵，证明：映射 $A: T\mapsto AT$ 是单射当且仅当 $\det(A)\neq 0$.

B 组

3. 试构造正整数集合 $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{R}$ 上闭区间 $[0, 1]$ 的单射.
4. 试构造有理数集合 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 上闭区间 $[0, 1]$ 的单射.
5. 试构造有理数集合 $\mathbb{Q}$ 到正整数集合的双射.

1.4 映射和势

有了双射函数的概念，我们就可以比较两个集合的“大小”是否相等，确定有限集和无限集的概念．下面首先需要引进自然数集合 $\mathbb{N}$.

定义 1.4.1 给定集合 A 的**后继集**定义为集合 $A^+=A\cup\{A\}$．若 A 为空集 $\varnothing$，则后继集为 $\varnothing^+$, $(\varnothing^+)^+$, …， 这些集合可写成如下形式：

$\varnothing\cup\{\varnothing\}$, $\varnothing\cup\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}$, $\varnothing\cup\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\cup\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}\}$, …,

可简化为 $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, … .

若我们命名集合 $\varnothing$ 为 0，那么，

$\varnothing^+=0^+=\{\varnothing\}\triangleq 1$,

$1^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\triangleq 2$,

$2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\triangleq 3$,

$\vdots$

这样就得到了自然数集合{0, 1, 2, 3, …}，这个集合亦能概括为如下公理形式（即 G. Peano 公理）.

(1) $0\in\mathbb{N}$（其中 $0\triangleq\varnothing$）；

(2) 如果 $n\in\mathbb{N}$，那么 $n^+\in\mathbb{N}$（其中 $n^+=n\cup\{n\}$）；

(3) 如果一个子集 $S\subseteq\mathbb{N}$ 具有性质：

① $0\in S$,

② 如果 $n\in S$，有 $n^+\in S$,

则 $S=\mathbb{N}$.

性质(3)称极小性质，它指明了自然数系统的最小性，即自然数系统是满足公理(1)和(2)的最小集合.

当然，自然数集亦可不从 0 开始，这只需定义 $\varnothing$ 为 1，则自然数集就从 1 开始.

从上述定义可以看到，任意一个自然数可看作是某个集合的名字．此外，从实际生活中我们知道，任意自然数，例如 3 这个概念是从观察许多只含三个元素的集合的共同特点而加以抽象概括出来的，这个共同特点就是体现于这些被观察的任意一个集合的元素都可与集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ 中的元素存在一一对应，且其任意两个集合的元素之间也存在一一对应．由此可见，“对应”是集合之间进行比较的一个非常重要的概念.

例如，{2, 4, 6, …, $2n$, …}与{1, 3, 5, …, $2n-1$, …}之间存在着一一对应.

定义 1.4.2 当且仅当在集合 A 与集合 B 之间存在一一对应的函数时，集合 A 与集合 B 称为**等势的**，记作 $A\sim B$.

例 1.4.1 验证自然数集$\mathbb{N}$与非负偶数集合 M 是等势的.

证明 由于$\mathbb{N}$与 M 的元素之间可作一一对应的映射，即 $f(n) = 2n$，故$\mathbb{N}$与 M 是等势的.

例 1.4.2 $\mathbb{R}$ 为实数集，设 $S=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x<1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集，求证 $S\sim\mathbb{R}$.

证明 令 $f:\mathbb{R}\to S$，且$f(x)=\frac{1}{\pi}\mathbf{arctan}x+\frac{1}{2}$(其中$-\infty<x<+\infty$)（规定$\mathbf{arctan}x$的值域为$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$）. 显然 f 的值域是 S，且 f 是双射函数.

例 1.4.3 证明区间[0, 1]与(0, 1)等势.

证明 设集合 $A=\{0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\}$，显然 $A\subseteq[0,\ 1]$. 定义 $f:[0,\ 1]\to(0,\ 1)$，使得

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{1}{2} & \\ f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{n+2} & (\text{对 } n\geqslant 1) \\ f(x)=x & (\text{对 } x\in[0,\ 1]-A) \end{cases}$$

可知 f 是双射函数. 命题得证.

定理 1.4.1 在集合族上等势关系是一个等价关系.

证明 设集合族为 S.

(1) 对任意 $A\in S$，必有 $A\sim A$.

(2) 若 $A,B\in S$，如果 $A\sim B$，必有 $B\sim A$.

(3) 若 $A,\ B,\ C\in S$，如果 $A\sim B$ 且 $B\sim C$，必有 $A\sim C$.

定义 1.4.3 如果有一个从集合$\{0, 1, \ldots, n-1\}$到 A 的双射集合，那么称集合 A 是**有限的**；如果集合 A 不是有限的，则它是**无限的**. 其中，若有从正整数集合$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$到 A 的双射，则称 A 是**可数集**或**可列集**.

定理 1.4.2 正奇数集，正偶数集，整数集$\mathbb{Z}$是可数集.

证明 从正整数集合$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$到奇数集，偶数集的映射分别为$f(x)=2x-1, 2x$，故为可数集.

从正整数集合$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$到整数集的映射为：

(1) $f(1)=0$

(2) $f(2x)=x,\ f(2x+1)=-x,\ x=1, 2, \ldots, n, \ldots$.

从而整数集为可数集.

定理 1.4.3 有限个可数集的并是可数集.

证明 设有 n 个可数集$\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n$，其中$\mathrm{A}_i=\{a_{i,1},a_{i,2},\ldots,a_{i,k},\ldots\}$.

我们暂且假设其两两不交，则可构造映射$f(nx+k)=a_{k+1,x}$，$k=0, 1, 2, \ldots, n-1$，容易验证上述映射为双射. 至于交集非空的情形，只需将上述f像中重复的合并，略做调整即可保持双射关系.

定理 1.4.4 可数个可数集的并是可数集.

证明 我们这里暂且假设其两两不交，设有可数个可数集$\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n,\ldots$，其中$\mathrm{A}_i=\{a_{i,1},a_{i,2},\ldots,a_{i,k},\ldots\}$，则我们可以按照下列“蛇形”的方式（除去重复）给出$\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$到该集合的映射：

$$a_{1,1}\ \to\ a_{1,2}\qquad a_{1,3}\ \to\ a_{1,4}\ \ \ldots$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \\
a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{3,1} & & a_{3,2} & \cdots & & \\
 & \swarrow & & & & \\
a_{4,1} & \cdots & & & &
\end{array}
$$

容易验证上述映射为双射.

例 1.4.4 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明 我们先证明正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 是可数的. 将正有理数集按下列顺序排列, 第 1 行为所有正整数, 第 2 行为不属于第 1 行, 分母为 2 的既约分数, ..., 第 n 行为不属于第 1, 2，..., n-1 行, 分母为 n 的既约分数, ...:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{5}{2} & \cdots & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & \cdots & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & \\
\frac{1}{4} & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

从而正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 为可数集, 进而根据定理 1.4.3 易证有理数集为可数集.

习题 1.4

A 组

1. 证明：素数集合是可数集.
2. 证明：合数集合是可数集.
3. 试给出正整数集合 $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 的一一映射.
4. 试给出正整数集合 $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+\times\cdots\times\mathbb{Z}^+$（$n$ 个）的一一映射.

B 组

5. 结合 A 组题 1, 试给出 $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+\times\cdots\times\mathbb{Z}^+$（可数个）的一一映射.
6. 证明整系数多项式集合, 有理系数多项式集合都是可数集.

1.5 拓扑空间

这一节我们首先介绍一类常见的空间——度量空间, 进而再介绍拓扑空间的概念, 并给

出拓扑空间简单的性质和例子.

定义 1.5.1 X 是一个集合，$d: X\times X\to \mathbf{R}$ 是 $X\times X$ 到实数域 $\mathbf{R}$ 的映射，如果对于任意的 $x,y,z\in X$，有

1. 正定性：$d(x,y)\geq 0$，且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；
2. 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$；
3. 三角不等式：$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$；

则称 d 是集合 X 的一个**度量**，称 (X,d) 是一个**度量空间**. 对于给定的或易知的度量 d，我们简称 X 是一个**度量空间**. 此外，我们称实数 $d(x,y)$ 为点 x 到点 y 的**距离**.

例 1.5.1 实数集 $\mathbb{R}$，有理数集 $\mathbb{Q}$，整数集 $\mathbb{Z}$.（习题，复数集 $\mathbb{C}$）

对于实数集 $\mathbb{R}$，定义 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $d(x,y)=|x-y|$，容易验证 $(\mathbb{R},d)$ 为度量空间. 同理，对于有理数集 $\mathbb{Q}$，整数集 $\mathbb{Z}$，仍定义上述度量 $d(x,y)=|x-y|$，则 $(\mathbb{Q},d)$ 与 $(\mathbb{Z},d)$ 都是度量空间.

例 1.5.2 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$.

对于集合 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$（$n$ 个），定义 $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：对任意的 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ 和 $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，令

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

容易验证 $(\mathbb{R}^n,d)$ 为度量空间.

实际上，若定义 $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|}$，$(\mathbb{R}^n,d)$ 仍为度量空间.

定义 1.5.2 (X,d) 是一个度量空间，若对于每一个 $x\in X$，存在实数 $\delta_x>0$ 使得对任意的 $y\in X$ 且 $y\neq x$，有 $d(x,y)\geq\delta_x$，则称 (X,d) 是**离散度量空间**.

例 1.5.3 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 在例 1.5.2 定义的度量下不是离散度量空间，实数集 $\mathbb{R}$，有理数集在例 1.5.2 定义的度量下也不是离散度量空间. 但整数集 $\mathbb{Z}$ 在度量 $d(x,y)=|x-y|$ 下是离散度量空间，因为有 $x\neq y\Rightarrow d(x,y)\geq 1$.

例 1.5.4 整数集 $\mathbb{Z}$ 可以不是离散度量空间.

对于任意整数 n，以及任意素数 p，定义映射 v_p：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$，其中非负整数 $v_p(n)$ 定义如下：

$$v_p(n)=\mathbf{max}\{m\in\mathbb{Z}\,|\,p^m\,|\,n\}$$

即 $p^{v_p(n)}$ 整除 n，但 $p^{v_p(n)+1}$ 不能整除 n.

例如，$v_2(36)=2$，$v_3(54)=3$，$v_5(350)=2$. 此外，根据上述定义，我们规定 $v_p(0)=\infty$.

我们现在定义 ***p*-进距离** d：$\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 如下：对于任意整数 m, n，令

$$d(m,n)=p^{-v_p(m-n)}.$$

若规定 $p^{-\infty}=0$，读者可以验证上述定义符合距离的三个条件. 但是，在该度量下，整数显然不是离散度量空间.

定义 1.5.3 给定度量空间 (X_1,d_1)，(X_2,d_2) 以及映射 $f: X_1\to X_2$，对于 $x_1\in X_1$，如果对任意实数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $y\in X_1$ 满足 $d_1(x_1,y)<\delta$，有

$$d_2(f(x_1),f(y))<\varepsilon,$$

则称 f 在 x_1 是**连续的**. 如果 f 在 X_1 中所有点是连续的，则称 f 一个是**连续映射**.

实际上，上述定义与我们所熟悉的实数域 $\mathbb{R}$ 上连续函数，以及例题 1.5.1 中 $\mathbb{R}$ 上距离定义是一致的. 下面我们简要介绍一类更为一般化的空间——拓扑空间.

定义 1.5.4 X 是一个集合，$\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族，即由某些 X 的子集构成的集合，如果 $\mathcal{T}$ 满足下列条件:

1. $X,\varnothing\in\mathcal{T}$；
2. 若 $A,B\in\mathcal{T}$，则 $A\bigcap B\in\mathcal{T}$；
3. 若 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$，则 $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{T}_1}A\in\mathcal{T}$；

则称 $\mathcal{T}$ 是集合 X 的一个**拓扑**，称 $(X,\mathcal{T})$ 是一个**拓扑空间**，称 $\mathcal{T}$ 中的每一个元素为 $(X,\mathcal{T})$ 或 X 中的**开集**，对于给定的或已知的拓扑 $\mathcal{T}$，我们简称 X 是一个**拓扑空间**.

定义 1.5.5 开集的补集称为**闭集**. 此外，对于集合 X 的某一子集 A，设 $\{B_i\}_{i\in I}$ 为 X 中所有包含 A 的闭集构成的集合，我们称 $\bigcap\limits_{i\in I}B_i$ 为 A 在 X 中的**闭包**，记为 $\overline{A}$. 易知 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小闭集.

由上述两个定义，我们规定 $X,\varnothing$ 既是开集又是闭集.

实际上，对于我们熟悉的实数域 $\mathbb{R}$，若设 (a,b) 为其上开区间（其中 $a<b$ ），则规定如下的由开区间的并构成的集合

$$\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i),\ （其中 I 为指标集）$$

为开集. 请读者验证上述定义满足定义 1.5.4 开集的性质.

定理 1.5.1 任意多闭集的交集是闭集，有限多闭集的并是闭集.

注意到，无穷多个闭集的并可能是开集，例如

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n},3-\frac{1}{n}]=(1,3)$$

是开集.

例 1.5.6 X 是一个集合，令 $\mathcal{T}=\{X,\phi\}$，则 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑，我们此类拓扑为**平凡拓扑**.

例 1.5.7 X 是一个集合，令 $\mathcal{T}=\rho(X)$ 为 X 的幂集，即为 X 所有子集构成的集合. 容易

验证$\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑, 我们称此类拓扑为**离散拓扑**. 这样, X 的每个子集都是开集.

例 1.5.8 $X=\{1,2,3\}$，令$\mathcal{T}=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$，则$\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑.

定义 1.5.6 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, Y 是 X 的一个非空子集. 我们可以得到 Y 上的诱导拓扑$(Y,\mathcal{T}|_Y)$，其中 $\mathcal{T}|_Y=\{U\cap Y:U\in\mathcal{T}\}$.

定义 1.5.7 X_1,X_2 是两个拓扑空间, $f:X_1\to X_2$. 若对于 X_2 中的每一个开集 U, $f^{-1}(U)$ 是 X_1 中的一个开集, 则称 f 是 X_1 到 X_2 的**连续映射**.

下面指出一个连续映射对于闭集的性质.

定理 1.5.2 X_1,X_2 是两个拓扑空间, $f:X_1\to X_2$. 若对于 X_2 中的每一个闭集 B, $f^{-1}(B)$是 X_1 中的一个闭集, 则 f 是 X_1 到 X_2 的连续映射.

定理 1.5.3 X_1,X_2, X_3 是拓扑空间, 则

(1) 恒等映射 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 是连续映射;

(2) 若 $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_3$ 均为连续映射, 则 $g\circ f:X_1\to X_3$ 是连续映射.

证明 留作习题, 略.

定义 1.5.8 X_1,X_2 是两个拓扑空间, $f:X_1\to X_2$ 是一个一一映射, 且 $f:X_1\to X_2$ 与 $f^{-1}:X_2\to X_1$ 都是连续映射, 我们则称 f 是一个**同胚映射**或**同胚**, 拓扑空间 X_1 **同胚于**拓扑空间 X_2.

定理 1.5.4 X_1,X_2, X_3 是拓扑空间, 则

(1) 恒等映射 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 是同胚;

(2) 若 $f:X_1\to X_2$ 是同胚, 则 $f^{-1}:X_2\to X_1$ 是同胚.

(3) 若 $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_3$ 均为同胚, 则 $g\circ f:X_1\to X_3$ 是同胚.

证明 留作习题, 略.

下面我们给出拓扑空间中不可约的概念, 进而引出拓扑空间的维数定义. 这些概念和相关内容我们仅在第九章用到.

定义 1.5.9 拓扑空间 X 的非空子集 Y, 若 Y 不能表示为两个 Y 真闭子集的并, 即 Y 不能表示为两个 Y 真闭子集Y_1, Y_2, 则称 Y 是**不可约的**.

定理 1.5.5 关于不可约拓扑空间和不可约子集，有以下命题：

(1) 不可约拓扑空间的非空开子集是不可约的;

(2) 设 S 是拓扑空间 X 的一个不可约子集, 则 S 的闭包 $\overline{S}$ 在 X 中仍不可约;

(3) 设 S 是不可约拓扑空间 X 的开子集, 则对于 X 的任意一个不可约子集 T, 我们有 $T\bigcap S$ 是不可约集或空集;

(4) 不可约拓扑空间的两个非空子集的交是空集.

证明 (1) 设不可约拓扑空间 X 的子集 U 可以表示为两个闭集 U_1,U_2（相对于诱导拓扑）的并：$U=U_1\bigcup U_2$，则存在 X 的闭集 V_1,V_2 使得 $V_i\bigcap U=U_i\,(i=1,2)$. 因此 $U\subseteq V_1\bigcup V_2$，进而 $X=\overline{U}\subseteq V_1\bigcup V_2$，所以 $X=V_1\bigcup V_2$. 所以, 由于 X 不可约, 我们有 $X=V_1$ 或 $X=V_2$，因此 $U=U_1$ 或 $U=U_2$.

(2) 设 $\overline{S}$ 可以表示为两个闭子集的并：$\overline{S}=S_1\bigcup S_2$，因此 $S=S\bigcap\overline{S}=(S\bigcap S_1)\bigcup(S\bigcap S_2)$. 因此, $S\bigcap S_1=S$ 或 $S\bigcap S_2=S$，即 $S\subseteq S_1$ 或 $S\subseteq S_2$，因此 $\overline{S}\subseteq S_1$ 或 $\overline{S}\subseteq S_2$. 故 $\overline{S}$ 在 X 中仍不可约.

(3) $T\bigcap S$ 是不可约拓扑空间 T 开子集, 若 $T\bigcap S$ 非空, 则由(1)知其不可约.

(4) 设 X 是不可约拓扑空间，U_1,U_2 是 X 的非空开子集. 若 $U_1\bigcap U_2$ 非空，则 $(X\setminus U_1)\bigcup(X\setminus U_2)=X$, 与不可约矛盾.

最后, 我们给出拓扑空间维数的定义.

定义 1.5.10 X 是拓扑空间, 定义 X 的**维数**为, 互异的不可约闭集升链的最大长度, 即满足：

$$S_0\subseteq S_1\subseteq\cdots\subseteq S_{n-1}\subseteq S_n\text{，其中}\{S_i\}_{0\le i\le n}\text{为不可约闭集且互不相同}$$

的最大非负整数 n, 记为 $\dim(X)$.

习题 1.5

A 组

1. 证明：有限的度量空间是离散的度量空间.
2. 证明：在 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义 $d(x,y)=(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^p)^{1/p}$, p 为奇素数, 则该定义确定了一个距离.
3. 若 X_1 , X_2 , X_3 是度量空间, $f:X_1\to X_2$, $g:X_2\to X_3$ 均为连续映射, 则 $g\circ f:X_1\to X_3$ 是连续映射.
4. $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ 是集合 X 的两个拓扑, 证明：$\mathcal{T}_1\bigcap\mathcal{T}_2$ 是集合 X 的拓扑.

B 组

5. 试说明拓扑空间之间连续的一一映射的逆映射可以不是连续的.
6. 证明例题 1.5.4 所定义的 d 构成距离.

7. X 是一个实数域上的线性空间，$\|\bullet\|: X \to \mathbb{R}$ 是 X 到实数域 $\mathbb{R}$ 的映射，如果对于任意的 $x, y \in X$ 有

（1） 正定性：$\|x\| \geq 0$，且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$；

（2） 齐次性：$\|ax\| = a\|x\|$，$a \in \mathbb{R}$；

（3） 三角不等式：$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$；

则称 $\|\bullet\|$ 是 X 的一个**范数**，称实数 $\|x\|$ 为 x 的**长度**．请证明：

(1) 若 $\|\bullet\|$ 是 X 的一个范数，若定义 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 为：$d(x,y) = \|x-y\|$，则 d 是集合 X 的一个度量．

(2) 反之，若 d 是集合 X 的一个度量，若定义 $\|\bullet\|: X \to \mathbb{R}$ 为：$\|x\| = d(x,0)$，则 $\|\bullet\|$ 是 X 的一个范数．

7. 证明定理 1.5.2.

8. 证明定义 1.5.6 诱导拓扑 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 构成拓扑空间.