

## 2015 级场论与无穷级数试卷 参考答案

一、判定下列级数的敛散性：

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$ ;

解：发散。注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n-1}{n^2+2} = 1$$

故该级数发散。

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ ;

解：收敛。注意到

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

故该级数收敛。

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n, a > 0$ ;

解：当  $a = 1$  时，该级数转化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$$

故该级数发散。当  $a > 1$  时，注意到

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n} = a > 1$$

故该级数发散。类似的，当  $a < 1$  时，该级数收敛。综上，该级数在  $a \geq 1$  时发散，在  $a < 1$  时收敛。

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n+1}$ ;

解：收敛。这是交错级数，注意到函数

$$f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$$

其导函数

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x} - \ln x\right)}{(x+1)^2}$$

当 $x > e^2$ 时, 有 $f'(x) < 0$ , 故当 $n > 9 > e^2$ 时, 该级数满足

$$\frac{\ln n}{n+1} > \frac{\ln(n+1)}{n+2}$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+1} = 0$$

根据莱布尼茨定理得该级数收敛。

二、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求和函数。

解: 注意到

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

故 $R = \frac{1}{\rho} = 1$ , 收敛半径为1, 当 $x = \pm 1$ 时, 原级数显然发散 (一般项极限不为零), 故

收敛域为 $(-1, 1)$ 。记和函数为 $S(x)$ , 注意到

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

若设 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ , 则逐项求积分

$$\int_0^x S'(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

故

$$S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

即

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

又

$$S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

综上

$$S(x) = 2S_1(x) + S_2(x) = \frac{x+1}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1)$$

三、求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x = -4$ 处的泰勒展开。

解: 注意到

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

不妨设  $t = x + 4$ ，则

$$f(x) = g(t) = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}$$

又注意到

$$\frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n, -3 < t < 3$$

$$\frac{1}{t-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n, -2 < t < 2$$

综上

$$g(t) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) t^n, -2 < t < 2$$

代回，得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n, -6 < x < -2$$

四、求下列微分方程的通解或初值问题的解。

(1)  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ;

解：此为常系数二阶微分方程，特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

故通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

(2)  $y' + 2y = 2x + 1$ ;

解：此为一阶线性微分方程，根据公式有

$$y = e^{-2x} \left[ \int e^{2x} (2x + 1) dx + C \right] = x + C e^{-2x}$$

(3)  $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$ ;

解：此为常系数二阶微分方程，特征方程为

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

解得

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$$

故对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

注意到  $f(x) = e^{2x}$ , 故特解的形式满足

$$y^* = k e^{2x}$$

解得

$$k = \frac{1}{21}$$

故特解为

$$y^* = \frac{1}{21} e^{2x}$$

综上, 通解为

$$y = \frac{1}{21} e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$$

解: 视  $x$  为  $y$  的函数, 则

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = y^3$$

此为一阶线性微分方程, 根据公式有

$$x = y \left[ \int \frac{1}{y} \cdot y^3 dy + C \right] = \frac{y^4}{3} + Cy$$

$$(5) \quad y^2 dx + (x+1) dy = 0, y(0) = 1;$$

解: 此为可分离变量的微分方程, 转化为

$$\frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

根据初值条件,  $y$  不恒为零, 两边同时积分, 得

$$\ln|x+1| = \frac{1}{y} + C$$

注意到  $y(0) = 1$ , 解得  $C = -1$ , 故

$$|x+1| = e^{\frac{1}{y}-1}$$

五、计算下列广义积分。

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

解: 注意到  $x = 1$  是瑕点, 而该积分显然收敛, 故

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx^2$$

令  $u = x^2, t = \sqrt{1-u}$ , 则

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du = \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{2}{3}$$

故

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{3}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^{\frac{2}{3}})};$$

解: 注意到  $x=0$  是瑕点, 而该积分显然收敛, 故令  $u = x^{\frac{1}{3}}$ , 则

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x^{\frac{2}{3}})} = \int_0^1 \frac{3u^2}{u(1+u^2)} du = \frac{3}{2} \ln 2$$

六、将函数  $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq \pi)$  展开为正弦级数。

解: 对该函数作奇延拓, 得

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

此时

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x+1) \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^{n+1} \cdot (\pi+1)], n = 1, 2, \dots$$

故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [1 + (-1)^{n+1} \cdot (\pi+1)] \sin nx, x \in (0, \pi)$$

七、讨论积分

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^\alpha} dx$$

的敛散性。

解: 注意到  $\alpha > 0$  时  $x=0$  为瑕点, 故拆分为

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^\alpha} dx$$

注意到

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} dx$$

而当  $x \rightarrow 0^+$  时

$$\frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

故当 $\alpha \geq 1$ 时, 该积分发散,  $\alpha < 1$ 时, 该积分收敛; 又注意到

$$F_2(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} dx$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{1}{x^\alpha(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2x^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

则 $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ , 即 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 该积分收敛;  $\alpha + \frac{1}{2} \leq 1$ , 即 $\alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 该积分发散。

当 $\alpha \leq 0$ 时, 尽管 $x=0$ 不是瑕点, 然而注意到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{2}$$

而 $\alpha + \frac{1}{2} < 1$ , 故积分始终发散。

综上所述, 当 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时该积分收敛, 其余情况下该积分发散。

## 八、计算积分

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx, |a| > 1$$

解: 注意到

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a - \sin x} dx$$

令 $u = \tan \frac{x}{2}$ , 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{a + \frac{2u}{1+u^2}} du = \int_0^1 \frac{2}{a(1+u^2) + 2u} du$$

解得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin x} dx = \frac{2 \arctan \frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2 \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}}$$

类似的, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a - \sin x} dx = \frac{2 \arctan \frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{2 \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt{a^2-1}}$$

故

$$I'(a) = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \left( \arctan \frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}} + \arctan \frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}} \right)$$

注意到

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}} = 1$$

故

$$\arctan \frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}} + \arctan \frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{2}$$

即

$$I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

积分，得

$$I(a) = \int I'(a) da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + C$$