微分方程初步

一阶微分方程: $F(y', y, x) = 0$

可分离变量 $y' = f(x)g(y)$ $f(x)dx = g^{-1}(y)dy$

齐次微分方程 $y' = f(y/x)$ $u = y/x$

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ $u = e^{G(x)}y(x)$

伯努利方程 $y' + p(x)y = y^{\alpha}$ $u = y^{1-\alpha}$

maybe dx/dy; 其他换元

例 1. 求解微分方程

- $\dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)\tan x, y(0) = 2;$
- $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{tx - t^2}$ $(y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx})$
- $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$
- $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2y}x^2$

例 2. $dy/dx = y/(xy + y^2)$

$$
\begin{array}{ll}
dy/dx = 2xy & xy' - y\ln y = 0 \\
3x^2 + 5x - 5y' = 0 & (y+1)^2y' + x^3 = 0 \\
xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0 & x\dfrac{dy}{dx} = y\ln\dfrac{y}{x} \\
(x^2 + y^2)dx - xydy = 0 & (x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0 \\
\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x} & xy' + y = x^2 + 3x + 2 \\
y' + y\cos x = e^{-\sin x} & y' + y\tan x = \sin 2x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0 \\
y\ln ydx + (x - \ln y)dy = 0 \\
(x - 2)\dfrac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
y' = (x+y)^2 & (y^2 - 6x)\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0 \\
y' = \dfrac{1}{x - y} + 1 & xy' + y = y(\ln x + \ln y)
\end{array}
$$

可降维微分方程: $y'' = f(x, y')$

例 3. 求解微分方程 $(1 + x^2)y'' = 2xy'$

二阶微分方程:

1. 齐次: $y'' + py' + qy = 0$
   (a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$
   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$
   (c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
2. 非齐次: $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_m(x)$
   (a) λ 不是根 $y = e^{\lambda x}Q_m(x)$
   (b) λ 是单根 $y = e^{\lambda x}xQ_m(x)$
   (c) λ 是重根 $y = e^{\lambda x}x^2Q_m(x)$
3. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}(P_l\cos\omega x + P_n\sin\omega x), m = n \vee l.$
   (a) $\lambda + \omega i$ 不是根,
   $y = e^{\lambda x}(P_1\cos\omega x + P_2\sin\omega x)$
   (b) $\lambda + \omega i$ 是根,
   $y = e^{\lambda x}x(P_1\cos\omega x + P_2\sin\omega x)$
4. $y'' + py' + qy = f_1 + f_2$

例 4. 求解微分方程

$$
\begin{array}{lllll}
y'' + 2y' - 3y = 0; & (3x+1); & xe^x; & x\cos x; & e^x\cos 2x \\
y'' - 2y' + y = 0; & (3x+1); & xe^x; & x\cos x; & e^x\cos 2x \\
y'' - 2y + 5y = 0; & (3x+1); & xe^x; & x\cos x; & e^x\cos 2x
\end{array}
$$

$$y'' + 2y' - 3y = x\cos 2x + xe^x$$

$$
\begin{array}{ll}
y'' + y' - 2y = 0 & y'' - 4y' = 0 \\
y'' + y = 0 & y'' + 6y + 13y = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
2y'' + y' - y = 2e^2 & y'' + a^2y = e^x \\
2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1 & y'' + 4y = x\cos x \\
y'' + y = e^x + \cos x & y'' - y = \sin^2 x
\end{array}
$$

求解微分方程

$$
\begin{array}{lllll}
(2 + x^2)y' = xy & xy' = y(\ln y - \ln x) & y'' + y = 3x & xy'' = y' & 2y' = y^2 - 1, y(0) = 2 \\
y'' + 4y' + 3y = 0 & y' + 2y = 2x + 1 & y'' + 6y' + 5y = e^{2x} & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^4} & y^2dx + (x+1)dy = 0, y(0) = 1
\end{array}
$$

无穷级数

常数项级数

- 性质: 线性, 括弧不变性, $u_n \to 0$
- 敛散: $u_n \to 0$, 正项, 绝对收敛, 交错级数
- 正项级数 (比较, 比值, 根值, 积分) p-级数

例 1. 判断敛散性: $\ln t << t << e^t, (t \to \infty)$

$$\sum_{n\ge1}\sqrt{\frac{n+1}{n^4+2}};\quad \sum_{n\ge1}\frac{\ln n}{n^2};\quad \sum_{n\ge1}\frac{n}{2^n}$$

$$\sum_{n\ge1}\sqrt{n}(1-\cos\frac{\pi}{n});\quad \sum_{n\ge1}\frac{n!a^n}{n^n};\quad \sum_{n\ge1}n\cdot(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

$$\sum_{n\ge1}\ln(1+\frac{1}{n^p});\quad \sum_{n\ge1}\frac{2+(-1)^n}{2^n};\quad \sum_{n\ge1}\frac{n^n}{(n!)^2}$$

例 2. (莱布尼兹)

$$\sum_{n\ge2}(-1)^n\frac{\ln n}{n};\quad \sum_{n\ge1}(-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad \sum_{n\ge1}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$$

收敛性判断的建议:
1、$u_n \to 0$; 2、是否正项级数 (四个判别方式)
3、一般级数 (是否绝对收敛)
4、是否交错级数 (单调性判断) 5、特殊级数.

幂级数

- 收敛半径 (区间, 域);
- 幂级数计算 (三个定理: 连续性 + 微分 + 积分)
- 幂级数展开 (五个基本初等函数); 和 + 乘积 + 间接; (收敛域讨论)

例 3. 求收敛域: $\sum_{n\ge1}\frac{\ln^n x}{n}$; $\sum_{n\ge1}\frac{(-3)^n}{n}(x-2)^n$; $\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!}$;
$\sum_{n\ge0}\frac{1}{3n+1}(\frac{1+x}{1-x})^n$; $\sum_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

例 4. 求和函数 $\sum_{n\ge0}x^n$; $\sum_{n\ge1}nx^{n-1}$; $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}x^n$; $\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n+1};\quad \sum_{n\ge1}n^2x^n;\quad \sum_{n\ge1}\frac{x^n}{n^2};\quad \sum_{n\ge0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

例 5. 五个基本初等函数在 0 点的泰勒公式及收敛域

例 6. (在 x_0) $\frac{1}{x}, (x-3)$; $\ln x, (x-3)$; $\cos x, (x+\frac{\pi}{4})$;
(加减) $\frac{1}{x^2-x-2}, (x-1)$; (乘除) $\frac{e^x}{1-x}$; (间接) $\arcsin x$

幂级数类的解题建议:
1、收敛区域的讨论; 2、和函数的求解;
3、结论的陈述 (收敛域)

傅里叶级数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

- 周期为 2π 的函数
- 正弦 (余弦) 展开
- 周期为 $2l$ 的函数

函数形式
怎么展开
周期多少

例 7. 将函数 $f(x) = \begin{cases}0, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x < \pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅里叶展开. 并求 $\sum_{n\ge1}\frac{1}{(2n-1)^2}$, $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

- 将 $f(x) = |x|, (|x| \le \pi)$ 傅里叶展开.
- 将 $f(x) = x+1, (0 \le x \le \pi)$ 展开成正弦级数.
- 给定周期函数 $f(x) = e^x, (0 \le x < 1)$, 求其傅里叶级数

习题课讲义:

例题 15-3.4.5.6; 16-2.4.6.7; 17-2.3.5

习题 15 课 A 组 +15.9; 16 课 A 组 2,3,4,5; 17 课 3.4.5

判断收敛性 $(a > 0)$

$$\sum_{n\ge1}\frac{n-1}{n^2+2};\quad \sum_{n\ge1}\frac{n^2}{3^n};\quad \sum_{n\ge1}(\frac{an}{n+1})^n;\quad \sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n+1}$$

$$\sum_{n\ge1}\frac{2n}{3n+1};\quad \sum_{n\ge1}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+3};\quad \sum_{n\ge1}\frac{(-a)^n}{n+1};\quad \sum_{n\ge1}n!(\frac{1}{n+1})^n$$

求收敛域和和函数 $\sum_{n\ge1}\frac{x^{n-1}}{3^n n}$; $\sum_{n\ge0}(2n+1)x^n$

幂级数展开 $\frac{1}{x^2+3x+2}(x=-4)$; $\arctan x$

傅里叶级数 1. $f(x) = x, (0 \le x \le \pi)$ 展开成余弦级数, 并由此求级数 $\sum_{n\ge1}n^{-2}$ 的和.

2. $f(x) = x+1, (0 \le x \le \pi)$ 展开成正弦级数.

广义积分

定义 明确讨论对象

定理 比较(比阶)判别法.

计算 牛顿-莱布尼兹定理.

参变量 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b f'_x(x,y)\,dy$; 莱布尼兹定理

例 1. 判断收敛性 $|k|<1$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$; $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^a(\ln x)^b};\quad \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx;\quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx;\quad \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx;\quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}dx;\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

例 2. 计算积分 $(p>0)$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}};\quad \int_0^{\infty} xe^{-px}dx;\quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};\quad \int_0^1 \ln x\,dx;\quad \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

例 3. $y(x) := \int_x^{x^2} \sin(x-t)^2\,dt$, 求 $y'(x)$

$I = \int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx (b>a>0)$

已知 $F(a) = \int_0^{a^2} dx \int_{x-a}^{x+a} \sin(x^2+y^2-a^2)\,dy$ 求 $F'(a)$.

计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\,dx$

习题课讲义:

习题 18-1.2.3.4.5.8 适当的 11.12

积分计算

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;\qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)};\qquad \int_1^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

收敛性判断

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\alpha}}\,dx,\qquad \text{其中 } a>0$$

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx,\qquad \text{其中 } x\in\mathbb{R}$$

积分计算

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2-\sin^2 x)\,dx,\qquad \text{其中 } |a|>1$$

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \Big(\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\Big)\frac{dx}{\cos x}\qquad \text{其中 } |a|<1$$