线性同余方程组解法（模数不互素）

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

其中$(m_1, m_2)|(b_1 - b_2)$，我们将(m_1, m_2)记作d.

此方程组可以写作

$$x = m_1 k_1 + b_1 \tag{1}$$

$$x = m_2 k_2 + b_2$$

从而有

$$m_1 k_1 + b_1 = m_2 k_2 + b_2$$

$$m_1 k_1 = (b_2 - b_1) + m_2 k_2$$

$$m_1 k_1 \equiv (b_2 - b_1) \pmod{m_2} \tag{2}$$

因为$(m_1, m_2)|(b_1 - b_2)$，故方程(2)有解. 设$b = b_2 - b_1$，有

$$\frac{m_1}{d} k_1 \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m_2}{d}} \tag{3}$$

方程(3)有唯一解

$$k_1 \equiv \frac{b}{d} \cdot \left(\frac{m_1}{d}\right)^{-1} \pmod{\frac{m_2}{d}}$$

设$K = \frac{b}{d}\left(\frac{m_1}{d}\right)^{-1}$，于是方程(2)的解为

$$k_1 = K + \frac{m_2}{d} \cdot k$$

将其带入方程(1)，有

$$
\begin{aligned}
x &= m_1k_1 + b_1 \\
&= m_1(K + \frac{m_2}{d} \cdot k) + b_1 \\
&= m_1K + b_1 + \frac{m_1m_2}{d} \cdot k \\
&= m_1K + b_1 + [m_1, m_2] \cdot k
\end{aligned}
$$

故可得原方程组的解为

$$x \equiv m_1K + b_1 \pmod{[m_1, m_2]}$$

$$\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{36} \\ x \equiv 7 \pmod{40} \end{cases}$$

其中$(m_1, m_2) = d = 4.$

此方程组可以写作

$$x = 36k_1 + 11 \tag{4}$$

$$x = 40k_2 + 7$$

从而有

$$36k_1 + 11 = 40k_2 + 7$$

$$36k_1 = (7 - 11) + 40k_2$$

$$36k_1 \equiv -4 \pmod{40} \tag{5}$$

从而有

$$\frac{36}{4}k_1 \equiv \frac{-4}{4} \pmod{\frac{40}{4}} \tag{6}$$

方程(3)有唯一解

$$K \equiv 1 \pmod{10}$$

于是方程(2)的解为

$$k_1 = 1 + 10k$$

将其带入方程(1)，有

$$\begin{aligned} x &= 36k_1 + 11 \\ &= 36(1 + 10k) + 11 \\ &= 47 + 360k \end{aligned}$$

故可得原方程组的解为

$$x \equiv 47 \pmod{360}$$