群

1. 在整数集$\mathbb{Z}$中定义二元运算“*”如下：

(1) $n * m = -m - n,\ m, n \in \mathbb{Z}$. 证明这个二元运算是交换的，但不是结合的.

(2) $n * m = n + m - 2,\ m, n \in \mathbb{Z}$. 证明$(\mathbb{Z}, *)$是群.

2. 证明：若G为有限集且对运算“$\cdot$”封闭，满足结合律和消去律，则$(G, \cdot)$构成一个群.

3. 已知群$(G_1, +_1)$, $(G_2, +_2)$，构造集合$G = G_1 \times G_2 = \{(x, y) | x \in G_1, y \in G_2\}$ 以及运算+满足

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 +_1 x_2, y_1 +_2 y_2)$$

证明$(G, +)$是群.

4. 设群中每个非幺元的阶为2，证明该群是Abel群.

5. 对于集合S，定义2^S为S的幂集. 证明：

(1) $(2^S, \cup)$与$(2^S, \cap)$均为半群；

(2) 若在S的子集上定义运算$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$，则$(2^S, \Delta)$是群.

6*. 设M是幺半群，e是其幺元. 对于M中的元素a，若存在元素$a^{-1} \in M$满足

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

则称a是可逆的. 试证明下列命题：

(1) 若$a \in M$，且存在$b, c \in M$使得$ab = ca = e$，则a可逆且$a^{-1} = b = c$；

(2) 若$a\in M$可逆，则$b=a^{-1}$当且仅当$aba=a, ab^2a=e$；

(3) M的子集G为群的充要条件是G中每个元素可逆，且$\forall g_1,g_2\in G$有$g_1^{-1}g_2\in G$；

(4) M中所有可逆元素构成一群.

7. 设G是一个群，H是G的一个有限子集，证明H是G的子群的充要条件是：对任意$a,b\in H$有$a\cdot b\in H$.

8. 设H是$\mathbb{Z}$的子群，证明必存在整数m使得$H=m\mathbb{Z}$.

9. 证明群G不能写成两个真子群的并.

10. 证明群中元素与其逆元具有相同的阶.

11. 证明有限群G中的任何元素的阶都可整除$|G|$.

12. 证明$(\mathbb{Z}_p,+)$有$p-1$个生成元，其中p为素数.

13. 设G是群，$a\in G$，$\langle a\rangle$是G中唯一的二阶子群. 证明对于$\forall x\in G$，有$ax=xa$.

14. 证明只有有限个子群的群为有限群.

15. 设G是Abel群，H,K是其循环子群，阶分别为r,s，证明：

(1) 若$(r,s)=1$，则G有阶为rs的循环子群；

(2) G包含一个阶为$[r,s]$的循环子群.

16. 证明质数阶群只有平凡子群.

17*. 已知群G_1,G_2是G的有限子群，证明：

$$|G_1G_2|=[G_1:1][G_2:1]/[G_1\cap G_2:1].$$

18. 已知群G_1,G_2是G的有限子群且$G_1\subset G_2$，证明

$$[G:G_1]=[G:G_2][G_2:G_1].$$

19. 设H是群G的正规子群，证明商群G/H是Abel群的充要条件是

$$gkg^{-1}k^{-1} \in H,\ \forall g, k \in G.$$

20. 设H, K是群G的两个正规子群且$H \cap K = \{1\}$，证明：

$$hk = kh,\ \forall h \in H, k \in K.$$

21. 设G为交换群，幺元为e. 定义G中的**扭元**为满足$g^n = e(n \in \mathbb{Z}^+)$的元素$g$，扭元集合为$G_{tor} = \{g \in G | \exists n \in \mathbb{Z}^+, g^n = e\}$. 证明$G_{tor}$是$G$的正规子群.

22*. 设H是群G的子群且$[G:H] = 2$，证明$H \lhd G$.

23. 设H, K是两个群. 在$H \times K = \{(h,k) | h \in H, k \in K\}$中定义乘法

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2).$$

证明：

(1) $H \times K$是一个群；

(2) $H_1 = \{(h, 1_K) | h \in H\}$和$K_1 = \{(1_H, k) | k \in K\}$是$H \times K$的正规子群，其中$1_H, 1_K$分别是$H, K$的幺元；

(3) $H_1 \cap K_1 = \{(1_H, 1_K)\}$；

(4) $H \times K = H_1K_1$.

24. 设f为群G到群H的映射，分别判断如下的f是否为同态，如果是则给出$\ker f$：

(1) 加法群$G = \mathbb{R},\ H = \mathbb{Z},\ f(x) = [x]$，其中$[x]$为取整函数，即不大于$x$的最大整数；

(2) 乘法群$G = \mathbb{R}^*,\ H = \mathbb{R}^+,\ f(x) = |x|$；

(3) $G = \mathbb{Z}_5,\ H = \mathbb{Z}_2,\ f(x) = x \bmod 2$.

25. 设G是群，证明其自同构集合Aut$G$是一个群.

26. 设G是群，证明：

(1) $g \mapsto g^{-1}$是G的自同构映射当且仅当G是Abel群；

(2) 若G是Abel群，对任意整数k，$g \mapsto g^k$是G的自同态映射.

27**. 证明例6.1.7中的Klein四元群K的自同构群与S_3同构.

28. 将置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$分解成不相交的轮换.

29. 将置换之积$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$分解成不相交的轮换.

30. 求出S_5中的元素$\sigma\tau$, $\sigma^{-1}\tau\sigma$, σ^2, σ^3，其中$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.