离散数学复习

1、答案

时间停留20分钟

允公允能 日新月异

1、设<S，*>是一个半群，如果S是一个有限集，是有限半群，则必有a∈S,使得a*a=a.

2、设 $M=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in R \wedge a\neq 0\}$，在 M 上定义运算如下：$\langle a,b\rangle \circ \langle c,d\rangle = \langle ac, ad+b\rangle$， 试验证 $\langle M;\circ\rangle$ 构成一个群。

3、设〈H,*〉和〈G,*〉均是群〈S,*〉的子群，令HG={h*g|h∈H，g∈G}。证明：〈HG,*〉是S的子群的充分必要条件是HG=GH。

允公允能 日新月异

4、判断下述集合关于给定的运算是否构成环、整环和域，如果不能构成，请说明理由。

(1) $A=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in Z\}$，关于数的加法和乘法。

(2) $A=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in Q\}$，关于数的加法和乘法。

(3) $A=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b\in Z\}$，关于数的加法和乘法。

(4) $A=\{a+bi \mid a, b\in Z\wedge i^2=-1\}$，关于复数的加法和乘法。

南開大學 Nankai University

允公允能 日新月异

5、设L是格，则$\forall a,b \in L$ 有$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$。

6、如果在一个格中并运算对交可分配，证明在该格中交运算对并可分配。

南開大學 Nankai University

二、证明题（5×8分）

5、设代数系统⟨A，∗⟩是独异点，e是其单位元．若∀a∈A，有a∗a=e，请说明：⟨A，∗⟩是Abel群的理由。

6、证明：若<H，⊙>是群<G，⊙>的子群，则或者aH∩bH=∅或者aH=bH。

7、<G,*>是个群，u∈G，定义G中的运算“Δ”为aΔb=a*u-1*b，对任意a,b∈G，求证：<G, Δ>也是个群。

8、设v为无环无向图G中的一条割边的一个端点，证明：v的割点当且仅当v不是悬挂顶点。

9、设n阶图G中有m条边，证明 $\delta(G)\le\frac{2m}{n}\le\Delta(G)$

交作业！老师帮助看看问题
请同学们把试卷整理好！
交至讲台老师处！

1、答案

- [证]：<S，*>是一个半群，则由S是封闭的、有限的、可结合的。∴任意次运算结果还在S中。
- 由于*的封闭性，可知$b*b \in S$,记作$b^2= b*b$（可结合）
- 又由于S是有限集合，∴∃$j>i$,使 $b^i=b^j$,
- 令 $p=j-i$ ，使$b^j = b^p* b^i = b^p* b^j$
- 故找到一个使q：
  - $b^q= b^p* b^q, q>=i, q=kp$,
  - $b^{kp}= b^p* b^{kp} = b^p* b^p* b^{kp} = b^{2p}* b^{kp} = b^p* b^p* \ldots b^p* b^{kp} = b^{kp}* b^{kp}$
  - 设$a= b^{kp} \in S$,
  - ∴ $a*a=a$

- $b^q = b^p * b^q, q >= i, q = kp,$
- $b^{kp} = b^p * b^{kp} = b^p * b^p * b^{kp} = b^{2p} * b^{kp} = b^p * b^p * \ldots b^p * b^{kp} = b^{kp} * b^{kp}$
- 设$a = b^{kp} \in S,$
- $\therefore a*a=a$

2、答案

设 M = {<a, b>| a,b∈R ∧ a≠0}，在 M 上定义运算如下：<a, b> o <c, d> = <ac, ad+b>，试验证<M; o>构成一个群。

证明：∀a , b, c, d ∈ R

(1) o 是二元运算：

ac ∈ R, ad+b∈ R,所以<a, b> o <c, d> = <ac, ad+b> ∈ R，故 o 具有封闭性，是二元运算；

(2) o 是可结合的：

∀e , f ∈ R

(<a,b> o <c,d>) o <e,f>=<ac,ad+b> o <e,f>=<ace,acf+ad+b>;

<a,b> o (<c,d> o <e,f>)=<a,b> o <ce,cf+d>=<ace,acf+ad+b>;

故 (<a,b> o <c,d>) o <e,f>= <a,b> o (<c,d> o <e,f>)

(3) M 针对 o 存在幺元：

$<a, b>*<e,f>=<a, b>$，则 $e=1, f=0$；

$<e',f'>*<a, b>=<a, b>$，则 $e'=1, f'=0$；

M 针对 o 存在幺元 $<1，0>$；

(4) M 的元素针对 o 是可逆的：

$<a, b>*<e,f>=<1, 0>$，则 $e=1/a, f=-b/a \in R$；

$<e',f'>*<a, b>=<1, 0>$，则 $e'=1/a, f'= -b/a \in R$；

$<a,b>$对 o 是可逆的;

3、答案

证明：先证必要性（互为子集，则相等），

假设〈HG,*〉是S的子群。任取$g*h\in GH$，则（$g*h$）$^{-1}=h^{-1}*g^{-1}\in HG$，因为$HG$是群，所以$HG$上的元素（$h^{-1}*g^{-1}$）的逆。

（$h^{-1}*g^{-1}$）$^{-1}=g*h\in HG$，证得$GH\subseteq HG$。

任取$h*g\in HG$，因为HG是群，所以

（$h*g$）$^{-1}\in HG$，且必存在着$h_1\in H$，$g_1\in G$，

使得（$h*g$）$^{-1}=h_1*g_1\in HG$，因为HG是群，所以，

HG上的元素（h_1*g_1）的逆（h_1*g_1）$^{-1}=g^{-1}{}_1*h^{-1}{}_1\in GH$，

证得$HG\subseteq GH$。

综上可得$HG=GH$。

南开大学 Nankai University

4、答案

4、判断下述集合关于给定的运算是否构成环、整环和域，如果不能构成，请说明理由。

(1) $A=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in Z\}$，关于数的加法和乘法。

是环和整环，但不是域，例如 $\sqrt{2}\in A$，但 $\sqrt{2}$ 没有逆元。

(2) $A=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in Q\}$，关于数的加法和乘法。

是环, 整环和域。

(3) $A=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b\in Z\}$，关于数的加法和乘法。

不是环，不是整环，也不是域。因为A关于数的乘法不封闭。

(4) $A=\{a+bi \mid a, b\in Z\wedge i^2=-1\}$，关于复数的加法和乘法。

是环和整环，但不是域，例如 $2i\in A$，但 $2i$ 没有逆元。

允公允能 日新月异 南開大學 Nankai University

5、答案

格的性质

5、设L是格，则$\forall a,b\in L$ 有$a\le b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$

证明　　先证 $a\le b \Rightarrow a\wedge b=a$

由$a\le a$和$a\le b$可知，a是$\{a,b\}$的下界，

故$a\le a\wedge b$。显然又有$a\wedge b\le a$。

由反对称性得：$a\wedge b=a$。

再证 $a\wedge b=a \Rightarrow a\vee b=b$。

根据吸收律有 $b=b\vee(b\wedge a)$

由$a\wedge b=a$，得 $b=b\vee a$, 即$a\vee b=b$。

最后证$a\vee b=b \Rightarrow a\le b$。

由$a\le a\vee b$得 $a\le a\vee b=b$。

允公允能 日新月异
南開大學 Nankai University