[IDA] Domácí úloha: Sada 7

Adrián Tomášov
Tomáš Ulický
Jozef Urbanovský
Adrián Tóth
Adam Šulc
Ondrej Svoreň

2015-12-09

1 Domácí úloha 1

1.1 Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny X, Y, $Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

(i) $\overline{Y \setminus Z} = \overline{Z \setminus Y}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$Y = \{1, 2, 3, 4\}$
$Z = \{1, 2, 5, 6\}$

$\overline{Y \setminus Z} = \overline{\{3, 4\}} = \{1, 2, 5, 6\}$
$\overline{Z \setminus Y} = \overline{\{5, 6\}} = \{1, 2, 3, 4\}$

Jestliže $\overline{Y \setminus Z} = \{1, 2, 5, 6\}$ a $\overline{Z \setminus Y} = \{1, 2, 3, 4\}$, pak $\overline{Y \setminus Z} \neq \overline{Z \setminus Y}$.

(ii) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup Z$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$Y = \{1, 2, 6, 7\}$
$Z = \{1, 3, 6, 8\}$

$[X \setminus (Y \cap Z)] = X \setminus \{1, 6\} = \{2, 3, 4, 5\}$
$[(X \setminus Y) \cup Z] = \{3, 4, 5\} \cup Z = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Jestliže $[X \setminus (Y \cap Z)] = \{2, 3, 4, 5\}$ a $[(X \setminus Y) \cup Z] = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$, pak $[X \setminus (Y \cap Z)] \neq [(X \setminus Y) \cup Z]$.

(iii) $X \cup (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cup Z)$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$Y = \{1, 2, 6, 7\}$
$Z = \{1, 3, 6, 8\}$

$[X \cup (Y \setminus Z)] = X \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
$[(X \cap Y) \setminus (X \cup Z)] = \{1, 2\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \emptyset$

Jestliže $[X \cup (Y \setminus Z)] = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ a $[(X \cap Y) \setminus (X \cup Z)] = \emptyset$, pak $[X \cup (Y \setminus Z)] \neq [(X \cap Y) \setminus (X \cup Z)]$.

(iv) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Z)$

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$X = \{1,2,3,4,5\}$
$Y = \{1,2,6,7\}$
$Z = \{1,3,6,8\}$

$[X \cap (Y \setminus Z)] = X \cap \{2,7\} = \{2\}$
$[(X \cup Y) \setminus (X \cap Z)] = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{1,3\} = \{2,4,5,6,7\}$

Jestliže $[X \cap (Y \setminus Z)] = \{2\}$ a $[(X \cup Y) \setminus (X \cap Z)] = \{2,4,5,6,7\}$, pak $[X \cap (Y \setminus Z)] \neq [(X \cup Y) \setminus (X \cap Z)]$.

(v) $(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) = Y$

$U = \{1,2,3,4,5\}$
$X = \{1,2,3\}$
$Y = \{1,4,5\}$

$[(X \cup Y) \cap (Y \setminus X)] = \{1,2,3,4,5\} \cap \{4,5\} = \{4,5\}$
$Y = \{1,4,5\}$
Jestliže $[(X \cup Y) \cap (Y \setminus X)] = \{4,5\}$ a $Y = \{1,4,5\}$, pak $(X \cup Y) \cap (Y \setminus X) \neq Y$.

1.2 **Na množině $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ je dána relace $R = \{(x,y) \mid x,y \in X,\ 4y$ dělí $3x)\}$. Zapiště relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1}.**

$$\begin{aligned}
X &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
3x \, mod \, 4y &= 0 \\
R &= \{(4,1),(4,3),(8,1),(8,2),(8,3),(8,6)\} \\
Dom(R) &= \{4,8\} \\
Im(R) &= \{1,2,3,6\} \\
R^{-1} &= \{(1,4),(3,4),(1,8),(2,8),(3,8),(6,8)\}
\end{aligned}$$

1.3 Buď $X = \mathbb{N}$, $\tau = \{W \mid W \subseteq X,\ X \setminus W$ je konečná$\} \cup \{\varnothing\}$. Dokažte, že (X, τ) je topologický prostor.

$X - X = \varnothing$ $\quad\quad$ $\varnothing \in \tau$ $\quad\quad$ X je konečná množina

$W = \mathbb{N} \setminus \{\,2, 7, 14\,\}$ $\quad$ $X \setminus W$ je $\{\,2, 7, 14\,\}$ což je konečná množina $\implies W \in \tau$

(i) $\varnothing,\ X \in \tau$

(ii) Nechť $U_i \neq \varnothing$, $U_i \in \tau$ pro $\forall i \in I$ tak $K_i = X - U_i$ je konečná. Nechť $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, tak $U \neq \varnothing$. Tak $X \setminus U = X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcap\limits_{i \in I} (X \setminus U_i) = \bigcap\limits_{i \in I} K_i$, což je konečná množina, protože K_i je konečná množina.

(iii) Nechť $U, V \in \tau$, pokud $U = \varnothing$ anebo $V = \varnothing$, je $U \cap V = \varnothing \in \tau$. Nechť $U = \varnothing = V$, tak $X \setminus U$, $X \setminus V$ jsou konečné a tedy $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) \in \tau$

$(X,\ \tau)$ je topologický prostor.

1.4 Nechť R relace na X taková, že R^{-1} je reflexivní a tranzitivní relace na X. Dokažte, že $R \cap R^{-1}$ je ekvivalence na X.

X
$R \subseteq X$, $R^{-1} \subseteq X$
R^{-1} je reflexivní, tranzitivní
Dokažte, že $R \cap R^{-1}$ je ekvivalence na X

Konkrétní případ:

$$\begin{aligned} X &= \{\, 1, 2, 3, 4 \,\} \\ R &= \{\, (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,1), (1,2), (3,2), (3,1) \,\} \\ R^{-1} &= \{\, (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (1,3) \,\} \\ R \cap R^{-1} &= \{\, (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,1), (1,2) \,\} \end{aligned}$$

Důkaz:

Podmínky R^{-1}:
Pro všechna $x, y, z \in X$ platí, že $(x, x) \in R^{-1}$ a zároveň platí, že pokud patří do relace R (x, y) i (y, z) potom musí patřit i (x, z).
$\forall (x,x) \in R^{-1} \wedge \big([(x,y) \in R^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1}] \implies (x,z) \in R \big)$
Podmínky R:
$(x, y) \in R$ právě tehdy, pokud $(y, x) \in R^{-1}$, $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R^{-1}$

$R_p = R^{-1} \cap R$

Z výše uvedených podmínek vyplývá, že do R_p patří (x, y) jen v případě, když do R patří (x, y) a zároveň (y, x). Tím pádem pokud patří do R_p (x, y), tak patří tam i (y, x). Z toho vyplývá, že R_p je symetrická relace. R_p musí být i reflexivní, protože $(x, x)^{-1} = (x, x)$ z toho vyplývá, že všechna (x, x) patří do R_p. Pokud patří do R^{-1} (x, y), (y, z) a (x, z), tak aby to samé platilo i do R_p, musí do R zároveň patřit i (y, x), (y, z), (z, x) z toho vyplývá, že pokuď R^{-1} je tranzitivní, musí být i R_p tranzitivní a tím jsou splněny všechny podmínky pro to, aby R_p byla ekvivalence.

1.5 Nechť $A = \mathbb{Z}$, $R = \{\, (x, y) \mid x, y \in Z, 4 \mid y - x \,\}$. Dokažte, že R je kongruencí na $(A, +, \cdot)$. Sestrojte faktorovou algebru A/R.

1. Musíme dokázat, že R je ekvivalence.

   a) Reflexivnost
   Zvolme $x \in A$, tak $x - x = 0 = 0 \cdot 4 \implies 4 \cdot (x - x) \implies (x, x) \in R$

   b) Symetrie
   Nechť $(x, y) \in R$, tak $4 \mid y - x$, tj. $y - x = 4k, k \in \mathbb{Z} \implies$
   $\implies x - y = -4k \implies 4 \mid x - y \implies (y, x) \in \mathbb{R}$

   c) Tranzitivnost
   Nechť $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$. Tak $4 \mid y - x$ a $4 \mid z - y$. Potom existují $m, n \in Z$, že $y - x = 4m$ a $z - y = 4n$, tak $z - y + y - x = z - x = 4 \cdot (n + m) \implies 4 \mid z - x$ a $(x, z) \in R$

   R je ekvivalence.

2. Nechť $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ takové, že $(x_1, y_1) \in R$ a $(x_2, y_2) \in R$, tak
   $(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \in R$
   $(x_1 \cdot x_2,\, y_1 \cdot y_2) \in R$

   Předpokládejme, že $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ a $(x_1, y_1) \in R$ a $(x_2, y_2) \in R$. Tak $y_1 - x_1 = 4k$ a $y_2 - x_2 = 4n$, kde $k, n \in Z$. Tak $y_1 - x_1 + y_2 - x_2 = 4k + 4n$, tj. $(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) = 4 \cdot (k + n)$. Potom $4 \mid (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)$ a potom $(x_1 + x_2,\, y_1 + y_2) \in R$.

   Podobně $y_1 = 4k + x_1$, $y_2 = 4n + x_2$, odtud $y_1 \cdot y_2 = (4k + x_1) \cdot (4n + x_2) = 16kn + 4kx_2 + 4nx_1 + x_1x_2$. Tak $y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot (4kn + kx_2 + nx_1) \implies$
   $\implies 4 \mid y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2$, tj. $(x_1 \cdot x_2,\, y_1 \cdot y_2) \in R$.

   Můžeme vytvořit faktorovou algebru.

Třídy rozkladu podle zbytku:
$A = \mathbb{Z}$
$[0] = \{ 0, 4, -4, 8, -8, \dots \}$
$[1] = \{ 1, 5, -3, 9, -7, \dots \}$
$[2] = \{ 2, 6, -2, 10, -6, \dots \}$
$[3] = \{ 3, 7, -1, 11, -5, \dots \}$
faktorová algebra $A/R = \{ [0], [1], [2], [3] \}$

$[a] \oplus [b] = [a+b]$
$[a] \odot [b] = [a \cdot b]$

$\oplus$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$\odot$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

1.6 Najděte všechny podgrupy grupy ($\mathbb{Z}_6$, $\oplus$). Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Pogrupy:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{0, 2, 4\}$
$\{0, 3\}$
$\{0\}$
V komunitativní grupě je libovolná její podgrupa normální.

Neutrální prvek: $e = 0$

$$a \circ e = e \circ a = a$$

$$a \circ e = a$$
$$5 \circ 0 = 5$$

$$e \circ a = a$$
$$0 \circ 5 = 5$$

Inverzní prvek: $a \circ a' = e$

$$5 \circ 1 = 0$$
$$4 \circ 2 = 0$$
$$3 \circ 3 = 0$$
$$2 \circ 4 = 0$$
$$1 \circ 5 = 0$$
$$0 \circ 0 = 0$$

Dokázali jsme, že ($\mathbb{Z}_6$, $\oplus$) je grupa.

Komunitativnost: Je symetrická podle hlavní diagonály $\implies$ je komunitativní.

$$a \circ b = b \circ a$$
$$5 \circ 1 = 1 \circ 5$$
$$0 = 0$$

$\{0,2,4\}$

$\{0,2,4\} \oplus 0 = \{0,2,4\}$
$\{0,2,4\} \oplus 1 = \{1,3,5\}$
$\{0,2,4\} \oplus 2 = \{2,4,6\}$
$\{0,2,4\} \oplus 3 = \{3,5,7\}$
$\{0,2,4\} \oplus 4 = \{4,6,8\}$
$\{0,2,4\} \oplus 5 = \{5,7,9\}$

$(\{\bar{0},\bar{1}\},\oplus)$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\{0,3\}$

$\{0,3\} \oplus 0 = \{0,3\}$
$\{0,3\} \oplus 1 = \{1,4\}$
$\{0,3\} \oplus 2 = \{2,5\}$
$\{0,3\} \oplus 3 = \{3,6\}$
$\{0,3\} \oplus 4 = \{4,7\}$
$\{0,3\} \oplus 5 = \{5,8\}$

$(\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\},\oplus)$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$\{0,1,2,3,4,5\}$

$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 0 = \{0,1,2,3,4,5\}$
$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 1 = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 2 = \{2,3,4,5,6,7\}$
$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 3 = \{3,4,5,6,7,8\}$
$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 4 = \{4,5,6,7,8,9\}$
$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus 5 = \{5,6,7,8,9,10\}$

$(\{\bar{0}\},\oplus)$

$\oplus$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$

$\{0\}$

$\{0\} \oplus 0 = \{0\}$
$\{0\} \oplus 1 = \{1\}$
$\{0\} \oplus 2 = \{2\}$
$\{0\} \oplus 3 = \{3\}$
$\{0\} \oplus 4 = \{4\}$
$\{0\} \oplus 5 = \{5\}$

$(\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\},\oplus)$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$