1. samostatná práce
IMA
Zadání 9

Adam Šulc - xsulca00
Tomáš Ulický - xulick01
Daniel Rudík - xrudik00
Ondrej Svoreň - xsvore01
Adrián Tomašov - xtomas32
Jozef Urbanovský - xurban66

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

1. príklad

Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci

$$f(x) = \frac{9x^3 + 33x^2 + 17x - 23}{x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 15x + 9}$$

Použijeme Hornerovo schéma pre rozklad polynómu na súčinový tvar

HS	1	7	16	16	15	9
-1	1	6	10	6	9	0
-3	1	3	1	3	0	
-3	1	0	1	0		

$$(x+1)(x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9)$$
$$(x+1)(x+3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$$
$$(x+1)(x+3)^2(x^2+1)$$

$$\frac{9x^3 + 33x^2 + 17x - 23}{(x+1)(x+3)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$9x^3 + 33x^2 + 17x - 23 = A(x+3)^2(x^2+1) + B(x+1)(x+3)(x^2+1) + C(x+1)(x^2+1) + Dx + E(x+1)(x+3)^2$$

Keď dosadíme prvý koreň rovnice -1, následne $A = -2$

Keď dosadíme druhý koreň rovnice -3, následne $C = 1$

Keď dosadíme vypočítané hodnoty premenných získame:

$$9x^3+33x^2+17x-23 = (-2)(x+3)^2(x^2+1)+B(x+1)(x+3)(x^2+1)+1(x+1)(x^2+1)+(D+Ex)(x+1)(x+3)^2$$

Roznásobíme:

$9x^3 + 33x^2 + 17x - 23 = Bx^4 + Ex^4 + 4Bx^3 + 7Ex^3 + Dx^3 + 4Bx^2 + 15Ex^2 + 7Dx^2 + 4Bx + 15Dx + 9Ex - 2x^4 - 11x^3 - 19x^2 - 11x + 3B + 9D - 17$

Zoskupíme prvky podľa premennej x a zostavíme maticu:

$9x^3 + 33x^2 + 17x - 23 = x^4(-2 + B + E) + x^3(4B + 7E - 11 + D) + x^2(4B + 7D + 15E - 19) + x(4B + 9E + 15D - 11) + (3B + 9D - 17)$

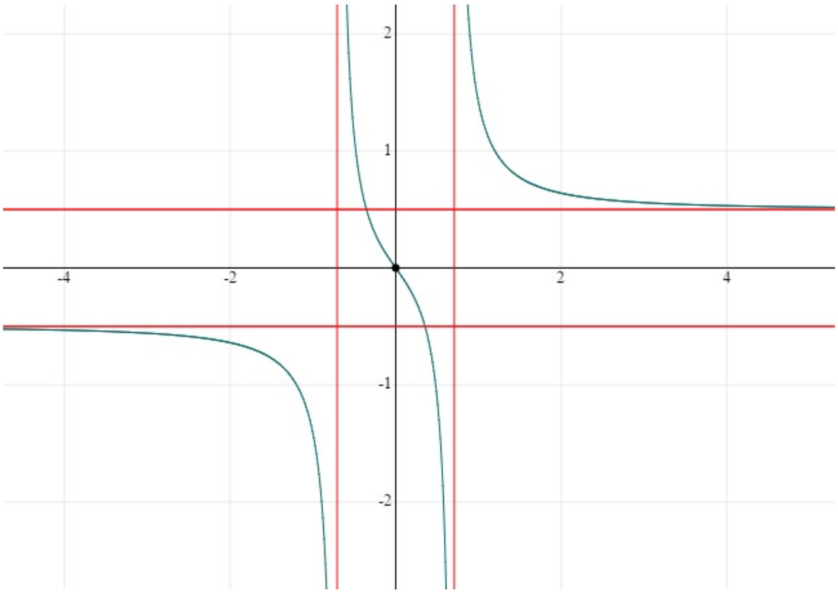
$$\begin{bmatrix} 3a_1 + 9a_3 - 17 = -23 \\ 4a_1 + 15a_3 + 9a_4 - 11 = 17 \\ 4a_1 + 15a_4 + 7a_3 - 19 = 33 \\ 4a_1 + 7a_4 + a_3 - 11 = 9 \\ a_1 + a_4 - 2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$A = -2$$
$$B = -2$$
$$C = 1$$
$$D = 0$$
$$E = 4$$

$$\frac{-2}{x+1} + \frac{-2}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{4x+0}{x^2+1} =$$
$$\frac{4x}{x^2+1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2}$$

2. príklad

Najděte asymptoty grafu funkce. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}$



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ D(f) &= R - \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\} \end{aligned}$$

Prejdeme nedefinové body funkcie a overíme, či nespĺňajú aj podmienku asymptót bez smernice, pre ktoré má platiť nasledovné:

$$\lim_{x\to a^+} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^-} = \pm\infty$$

Využijeme nasledovné pravidlá nevlastných limít (k označuje ľubovoľné kladné reálne číslo).

$$\frac{k}{0^+} = \infty \qquad \frac{k}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}}{2(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2-1} = \lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt{2}}^+} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1}}{2(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2-1} = \lim_{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}}^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}{0^-} = -\infty$$

Týmto sme dokázali, že bod podozrivý z extrémizmu je zároveň aj asymptotou danej funkcie. Následne sa pokúsime nájsť asymptoty so smernicou, využijeme vzťah

$$a = \lim \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2(2-\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \qquad \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

Výsledkom danej limity je 0, to znamená, že asymptota nemá smernicu. V predpise y = 0x + q. To znamená, že nemá smernicu, teda asymptota bude vodorovná s osou x a graf funkcie sa k nej blíži v $\pm\infty$
Musí platiť :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a \in R \qquad resp. \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in R$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2(2-\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad x_2 = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$y_1 = \underline{\frac{1}{2}} \qquad y_2 = \underline{-\frac{1}{2}}$$

3. príklad

Knihkupectví získalo určitou knihu od vydavatele jako dar za 3 dolary za kus a prodává ji za cenu 15 dolarů za kus. Při této ceně se prodalo 200 knih za měsíc. Aby se stimuloval prodej, chce knihkupectví cenu snížit a odhaduje, že za každý 1 dolar snížené ceny se prodá měsíčně o 20 knih více. Určete, při jaké ceně knihy dosáhne knihkupectví největší zisk z jejího prodeje.

15 \$...	200 ks
14 \$...	220 ks
4 \$...	420 ks
x \$...	(200+20(15-x)) ks

---

x...	cena 1 knihy
x - 3...	zisk za 1 knihu
(500-20x)...	počet predaných kníh

Z toho predpis funkcie:

$$f(x) = (x-3)(500-20x)$$
$$f(x) = 500x - 20x^2 - 1500 + 60x$$

Pričom funkčná hodnota vyjadruje zisk za mesiac pri cene x. Pomocou derivácie nájdeme bod, v ktorom má funkcia extrém.

$$f'(x) = 500 - 40x + 60$$
$$f'(x) = 560 - 40x$$
$$f'(x) = 40(14-x)$$

$$f'(x) = 0$$
$$40(14-x) = 0$$
$$14 - x = 0$$
$$x = 14$$

Následne prešetríme monotónnosť funkcie a teda dosadíme hodnoty z intervalu $(-\infty, 14)$ a $(14, \infty)$.

$$x = 13$$
$$40(14-x) =?$$
$$40(14-13) = 40$$
$$f(x)' > 0$$

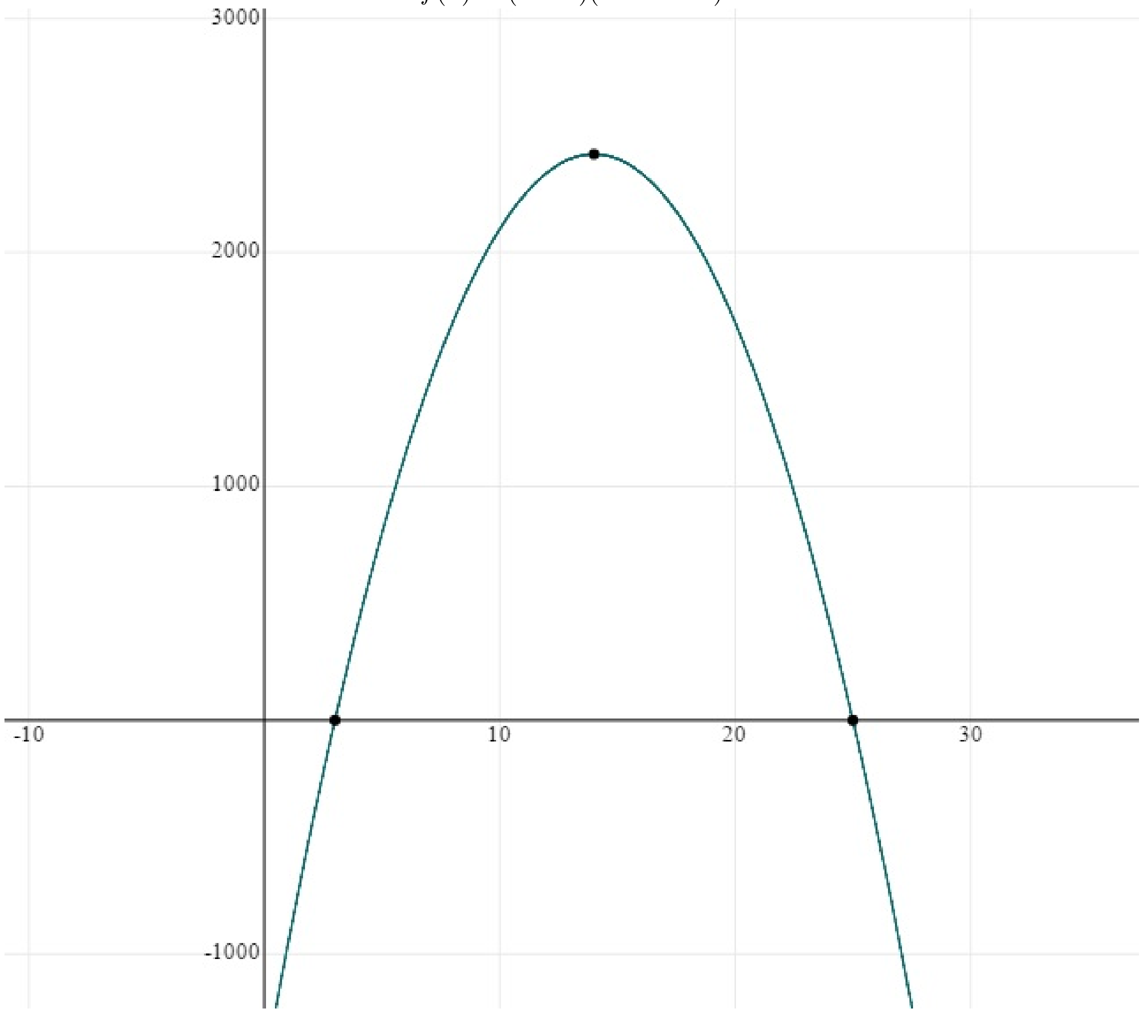
Funkcia je na intervale $(-\infty, 14)$ rastúca.

$$x = 15$$
$$40(14-x) =?$$
$$40(14-15) = -40$$
$$f(x)' < 0$$

Funkcia je na intervale $(14, \infty)$ klesajúca.

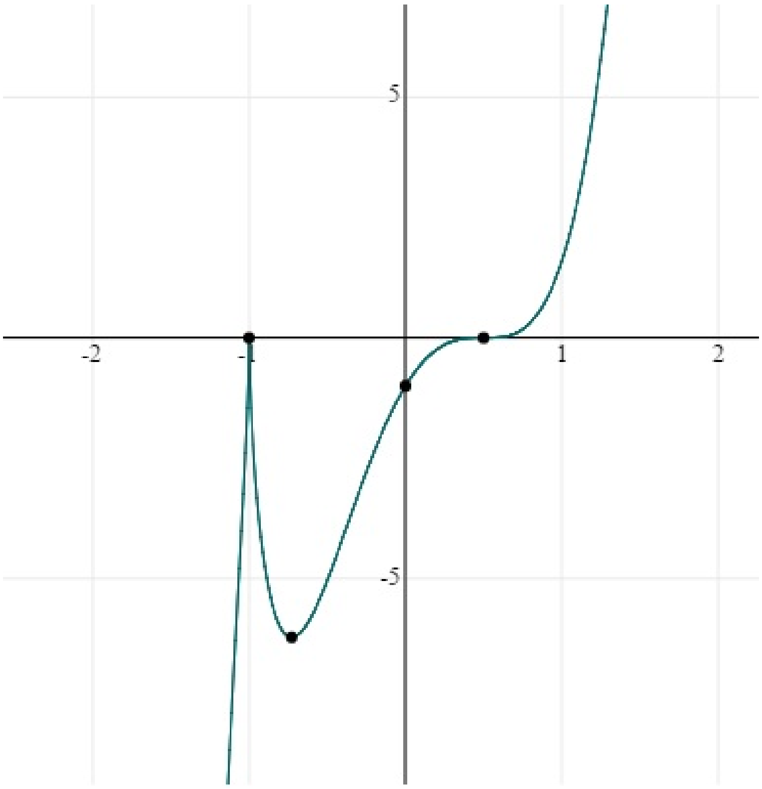
Funkcia bude dosahovať maximum v bode x = 14. Najväčší zisk teda kníhkupectvo bude mať pri cene 14\$ za kus.

$f(x) = (x-3)(500-20x)$



5. príklad

Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2x-1)^3$ na intervalu $<$-1,1$>$.



Funkciu zderivujeme, aby sme našli stacionárne body, ktoré môžu byť hľadaným minimom resp. maximom. Stacionárne body, sú body, v ktorých sa derivácia rovná 0. Stacionárny bod, v ktorom bude derivácia meniť svoje znamienko je aj lokálnym extrémom.

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2x-1)^3$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x-1)^3 + (x+1)^{\frac{2}{3}} \times 3(2x-1)^2 \times 2$$

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)^3}{3\sqrt[3]{x+1}} + 6\sqrt[3]{(x+1)^2}(2x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)^3}{3\sqrt[3]{x+1}} + \frac{6\sqrt[3]{(x+1)^2}(2x-1)^2}{1} \times \frac{3\sqrt[3]{x+1}}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)^3 + 18(x+1)(2x-1)^2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(2(2x-1) + 18(x+1))}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(4x-2+18x+18)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(22x+16)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\frac{(2x-1)^2(22x+16)}{3\sqrt[3]{x+1}} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{8}{11}$$

Stacionárne body a hranice intervalu následne dosadíme do pôvodnej funkcie a zistíme, v akom bode sa nachádza hľadané maximum a minimum.

$$f(-1) = 0$$
$$f(-\frac{8}{11}) \doteq -6.2192$$
$$f(\frac{1}{2}) = 0$$
$$f(1) = \sqrt[3]{4}$$

$$\text{Lokálne minimum} : f(-\frac{8}{11}) \doteq -6.2192$$
$$\text{Lokálne maximum} : f(1) = \sqrt[3]{4}$$