

Ричард М. Кроновер

# ФРАКТАЛЫ И ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ.

*Перевод с английского Т. Э. Кренкеля и А. Л. Соловейчика  
под редакцией Т. Э. Кренкеля*

*Рекомендовано УМО в области  
электроники и прикладной математики  
в качестве учебного пособия для студентов  
по специальности 01.02 «Прикладная математика»*

ПОСТМАРКЕТ  
МОСКВА  
2000

Р. М. Кроновер.

**Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.** Москва: Постмаркет, 2000. — 352 с.

Рецензенты: кафедра теории вероятностей и прикладной математики Московского технического университета связи и информатики; профессор Б. Ю. Стернин.

Первое полноценное учебное пособие по новой, быстроразвивающейся математической дисциплине — до сих пор на русском языке выходили лишь монографии. Хорошо подобранные упражнения и алгоритмы делают книгу отличным пособием для студентов старших курсов и аспирантов, специалистов по приложениям этой теории в различных областях от биологии до лингвистики.

## *Introduction to Fractals and Chaos*

Richard M. Crownover

*University of Missouri-Columbia*



**Jones and Bartlett Publishers**  
Boston London

ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY

Jones and Bartlett Publishers, Inc.

40 Tall Pine Drive, Sudbury, MA 01776

COPYRIGHT 1995 ALL RIGHTS RESERVED

© 1999 Перевод на русский язык, ЗАО «Предприятие Постмаркет»

ISBN 5-901095-03-0

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>1. Введение</b>	<b>9</b>
1.1. Что такое фракталы и хаос? . . . . .	9
1.2. Предыстория . . . . .	12
<b>2. Классические фракталы</b>	<b>15</b>
2.1. Самоподобие . . . . .	15
2.2. L-системы . . . . .	23
2.3. Пыль Кантора . . . . .	38
2.4. Кривые Пеано . . . . .	45
<b>3. Множества и отображения</b>	<b>53</b>
3.1. Предварительные сведения из теории множеств . . . . .	53
3.2. Метрические пространства . . . . .	63
3.3. Сжимающие отображения . . . . .	68
3.4. Аффинные преобразования . . . . .	76
3.5. Метрика Хаусдорфа I . . . . .	92
<b>4. Системы итерированных функций</b>	<b>96</b>
4.1. Системы итерированных функций . . . . .	96
4.2. Реализация СИФ . . . . .	102
4.3. СИФ со сгущением . . . . .	112
4.4. Коллажи . . . . .	121
<b>5. Размерность</b>	<b>127</b>
5.1. Размерность Минковского . . . . .	127
5.2. Вычисление размерности . . . . .	137
<b>6. Хаотическая динамика I</b>	<b>147</b>
6.1. Аттрактор Лоренца . . . . .	147
6.2. Итерированные отображения . . . . .	150
6.3. Универсальность Фейгенбаума . . . . .	159
6.4. Периодичность Шарковского . . . . .	164
6.5. Хаос . . . . .	169

<b>7. Хаотическая динамика II</b>	<b>185</b>
7.1. Существенная зависимость . . . . .	185
7.2. Символическая динамика . . . . .	187
7.3. Хаос и фракталы . . . . .	200
7.4. Подъем . . . . .	207
7.5. Затенение . . . . .	213
7.6. Алгоритм рандомизированной СИФ . . . . .	215
<b>8. Комплексная динамика</b>	<b>217</b>
8.1. Множества Жюлиа . . . . .	217
8.2. Орбиты в множествах Жюлиа . . . . .	226
8.3. Множество Мандельброта . . . . .	232
8.4. Хаос и множества Жюлиа . . . . .	246
8.5. Проблема Кэли . . . . .	248
<b>9. Случайные фракталы</b>	<b>253</b>
9.1. Случайные возмущения . . . . .	254
9.2. Броуновское движение . . . . .	256
9.3. Срединное смещение . . . . .	265
9.4. Фрактальное броуновское движение . . . . .	269
9.5. Срединное смещение и ФБД . . . . .	279
9.6. Фурье-анализ ФБД . . . . .	284
9.7. Фильтрация Фурье . . . . .	289
<b>A. Дополнительные сведения из анализа</b>	<b>297</b>
A.1. Полнота и компактность . . . . .	297
A.2. Непрерывные отображения . . . . .	300
A.3. Метрика Хаусдорфа II . . . . .	305
A.4. Топологическая размерность . . . . .	315
A.5. Размерность Хаусдорфа . . . . .	317
A.6. Быстрое преобразование Фурье . . . . .	320
<b>Б. Теория ренормализации и фракталы Пуанкаре</b>	<b>325</b>
Б.1. Теория ренормализации . . . . .	325
Б.2. Фракталы Пуанкаре . . . . .	330
<b>Список литературы</b>	<b>341</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>348</b>

# Предисловие

Казалось бы, два таких разных математических объекта, как фракталы и хаос, следует изучать независимо друг от друга: ведь теория фракталов опирается на геометрию и теорию размерности, а теория хаоса есть развитие теории динамических систем. С другой стороны, между ними существует определенная взаимосвязь, которая часто теряется в деталях изложения каждой из теорий. Данная книга, во-первых, представляет собой вводный курс теории фракталов и теории хаоса, а во-вторых, рассматривает вопрос о том, как некоторые фракталы (аттракторы систем итерированных функций) могут порождать хаос.

В главах 2–5 рассматривается ряд важных идей и понятий, связанных с детерминированными фракталами: самоподобие, системы итерированных функций и размерность. Здесь же описаны L-системы, использование которых существенно облегчает графические построения, особенно в случае фракталов, напоминающих по форме растения.

Изложение теории детерминированного хаоса разбито на две главы. Глава 6, «Хаотическая динамика I», дает представление о предмете на элементарном уровне, причем такие сложные понятия, как символическая динамика, раскрываются в основном на примерах. Глава 7, «Хаотическая динамика II», в большей мере предназначена для студентов с хорошей математической подготовкой и может быть опущена, если курс предполагается упростить. С другой стороны, именно здесь проявляется отмеченная выше взаимосвязь фракталов и хаоса.

Глава 8, «Комплексная динамика», посвященная множествам Жюлиа и Мандельброта, выдержана в упрощенном стиле. Результаты, опирающиеся на сложные теоремы из теории функций комплексного переменного, не доказываются, но должным образом выделяются и интенсивно используются. Помимо результатов теории функций комплексного переменного, изложение охватывает многие важные вопросы, например, вопрос о том, является ли множество Жюлиа связным или вполне разрывным, ответ на который дает множество Мандельброта.

## 6 ■ Предисловие

Другой, не менее важный для понимания подход развит в главе 9, посвященной случайным фракталам, в частности фрактально-му броуновскому движению. Такие обобщения классического броуновского движения находят широкое применение в моделировании природных явлений. В принципе, материал этой главы можно читать в любое время после главы о размерности.

В основу книги лег односеместровый курс, который я читал в университете Миссури-Колумбия в 1989–1993 гг. Слушателями были в основном студенты, специализирующиеся по математике, естественным наукам, техническим специальностям и некоторым другим дисциплинам. Я рекомендовал им прослушать сначала продвинутый курс математического анализа и линейной алгебры, но обычно допускал к занятиям заинтересованных студентов, у которых был какой-то опыт математических исследований, будь то чистая или прикладная математика.

В отличие от традиционного формата многих математических курсов *теорема-доказательство-пример-задача*, большую роль при изучении фракталов и хаоса играет компьютерное моделирование. В самом деле, большинство студентов впервые узнают о существовании фракталов, увидев потрясающие воображение картинки на дисплее компьютера. Данная книга предлагает использовать компьютерные эксперименты и теорию в совокупности, для чего в нее включены двадцать компьютерных алгоритмов. Эти алгоритмы даны в обобщенном виде, то есть независимо от синтаксиса какого-либо конкретного языка. По моим наблюдениям, не существует языка программирования или программного пакета, который удовлетворял бы всех. Студенты, с которыми я общался, программировали на Паскале, Си, С++, Фортране, в системах Matlab и Mathematica. Одним из лучших программных продуктов для экспериментирования с фракталами является свободно распространяемая программа Fractint. Она позволяет строить разнообразные фракталы и работает замечательно быстро.

Солидная часть материала, необходимого для изучения фракталов и хаоса, включена в основной текст книги. Кратко изложены введение в теорию множеств, аффинные преобразования, метрические пространства, множества Кантора и кривые Пеано. За исключением материала седьмой главы, книга содержит только несколько доказательств, требующих серьезной подготовки на уровне продвинутого курса математического анализа. Такие доказательства помечены

значком (\*). Они могут быть опущены, но рекомендуется, чтобы студенты запомнили формулировки теорем. Другие, более сложные параграфы вынесены в прил. А. В результате, книга может быть использована в качестве основы для курсов разной степени сложности.

Изложение, которое придерживается глав 1–6 и 8–9, то есть исключает главу 7, «Хаотическая динамика II», и обращается к прил. А только в справочных целях, рекомендуется в качестве элементарного курса. В разных семестрах я успевал пройти часть седьмой главы и избранные параграфы прил. А, в частности, посвященные метрике Хаусдорфа и размерности Хаусдорфа, но только ценой пропуска или ускоренного изучения части предыдущего материала.

Черно-белые изображения в этой книге напечатаны с использованием графической подсистемы Postscript. Многие изображения созданы в программе Matlab, в которой особенно удобно строить кривые в трехмерном пространстве. Matlab также хорошо подходит для программирования и визуализации L-систем (п. 2.2), паутинных диаграмм (глава 6) и фрактального броуновского движения (глава 9). Изображения, в которых требовалась заливка областей, ограниченных кривыми, получены с помощью пакета Mathematica. Изображения, для которых необходима точечная графика (для данного пикселя в данный момент времени определяется его цвет, черный или белый), были сгенерированы на Фортране с последующим преобразованием выходного файла в формат Postscript. Таким способом было получено графическое представление систем итерированных функций из четвертой главы и комплексной динамики из восьмой главы. Цветные вклейки были сделаны с помощью программы Fractint.

Я хочу выразить признательность за плодотворное общение моим коллегам, которых также интересует теория хаоса, фракталы и математика, связанная с этими понятиями. Во-первых, я хотел бы поблагодарить Дж. Келлера, познакомившего меня с фракталами в 1984 году, когда ему понадобилась помощь в работе над проектом по исследованию фракталов, а также его аспирантку С. Чен, замечательно владеющую предметом. Впоследствии я очень много почерпнул из оживленных дискуссий с К. Альбрандтом, К. Чиконе, Д. Петти, П. Пфайфером и П. Спекманом. Я благодарен Р. Делавару за его лекционные заметки по поводу теоремы Шарковского, а также П. Хагерти, который был моим студентом в 1993 году, за его профессиональную помощь при создании иллюстраций в пакете Mathematica.

Большое спасибо Э. Бельтрами, А. К. Клайни, Р. В. Истону, а также М. Дж. Филду, Р. Д. Найдингеру, А. Нортону и К. Шорту, просмотревшим рукопись. Их взвешенная критика и предложения, без сомнения, положительно повлияли на окончательную редакцию.

Я очень признателен К. Хеслеру-младшему, вице-президенту компании «Jones and Bartlett Publishers», за его энергичную помощь в создании этого учебника. Большое спасибо П. Кэррол и М. Сервантес из «Jones and Bartlett Publishers», а также М. Финли из отдела печати, за их работу по выпуску книги.

Я хочу особенно поблагодарить мою жену Мэри, за ее терпение и поддержку в течение всего времени, пока писалась эта книга.

# Глава 1.

## Введение

### 1.1. Что такое фракталы и хаос?

Когда-то большинству людей казалось, что геометрия в природе ограничивается такими простыми фигурами, как линия, круг, коническое сечение, многоугольник, сфера, квадратичная поверхность, а также их комбинациями. К примеру, что может быть красивее утверждения о том, что планеты в нашей солнечной системе движутся вокруг солнца по эллиптическим орбитам? Этот замечательный закон — один из трех постулатов планетарного движения, сформулированных Иоганном Кеплером на основе наблюдений и измерений, сделанных Тихо Браге. Позднее, сэр Исаак Ньюton вывел закон обратных квадратов для гравитационного притяжения как решение некоторого дифференциального уравнения, причем законы Кеплера следовали из его решения. Как в этом, так и в других случаях, когда применение простых геометрических моделей оказалось удачным, это привело к огромным научным достижениям.

Однако многие природные системы настолько сложны и нерегулярны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования представляется безнадежным. Как, к примеру, построить модель горного хребта или кроны дерева в терминах геометрии? Как описать то многообразие биологических конфигураций, которое мы наблюдаем в мире растений и животных? Представьте себе всю сложность системы кровообращения, состоящей из множества капилляров и сосудов и доставляющей кровь к каждой клеточке человеческого тела. Представьте, как хитроумно устроены легкие и почки, напоминающие по структуре деревья с ветвистой кроной.

Столь же сложной и нерегулярной может быть и динамика реальных природных систем. Как подступиться к моделированию каскадных водопадов или турбулентных процессов, определяющих погоду? Какая математика отвечает за ритмы сердца и головно-

го мозга, наблюдаемые на электрокардиограмме и энцефалограмме, в особенности за те внезапные приступы аритмии, которые могут вызвать сбой в работе сердца? Можно ли математически описать внезапное возникновение волны паники на финансовых рынках или даже построить математическую модель социального поведения?

Фракталы и математический хаос — подходящие средства для исследования поставленных вопросов. Термин *фрактал* относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, такой как мгновенный снимок водопада. *Хаос* — термин динамики, используемый для описания явлений, подобных турбулентному поведению погоды. Данная книга является введением в математику, которая стоит за этими понятиями. Предполагается, что после освоения изложенных здесь методов читатель сможет перейти к изучению приложений по специализированным источникам<sup>1</sup>.

Например, исследования показывают, что в физиологии встречается как «хороший» хаос, так и «плохой» [17, с. 273–300]. В опытах на кошках было замечено, что вид электрокардиограммы, снятой до и после введения кокаина, меняется с регулярной последовательности высоких пиков, сопровождаемых малыми пичками, на крайне нерегулярную последовательность, что, возможно, свидетельствует о приступе аритмии. С другой стороны, характер электроэнцефалограммы меняется с нерегулярного и непредсказуемого на гораздо более гладкий [19, с. 26–27]. См. также [18] об анализе возможной роли хаоса в развитии болезни сердца.

Нередко то, что мы наблюдаем в природе, интригует нас бесконечным повторением одного и то же узора, увеличенного или уменьшенного во сколько угодно раз. Например, у дерева есть ветви. На этих ветвях есть ветки поменьше и т. д. Теоретически, элемент «разветвление» повторяется бесконечно много раз, становясь все меньше и меньше. То же самое можно заметить, разглядывая фотографию горного рельефа. Попробуйте немного приблизить изображение горной гряды — вы снова увидите горы. Приблизьте картинку еще — вы по-прежнему будете различать нечто, напоминающее горы, благодаря вашей способности (статистической по сути) различать тип объекта на рисунке. Так проявляется характерное для фракталов свойство *самоподобия* (п. 2.1 и 5.1).

---

<sup>1</sup> О странных аттракторах, хаотической динамике и «дорогах к хаосу» см. [47–69]. Здесь и далее — подстраничные примечания переводчиков.

Во многих работах по фракталам самоподобие используется в качестве определяющего свойства. Следуя Бенуа Мандельброту [31], мы принимаем точку зрения, согласно которой фракталы должны определяться в терминах фрактальной (дробной) размерности (глава 5). Отсюда и происхождение слова *фрактал*. Понятие дробной размерности представляет собой весьма сложную концепцию, которую мы изложим в несколько этапов. Прямая — это одномерный объект, а плоскость — двумерный. Как мы увидим далее, хорошенько перекрутив прямую или плоскость, можно повысить размерность полученной конфигурации; при этом новая размерность обычно будет дробной в некотором смысле, который нам предстоит уточнить. Связь дробной размерности и самоподобия состоит в том, что с помощью самоподобия можно сконструировать множество дробной размерности наиболее простым образом (п. 2.1). Даже в случае гораздо более сложных фракталов, таких, как граница множества Мандельброта (п. 8.3), когда чистое самоподобие отсутствует, имеется почти полное повторение базовой формы во все более и более уменьшенном виде.

В английском языке хаос обычно определяется как состояние полного беспорядка или неразберихи. Некоторые словари прибегают к понятию состояния, в котором правит случай. Термин *хаос* в математике используется в узком смысле.

Хотя универсального определения математического хаоса не существует, имеется, по-видимому, полное согласие в том, что любой вид хаоса обладает свойством непредсказуемости. Это свойство называют *существенной зависимостью от начальных условий* (п. 6.5). Как ни странно, оно не эквивалентно случайному поведению. По сути дела, математический хаос — это характерная черта именно детерминированных динамических систем. Поэтому наблюдаемые в состоянии хаоса флуктуации только кажутся случайными — их значения полностью предопределены входными параметрами. Но на практике мы никогда не располагаем абсолютно точной информацией о начальных условиях. Ошибки, пусть и ничтожные, всегда имеют место при измерении входных параметров. То, что кажется нам случайным результатом на выходе динамической системы, обусловлено большими ошибками, которые могут появиться, когда система ведет себя хаотично.

Когда-то считалось, что в детерминированной системе, при наличии достаточного объема вычислительных ресурсов, мы всегда в

состоянии сделать значимое предсказание (например, дать надежный прогноз погоды), несмотря на маленькие ошибки измерения текущего состояния. В присутствии хаоса это не так. Никакой самый мощный компьютер не позволит нам сделать точный прогноз на основе математической системы с существенной зависимостью от начальных условий.

С нашей точки зрения, наиболее интересный вопрос теории фракталов и хаоса состоит в том, как связать эти понятия воедино. Многие важные фракталы, включая снежинку Коха, ковер Серпинского и классическое множество Кантора, обсуждаемые во второй главе, могут быть получены как аттракторы систем итерированных функций (глава 4). Анализ этих систем итерированных функций указывает путь к построению хаотических операторов, ассоциированных с упомянутыми фракталами (глава 7).

## 1.2. Предыстория

Заслуживает внимания тот факт, что появление фракталов (еще не получивших этого имени) в математической литературе около ста лет назад было встреченено с прискорбной неприязнью, как это бывало и в истории развития многих других математических идей. Один известный математик, Шарль Эрмит, даже окрестил их *монстрами*. По крайней мере, общее мнение признало их патологией, представляющей интерес только для исследователей, злоупотребляющих математическими причудами, а не для настоящих ученых.

В результате усилий Бенуа Мандельброта такое отношение изменилось, и фрактальная геометрия стала уважаемой прикладной наукой. Мандельброт ввел в употребление термин *фрактал*, основываясь на теории фрактальной (дробной) размерности Хаусдорфа [20], предложенной в 1919 году. За много лет до появления его первой книги по фрактальной геометрии, Мандельброт приступил к исследованию появления монстров и других патологий в природе. Он отыскал нишу для имевших дурную репутацию множеств Кантора, кривых Пеано, функций Вейерштрасса и их многочисленных разновидностей, которые считались нонсенсом. Он и его ученики открыли много новых фракталов, например, фрактальное броуновское движение для моделирования лесного и горного ландшафтов, флуктуаций уровня рек и биения сердца. С выходом в свет его

книг [30, 31] приложения фрактальной геометрии стали появляться как грибы после дождя. Это коснулось как многих прикладных наук, так и чистой математики. Даже киноиндустрия не осталась в стороне. Миллионы людей любовались горным ландшафтом в фильме «Звездное переселение II: гнев хана», сконструированным с помощью фракталов.

Французский математик Анри Пуанкаре инициировал исследования в области нелинейной динамики около 1890 года, что привело к появлению современной теории хаоса. Интерес к предмету заметно увеличился, когда Эдвард Лоренц, занимавшийся нелинейным моделированием погоды, в 1963 году обнаружил невозможность долгосрочных прогнозов погоды. Лоренц заметил, что даже ничтожные ошибки при измерении параметров текущего состояния погодных условий могут привести к абсолютно неправильным предсказаниям о состоянии погоды в будущем. Эта существенная зависимость от начальных условий лежит в основе математической теории хаоса.

Траектории частиц броуновского движения, которым занимались Роберт Броун еще в 1828 году и Альберт Эйнштейн в 1905 году, представляют собой пример фрактальных кривых, хотя их математическое описание было дано только в 1923 году Норбертом Винером. В 1890 году Пеано сконструировал свою знаменитую кривую — непрерывное отображение, переводящее отрезок в квадрат и, следовательно, повышающее его размерность с единицы до двойки. Граница снежинки Коха (1904 год), чья размерность  $d \approx 1,2618$ , — это еще одна хорошо известная кривая, повышающая размерность.

Фрактал, никоим образом не похожий на кривую, который Мандельброт назвал *пылью* — это классическое множество Кантора (1875 или ранее). Это множество настолько разрежено, что оно не содержит интервалов, но, тем не менее, имеет столько же точек, сколько интервал. Мандельброт использовал такую «пыль» для моделирования стационарного шума в телефонии. Фрактальная пыль того или иного рода появляется в многочисленных ситуациях. Фактически, она является универсальным фракталом в том смысле, что любой фрактал, — аттрактор системы итерированных функций — представляет собой либо фрактальную пыль, либо ее проекцию на пространство с более низкой размерностью.

Различные древовидные фракталы применялись не только для моделирования деревьев–растений, но и бронхиального дерева (воздухоносные ветви в легких), работы почек, кровеносной системы и

др. Интересно отметить предположение Леонардо да Винчи о том, что все ветки дерева на данной высоте, сложенные вместе, равны по толщине стволу (ниже их уровня). Отсюда следует фрактальная модель для кроны дерева в виде поверхности-фрактала.

Многие замечательные свойства фракталов и хаоса открываются при изучении итерированных отображений. При этом начинают с некоторой функции  $y = f(x)$  и рассматривают поведение последовательности  $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$  В комплексной плоскости работы такого рода восходят, по всей видимости, к имени Кэли, который исследовал метод Ньютона нахождения корня в приложении к комплексным, а не только вещественным, функциям (1879). Замечательного прогресса в изучении итерированных комплексных отображений добились Гастон Жюлиа и Пьер Фату (1919). Естественно, все было сделано без помощи компьютерной графики. В наши дни, многие уже видели красочные постеры с изображением множеств Жюлиа и множества Мандельброта, тесно с ними связанного. Освоение математической теории хаоса естественно начать именно с итерированных отображений.

Изучение фракталов и хаоса открывает замечательные возможности, как в исследовании бесконечного числа приложений, так и в области чистой математики. Но в то же время, как это часто случается в так называемой *новой* математике, открытия опираются на пионерские работы великих математиков прошлого. Сэр Исаак Ньютон понимал это, говоря: «Если я и видел дальше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов».

# Глава 2.

## Классические фракталы

### 2.1. Самоподобие

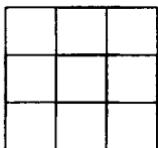
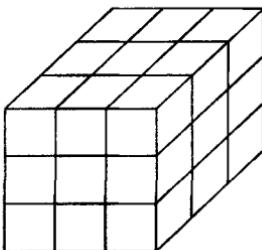
Разделим отрезок прямой на  $N$  равных частей. Тогда каждую часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенной в  $1/r$  раз. Очевидно,  $N$  и  $r$  связаны соотношением  $Nr = 1$  (рис. 2.1). Если квадрат разбить на  $N$  равных квадратов (с площадью, в  $1/r^2$  раз меньше площади исходного), то соотношение запишется как  $Nr^2 = 1$ . Если куб разбить на  $N$  равных кубов (с объемом, в  $1/r^3$  раз меньше объема исходного), то соотношение примет следующий вид:  $Nr^3 = 1$ . Заметим, что размерность  $d$  объекта, будь то одномерный отрезок, двумерный квадрат или трехмерный куб, появляется как степень  $r$  в соотношении между  $N$ , числом равных подобъектов, и коэффициентом подобия  $r$ . А именно:

$$Nr^d = 1. \quad (2.1)$$

Множества, построенные на рис. 2.1, обладают целой размерностью. Зададимся вопросом, возможно ли такое построение, при котором показатель  $d$  в равенстве (2.1) не является целым, то есть такое, что при разбиении исходного множества на  $N$  непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом  $r$ , значение  $d$  не будет выражаться целым числом. Ответ, как мы убедимся — решительно да! Такое множество называют *самоподобным фракталом*. Величину  $d$  называют *фрактальной* (дробной) размерностью или размерностью подобия. Явное выражение для  $d$  через  $N$  и  $r$  находится логарифмированием обеих частей (2.1):

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r} \quad (2.2)$$

Логарифм можно взять по любому положительному основанию, отличному от единицы: например по основанию 10 или по основанию  $e \approx 2,7183$ .

$N=3 r=1/3 d=1$  $N=9 r=1/3 d=2$  $N=27 r=1/3 d=3$ 

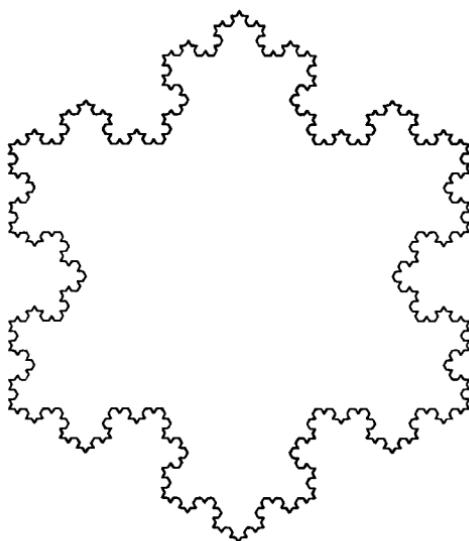
**Рис. 2.1.** Связь размерности и коэффициента подобия

Более общий тип самоподобных фракталов рассматривается в п. 5.1. Фрактал по-прежнему может быть объединением непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала, но коэффициенты подобия уже не обязательно одни и те же для всех подмножеств. В этом случае формула для размерности (2.2) неприменима.

Термин *фрактал* был впервые введен в 1975 году Бенуа Мандельбротом, пионером в области фрактальной геометрии<sup>1</sup>. Многие математические идеи оформились задолго до этого, еще в XIX-м веке, в работах Георга Кантора, Карла Вейерштрасса, Джузеппе Пеано и других. Понятие фрактальной (дробной) размерности появилось в 1919 году в работе Феликса Хаусдорфа. Тем не менее, именно Мандельброт объединил эти идеи и положил начало систематическому изучению фракталов и их приложений.

В 5-й главе и в прил. А.5 будет дано строгое математическое изложение вопросов, связанных с дробной размерностью. При этом

<sup>1</sup> Термин фрактал произведен от латинского глагола *frangere* — ломать и прилагательного *fractus* — дробный [46].

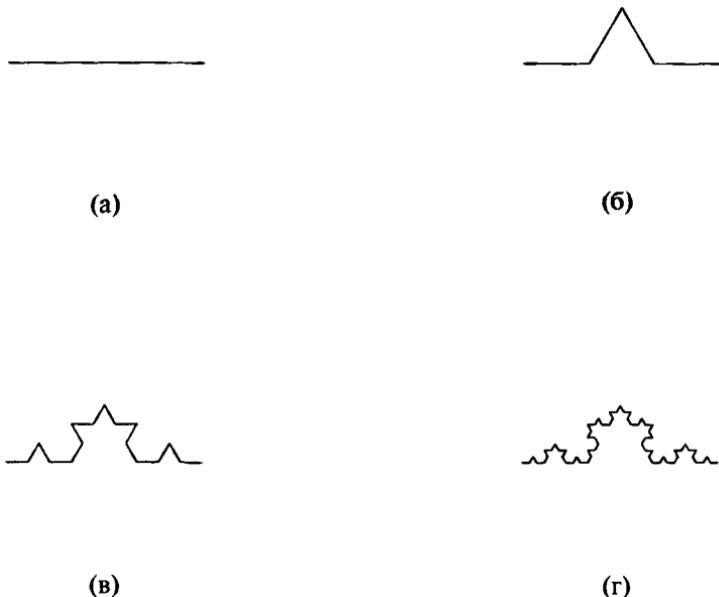


**Рис. 2.2.** Снежинка Коха

следует иметь в виду, что понятие фрактала еще находится в развитии и разные источники могут использовать различные определения. Заметим здесь, что некоторые множества целой размерности также являются фракталами, как следует из нашего определения.

**Снежинка Коха.** Граница снежинки, придуманной Гельгом фон Кохом в 1904 году (рис. 2.2), описывается кривой, составленной из трех одинаковых фракталов размерности  $d \approx 1,2618$ . Каждая третья снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника. Пусть  $K_0$  — начальный отрезок. Уберем среднюю треть и добавим два новых отрезка такой же длины, как показано на рис. 2.3. Назовем полученное множество  $K_1$ . Повторим данную процедуру многократно, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Обозначим через  $K_n$  фигуру, получившуюся после  $n$ -го шага.

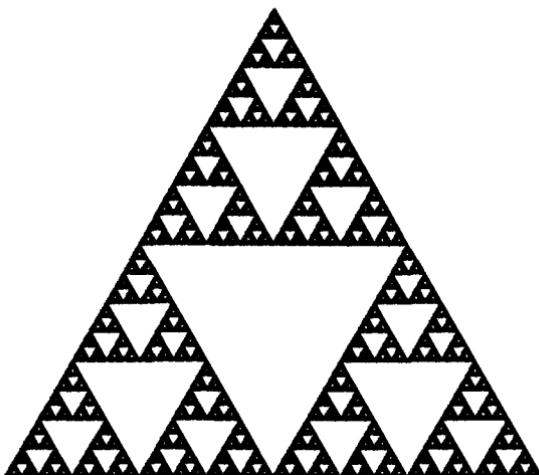
Интуитивно ясно, что последовательность кривых  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к некоторой предельной кривой  $K$ . Мы проведем строгое математическое исследование сходимости таких последовательностей кривых и других множеств в п. 3.5 и в прил. А.3. Пока что предположим, что кривая  $K$  существует, и рассмотрим некоторые ее свойства.

Рис. 2.3. а)  $K_0$ , б)  $K_1$ , в)  $K_2$ , г)  $K_3$ .

Если взять копию  $K$ , уменьшенную в три раза ( $r = 1/3$ ), то все множество  $K$  можно составить из  $N = 4$  таких копий. Следовательно, отношение самоподобия (2.1) выполняется при указанных  $N$  и  $r$ , а размерность фрактала будет:

$$d = \log(4)/\log(3) \approx 1,2618.$$

Еще одно важное свойство, которым обладает граница снежинки Коха — ее бесконечная длина (см. теорему 2.1.1). Это может показаться удивительным читателю, привыкшему иметь дело с кривыми из курса математического анализа. Обычно гладкие или хотя бы кусочно-гладкие, они всегда имеют конечную длину (в чем можно убедиться интегрированием). Мандельброт в этой связи опубликовал ряд увлекательных работ, в которых исследуется вопрос об измерении длины береговой линии Великобритании. В качестве модели он использовал фрактальную кривую, напоминающую границу снежинки за тем исключением, что в нее введен элемент случайности, учитывающий случайность в природе. В результате оказалось, что кривая, описывающая береговую линию, имеет бесконечную длину.



**Рис. 2.4.** Ковер Серпинского

**Теорема 2.1.1.** Граница снежинки Коха имеет бесконечную длину.

**Доказательство.** Достаточно показать, что каждый из трех идентичных фракталов  $K$ , полученных итерациями (рис. 2.3), имеет бесконечную длину. Пусть исходный отрезок  $K_0$  имеет единичную длину. Тогда длина кривой  $K_1$  равна  $4/3$ . Длина кривой  $K_2$  равна  $4^2/3^2$ . Продолжая таким образом имеем, что кривая  $K_n$  после  $n$ -го шага имеет длину  $4^n/3^n$ . Следовательно, длина предельной кривой  $K$  равна бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n/3^n = \infty. \blacksquare$$

**Ковер Серпинского.** Еще один пример простого самоподобного фрактала — ковер Серпинского (рис. 2.4), придуманный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Сам термин *ковер* (gasket) принадлежит Мандельброту. В способе построения, следующем ниже, мы начинаем с некоторой области и последовательно выбрасываем внутренние подобласти. Позднее мы рассмотрим и другие способы, в частности с использованием L-систем (п. 2.2), а также на основе систем итерированных функций (глава 4).

Пусть начальное множество  $S_0$  — равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобьем  $S_0$  на четыре

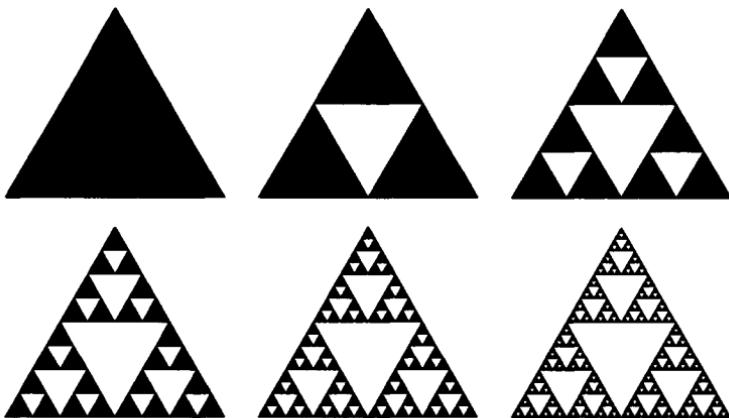


Рис. 2.5. Построение ковра Серпинского

меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника. Удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Назовем оставшееся множество  $S_1$  (рис. 2.5). Затем повторим процесс для каждого из трех оставшихся маленьких треугольников и получим следующее приближение  $S_2$ . Продолжая таким образом, получим последовательность вложенных множеств  $S_n$ , чье пересечение и образует ковер  $S$ .

Из построения видно, что весь ковер представляет собой объединение  $N = 3$  существенно непересекающихся уменьшенных в два раза копий; коэффициент подобия  $r = 1/2$  (как по горизонтали, так и по вертикали). Следовательно,  $S$  — самоподобный фрактал с размерностью:

$$d = \log(3) / \log(2) \approx 1,5850.$$

Очевидно, что суммарная площадь частей, выкинутых при построении, в точности равна площади исходного треугольника. На первом шаге мы выбросили  $1/4$  часть площади. На следующем шаге мы выбросили три треугольника, причем площадь каждого равна  $1/4^2$  площади исходного. Рассуждая таким образом, мы убеждаемся, что полная доля выкинутой площади составила:

$$1/4 + 3(1/4^2) + 3^2(1/4^3) + \cdots + 3^{n-1}(1/4^n) + \cdots.$$

Эта сумма равна 1 (упр. 4 в конце этого параграфа). Следовательно, мы можем утверждать, что оставшееся множество  $S$ , то есть ковер,

имеет площадь меры нуль. Это выделяет множество  $S$  в разряд «совершенного», в том смысле, что оно разбивает свое дополнение на бесконечное число треугольных областей, обладая при этом нулевой толщиной.

**Губка Менгера.** Существуют и трехмерные аналоги ковров. Следуя Мандельброту, мы называем такие множества *губками*. Губка, изображенная на рис. 2.6, называется губкой Менгера, по имени Карла Менгера. Это самоподобный фрактал с  $N = 20$  и  $r = 1/3$ . Его размерность равна:

$$d = \log(20)/\log(3) \approx 2,7268.$$

Такая губка имеет объем меры нуль. Мы оставляем детали построения и анализа для рассмотрения читателю.

### Упражнения 2.1.

1. Определить дробную размерность (размерность подобия) фракталов, которые строятся, как указано на рис. 2.7.
2. Определить дробную размерность (размерность подобия) фракталов, которые строятся, как указано на рис. 2.8.
3. Построить фрактал, отличный от фрактала на рис. 2.8(а), но той же размерности.
4. Показать, что сумма площадей треугольников, выкинутых при построении ковра Серпинского, равняется площади исходного треугольника. *Указание:* воспользоваться соотношением:

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots, \quad \text{для } |x| < 1.$$

5. Рассмотрим фрактал, который строится, как указано на рис. 2.9. Этот фрактал иногда называют *пылью Серпинского*. Записать бесконечный ряд для суммы площадей частей, которые были удалены при построении. Найти сумму этого ряда.
6. (Компьютерный эксперимент.) Исследовать, какая связь существует между треугольником Паскаля (состоящим из биномиальных коэффициентов) и ковром Серпинского (см. [36]).

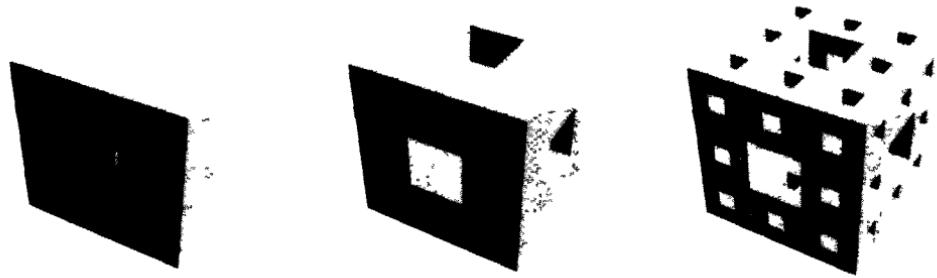


Рис. 2.6. Построение губки Менгера

---

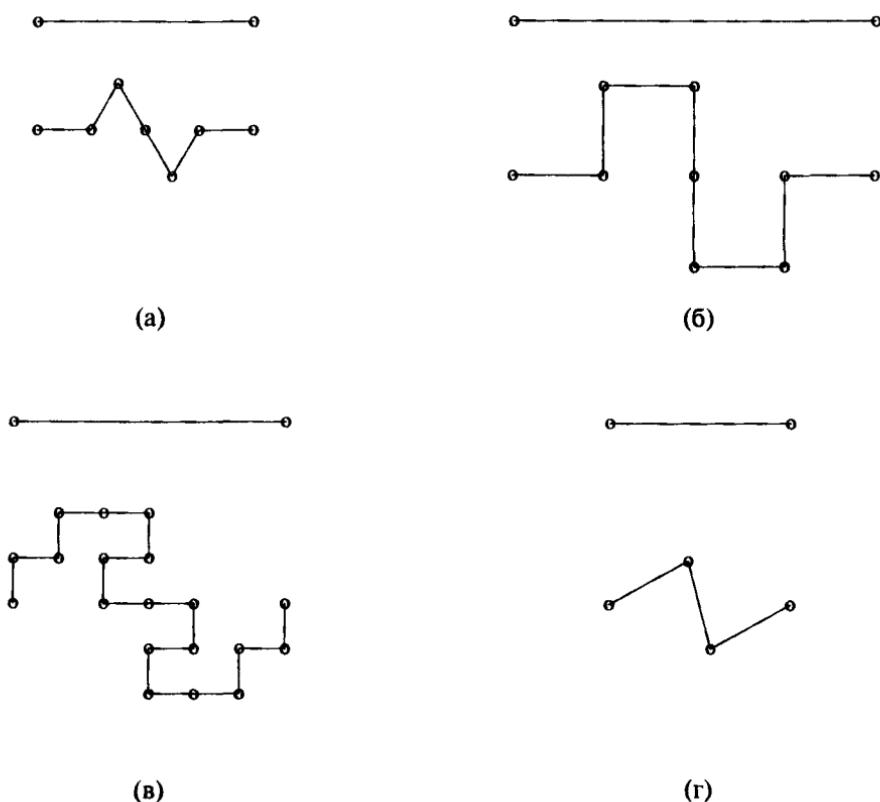


Рис. 2.7. Построения к упр. 1

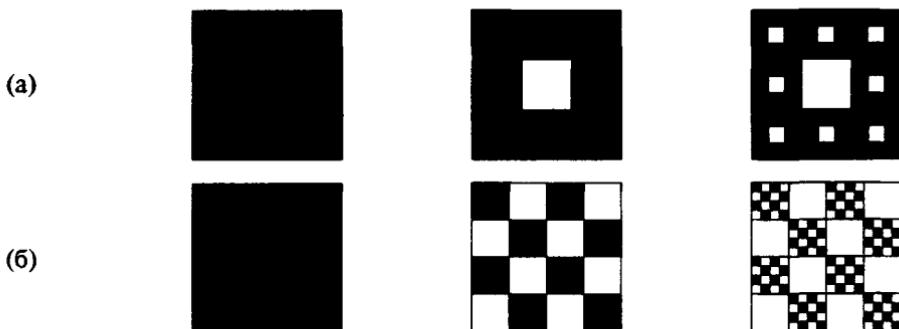


Рис. 2.8. Построения к упр. 2

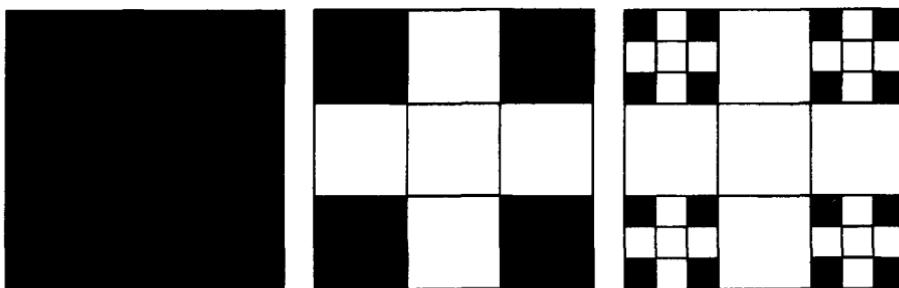


Рис. 2.9. Построения к упр. 5

## 2.2. L-системы

Понятие *L-систем*, тесно связанное с самоподобными фракталами, появилось только в 1968 году благодаря Аристриду Линдемайеру. Изначально L-системы были введены при изучении формальных языков, а также использовались в биологических моделях селекции. С их помощью можно строить многие известные самоподобные фракталы, включая снежинку Коха и ковер Серпинского. Некоторые другие классические построения, например кривые Пеано (работы Пеано, Гильберта, Серпинского), также укладываются в эту схему. И конечно, L-системы открывают путь к бесконечному разнообразию новых фракталов, что и послужило причиной их широкого применения в компьютерной графике для построения фрактальных деревьев и растений. Наше изложение L-систем следует

в основном работам Прузинкевича и Ханана [39] и ограничивается случаем детерминированных L-систем и графикой на плоскости.

Для графической реализации L-систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая *тертл-графика* (turtle — черепаха). При этом точка (черепашка) движется по экрану дискретными шагами, как правило, прорисовывая свой след, но при необходимости может перемещаться без рисования. В нашем распоряжении имеются три параметра  $(x, y, \alpha)$ , где  $(x, y)$  — координаты черепашки,  $\alpha$  — направление, в котором она смотрит. Черепашка обучена интерпретировать и выполнять последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Кодовое слово представляет собой результат работы L-системы и может включать следующие буквы:

- F переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след.
- b переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след.
- [ открыть ветвь (подробнее см. ниже)
- ] закрыть ветвь (подробнее см. ниже)
- + увеличить угол  $\alpha$  на величину  $\theta$
- уменьшить угол  $\alpha$  на величину  $\theta$

Размер шага и величина приращения по углу  $\theta$  задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения  $\alpha$  (угол, отсчитываемый от положительного направления оси X) не указано, то полагаем  $\alpha$  равным нулю.

Несколько примеров иллюстрируют применение команд ветвлений (обозначаются ], [) и вспомогательных переменных (обозначаются  $X$ ,  $Y$  и т. д.). Команды ветвлений используются для построения деревьев и растений, а вспомогательные переменные заметно облегчают построение некоторых L-систем.

Формально, детерминированная L-система состоит из *алфавита*, слова инициализации, называемого *аксиомой* или *инициатором*, и набора *порождающих правил*, указывающих, как следует преобразовывать слово при переходе от уровня к уровню (от итерации к итерации). К примеру, можно заменять букву F при помощи порождающего правила  $newf = F-F++F-F$ , что соответствует L-системе для снежинки Коха, рассматриваемой ниже. Символы +, -, ], [ не обновляются, а просто остаются на тех местах, где они встретились. Обновление букв в данном слове предполагается одновременным,

то есть все буквы слова одного уровня обновляются раньше любой буквы следующего уровня.

L-система, соответствующая снежинке Коха (рис. 2.2), задается следующим образом:

$$\theta = \pi/3$$

Аксиома: F++F++F

Порождающее правило:  $newf = F-F++F-F$

Графическое представление аксиомы F++F++F — равносторонний треугольник. Черепашка делает один шаг вперед, затем угол  $\alpha$  увеличивается на  $2\pi/3$  и черепашка делает еще один шаг вперед, угол  $\alpha$  снова увеличивается на  $2\pi/3$  и черепашка делает еще шаг.

На первом шаге каждая буква F в слове—инициаторе F++F++F заменяется на F-F++F-F:

$$(F-F++F-F)++(F-F++F-F)++(F-F++F-F).$$

Убирая скобки, получаем:

$$F-F++F-F++F-F++F-F++F-F++F-F.$$

Повторяя этот процесс, на втором шаге получим:

$$\begin{aligned} & F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++ \\ & F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++ \\ & F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F \end{aligned}$$

и т. д.

Псевдокод для итерирования порождающих правил в этом простейшем случае, когда используются только правила вида  $F = newf$ ,  $b = newb$ , выглядит следующим образом:

### Алгоритм 2.2.1. (L-СИСТЕМЫ)

Назначение: реализует правила  $F = newf$ ,  $b = newb$ .

Вход:

- axiom (слово инициализации)
- newf (порождающее правило)
- newb (порождающее правило)
- level (число итераций)

Выход:

- word (слово—результат)

**Инициализация:**

```
W = axiom
n = length(W)
T = { } (пустое множество)
```

**Шаги:**

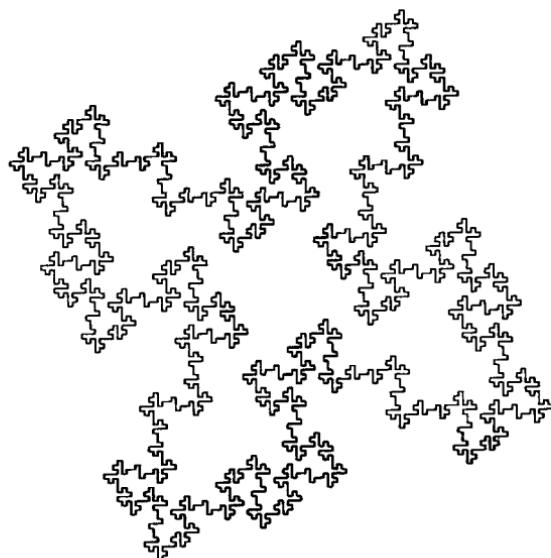
```
while level > 0
    for j = 1 to n
        if W(j) = +, T = {T +}, end if
        if W(j) = -, T = {T -}, end if
        if W(j) = [, T = {T [ }, end if
        if W(j) = ], T = {T ] }, end if
        if W(j) = F, T = {T newf}, end if
        if W(j) = b, T = {T newb}, end if
    end for
    W = T
    level = level - 1
end while
word = W
```

Замечание:  $W(j)$  —  $j$ -ая буква в слове  $W$ ,  $\{T +\}$  — строка  $T$ , к которой присоединен знак  $+$ .

Соответствующий псевдокод для тертл-графики мы рассмотрим ниже в этом параграфе. Список порождающих правил для различных L-систем, которые упоминаются в тексте, можно найти в конце этого параграфа.

График на рис. 2.10 не имеет разрывов, так как черепашка движется единичными шагами и каждый раз прорисовывает свой след. Разрывные графики можно получать, применяя в L-системе команду «**b**», то есть команду «переместиться на один шаг вперед без рисования». Примерами могут служить изображения мозаики на рис. 2.11 и цепочки на рис. 2.12.

При построении фракталов с использованием только одного порождающего правила возникает следующая трудность. Мы не можем изменить направление чтения правила на некоторых шагах, то есть читать его не слева направо, а справа налево. Без решения этой проблемы невозможно получить L-системы для кривых Пеано, которым посвящен следующий параграф.



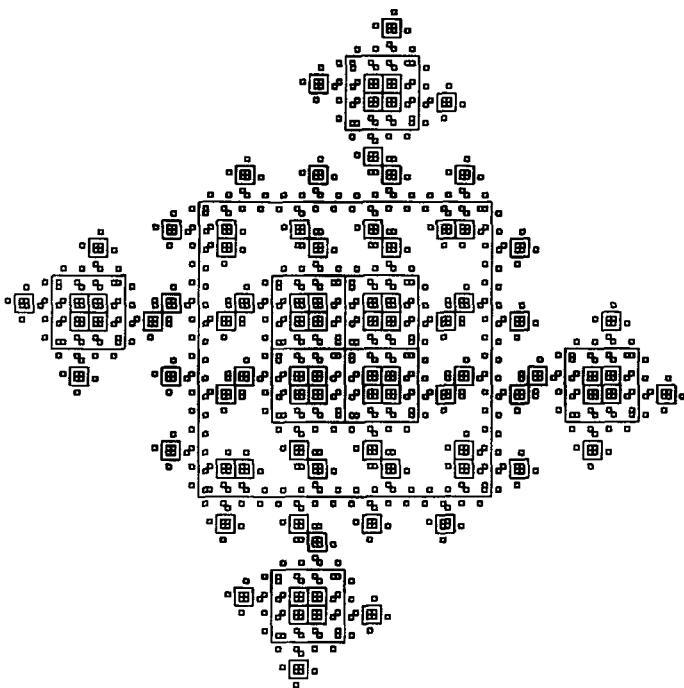
**Рис. 2.10.** Остров после 2-х итераций

Например, для того чтобы построить фрактал под названием «дракон Хартера-Хайтвея» [9, 31], необходимо иметь возможность менять направление чтения порождающего правила, изображенного на рис. 2.13. В качестве инициатора, или аксиомы, используется кривая слева. Порождающее правило в данном случае заключается в том, чтобы нарисовать инициатор сначала в прямом, а затем в обратном направлении. Подобная схема не вписывается в рамки L-систем, использующих только одно порождающее правило. Этую проблему можно решить, введя две различных команды для передвижения вперед, например X и Y. Будем считать, что черепашка интерпретирует X и Y одинаково, то есть как один шаг вперед.

С помощью этих двух букв порождающее правило для дракона можно записать следующим образом:

```
axiom = X,
newx = X+Y+,
newy = -X-Y.
```

Однако, нам не хотелось бы отказываться от первоначального подхода, при котором имеется только одна буква F, интерпретируе-



**Рис. 2.11.** Мозаика после 3-х итераций (Патрик Хагерти)

мая как один шаг вперед. Чтобы вернуться в рамки этого подхода, будем считать буквы X и Y вспомогательными переменными, игнорируемыми черепашкой, и заменим их в порождающем правиле на FX и FY соответственно. Получим:

axiom = FX,  
 $FX = FX + YF +,$   
 $YF = -FX - YF.$

Далее замечаем, что того же результата можно добиться при помощи следующих порождающих правил:

axiom = FX,  
 $newf = F,$   
 $newx = X + YF +,$   
 $newy = -FX - Y.$

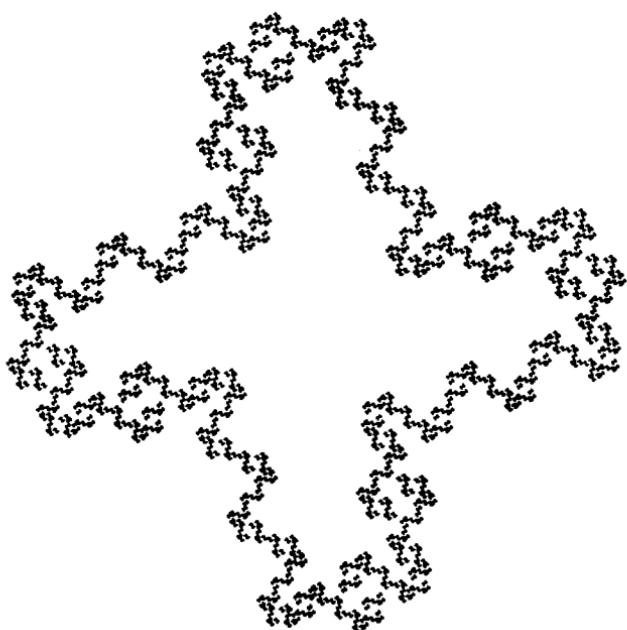


Рис. 2.12. Цепочка после 3-х итераций (Ян-Си Ло)

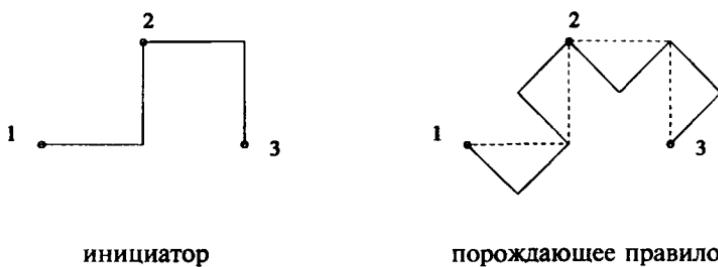
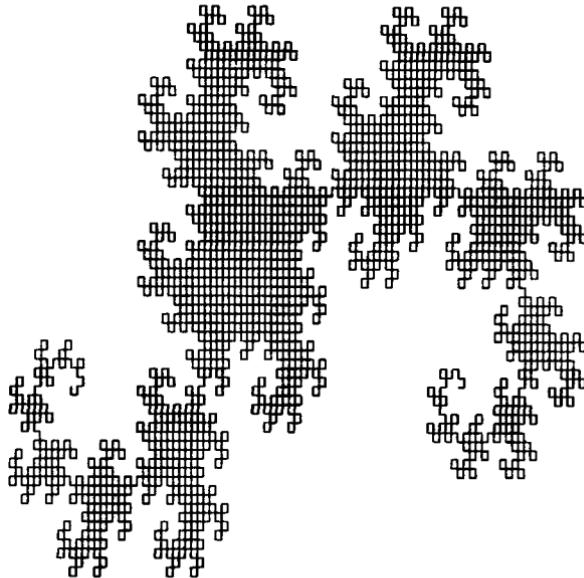


Рис. 2.13. Инициатор и правило для дракона Хартера-Хайтвея



**Рис. 2.14.** Дракон Хартера-Хайтвея после 12-и итераций

Ниже приведены несколько шагов построения дракона с использованием этих порождающих правил:

1-ый шаг:  $FX+YF+$

2-ый шаг:  $FX+YF++-FX-YF+$

3-ый шаг:  $FX+YF++-FX-YF++-FX+YF+-FX-YF+$

4-ый шаг:  $FX+YF++-FX-YF++-FX+YF+-FX-YF++$   
 $-FX+YF++-FX-YF+-FX+YF+-FX-YF+$

На рис. 2.14 изображен дракон после 12 итераций. Заметьте, что дракон состоит из нескольких похожих частей.

В заключение остановимся на операции ветвления. Когда мы встречаем символ [ (открыть ветвь), мы запоминаем положение и направление черепашки, то есть переменные  $(x, y, \alpha)$ , и возвращаемся к этим установкам позднее. Для хранения триплетов  $(x, y, \alpha)$

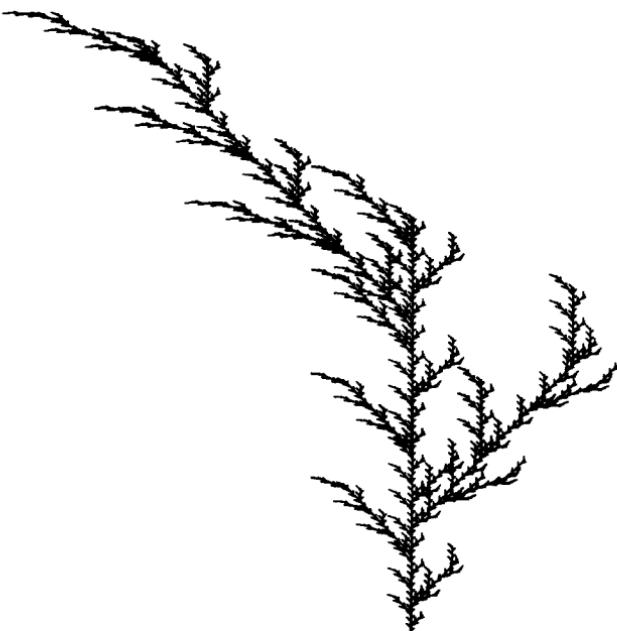


Рис. 2.15. Сорняк после 4-х итераций

используется стек

$$\left[ \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & \alpha_1 \\ x_2 & y_2 & \alpha_2 \\ \vdots & & \\ x_n & y_n & \alpha_n \end{array} \right],$$

причем новые данные записываются в конец стека. Когда ветвь закрывается, переменным  $(x, y, \alpha)$  присваиваются значения, считанные из конца стека. Затем эти значения из стека удаляются.

Таким образом, ветвление задается двумя символами:

- [ Открыть ветвь. Сохранить  $(x, y, \alpha)$  в конце стека.
- ] Закрыть ветвь. Присвоить переменным  $(x, y, \alpha)$  значения, считанные из конца стека, после чего удалить их из стека.

На рис. 2.15 и 2.16 изображены фракталы, построенные с помощью операции ветвления.

Ниже приведен алгоритм, который позволяет получать графическое представление слова при помощи тертл-графики.

**Алгоритм 2.2.2. (ТЕРТЛ-ГРАФИКА)**

Назначение: реализует тертл-графику для кодового слова, состоящего из букв  $F$ ,  $b$ ,  $[$ ,  $]$ ,  $+$  и  $-$ .

Вход:

$word$  (результат работы L-системы)

$\theta$  (приращение по углу)

$\alpha$  (начальное направление)

Выход:

Графическое представление  $word$ .

Инициализация:

графический режим (подробнее см. ниже)

$W = word$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$n = \text{length}(word)$

$stack = \{ \}$  (пустое множество)

Шаги:

for  $j = 1$  to  $n$

    if  $W(j) = +$ ,  $\alpha = \alpha + \theta$ , end if

    if  $W(j) = -$ ,  $\alpha = \alpha - \theta$ , end if

    if  $W(j) = F$ ,  $x = x_0 + \cos(\alpha)$ ,  $y = y_0 + \sin(\alpha)$ ,

        проводить линию из точки  $(x_0, y_0)$  в точку  $(x, y)$ ,

$x_0 = x$ ,

$y_0 = y$

    end if

    if  $W(j) = b$ ,  $x_0 = x_0 + \cos(\alpha)$ ,  $y_0 = y_0 + \sin(\alpha)$ , end if

    if  $W(j) = [$ ,

$l = \text{length}(stack)$ ,

$stack(l + 1, 1) = x_0$

$stack(l + 1, 2) = y_0$

$stack(l + 1, 3) = \alpha$

    end if

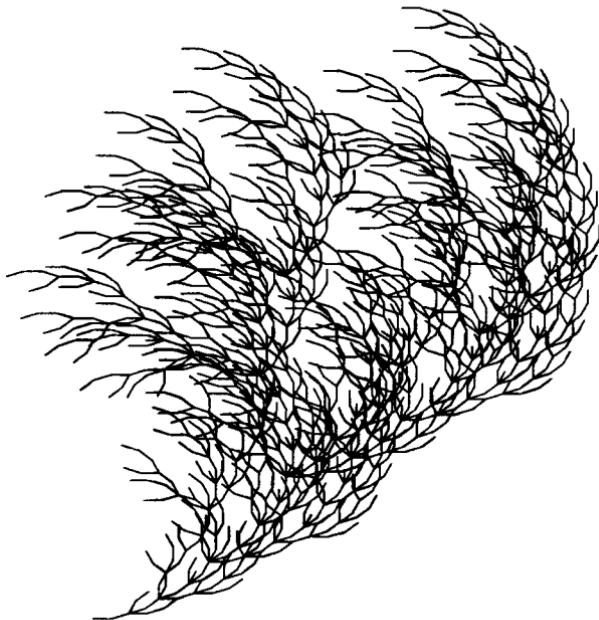
    if  $W(j) = ]$ ,

$l = \text{length}(stack)$ ,

$x_0 = stack(l, 1)$

$y_0 = stack(l, 2)$

$\alpha = stack(l, 3)$



**Рис. 2.16.** Куст после 4-х итераций

```

удалить l-ую запись из stack
end if
end for

```

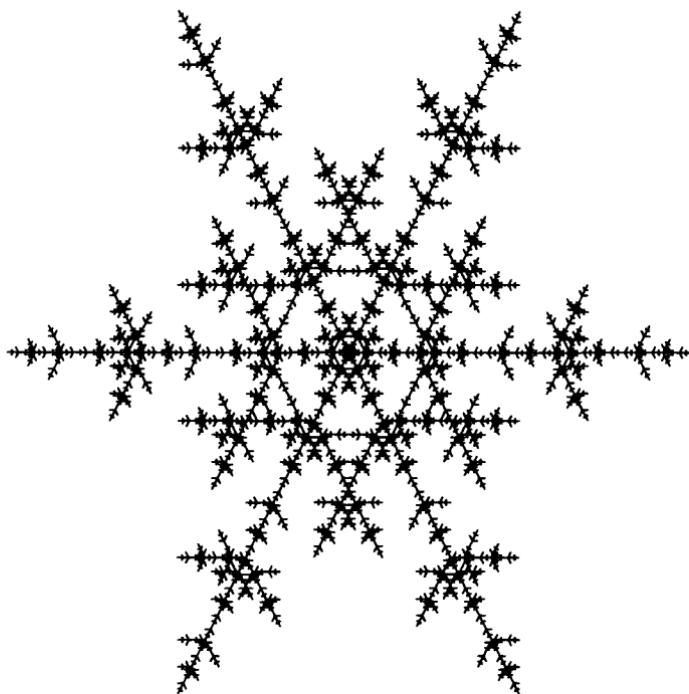
Можно написать специальную программу для определения размеров графического окна. Для этого достаточно выполнить в точности те же шаги, что и в алгоритме 2.2.2, но вместо вывода на экран надо отслеживать наименьшее и наибольшее значения  $x$  и  $y$ . Вначале положим эти значения равными нулю:

$$xmin = xmax = 0,$$

$$ymin = ymax = 0.$$

Каждый раз, когда появляется новая точка  $(x, y)$ , размеры окна обновляются:

$$\begin{aligned} xmin &= \min(x, xmin), \\ xmax &= \max(x, xmax), \end{aligned}$$



**Рис. 2.17.** Снежинка после 3-х итераций (Джонг Ву Ким)

$$\begin{aligned}ymin &= \min(y, ymin), \\ umax &= \max(y, umax).\end{aligned}$$

Значения  $xmin$ ,  $xmax$ ,  $ymin$  и  $ymax$ , полученные по окончании работы алгоритма, используются для инициализации окна вывода терптил-графики.

**Порождающие правила для L-систем.** Порождающие правила для L-систем перечислены в алфавитном порядке.

Дракон Хартера-Хайтвея (рис. 2.14):

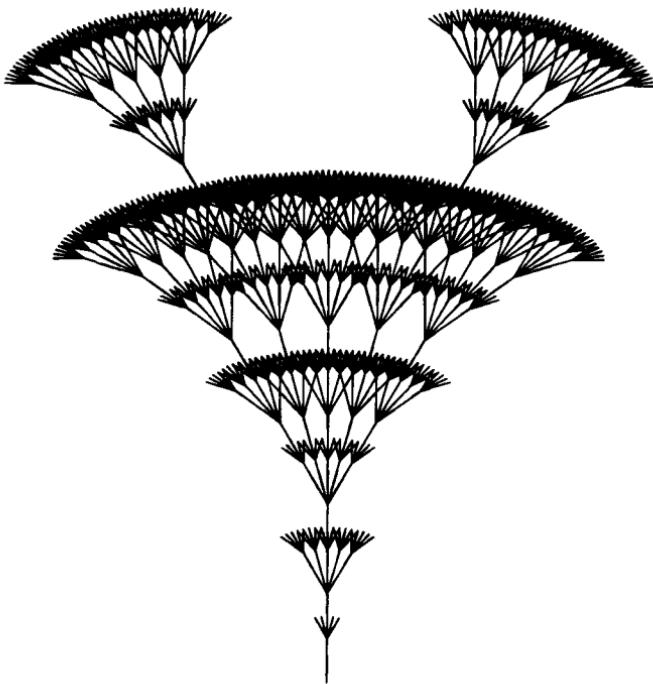
axiom = FX

newf = F

newx = X+YF+

newy = -FX-Y

$\theta = \pi/2$



**Рис. 2.18.** Цветок после 3-х итераций (Брандон Нельсон)

Ковер Серпинского (рис. 2.4):

axiom = FXF--FF--FF

newf = FF

newx = --FXF++FXF++FXF--

$\theta = \pi/3$

Кривая Гильберта, заполняющая плоскость (рис. 2.24):

axiom = X

newf = F

newx = -YF+XFX+FY-

newy = +XF-YFY-FX+

$\theta = \pi/2$

Кривая Госпера, заполняющая плоскость (рис. 2.26):

axiom = XF

newf = F

newx = X+YF++YF-FX--FXFX-YF+

$\text{newy} = -\text{FX} + \text{YFYF} ++ \text{YF} + \text{FX} -- \text{FX} - \text{Y}$   
 $\theta = \pi/3$

Кривая Пеано, заполняющая плоскость (рис. 2.22, 2.23):

axiom = F  
newf = F-F+F+F+F-F-F-F+F  
 $\alpha = \pi/4$   
 $\theta = \pi/2$

Кривая Серпинского, заполняющая плоскость (рис. 2.25):

axiom = F+XF+F+XF  
newf = F  
newx = XF-F+F-XF+F+XF-F+F-X  
 $\alpha = \pi/4$   
 $\theta = \pi/2$

Куст (рис. 2.16):

axiom = F  
newf = -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]  
 $\theta = \pi/8$

Мозаика (рис. 2.11):

axiom = F-F-F-F  
newf = F-b+FF-F-FF-Fb-FF+b-FF+F+FF+Fb+FFF  
newb = bbbbbbb

Остров (рис. 2.10):

axiom = F+F+F+F  
newf = F+F-F-FFF+F+F-F  
 $\theta = \pi/2$

Снежинка (рис. 2.17):

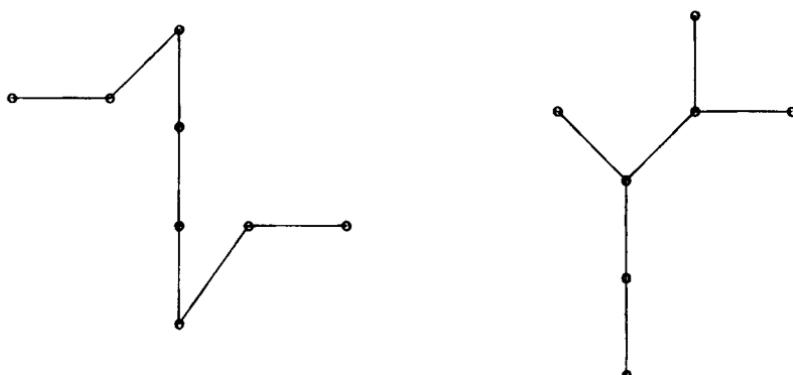
axiom = [F]+[F]+[F]+[F]+[F]+[F]  
newf = F[++F][-FF]FF[+F][-F]FF  
 $\theta = \pi/3$

Снежинка Коха (рис. 2.2):

axiom = F++F++F  
newf = F-F++F-F  
 $\theta = \pi/2$

Сорняк (рис. 2.15):

axiom = F



**Рис. 2.19.** Порождающее правило к упр. 2

$$\text{newf} = F[+F]F[-F]F \\ \theta = \pi/7$$

Цветок (рис. 2.18):

$$\text{axiom} = F[+F+F][-F-F][++F][--F]F \\ \text{newf} = FF[++F][+F][F][-F][--F] \\ \alpha = \pi/2 \\ \theta = \pi/16$$

Цепочка (рис. 2.12):

$$\text{axiom} = F+F+F+F \\ \text{newf} = F+b-F-FFF+F+b-F \\ \text{newb} = bbb \\ \theta = \pi/2$$

## Упражнения 2.2.

1. а) Чему равно слово на выходе следующей L-системы после двух итераций:

$$\text{axiom} = F \text{ (слово инициализации)} \\ \text{newf} = FF-[F]+[F] \\ \theta = \pi/4 \\ \alpha = \pi/2 \text{ (начальное направление)}$$

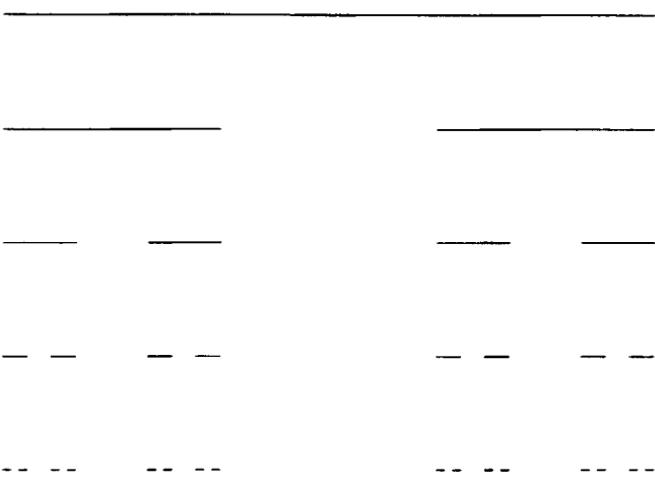
- б) Изобразить найденное в предыдущем пункте слово графически.

2. Написать псевдокод для L-систем (с использованием «newf» и т. п.), реализующих правила на рис. 2.19. Положить axiom = F.
3. Построить L-системы для фракталов из упр. 1, п. 2.1. Отобразить результат работы L-системы в графике.
4. Придумать и реализовать на компьютере три новые L-системы, результатом работы которых были бы ваши собственные варианты следующих фигур:
  - а) снежинка или остров (с границей без разрывов);
  - б) мозаика или острова (с разрывной границей);
  - в) куст или сорняк.
5. (Компьютерный эксперимент.) Исследовать с точки зрения фракタルных свойств один из множества представленных в [39] объектов. Возможные темы:
  - а) растения с перекрестным опылением (соцветия);
  - б) мозаика;
  - в) восточный орнамент;
  - г) фрактальная музыка.

### 2.3. Пыль Кантора

Классическое *множество Кантора*, или *пыль Кантора*, названо по имени Георга Кантора, который описал его в 1883 году. Существование пыли Кантора отмечалось до этого Генри Смитом (Henry Smith) в 1875 году или еще ранее. Это множество хорошо известно студентам из курса математического анализа как пример множества нулевой меры Лебега [41], чья мощность равна мощности континуума  $[0, 1]$ . Фракタルные свойства пыли Кантора имеют огромное значение, особенно учитывая тот факт, что многие известные фракталы являются близкими родственниками этого множества.

Построение классической пыли Кантора начинается с выбрасывания средней трети (не включая концы) единичного отрезка. То есть исходное множество есть отрезок  $[0, 1]$ , и первый шаг состоит в удалении открытого интервала  $(1/3, 2/3)$ . На следующем и всех остальных шагах мы выкидываем среднюю треть (не включая концы) всех отрезков текущего уровня. Таким образом, мы получаем (рис. 2.20) последовательность множеств:



**Рис. 2.20.** Построение пыли Кантора

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}$$

Предельное множество  $\mathcal{C}$ , которое представляет собой пересечение множеств  $C_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называется классической пылью Кантора. В дальнейшем мы будем называть его просто канторовой пылью.

### Свойства канторовой пыли.

1. Канторова пыль есть самоподобный фрактал размерности

$$d = \log(2)/\log(3) \approx 0,6309,$$

так как соотношение  $Nr^d = 1$  выполняется при  $N = 2$  и  $r = 1/3$ .

2. Канторова пыль не содержит интервалов положительной длины. Это очевидно из построения.

3. Сумма длин интервалов, удаленных при построении множества  $\mathcal{C}$ , в точности равна 1. Чтобы показать это, рассмотрим следующее доказательство. Длина первого интервала, который мы выкинули,

составляет  $1/3$ . Чтобы получить  $C_2$ , мы выкинули два интервала, каждый длиной  $1/3^2$ . На следующем шаге мы выбросили  $2^2$  интервалов, каждый длиной  $1/3^3$ , и т. д. Таким образом, сумма длин удаленных интервалов  $S$  составляет:

$$S = 1/3 + 2/3^2 + 2^2/3^3 + \cdots + 2^{n-1}/3^n + \cdots.$$

Но это выражение можно переписать в виде:

$$S = (1/3)(1 + 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + \cdots),$$

и с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии, а именно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1,$$

мы получаем:

$$S = (1/3) \frac{1}{1 - 2/3} = 1.$$

Можно предположить, что если в  $\mathcal{C}$  что-нибудь и осталось после удаления всех этих интервалов, то, наверное, не очень много. Однако это не так, что подтверждается следующим свойством.

**4. Удивительный результат сравнения множества Кантора с интервалом** состоит в том, что *мощности* этих множеств равны. Два множества обладают равной мощностью, если существует взаимно однозначное соответствие между точками этих множеств. В случае конечных множеств данное утверждение тривиально. Для бесконечных множеств, таких как интервал или множество Кантора, понятие мощности требует аккуратного обращения. В качестве простой иллюстрации сказанного достаточно заметить, что отрезки  $[0, 1]$  и  $[0, 2]$  — равной мощности, несмотря на то, что второй интервал в два раза длиннее первого. Взаимно однозначное соответствие в этом случае задается отображением  $f(x) = 2x$ , где  $x \in [0, 1]$ .

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы о мощности множества Кантора, вспомним, как представить точку  $x$  отрезка  $[0, 1]$  в системе счисления с основанием  $N$ ,  $N \geq 2$ . Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  равных интервалов, каждый длины  $1/N$ . Пронумеруем эти интервалы следующим образом:  $0, 1, 2, \dots, N-1$ . Если оказалось, что точка  $x$  принадлежит интервалу с номером 5, то положим  $x_1 = 5$ . Затем разобьем этот интервал на  $N$  новых интервалов, каждый длины  $1/N^2$ . Пронумеруем эти интервалы, как и раньше:

$0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Если точка  $x$  принадлежит новому интервалу с номером 3, то положим  $x_2 = 3$ . Продолжая таким образом, получим бесконечную последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , причем каждое значение  $x_n$  определяет интервал, содержащий  $x$  на  $n$ -ом шаге процесса разбиения. В результате, число  $x$  может быть представлено бесконечной последовательностью:

$$x = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N^2} + \frac{x_3}{N^3} + \dots,$$

и каждое такое представление соответствует некоторой точке отрезка  $[0, 1]$ . Кратко его записывают следующим образом:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \quad (\text{по основанию } N)$$

и называют представлением  $x$  в системе счисления с основанием  $N$  или в  $N$ -ичной системе. Очевидно, запись числа в десятичной системе счисления, которой мы привыкли пользоваться, является частным случаем данного определения.

Обратим внимание на несколько математических аспектов, требующих особого рассмотрения. Во-первых, некоторые числа имеют более одного  $N$ -ичного представления. Это числа вида  $j/N^k$ , где  $j$  и  $k$  — положительные целые. Для таких чисел можно указать два  $N$ -ичных представления: одно оканчивается всеми нулями, а другое — всеми  $N - 1$ . Например,  $x = 1/2$  в двоичной системе может быть представлено<sup>2</sup> двумя способами:

$$1/2 = 0,100\bar{0}\dots$$

и

$$1/2 = 0,011\bar{1}\dots$$

Любое число вида, отличного от  $j/N^k$ , записывается в  $N$ -ичной системе счисления единственным образом. Также мы оставили без ответа вопрос, соответствует ли произвольное  $N$ -ичное представление единственному  $x \in I$ . Этих вопросы решаются точно также, как и в случае обычного десятичного представления.

<sup>2</sup>Мы сохранили используемое автором обозначение бесконечной периодической дроби.

**Теорема 2.3.2.** *Мощность множества Кантора  $\mathcal{C}$  равна мощности континуума  $[0, 1]$ .*

**Доказательство.** Нам необходимо установить взаимно однозначное соответствие между точками из  $\mathcal{C}$  и точками отрезка  $[0, 1]$ . Для этого нам потребуется рассмотреть *двоичное* (по основанию 2), а также *троичное* (по основанию 3) представления точек отрезка  $[0, 1]$ .

Для того чтобы избежать двусмыслиности в случае, когда точка имеет два двоичных или троичных представления, мы будем всегда выбирать то представление, которое заканчивается всеми единицами в двоичном случае и всеми двойками в троичном.

Замечаем, что точка попадает в множество Кантора  $\mathcal{C}$  тогда и только тогда, когда в ее троичном представлении отсутствуют единицы, то есть когда в нем присутствуют только нули и двойки. Тогда искомое соответствие точек из  $\mathcal{C}$  с точками отрезка  $[0, 1]$  осуществляется заменой всех двоек в троичном представлении  $x$  на единицы. Полученное таким образом двоичное представление определяет некоторое вещественное число  $y$ . Например, если  $x \in \mathcal{C}$  есть:

$$x = 0,202202002\dots \quad (\text{в троичной системе}),$$

то полагаем

$$y = 0,101101001\dots \quad (\text{в двоичной системе}).$$

Описанная процедура определяет взаимно однозначное соответствие между  $x \in \mathcal{C}$  и  $y \in [0, 1]$ . ■

5. Классическая канторова пыль представляет собой пример компактного, совершенного и вполне разрывного множества. Эти понятия объясняются в главе 3. Более того, можно утверждать, что топологически классическое множество Кантора определяется как компактное, совершенное и вполне разрывное множество. Это означает, что любое компактное, совершенное и вполне разрывное множество можно непрерывно преобразовать в пыль Кантора, причем существует обратное преобразование, с помощью которого можно восстановить исходное множество. Любое такое множество принято называть множеством Кантора. Не следует думать, однако, что все множества Кантора самоподобны. Более того, даже фрактальная размерность различных самоподобных множеств Кантора не обязательно совпадает, как показывает следующий пример.

**Множество Кантора размерности  $d \approx 0,9542$ .** Рассмотрим пример самоподобного фрактала, являющегося множеством Кантора фрактальной размерности  $d = \log(9)/\log(10) \approx 0,9542$  (в то время как размерность канторовой пыли  $d \approx 0,6309$ ).

Обозначим через  $X$  множество всех вещественных чисел отрезка  $[0, 1]$ , в десятичном представлении которых:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

отсутствует какая-нибудь цифра, скажем, цифра 7. К примеру, числа

$$\begin{aligned} 0 &= 0,000\bar{0}\dots \\ 1 &= 0,999\bar{9}\dots \\ 1/4 &= 0,250\bar{0}\dots \end{aligned}$$

принадлежат множеству  $X$ . Принадлежит  $X$  и число 0,7, так как мы можем записать его следующим образом:

$$0,7 = 0,699\bar{9}\dots,$$

то есть не используя цифру 7.

По некотором размышлении становится ясно, как построить множество  $X$ . Пусть  $X_0 = [0, 1]$ . Разделим  $X_0$  на десять равных интервалов. Цифра  $x_1$  указывает, какому из интервалов принадлежит  $x$ . Если  $x_1 = 0$ , то  $x$  попадает в первый интервал и т. д. Двусмыслиность возникает только в том случае, когда  $x$  совпадает с концом какого-либо отрезка. Тогда имеется два возможных представления числа  $x$ : одно оканчивается всеми нулями, другое — всеми девятками. Но это не создает никаких проблем, так как мы договорились заранее, что ни одна цифра  $x_i$  не равна 7. Раз  $x_1 \neq 7$ , то  $x$  не попадает в восьмой интервал, то есть  $x$  не принадлежит интервалу  $(0, 7; 0, 8)$ . Выбросим этот интервал и обозначим оставшееся множество через  $X_1$ . Разделим каждый из девяти оставшихся интервалов на десять равных частей. Так как  $x_2 \neq 7$ , то мы можем выбросить каждый восьмой из получившихся интервалов. Обозначим новое множество через  $X_2$ . Повторяя описанную процедуру бесконечное число раз, получим последовательность вложенных множеств  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Искомое множество  $X$  есть пересечение всех этих множеств. Из построения следует, что  $X$  представляет собой объединение  $N = 9$

уменьшенных в 10 раз ( $r = 1/10$ ) копий самого себя. Таким образом,  $X$  — самоподобный фрактал, и его фрактальная размерность равна:

$$d = \log(9)/\log(10) \approx 0,9542.$$

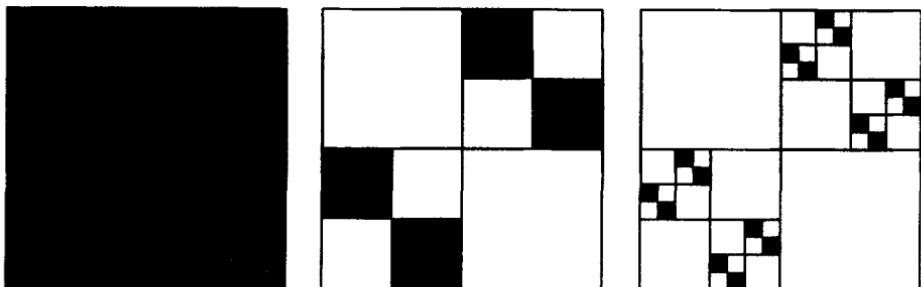
**Множество Кантора размерности  $d = 1$ .** Переходя от прямой к плоскости, можно построить множество Кантора размерности  $d = 1$ . Следующий пример принадлежит Магди Мохамеду. Пусть исходное множество — единичный квадрат на плоскости с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  и  $(0, 1)$ . На каждом шаге имеющиеся квадраты заменяются четырьмя меньшими, как показано на рис. 2.21. Преодолевшее множество этого построения есть самоподобный фрактал с  $N = 4$  и коэффициентом подобия  $r = 1/4$ . Следовательно, его размерность равна:

$$d = \log(4)/\log(4) = 1.$$

Из построения следует, что полученное множество есть множество Кантора, так как оно компактно, совершенно и вполне разрывно.

### Упражнения 2.3.

1. Можно ли утверждать, что каждая точка канторовой пыли является концом какого-то из отрезков, возникающих при ее построении, то есть имеет вид  $k/3^n$ ? Обосновать ответ.
2. Является ли ковер Серпинского из п. 2.1 множеством Кантора? Обосновать ответ.
3. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) модифицированного множества Кантора, в котором на каждом шаге выбрасывается центральная пятая часть каждого интервала.
4. Построить и отобразить графически L-систему для фрактала «без семерок», описанного выше. Указание: Использовать команду  $\alpha = \pi/4$  в программе ТЕРПЛ-ГРАФИКА.
5. Найти сумму длин интервалов, выброшенных при построении фрактала «без семерок».
6. а) Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала, изображенного на рис. 2.9.  
б) Объяснить, почему этот фрактал является множеством Кантора.



**Рис. 2.21.** Построение множества Кантора размерности  $d = 1$

7. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала, состоящего из таких точек отрезка  $[0, 1]$ , в десятичном представлении которых  $x = 0, x_1x_2x_3\dots$  отсутствуют цифры 3 и 7.
8. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала на плоскости, состоящего из точек  $(x, y)$ , где  $x, y \in [0, 1]$ , причем в десятичном представлении чисел  $x = 0, x_1x_2x_3\dots$  и  $y = 0, y_1y_2y_3\dots$  отсутствуют цифры 3 и 7.
9. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала на плоскости, состоящего из точек  $(x, y)$ , где  $x, y \in [0, 1]$ , причем в системе счисления с основанием 5 в записи числа  $x = 0, x_1x_2x_3\dots$  отсутствуют цифры 2 и 4, а в записи числа  $y = 0, y_1y_2y_3\dots$  отсутствуют цифры 0, 1 и 3.
10. Описать фрактал из упр. 6, используя представление точек  $(x, y)$  фрактала в троичной системе счисления.

## 2.4. Кривые Пеано

Снежинку Коха и другие непрерывные кривые на плоскости, полученные с помощью L-систем, объединяет то, что их размерность удовлетворяет неравенству:  $1 \leq d < 2$ . Возникает вопрос, существует ли кривая размерности  $d = 2$ ? Этот вопрос примечателен не только тем, что ответ на него положительный, но и тем, что он был разрешен Джузеппе Пеано еще в 1890 году. Пеано построил непрерывную функцию, чья область определения — отрезок, а область значений

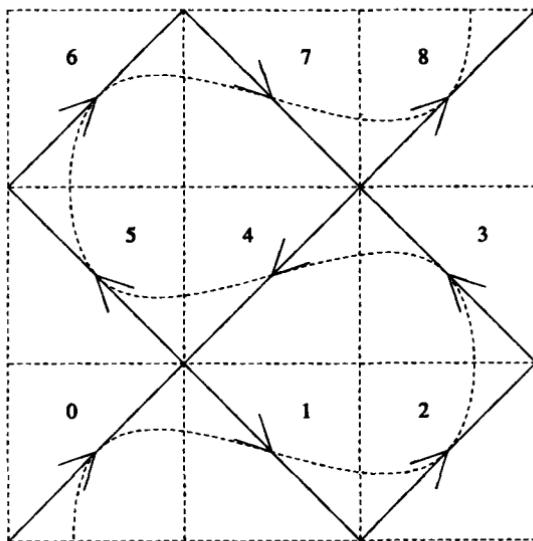


Рис. 2.22. Первая итерация построения Пеано,  $z = P_1(x)$

— квадрат на плоскости. Соответствующая линия называется *кривой Пеано* или *заполняющей плоскость*. Кривая Пеано не является фракталом в определении Мандельброта, но тем не менее интересна как пример функции, отображающей множество заданной размерности на множество большей размерности. Это и другие подобные открытия примерно того же времени, в особенности работы Вейерштрасса и Кантора, оказали огромное влияние на дальнейшее развитие математического анализа. Опоры на одну только интуицию уже недостаточно. Понятие кривой Пеано, безусловно, не является интуитивным, а изначально появилось из чисто аналитических рассуждений.

Введем некоторые обозначения, удобные при изучении свойств кривой Пеано. Пусть  $I$  — единичный отрезок  $[0, 1]$ ,  $S$  — единичный квадрат  $I \times I$ , то есть:

$$S = \{(x, y) : x, y \in I\}.$$

При построении, как и в п. 2.3, используется представление точек отрезка  $I$  в системе счисления по основанию 9. Первый шаг состоит в том, чтобы разбить  $S$  на девять равных частей. Непрерывная кривая, которая проходит через все квадраты, строится так, как

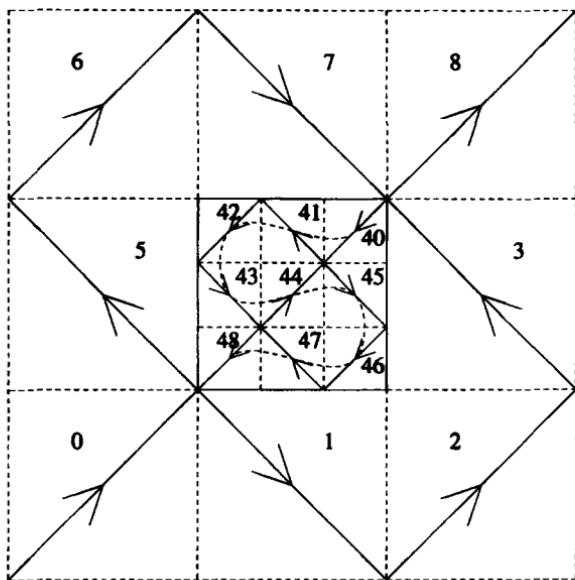


Рис. 2.23. Вторая итерация построения Пеано,  $z = P_2(x)$

показано на рис. 2.22 сплошной линией со стрелками. Пунктирная линия указывает, в каком порядке обходятся квадраты. Квадраты занумерованы числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, в соответствии с порядком, в котором линия их пересекает. Полученная линия представляет собой первую итерацию построения.

Далее, каждый из этих девяти квадратов разбивается на девять равных подквадратов, которые нумеруются аналогично тому, как это было сделано на первой итерации. Получаем линию, которая проходит через девять подквадратов таким образом, что ее начальная и конечная точки ложатся на кривую предыдущего уровня. Это позволяет нам занумеровать подквадраты числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 внутри каждого квадрата. Повторим описанную процедуру бесконечно, каждый раз разбивая квадраты на девять подквадратов, строя кривую через все подквадраты так, чтобы ее концы ложились на линию предыдущего уровня, и занумеровывая их. На рис. 2.23 изображено, как выглядит после двух итераций квадрат с номером 4.

Фактически, кривая Пеано, переводящая  $I$  в  $S$ , определяется отображением, которое сопоставляет точке  $x \in I$ , записанной в девятеричной системе счисления  $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ , точку  $P(x) \in S$  по

следующему правилу:

- $P(x)$  — в квадрате под номером  $x_1$  после первой итерации,
- $P(x)$  — в квадрате под номером  $x_1x_2$  после второй итерации,
- $P(x)$  — в квадрате под номером  $x_1x_2x_3$  после третьей итерации,
- $\vdots$

**Теорема 2.4.3.** *Отображение Пеано есть непрерывная функция, переводящая интервал  $I$  в квадрат  $S$ . Более того, последовательность отображений  $P_1(x), P_2(x), P_3(x), \dots$  сходится:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x), \quad x \in I. \quad (2.3)$$

\* **Доказательство.** Доказательство предполагает знание равномерной сходимости и критерия Коши (прил. А.1–А.2). Также см. [5] или [42].

Мы докажем более сильное утверждение, чем просто существование предела в (2.3). Именно, мы установим, что сходимость на отрезке  $I$  — равномерная, из чего можно будет сделать вывод о непрерывности предельной функции. Для установления равномерной сходимости применим критерий Коши в следующей формулировке.

Для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $K > 0$ , что при  $m > n > K$  выполняется неравенство:

$$d(P_m(x), P_n(x)) < \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in I, \quad (2.4)$$

где  $d(P_m(x), P_n(x))$  — евклидово расстояние (длина прямой) между точками  $P_m(x)$  и  $P_n(x)$ .

Пусть  $0 < n < m$ . Рассмотрим сетку  $G_n$ , натянутую на точки вида:  $\{(k/3^n, l/3^n), 0 \leq k, l \leq 3^n\}$ . Пусть  $N = 3^{2n}$ , и точки  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$  разбивают отрезок  $[0, 1]$  на  $3^{2n}$  интервалов равной длины. Заметим, что  $P_n(x)$  перемещается по диагонали одного из квадратов сетки  $G_n$  при изменении  $x$  от  $x_j$  до  $x_{j+1}$ . С другой стороны,  $P_m(x)$  обязательно находится в том же квадрате, если  $m > n$ . Следовательно, для  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ :

$$d(P_m(x), P_n(x)) < \frac{\sqrt{2}}{3^n}.$$

Приведенное рассуждение не зависит от того, какому именно интервалу  $[x_j, x_{j+1}]$  принадлежит точка  $x$ , а значит, неравенство верно для всех  $x \in I$ . Таким образом, выбрав  $K$  из условия  $\sqrt{2}/3^K < \varepsilon$ , мы удовлетворим неравенству (2.4) при  $m > n > K$ . ■

Отображение Пеано не устанавливает взаимно однозначного соответствия между точками множеств  $I$  и  $S$ . Это в принципе невозможно сделать с помощью непрерывной функции. Одной точке вдоль общего ребра двух квадратов соответствуют две точки отрезка. Более того, одной точке на стыке четырех квадратов соответствуют целых четыре точки отрезка (см. упр. 3 и 4 в конце этого параграфа).

Кривую Пеано можно построить на экране компьютера при помощи тертл-графики и следующей L-системы:

```

axiom = F
newf = F-F+F+F+F-F-F-F+F
 $\alpha = \pi/4$ 
 $\theta = \pi/4$ 

```

Другие известные кривые, заполняющие плоскость, принадлежат Гильберту, Серпинскому и Госперу (рис. 2.24, 2.25, 2.26).

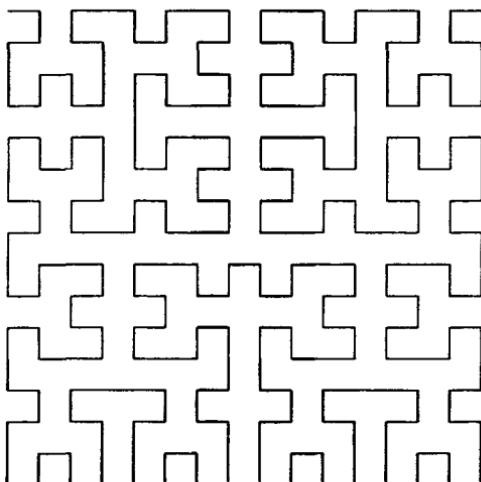
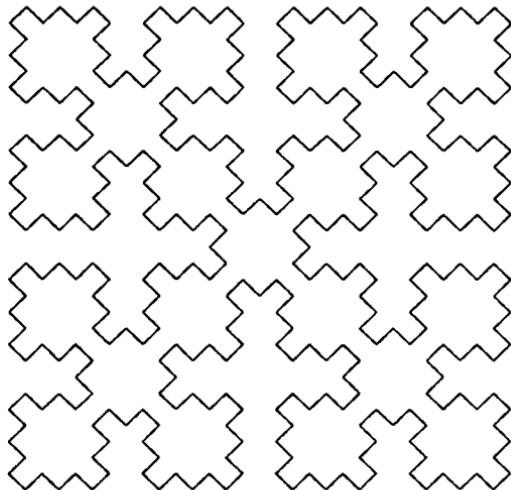
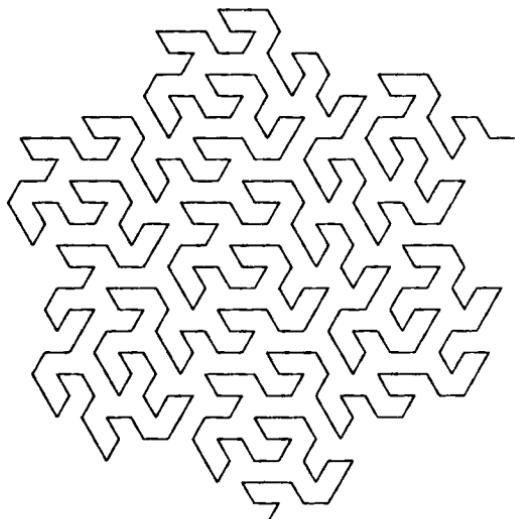


Рис. 2.24. Кривая Гильберта после 4-х итераций



---

Рис. 2.25. Кривая Серпинского после 3-х итераций



---

Рис. 2.26. Кривая Госпера после 3-х итераций

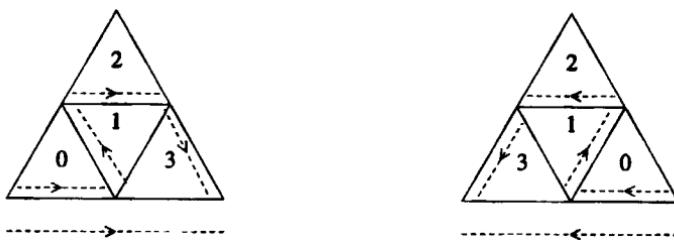


Рис. 2.27. К упр. 6

**Упражнения 2.4.**

1. Пусть  $x = 0,444\bar{4}$  (в девятеричной системе).
  - a) Представить  $x$  в виде дроби (найти сумму ряда  $4/9 + 4/9^2 + 4/9^3 + \dots$ ).
  - б) Обозначим через  $P$  отображение Пеано отрезка  $[0, 1]$  на квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Определить место точки  $P(x)$  в квадрате.
2. Выполнить упр. 1 для точки  $x = 0,222\bar{2}$  (в девятеричной системе).
3. Найти четыре представления Пеано для точек:
  - а)  $(1/3, 7/9)$ ,
  - б)  $(2/3, 7/9)$ .
4. Определить все точки единичного квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ , представление Пеано которых единственno. Какие точки имеют два различных представления? Какие точки имеют четыре различных представления?
5. Найти геометрическое место точек единичного квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ , в представлении Пеано которых отсутствует цифра 5. Является ли это множество фракталом? Если да, то какова его размерность?
6. а) Представить точки равностороннего треугольника в системе счисления по основанию 4, аналогично тому, как это делается в построении Пеано. Воспользоваться схемой на рис. 2.27 в качестве подсказки.
  - б) С помощью полученного представления описать точки ковра Серпинского.

7. Найти представление Пеано точек единичного квадрата, содержащихся в *пыли Серпинского* (рис. 2.9).
8. (Компьютерный эксперимент.) Исследовать модели водораздела на основе кривых Пеано (см. [31, с. 70–73]).

# Глава 3.

## Множества и отображения

### 3.1. Предварительные сведения из теории множеств

Следующее изложение теории множеств в  $n$ -мерном пространстве является обзорным и носит справочный характер. Большинство результатов приводится без доказательств. Подробное изложение можно найти в учебных пособиях по линейной алгебре, математическому анализу и теории множеств (см., например, [5] или [42]). Во многих случаях смысл используемых понятий интуитивно ясен и легок для понимания.

**$n$ -мерное векторное пространство  $\mathbf{R}^n$ .** Обозначим через  $\mathbf{R}^n$  множество всех  $n$ -мерных вещественных векторов:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

с определенными на нем операциями векторного сложения и умножения на скаляр:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \lambda \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Понятие векторов в  $n$ -мерном пространстве есть прямое обобщение хорошо знакомых одно-, двух-, и трехмерных векторов. В аналитической геометрии трехмерный вектор обычно представляют

в виде  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные ортогональные векторы. Эта запись эквивалентна следующей:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

то есть  $\mathbf{x}$  — вектор из  $\mathbf{R}^3$ .

**Евклидова норма и скалярное произведение.** Пусть  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ . Евклидовой нормой вектора  $\mathbf{x}$  называют:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}).$$

Евклидово расстояние между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Скалярное (внутреннее) произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  двух векторов из  $\mathbf{R}^n$  определяется следующим образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (= \sum_{i=1}^n x_i y_i). \quad (3.1)$$

Отметим, что скалярное произведение можно выразить через нормы векторов следующим образом (упр. 2 в конце этого параграфа):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2). \quad (3.2)$$

В курсе аналитической геометрии для векторов на плоскости и в пространстве доказывается:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos \theta, \quad (3.3)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Очевидно, скалярное произведение  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ненулевых векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  равно нулю тогда и только тогда, когда  $\theta = \pi/2$ , то есть когда векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  перпендикулярны.

Геометрическое понятие перпендикулярности векторов обобщается на случай  $\mathbf{R}^n$ , только вместо термина *перпендикулярный* обычно используют термин *ортогональный*. В пространстве  $\mathbf{R}^n$  два ненулевых вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  называются ортогональными, если

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Из соотношения (3.3) немедленно следует (для векторов из  $\mathbf{R}^2$  и  $\mathbf{R}^3$ ), что  $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$ . Это неравенство справедливо и для векторов из пространства  $\mathbf{R}^n$ .

**Теорема 3.1.1 (Коши–Шварца).** *Если  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — векторы из  $\mathbf{R}^n$ , то*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2,$$

*то есть*

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

**Доказательство.** При  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  обе части неравенства обращаются в нуль, и утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим случай  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . Для любого вещественного числа  $\lambda$ , рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Будучи суммой квадратов,  $f(\lambda)$  не может принимать отрицательных значений. Учитывая, что  $f(\lambda)$  — квадратичная функция  $\lambda$ , она достигает своего минимума, когда  $f'(\lambda) = -2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\lambda(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ , то есть когда  $\lambda = (\mathbf{x}, \mathbf{y})/(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ . Рассматривая неравенство  $f(\lambda) \geq 0$  при указанном значении  $\lambda$ , убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. ■

Неравенство Коши–Шварца применяется очень часто. Докажем с его помощью неравенство треугольника для евклидова расстояния в пространстве  $\mathbf{R}^n$ .

**Теорема 3.1.2 (неравенство треугольника).** *Евклидово расстояние  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  удовлетворяет неравенству треугольника:*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2.$$

**Доказательство.** Рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &\quad + (\mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + 2(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши–Шварца ко второму слагаемому в последнем выражении, получим:

$$|2(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z})| \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2^2 \\ &\leq (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2)^2.\end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, приходим к утверждению теоремы. ■

**Элементы и множества.** Подмножества пространства  $\mathbf{R}^n$  будем обозначать буквами  $E, F, U$  и т. п. Если вектор  $\mathbf{x}$  содержится в множестве  $E$ , будем писать  $\mathbf{x} \in E$ . Если все векторы множества  $E$  содержатся также в множестве  $F$ , то мы будем писать  $E \subset F$ . Символ  $\emptyset$  используется для обозначения *пустого множества* (множества, не содержащего ни одного элемента). Заметим, что для любого множества  $E$  всегда  $\emptyset \subset E$ .

**Равенство множеств.** Если множества  $E$  и  $F$  содержат одни и те же элементы, то есть  $E \subset F$  и  $F \subset E$ , то мы говорим, что множества равны ( $E = F$ ). Это определение содержательнее, чем может показаться на первый взгляд. Из него следует, что для доказательства равенства двух множеств  $E$  и  $F$  необходимо показать, что  $E \subset F$  и  $F \subset E$ .

**Объединение и пересечение множеств.** Объединение  $A \cup B$  двух множеств  $A$  и  $B$  есть множество всех точек, содержащихся либо в  $A$ , либо в  $B$ , либо и в  $A$  и в  $B$ . Объединение некоторого (возможно, бесконечного) числа множеств  $\mathcal{I}$  обозначается  $\cup \mathcal{I}$ . Пересечение  $A \cap B$  двух множеств  $A$  и  $B$  есть множество всех точек, содержащихся и в  $A$  и в  $B$ . Пересечение некоторого (возможно, бесконечного) числа множеств  $\mathcal{I}$  обозначается  $\cap \mathcal{I}$ .

**Дополнение множества. Формулы де Моргана.** Дополнение множества  $A$  до множества  $X$  есть множество  $X \setminus A$  всех точек из  $X$ , не содержащихся в  $A$ , то есть  $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \notin A\}$ . Формулы де Моргана для произвольных множеств  $A, B$  и  $X$  в простейшем виде



Рис. 3.1. Открытые шары в пространствах  $\mathbf{R}^1$ ,  $\mathbf{R}^2$  и  $\mathbf{R}^3$

выглядят следующим образом:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Эти формулы распространяются на объединения и пересечения произвольного числа множеств:

$$X \setminus \cup \mathcal{I} = \cap \{(X \setminus E) : E \in \mathcal{I}\},$$

$$X \setminus \cap \mathcal{I} = \cup \{(X \setminus E) : E \in \mathcal{I}\}.$$

**Основные множества.** В дальнейшем изложении наиболее часто используются следующие множества:

$\mathbf{R}$  = вещественные числа (совпадает с  $\mathbf{R}^1$ ),

$\mathbf{Z}$  = целые числа =  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,

$\mathbf{Q}$  = рациональные числа =  $\{p/q : p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\}$ ,

$\mathbf{R}^+$  = положительные элементы из  $\mathbf{R}$ ,

$\mathbf{Z}^+$  = положительные элементы из  $\mathbf{Z}$ ,

$\mathbf{Q}^+$  = положительные элементы из  $\mathbf{Q}$ .

**Открытое множество.** *Открытым шаром* в  $\mathbf{R}^n$  (рис. 3.1) называется множество:

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2 < r\}.$$

Шар  $B_r(\mathbf{x})$  также называют  $r$ -окрестностью точки  $\mathbf{x}$ . Если для любого  $\mathbf{x} \in E$ , где  $E$  — подмножество  $\mathbf{R}^n$ , существует такое  $r > 0$ , что  $B_r(\mathbf{x}) \subseteq E$ , то множество  $E$  называется *открытым*. Несложно проверить, что объединение открытых множеств также является открытым множеством и что любой открытый шар есть открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств также является открытым множеством. Но пересечение бесконечного

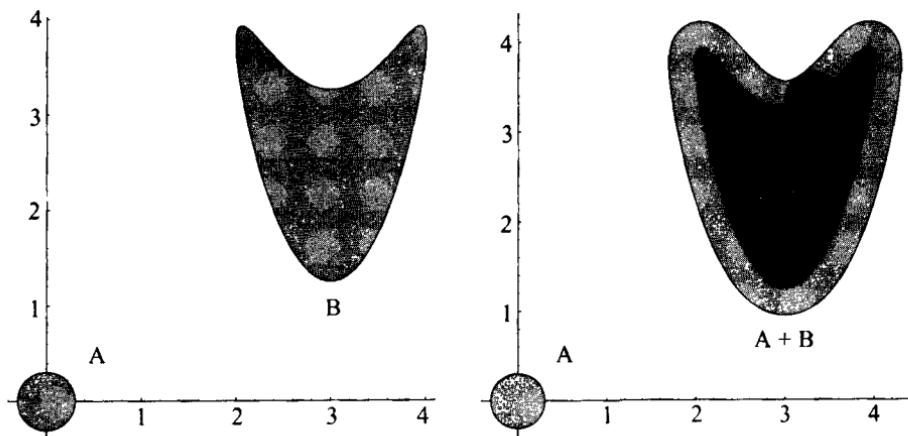


Рис. 3.2. Векторная сумма множеств

числа открытых множеств не обязательно является открытым. Рассмотрим, например, открытые интервалы  $(-1/n, 1/n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , в пространстве  $\mathbf{R}$ . Их пересечение представляет собой одноточечное множество  $\{0\}$ , которое не является открытым.

**Произведение и сумма множеств.** Прямым (топологическим) произведением  $A \times B$  множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x \in A$  и  $y \in B$ . Примером может служить рисунок к упр. 6 п. 2.3, на котором изображено  $C \times C$  ( $C$  — множество Кантора). Векторной суммой множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ . Множество  $\lambda A$  определяется как  $\{\lambda x : x \in A\}$ .

**Верхняя и нижняя грани множества.** Наименьшее число (возможно,  $\infty$ ), большее либо равное любому элементу из  $E \subset \mathbf{R}$ , называется точкой верхней гранью множества и обозначается  $\sup(E)$ . Наибольшее число (возможно,  $-\infty$ ), меньшее либо равное любому элементу из  $E \subset \mathbf{R}$ , называется точкой нижней гранью множества и обозначается  $\inf(E)$ . Если наибольший (наименьший) элемент содержится в  $E$ , то значение  $\sup(E)$  ( $\inf(E)$ ) равно этому элементу. Такое множество, как открытый интервал  $E = (0, 1)$ , не содержит ни наибольшего, ни наименьшего элементов. Тем не менее,  $\sup(E) = 1$  и  $\inf(E) = 0$ .

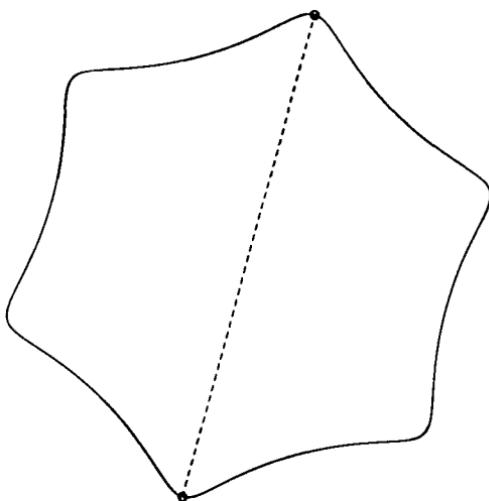


Рис. 3.3. Диаметр множества

**Диаметр множества.** Диаметром множества  $A \subset \mathbf{R}^n$  (рис. 3.3) называется следующая величина:

$$\delta(A) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

**Ограниченнное множество.** Множество  $A \subset \mathbf{R}^n$  называется *ограниченным*, если оно имеет конечный диаметр, то есть если  $\delta(A) < \infty$ .

**Сходимость.** Определение *предела* последовательности  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$  аналогично соответствующему определению из курса математического анализа. Именно:

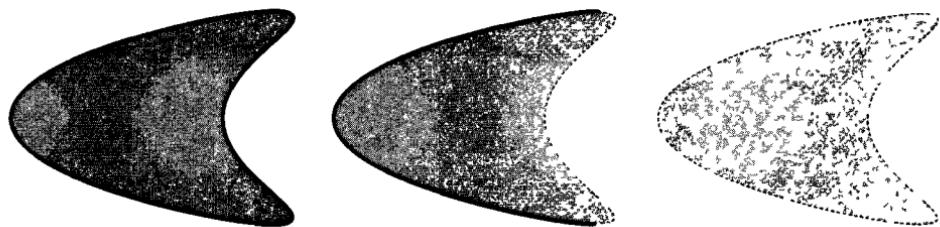
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$$

или просто  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ , если:

для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 < \varepsilon$ ,

или, другими словами, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 = 0.$$



**Рис. 3.4.** Множество: а) замкнутое; б) не являющееся ни замкнутым, ни открытым; в) открытое.

**Замкнутое множество.** Множество  $A \subset \mathbf{R}^n$  называется **замкнутым**, если для любой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  точек из  $A$ , сходящейся к  $x$ , ее предел также принадлежит  $A$ :  $x \in A$  (рис. 3.4). Заметим, что пустое множество  $\emptyset$ , также как и все пространство  $\mathbf{R}^n$ , одновременно и замкнуто, и открыто. Ни одно другое множество в  $\mathbf{R}^n$  таким свойством не обладает. Легко показать, что множество  $A \subset \mathbf{R}^n$  является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение до  $\mathbf{R}^n$  замкнуто. Более того, пересечение любого числа замкнутых множеств, а также объединение конечного числа замкнутых множеств, замкнуто. Доказательство этих свойств следует из формул де Моргана и теорем о пересечении и объединении открытых множеств.

**Замыкание и внутренность множества.** Замыкание  $\bar{A}$  множества  $A \subset \mathbf{R}^n$  есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Замыкание  $\bar{A}$  является замкнутым множеством. Внутренность множества  $A$ , обозначаемая  $A^\circ$ , есть объединение всех открытых множеств, входящих в  $A$ . Внутренность  $A^\circ$  является открытым множеством.

**Плотное подмножество.** Говорят, что множество  $B$  **плотно** в  $A$ , если  $B \subset A \subset \bar{B}$ . Например, множество  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел плотно в множестве  $\mathbf{R}$  вещественных чисел.

**Граница множества.** Граница множества  $A$  обозначается  $\partial A$  и определяется следующим образом:

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ.$$

**Компактное множество.** Множество  $A \subset \mathbf{R}^n$  называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено. *Предостережение:* это определение компактного множества можно использовать только для подмножеств пространства  $\mathbf{R}^n$ . В прил. А.1 дается более общее определение.

**Изолированные точки. Совершенное множество.** Точка  $x$  множества  $A$  есть *изолированная* точка этого множества, если у нее есть окрестность, не содержащая других точек множества  $A$ . Множество называется *совершенным*, если оно замкнуто и не содержит изолированных точек. Отрезок  $[0, 1]$  — пример совершенного множества. Все разновидности множества Кантора также являются совершенными множествами.

**Связное множество. Компоненты.** Множество  $A$  есть *связное* множество, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых множеств  $B$  и  $C$ , причем  $B \cap \bar{C} = \emptyset$  и  $C \cap \bar{B} = \emptyset$ . *Компонента* множества  $A$  есть связное подмножество  $A$ , которое не содержится ни в одном другом связном подмножестве  $A$ .

**Вполне разрывное множество.** Говорят, что множество  $A$  *вполне разрывно* (*вполне несвязно*), если наибольшие связные подмножества  $A$  представляют собой одноточечные множества, другими словами, если все компоненты  $A$  — одиночные точки. Все множества Кантора вполне разрывны.

Здесь уместно напомнить, что множество Кантора характеризуется тремя свойствами: оно *компактно*, *совершенно* и *вполне разрывно*.

### Упражнения 3.1.

1. Пусть  $x, y \in \mathbf{R}^n$ . Показать, что:

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

Дать геометрическую трактовку этой формулы (свойство параллелограмма).

2. Доказать формулу скалярного произведения (уравнение 3.2):

$$(x, y) = \frac{1}{2}(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2)$$

3. Доказать формулы де Моргана:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

4. Показать, что подмножество  $E$  пространства  $\mathbf{R}^n$  есть открытое множество тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

5. Привести пример, опровергающий каждое из нижеследующих утверждений.

а) Если  $A = B \cup C$ , где  $B$  и  $C$  — непересекающиеся и непустые множества, то  $A$  есть несвязное (разрывное) множество.

б) Если  $F$  — замкнутое подмножество  $\mathbf{R}^1$ , то  $F$  можно представить в виде объединения непересекающихся множеств, представляющих собой либо отрезки (замкнутые интервалы) либо изолированные точки в  $F$ .

в) Если  $G$  — открытое подмножество  $\mathbf{R}^2$ , то его граница  $\partial G$  есть совершенное множество.

*Использовать следующие множества в упр. 6–13.*

а)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ;

б)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 < 1\}$ ;

в)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

г)  $([0, 3] \times [0, 3]) \setminus ([1, 2] \times [1, 2])$ ;

д)  $\{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$ ;

е) классическое множество Кантора (рис. 2.20);

ж) ковер Серпинского (рис. 2.4).

6. Определить, является ли множество открытым, замкнутым или ни тем и ни другим.

7. Найти диаметр множества.

8. Является ли множество связным?

9. Является ли множество компактным?

10. Указать границу множества.

11. Является ли множество совершенным?

12. Пусть  $r = 1/8$ . Изобразить векторную сумму  $E + \bar{B}_r(\mathbf{0})$  (гомотетию) для каждого множества.

13. Является ли множество вполне разрывным?

## 3.2. Метрические пространства

До сих пор, говоря о *расстоянии*, мы всегда подразумевали евклидово расстояние. Так, расстояние между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в  $\mathbb{R}^n$  мы определили как длину вектора  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ , а именно:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Но расстояния можно вычислять и по-другому, используя различные меры длины. Например, рассмотрим упрощенную карту города в виде прямоугольной сетки улиц с двусторонним движением. Тогда адекватной мерой длины может служить кратчайшее расстояние, которое нужно преодолеть, чтобы добраться от одного перекрестка до другого. Иногда такое расстояние называют *манхэттенским*.

Вместо того чтобы перечислять всевозможные меры длины, большинство из которых нам не понадобится, мы сейчас рассмотрим требования (аксиомы), которым должна удовлетворять произвольная мера длины. Все последующие теоремы о расстояниях будут доказаны в рамках этих аксиом, то есть в наиболее общем виде. В математике принято вместо выражения «мера длины» использовать термин *метрика*.

**Метрика.** *Метрикой* на множестве  $X$  называется вещественная функция  $d(x, y)$ , определенная на произведении  $X \times X$  и удовлетворяющая следующим аксиомам:

- а)  $d(x, y) \geq 0$  для всех  $x, y \in X$ ;
- б)  $d(x, y) = 0$  влечет  $x = y$ ;
- в)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- г)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  для всех  $x, y, z \in X$  (неравенство треугольника).

*Метрическим пространством* называется пара  $(X, d)$ .

Доказательство того, что евклидово расстояние  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  удовлетворяет аксиомам (а), (б) и (в), тривиально. Неравенство треугольника:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_2$$

мы доказали в п. 3.1 (теорема 3.1.2). Таким образом, евклидово расстояние является метрикой, которую мы в дальнейшем будем называть *евклидовой метрикой*.

Рассмотрим один важный класс метрик в пространстве  $\mathbf{R}^n$ , а именно класс  $p$ -метрик.  $P$ -метрика является обобщением евклидовой метрики и совпадает с ней при  $p = 2$ . Для  $1 \leq p < \infty$   $p$ -метрика определяется следующим образом:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p}.$$

Для  $p = \infty$ :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|\}.$$

Мы оставим без доказательства следующий факт:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty.$$

Доказательство того, что  $p$ -метрика действительно является метрикой, т.е. удовлетворяет аксиомам (а)–(г), мы также опускаем. Частично этот вопрос вынесен в упражнения.

Заметим, что в определении метрики мы не стали требовать, чтобы элементы  $x$  и  $y$  принадлежали пространству  $\mathbf{R}^n$ . Это дает нам возможность определить множество  $X$ , также как и его элементы  $x$ ,  $y$  и т. д., многими разными способами. Наша задача состоит в том, чтобы указать при каких условиях фрактальное построение сходится. Для этого нужно уметь измерять расстояние между компактными множествами, то есть необходимо определить соответствующую метрику.

**Теория множеств в метрических пространствах.** Нам предстоит сделать большой шаг вперед и распространить теоретико-множественные определения п. 3.1, подразумевавшие евклидову метрику, на произвольные метрики. Открытый шар в метрическом пространстве  $(X, d)$  определяется следующим образом:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4), мы можем оставить без изменений данные выше определения следующих понятий:

- открытое множество,
- замкнутое множество,
- диаметр множества,
- ограниченное множество,
- сходимость,
- замыкание множества,

- внутренность множества,
- граница множества,
- совершенное множество,
- связное множество,
- компоненты множества,
- вполне разрывное множество.

Например, множество  $E \subset X$  является *открытым* множеством тогда и только тогда, когда для любого  $x \in E$  можно указать открытый шар  $B_r(x)$  (в смысле определения (3.4)), который содержится в  $E$ . В список вошли без изменений все определения, кроме понятия компактности. Строгое определение *компактного* множества в произвольном метрическом пространстве дается в прил. А.1. Так как нас в основном будет интересовать компактность подмножеств пространства  $\mathbf{R}^n$ , то определение, данное выше (замкнутость и ограниченность), остается в силе.

Если  $d(x, y)$  — метрика на множестве  $X$ , а  $f$  — взаимно однозначная вещественная функция, то

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

также есть метрика на  $X$ . Аксиомы (а) и (в), очевидно, выполнены.  $\rho(x, y)$  удовлетворяет аксиоме (б), так как  $f$  — взаимно однозначная функция. Аксиома (г) запишется в виде неравенства:

$$|f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|,$$

то есть классического неравенства треугольника для вещественных чисел. Пример метрики, заданной таким образом:

$$\rho(x, y) = |x^3 - y^3|, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Говорят, что две метрики,  $d(x, y)$  и  $\rho(x, y)$ , определенные на множестве  $X$ , *эквивалентны*, если можно указать такие  $K_1 > 0$  и  $K_2 > 0$ , что:

$$K_1 d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq K_2 d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Можно показать, что любые две  $p$ -метрики в пространстве  $\mathbf{R}^n$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , эквивалентны (случай  $p = 1, 2, \infty$  вынесен в упр. 3 в конце этого параграфа). С другой стороны, метрики  $d(x, y) = |x - y|$  и  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$  на множестве  $\mathbf{R}$  не эквивалентны (упр. 4 в конце этого параграфа).

По-видимому, основным следствием эквивалентности метрик для теории фракталов является тот факт, что фрактальная размерность (глава 5) сохраняется при замене метрики на эквивалентную. Более того, если множество открыто (замкнуто) в одной метрике, то оно открыто (замкнуто) и в любой эквивалентной метрике. Далее, если множество ограничено в одной метрике, то оно ограничено и в любой эквивалентной метрике. То же самое относится и к совершенным, связанным и вполне разрывным множествам.

**Сходимость.** Пусть  $d(x, y)$  — метрика на множестве  $X$ . Последовательность точек  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  метрического пространства  $X$  сходится к пределу  $x \in X$  в метрике  $d$ , если последовательность чисел  $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к нулю в обычном смысле, то есть если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0. \quad (3.5)$$

Здесь эквивалентность метрик выражается в следующем. Если метрики  $d(x, y)$  и  $\rho(x, y)$  эквивалентны, то  $x_n \rightarrow x$  в  $d$ -метрике тогда и только тогда, когда  $x_n \rightarrow x$  в  $\rho$ -метрике, так как:

$$K_1 d(x_n, x) \leq \rho(x_n, x) \leq K_2 d(x_n, x).$$

Если  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , то  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$  и наоборот.

**Непрерывность.** В курсе математического анализа функция  $f$ , определенная на  $X$ , называется непрерывной в точке  $x_0 \in X$ , если:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.6)$$

В евклидовом пространстве это означает, что:

для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что при  $\|x - x_0\|_2 < \delta$ ,  $x \in X$ , выполняется неравенство  $\|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$ .

Это определение легко обобщается на функции<sup>1</sup>, чья область определения есть метрическое пространство  $(X, d_1)$ , а область значений — другое метрическое пространство  $(Y, d_2)$ :

для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что при  $d_1(x_0, x) < \delta$ ,  $x \in X$ , выполняется неравенство  $d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ .

С использованием последовательностей, непрерывность можно определить так. Функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in (X, d_1)$ , если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad (3.7)$$

в  $d_2$ -метрике для любой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , сходящейся к  $x_0$  в  $d_1$ -метрике (упр. 8 в конце этого параграфа).

Говорят, что функция  $f$  непрерывна на множестве  $A$ , если она непрерывна в каждой точке  $A$ . Свойства исходного множества  $A$ ,

<sup>1</sup>Напомним, что термины *функция* и *отображение* эквивалентны.

которые при непрерывном отображении  $f$  сохраняются без изменений у множества  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ , называются *инвариантами непрерывности*. К таким свойствам относятся компактность и связность. В прил. А приведены доказательства этих фактов, а также некоторые другие важные результаты о непрерывных отображениях. Метрические характеристики, в частности, фрактальная размерность, инвариантами непрерывности не являются. В теории фракталов часто используют более сильные ограничения, чем непрерывность, например, требуют выполнения условия Липшица (п. 3.3).

### Упражнения 3.2.

- Показать, что манхэттенское расстояние:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

определяет метрику.

- Графически отобразить на экране компьютера единичные шары в  $\mathbb{R}^2$  с центром в начале координат, используя  $p$ -метрику, для  $p = 1, 3/2, 2, 3, \infty$ .
- Показать, что  $p$ -метрики в  $\mathbb{R}^n$ , где  $p = 1, 2, \infty$ , эквивалентны друг другу. *Указание:* доказать следующие неравенства с использованием неравенства Коши–Шварца.
  - $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ ,
  - $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \leq n\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$ ,
  - $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$ .
- Показать, что метрика  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$  не эквивалентна евклидовой метрике в  $\mathbb{R}$ .
- Введем в  $\mathbb{R}^2$  новую систему координат:

$$x'_1 = 2x_1, \quad x'_2 = 4x_2.$$

Определим новое расстояние в  $\mathbb{R}^2$  по формуле  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ , где  $d$  — евклидово расстояние.

- Показать, что  $\rho$  определяет метрику в  $\mathbb{R}^2$ .
- Эквивалентны ли метрики  $\rho$  и  $d$ ?

6. Пусть  $f(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , — возрастающая функция, то есть из  $x_1 < x_2$  всегда следует  $f(x_1) < f(x_2)$ . Предположим также, что существует постоянная  $M > 0$  такая, что  $|f'(x)| \leq M$  для всех  $-\infty < x < \infty$ . Определим метрику  $\rho = |f(x_1) - f(x_2)|$ .
- a) Показать, что  $\rho(x_1, x_2) \leq M|x_1 - x_2|$ . б) Указать дополнительное условие, которому должна удовлетворять функция  $f(x)$ , чтобы  $\rho(x_1, x_2)$  была эквивалентна евклидовой метрике независимо от выбора  $f(x)$ .
7. Найти все кратчайшие пути от точки  $(1, 1)$  до прямой  $y = -x$  в  $\mathbf{R}^2$  с манхэттенской метрикой. Замечание: длина пути в произвольном метрическом пространстве  $(X, d)$  определяется как
- $$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n d(x_k, x_{k-1}) \right\},$$
- причем точная верхняя грань берется по всем разбиениям пути  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
8. Доказать эквивалентность двух определений непрерывности: в терминах  $\varepsilon, \delta$  и в терминах сходящихся последовательностей (см. формулу (3.7)).

### 3.3. Сжимающие отображения

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Преобразование  $T : X \rightarrow X$  называется *сжимающим отображением* (или *сжатием*), если существует такое число  $s$ ,  $0 < s < 1$ , что:

$$d(T(x), T(y)) \leq s d(x, y), \quad x, y \in X. \quad (3.8)$$

Число  $s$  называется *коэффициентом сжатия*. Сжимающее отображение есть частный случай *отображения Липшица*, которое также определяется формулой (3.8), где  $0 < s < \infty$ . В этом случае положительная постоянная  $s$  называется *постоянной Липшица*. Таким образом, сжимающее отображение есть отображение Липшица с постоянной меньше 1.

Легко убедиться в том, что вещественное дифференцируемое отображение  $f(x)$ , определенное на прямой  $\mathbf{R}$ , есть отображение Липшича, если  $|f'(x)| \leq s < \infty$  для всех  $x \in \mathbf{R}$  (см. упр. 1 в конце

этого параграфа). Если к тому же  $s < 1$ , то  $f$  есть сжимающее отображение. Например,

$$f(x) = (1/2) \cos x$$

определяет сжатие на  $\mathbf{R}$ , так как  $|f'(x)| = -(1/2) \sin x$  и  $|f'(x)| \leq 1/2$ . Более интересный пример — отображение  $\cos x$  на отрезке  $[0, \pi/2]$ . Оно не является сжатием, так как это отображение Липшица с постоянной 1. Тем не менее, для любого  $\alpha \in (0, \pi/2)$  это отображение является сжатием на отрезке  $[0, \alpha]$  (упр. 2 в конце параграфа).

Основные результаты теории сжимающих отображений связаны с неподвижными точками таких отображений. Точка  $x$  называется *неподвижной точкой* отображения  $f(x)$ , если:

$$f(x) = x.$$

Понятие неподвижной точки имеет огромное значение, хотя это и не очевидно с первого взгляда. Метод неподвижной точки является основным инструментом математического анализа при доказательстве теорем существования. С его помощью удается, во-первых, доказать существование решения различных уравнений (алгебраических, дифференциальных и др.), а во-вторых, построить это решение. Например, известный метод Ньютона нахождения нулей функции опирается именно на теорию неподвижной точки (упр. 6 в конце параграфа). Мы воспользуемся результатами этой теории для того, чтобы доказать существование предела последовательности множеств, сходящихся к фракталу, и разработать общую схему построения разнообразных фракталов (глава 4).

Если в качестве  $X$  взять отрезок  $[a, b]$  в пространстве  $\mathbf{R}$ , то все основные свойства неподвижных точек можно изобразить графически. Легко заметить, что даже если  $f(x)$  — просто непрерывная функция из  $[a, b]$  в  $[a, b]$  (не обязательно сжатие), то у нее есть неподвижная точка, совпадающая с точкой пересечения графиков  $y = f(x)$  и  $y = x$  (рис. 3.5). Интуиция подсказывает: раз график функции  $y = f(x)$  начинается слева ( $x = a$ ), а затем движется вправо, не покидая квадрата  $[a, b] \times [a, b]$ , то он не может не пересечь график функции  $y = x$  в некоторой точке внутри квадрата. Упр. 3 в конце параграфа посвящено аналитическому доказательству этого наблюдения. Надо отметить, что, к сожалению, доказать существование неподвижной точки в произвольном метрическом пространстве гораздо сложнее.

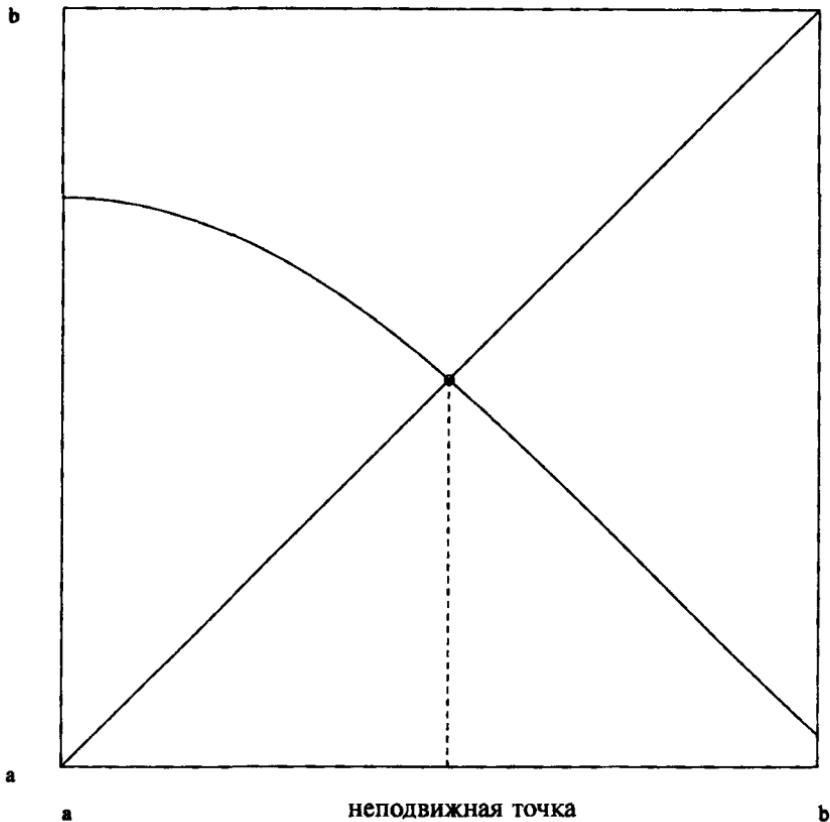
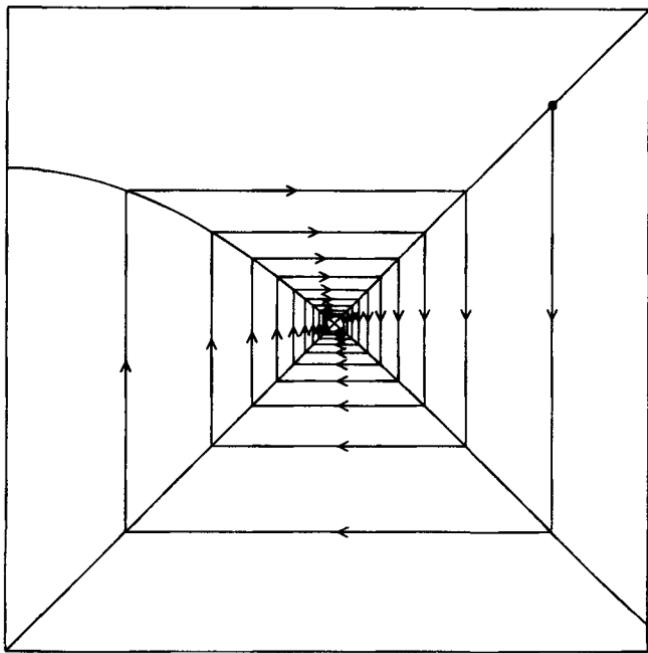


Рис. 3.5. Неподвижная точка

Вернемся к нашему частному случаю, когда  $f(x)$  — вещественная функция, отображающая  $[a, b]$  в  $[a, b]$ . Предположим также, что  $f(x)$  дифференцируема и что  $|f'(x)| \leq s < 1$ , то есть  $f(x)$  — сжимающее отображение. Метод итераций для нахождения неподвижной точки состоит в следующем. Обозначим через  $x_0$  произвольную начальную точку из отрезка  $[a, b]$ . Положим:

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Теорема 3.3.3, которую мы докажем ниже, утверждает, что  $x_n \rightarrow x_f$  и что  $x_f$  — единственная неподвижная точка. Процесс сходимости можно изобразить графически, с помощью так называемых *паутинных диаграмм* (они будут интенсивно использоваться в главе 6).



**Рис. 3.6. Алгоритм поиска неподвижной точки**

Паутинная диаграмма строится так: начинаем в точке  $(x_0, x_1)$ , перемещаемся в точку  $(x_1, x_2)$ , затем в  $(x_2, x_3)$  и т. д. Вообще, на каждом шаге перемещаемся из точки  $(x_{n-1}, x_n)$  в  $(x_n, x_{n+1})$ , а затем в  $(x_n, x_{n+2})$ . Отображая эти шаги на экране, получаем графическое представление процесса сходимости при  $n \rightarrow \infty$ .

### **Алгоритм 3.3.1. (ПАУТИННАЯ ДИАГРАММА)**

Назначение: строит паутинную диаграмму для функции  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

Вход:

- $a$  (левая граница)
- $b$  (правая граница)
- $x_0$  (начальная точка)
- $iter$  (число итераций)

Задача:

$$f(x).$$

Выход:

графическое окно с паутинной диаграммой для функции  $y = f(x)$ .

Инициализация:

графический экран с окном  $[a, b] \times [a, b]$ .

Шаги:

построить график  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$

построить график  $y = x$ ,  $a \leq x \leq b$

$x(1) = f(x_0)$

проводить линию из точки  $(x_0, x(1))$  в точку  $(x(1), x(1))$

for  $n = 2$  to  $n = iter$

$x(n) = f(x(n - 1))$

проводить линию из  $(x(n - 1), x(n - 1))$  в  $(x(n - 1), x(n))$

проводить линию из  $(x(n - 1), x(n))$  в  $(x(n), x(n))$

end for

Конечно, наглядное представление возможно только в частном случае действительной функции. Тем не менее, в точности те же аналитические результаты замечательным образом сохраняются и для любого сжимающего отображения, определенного на полном метрическом пространстве.

**Лемма 3.3.1.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $T : X \rightarrow X$  — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия  $s$ , причем  $0 < s < 1$ ,  $x_0 \in X$  — произвольная начальная точка,  $x_k = T(x_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда для всех  $k$  имеет место неравенство:

$$d(x_0, x_k) \leq \frac{1}{1-s} d(x_0, x_1). \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Многократно применяя неравенство треугольника, получим:

$$d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k).$$

Для каждого члена  $d(x_i, x_{i+1})$  в правой части имеем:

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i+1}) &= d(T(x_{i-1}), T(x_i)) \\ &\leq s d(x_{i-1}, x_i) \\ &\leq s^2 d(x_{i-2}, x_{i-1}) \\ &\vdots \\ &\leq s^i d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Подставим эти оценки в правую часть неравенства:

$$\begin{aligned} d(x_0, x_k) &\leq d(x_0, x_1) + s d(x_0, x_1) + s^2 d(x_0, x_1) + \cdots + s^{k-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1)(1 + s + s^2 + \cdots + s^{k-1}) \\ &\leq d(x_0, x_1)(1 + s + s^2 + \cdots) \\ &= d(x_0, x_1) \frac{1}{1-s}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Следующая теорема использует условие *полноты* метрического пространства  $(X, d)$ . Это понятие подробно изложено в прил. А.1. Пока же ограничимся достаточным условием полноты, а именно, если  $X$  совпадает с  $\mathbf{R}^n$  или его замкнутым подмножеством и  $d$  — евклидова метрика, то  $(X, d)$  — полное метрическое пространство.

**Теорема 3.3.3.** *Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство,  $T : X \rightarrow X$  — сжимающее отображение. Тогда отображение  $T(x)$  имеет в точности одну неподвижную точку, то есть существует такая точка  $x_f \in X$ , что:*

$$T(x_f) = x_f.$$

*Кроме того, метод итераций:*

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

*где  $x_0$  — произвольная точка из  $X$ , сходится к неподвижной точке  $x_f$ . То есть:*

$$x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (3.10)$$

\* **Доказательство.** *Единственность.* Докажем сначала, что если неподвижная точка существует, то она единственна. Пусть  $s$  — коэффициент сжатия  $T(x)$ . Если  $T(x)$  имеет две неподвижные точки,  $x_{f_1}$  и  $x_{f_2}$ , то:

$$d(x_{f_1}, x_{f_2}) = d(T(x_{f_1}), T(x_{f_2})) \leq s d(x_{f_1}, x_{f_2}).$$

Так как  $s < 1$ , неравенство выполняется только при  $x_{f_1} = x_{f_2}$ .

*Существование и сходимость.* Эта часть доказательства использует критерий Коши сходимости последовательностей в полных метрических пространствах (см. прил. А.1). Именно, последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится к пределу  $x \in X$  в полном метрическом пространстве  $(X, d)$  тогда и только тогда, когда:

для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$  (зависящий от  $\varepsilon$ ), что при  $n, m > N$  выполняется неравенство  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Заметим, что:

$$d(x_m, x_n) \leq s^m d(x_0, x_{n-m}), \quad \text{при } n > m, \quad (3.11)$$

так как

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(T(x_{m-1}), T(x_{n-1})) \\ &\leq s d(x_{m-1}, x_{n-1}) \\ &\leq s^2 d(x_{m-2}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq s^m d(x_0, x_{n-m}). \end{aligned}$$

Из неравенств (3.11) и (3.9) следует:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{s^m}{1-s} d(x_0, x_1), \quad \text{при } n > m.$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Выберем номер  $N$ , удовлетворяющий условию:

$$\frac{s^m}{1-s} d(x_0, x_1) < \varepsilon, \quad m > N.$$

Это можно сделать всегда, так как  $s < 1$ , а значит  $s^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом, критерий Коши выполняется и предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

существует в полном метрическом пространстве  $(X, d)$ . Обозначим его через  $x_f$ . Так как  $T$  непрерывно, то учитывая (3.7) имеем:

$$T(x_f) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_f.$$

Следовательно, предел  $x_f$  из (3.10) действительно является неподвижной точкой  $T$ . Тем самым теорема доказана. ■

Стоит еще раз отметить тот замечательный факт, что согласно доказанной теореме, последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится к единственной неподвижной точке  $x_f$  независимо от выбора начальной точки  $x_0 \in X$ .

### Упражнения 3.3.

1. Пусть  $f(x)$  — дифференцируемое действительное отображение, причем  $|f'(x)| \leq s < \infty$  для всех  $x \in \mathbf{R}$ . Показать, что  $f(x)$  есть отображение Липшица с постоянной  $s$  такой, что:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq s|x_1 - x_2|$$

для всех  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ .

2. Пусть  $f(x) = \cos(x)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$ .
- Показать, что  $f(x)$  есть отображение Липшица с постоянной 1, а значит не является сжимающим отображением на указанном интервале.
  - Показать, что для любого  $a$ , удовлетворяющего неравенству  $0 < a < \pi/2$ ,  $f(x)$  — сжимающее отображение на  $[0, a]$ .
3. Пусть  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $a \leq f(x) \leq b$ . Используя теорему о среднем значении, доказать, что  $f(x)$  имеет неподвижную точку на  $[a, b]$ . Указание: рассмотреть  $g(x) = f(x) - x$ .
4. Используя доказательство теоремы о сжимающих отображениях, вывести выражение для оценки погрешности после  $n$  итераций:

$$d(x_n, x_f) \leq \frac{s^n}{1-s} d(x_0, x_1).$$

5. Применим теорему о сжимающих отображениях к ограниченному метрическому пространству  $X$ . Показать, что выражение для оценки погрешности после  $n$  итераций выглядит следующим образом:

$$d(x_n, x_f) \leq s^n \delta(X),$$

где  $\delta(X)$  — диаметр  $X$ .

6. Доказать теорему о сходимости метода Ньютона нахождения нуля  $f(x)$ . Пусть  $f(c) = 0$  и  $f'(c) \neq 0$ . Предположим, что  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на некотором открытом интервале, содержащем  $c$ . Пусть  $x_0$  — начальное приближение к точке  $c$ . Положим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Тогда существует такой интервал, содержащий  $c$ , что если  $x_0$  принадлежит этому интервалу, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

*Указание:* Применить теорему о сжимающих отображениях к  $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ .

7. Пусть  $(X_1, d_1)$  и  $(X_2, d_2)$  — метрические пространства. Рассмотрим сжимающие отображения

$$f_1 : X_1 \rightarrow X_1$$

и

$$f_2 : X_2 \rightarrow X_2$$

с коэффициентами сжатия  $s_1$  и  $s_2$ , соответственно. Определим  $X = X_1 \times X_2$  и  $d$  на  $X$  следующим образом:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}.$$

Определим  $f$  на  $X$ :  $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ .

- а) Доказать, что  $(X, d)$  — метрическое пространство.
- б) Доказать, что  $f$  — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия  $s = \max\{s_1, s_2\}$ .

### 3.4. Аффинные преобразования

Линейное преобразование вместе с последующим преобразованием сдвига составляют *аффинное* преобразование пространства  $\mathbf{R}^n$ . Несмотря на то, что в примерах мы ограничимся преобразованиями на плоскости, то есть из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ , все результаты легко обобщаются на случай  $n$ -мерного пространства.

Отображение  $L$  называется *линейным* преобразованием пространства  $\mathbf{R}^n$  в пространство  $\mathbf{R}^m$ , если:

$$L(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda L(\mathbf{x}) + \mu L(\mathbf{y}) \quad (3.12)$$

для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  и произвольных скаляров  $\lambda, \mu$ . Пример линейного преобразования плоскости:

$$L(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - 4x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

**Матричная запись** этого преобразования:

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

служит примером следующей теоремы.

**Теорема 3.4.4.** Пусть  $L$  — линейное преобразование из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^m$ . Тогда существует такая матрица  $A$  размера  $m \times n$ , что:

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \quad (3.13)$$

**Доказательство.** Рассмотрим стандартный базис в  $\mathbf{R}^n$ :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

и вектор  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

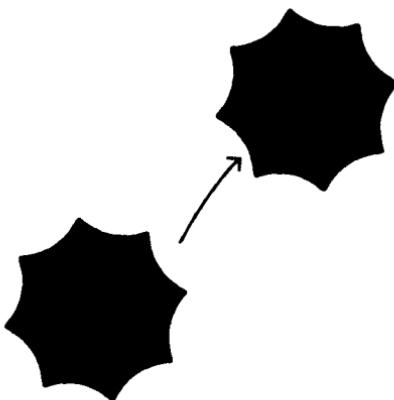
и с использованием условия линейности (3.12) получим:

$$L(\mathbf{x}) = x_1 L(\mathbf{e}_1) + x_2 L(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n L(\mathbf{e}_n).$$

Векторы  $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), \dots, L(\mathbf{e}_n)$  представляют собой столбцы размера  $m \times 1$ , так как область значений  $L$  есть пространство  $\mathbf{R}^m$ . Составим из этих столбцов  $m \times n$ -матрицу  $A$ . Раскрывая матричное произведение:

$$A\mathbf{x} = [L(\mathbf{e}_1) \ L(\mathbf{e}_2) \ \dots \ L(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

убеждаемся в том, что  $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . ■

Рис. 3.7. Сдвиг  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ 

Основное свойство линейного преобразования заключается в том, что оно переводит отрезки в отрезки. Чтобы удостовериться в этом, рассмотрим векторнозначную функцию:

$$S(t) = t\mathbf{y} + (1 - t)\mathbf{x}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

которая пробегает отрезок от  $\mathbf{x}$  до  $\mathbf{y}$ . Пусть  $L$  — линейное преобразование. По определению линейного преобразования:

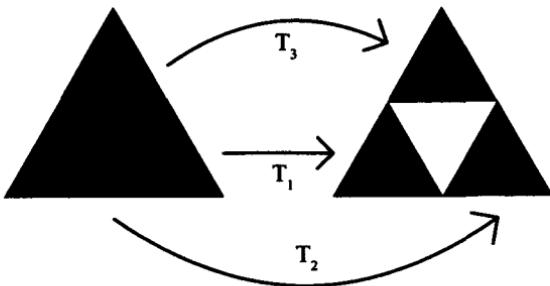
$$L(t\mathbf{y} + (1 - t)\mathbf{x}) = tL(\mathbf{y}) + (1 - t)L(\mathbf{x}).$$

Следовательно,  $L$  преобразует отрезок  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  в отрезок  $[L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})]$ . Более того, левая часть оригинала  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  отображается в левую часть изображения  $[L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})]$ . Суммируя все это, заключаем, что линейное преобразование плоскости  $L$  отображает треугольную область с вершинами  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  на треугольную область с вершинами  $L(\mathbf{x})$ ,  $L(\mathbf{y})$  и  $L(\mathbf{z})$ , причем внутренность первого треугольника отображается на внутренность второго. Другие свойства линейного преобразования вынесены в упражнения.

Отображение  $T$  называется преобразованием *сдвига* пространства  $\mathbf{R}^n$  (рис. 3.7), если:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор. Эффект применения  $T$  к произвольной конфигурации из  $\mathbf{R}^n$  заключается в сдвиге всей конфигурации на вектор  $\mathbf{a}$ .



**Рис. 3.8.** Аффинные преобразования для ковра Серпинского

Таким образом, любое *аффинное* преобразование  $T$  пространства  $\mathbf{R}^n$  можно представить в матричной форме:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

В случае  $\mathbf{R}^2$  имеем:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Мы будем пользоваться аффинными преобразованиями при построении фракталов с помощью алгоритмов систем итерированных функций (глава 4). Аффинные преобразования для ковра Серпинского показаны на рис. 3.8. В матричной форме они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Изометрия.** Очевидно, такие преобразования, как сдвиг, поворот и отражение относительно оси, сохраняют расстояния. Все они есть частный случай *изометрии*. Формально, преобразование  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  называется *изометрией* (в евклидовой метрике), если:

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

Как мы убедимся позднее, изометрия пространства  $\mathbf{R}^n$  в действительности всегда является аффинным отображением, хотя это и не следует впрямую из приведенного определения.

Напомним, что скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  задается следующим образом (п. 3.1):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

и что ненулевые векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  перпендикулярны, или *ортогональны*, тогда и только тогда, когда  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Набор из  $n$  попарно ортогональных векторов единичной длины называется *ортонормированным* базисом. Ясно, что столбцы квадратной матрицы  $Q$  порядка  $n$  образуют ортонормированный базис, если:

$$Q^T Q = Q Q^T = I,$$

где  $I$  — единичная матрица порядка  $n$  ( $I_{jk} = 1$  при  $j = k$ ,  $I_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ ). Матрица  $Q$  называется *ортогональной* матрицей.

---

**Лемма 3.4.2.** Если  $\mathbf{0}$  — неподвижная точка изометрии  $T$  пространства  $\mathbf{R}^n$  ( $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ), то  $T$  сохраняет скалярное произведение:

$$(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

**Доказательство.** Из определения изометрии и выражения (3.2) следует:

$$\begin{aligned} (T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) &= \frac{1}{2}(\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0})\|_2^2 + \|T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{0})\|_2^2 - \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \blacksquare \end{aligned}$$

---

**Теорема 3.4.5.** Изометрия  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  является аффинным преобразованием и может быть представлена в виде:

$$T(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{3.16}$$

где  $Q$  — ортогональная матрица,  $\mathbf{b}$  — вектор-столбец.

**Доказательство.** Положим  $\mathbf{b} = T(\mathbf{0})$  и  $T_1(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$ . Тогда  $T_1$  — тоже изометрия, причем  $T_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . По лемме 3.4.2,  $T_1$  сохраняет скалярное произведение, а следовательно и норму.

Рассмотрим стандартный ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  в  $\mathbf{R}^n$  (см. ф-лу (3.14)). Из предыдущего замечания следует, что векторы  $\mathbf{q}_1 = T_1(\mathbf{e}_1), \mathbf{q}_2 = T_1(\mathbf{e}_2), \dots, \mathbf{q}_n = T_1(\mathbf{e}_n)$  также образуют ортонормированный базис в  $\mathbf{R}^n$ . Любой вектор  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  можно единственным образом представить в виде:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + \cdots + a_n\mathbf{q}_n,$$

причем коэффициенты разложения выражаются через скалярные произведения:

$$a_i = (\mathbf{x}, \mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ . Тогда  $T_1(\mathbf{x})$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n (T_1(\mathbf{x}), \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (T_1(\mathbf{x}), T_1(\mathbf{e}_i)) \mathbf{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \mathbf{q}_i. \end{aligned}$$

Следовательно, преобразование  $T_1$  есть линейная функция  $\mathbf{x}$ . Кроме того, замечаем, что матричная запись  $T_1$  дается выражением:

$$T_1(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x},$$

где  $Q$  — ортогональная матрица, составленная из столбцов  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ . Таким образом,  $T$  — аффинное преобразование:

$$T(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + \mathbf{b} = Q\mathbf{x} + \mathbf{b}. \blacksquare$$

Упр. 5 в конце этого параграфа посвящено различным видам изометрии плоскости  $\mathbf{R}^2$ .

**Преобразование подобия.** Обобщением изометрии является *преобразование подобия*, при помощи которого могут быть получены многие фракталы (глава 4). Преобразование  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  называется *преобразованием подобия с коэффициентом подобия  $r$* , ( $r > 0$ ), если:

$$\|S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{y})\|_2 = r\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

Следующая теорема устанавливает общий вид преобразования подобия пространства  $\mathbf{R}^n$ .

---

**Теорема 3.4.6.** *Преобразование подобия  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  с коэффициентом подобия  $r > 0$  является аффинным преобразованием и может быть представлено в виде:*

$$S(\mathbf{x}) = rQ\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (3.17)$$

где  $Q$  — ортогональная матрица,  $\mathbf{b}$  — вектор-столбец.

**Доказательство.** Пусть  $T(\mathbf{x}) = (1/r)(S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{0}))$ . Видно, что  $T$  — изометрия, причем  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . По теореме 3.4.5,  $T(\mathbf{x})$  можно записать в виде:

$$T(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x},$$

где  $Q$  — ортогональная матрица. Следовательно,

$$S(\mathbf{x}) = rQ\mathbf{x} + S(\mathbf{0}). \quad \blacksquare$$

Упр. 6 в конце этого параграфа посвящено различным видам преобразования подобия плоскости  $\mathbf{R}^2$ .

**Комплексные числа.** Аффинное преобразование плоскости можно также описать при помощи комплексных чисел и операций над ними. Операции сложения и умножения двух комплексных чисел

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}$$

задаются формулами:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

*Сопряженным* комплексному числу  $z = x + iy$  называется комплексное число:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Векторное пространство  $\mathbf{R}^2$  можно рассматривать как множество комплексных чисел:

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}\},$$

установив взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow x + iy.$$

Такие операции над векторами, как сложение и умножение на скаляр, заменяются сложением и умножением соответствующих комплексных чисел.

Очевидный пример аффинного преобразования, записанного при помощи комплексных чисел:

$$L(z) = az + b. \quad (3.18)$$

Это же преобразование в матричной форме:

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Как следует из выражения (3.19), далеко не все аффинные преобразования можно представить с помощью (3.18). Произвольное аффинное преобразование в комплексной записи имеет вид:

$$L(z) = az + b\bar{z} + c, \quad (3.20)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — комплексные постоянные. Представлению (3.20) и его свойствам посвящено упр. 4 в конце этого параграфа.

Представление аффинных преобразований плоскости с помощью комплексных чисел имеет одно замечательное преимущество с точки зрения программирования. Компьютерная реализация алгоритмов значительно упрощается при использовании языка программирования с встроенной поддержкой комплексной арифметики.

Кроме того, использование комплексной записи облегчает геометрическую трактовку, благодаря тому, что с комплексными числами удобно работать в полярной системе координат:

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Здесь  $r$  — *модуль*, или *абсолютное значение*  $z$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол  $\theta$  называется *аргументом*  $z$ . Это угол (с точностью до  $2\pi$ ) между положительным направлением оси  $Ox$  и вектором, соединяющим начало координат с точкой  $(x, y)$ . Произведение двух комплексных чисел  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  и  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  выражается следующей формулой:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

то есть модули перемножаются, а аргументы складываются. Таким образом, если мы положим  $a = re^{i\theta}$ , где  $\theta$  — произвольный угол, а  $0 < r < 1$ , то (3.18) будет сжимающим аффинным отображением с коэффициентом сжатия  $r$ . Геометрически действие этого преобразования на некоторую фигуру можно представить в виде последовательности шагов:

1. Повернуть фигуру относительно начала координат на угол  $\theta$ .
2. Сжать фигуру к началу координат в  $1/r$  раз.
3. Сдвинуть фигуру на радиус-вектор  $b$ .

Три преобразования  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  для ковра Серпинского можно записать в комплексной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1(z) &= \frac{1}{2}z, \\ T_2(z) &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ T_3(z) &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**Аффинные коэффициенты.** В определении (3.15) произвольного аффинного преобразования плоскости имеется шесть параметров, или степеней свободы. Разумно предположить, что мы всегда в состоянии определить единственным образом все параметры аффинного преобразования, которое отображает три несовпадающие точки

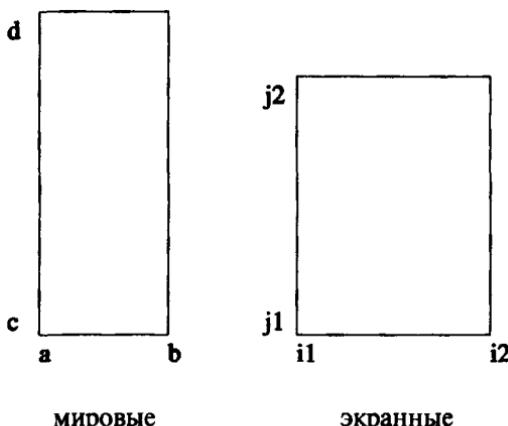


Рис. 3.9. Мировые и экранные координаты

$(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$ ,  $(z_1, z_2)$  (шесть координат) на три точки  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ,  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ ,  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ . И это действительно так: коэффициенты  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  определяются из системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Пример дается в конце этого параграфа.

**Замена координат.** При реализации на компьютере систем итерированных функций (глава 4) для задания координат пикселов принято использовать переменные  $i$  и  $j$ . Обычно  $i = 1, \dots, 640$  и  $j = 1, \dots, 480$ . Однако изначально координаты могут быть заданы вещественными числами (как в примере с ковром Серпинского), вроде  $x_1 \in [0, 1]$  или  $x_2 \in [0, \sqrt{3}/2]$ . Последние мы будем называть *мировыми координатами*<sup>2</sup>, в отличие от *экранных координат*  $i, j$  (рис. 3.9). Если:

$$i = i_1, \dots, i_2,$$

<sup>2</sup>Мировые координаты: не зависящая от устройства декартова системы координат, используемая программой для задания графических данных.

$$j = j_1, \dots, j_2,$$

$$x_1 \in [a, b],$$

$$x_2 \in [c, d],$$

то нетрудно убедиться, что соответствие между координатами устанавливается формулой:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

где  $M_{11} = (i_2 - i_1)/(b - a)$ ,  $M_{22} = (j_2 - j_1)/(d - c)$ ,  $\omega_1 = i_1 - M_{11}a$  и  $\omega_2 = j_1 - M_{22}c$  (упр. 7 в конце этого параграфа). В более компактной записи:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \theta(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (3.21)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Далее, остается вопрос, как записать аффинное или любое другое преобразование  $T$  в экранных координатах. Пусть  $\tilde{\mathbf{x}} = \theta(\mathbf{x})$  определяется формулой (3.21). Из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \xrightarrow{\theta} & \tilde{\mathbf{x}} \\ T \downarrow & & \downarrow \tilde{T} \\ T(\mathbf{x}) & \xrightarrow{\theta} & \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}), \end{array}$$

видно, что новое преобразование  $\tilde{T}$  задается формулой:

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) = \theta \circ T \circ \theta^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

а для перехода в мировые координаты нужно воспользоваться следующей формулой:

$$T(\tilde{\mathbf{x}}) = \theta^{-1} \circ \tilde{T} \circ \theta(\mathbf{x}).$$

**Теорема 3.4.7.** Пусть  $\tilde{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{w}$  — замена переменных для перехода от мировых координат к экранным,  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$  — аффинное преобразование в мировых координатах. Тогда преобразование  $T$  в экранных координатах имеет вид:

$$\tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{a}},$$

где  $\tilde{A} = MAM^{-1}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{A}\mathbf{w} - Ma + \mathbf{w}$ .

**Доказательство.** Имеем:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \theta \circ T \circ \theta^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}) \\
 &= \theta \circ T \circ (M^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{w})) \\
 &= \theta [A(M^{-1}\tilde{\mathbf{x}} - M^{-1}\mathbf{w}) + \mathbf{a}] \\
 &= M [A(M^{-1}\tilde{\mathbf{x}} - M^{-1}\mathbf{w}) + \mathbf{a}] + \mathbf{w} \\
 &= (MAM^{-1})\tilde{\mathbf{x}} + (-MAM^{-1}\mathbf{w} + Ma + \mathbf{w}) \\
 &= \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{a}},
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{A} = MAM^{-1}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{A}\mathbf{w} - Ma + \mathbf{w}$ . ■

Еще раз повторим, что основная цель замены координат состоит в том, чтобы при построении фрактального изображения с помощью систем итерированных функций можно было производить вычисления напрямую с экранными координатами. Следующий алгоритм реализует переход из мировых координат в экранные.

### Алгоритм 3.4.2. (WOR2SCR)

Назначение: для аффинного отображения  $T$ , заданного в мировых координатах, вычисляет эквивалентное представление в экранных координатах. Отображение  $T$  имеет вид:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Вход:

$a, b, c, d, e, f$  (аффинные коэффициенты)

$x_1, x_2, y_1, y_2$  (мировые координаты)

$i_1, i_2, j_1, j_2$  (экранные координаты)

Выход:

$aa, bb, cc, dd, ee, ff$  (новые аффинные коэффициенты)

Шаги:

$$M_{11} = (i_2 - i_1)/(x_2 - x_1)$$

$$M_{22} = (j_2 - j_1)/(y_2 - y_1)$$

$$w_1 = i_1 - M_{11}x_1$$

$$w_2 = j_1 - M_{22}y_1$$

$$aa = a$$

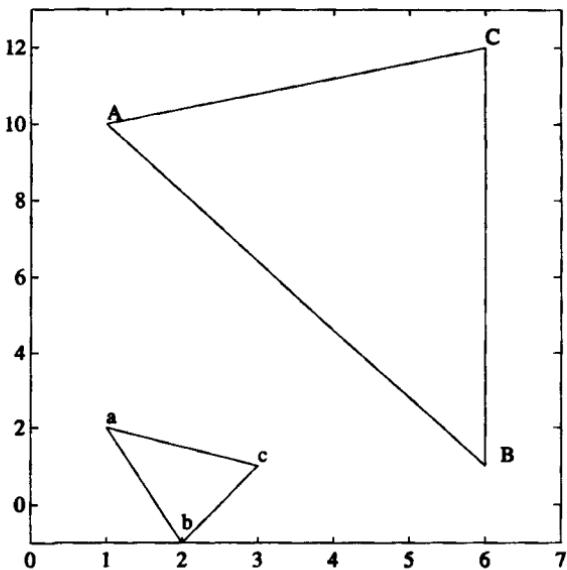


Рис. 3.10. Отображение треугольника в треугольник

$$bb = (M_{11}/M_{22})b$$

$$cc = (M_{22}/M_{11})c$$

$$dd = d$$

$$ee = (1 - aa)w_1 - bb w_2 + M_{11}e$$

$$ff = -cc w_1 + (1 - dd)w_2 + M_{22}f$$

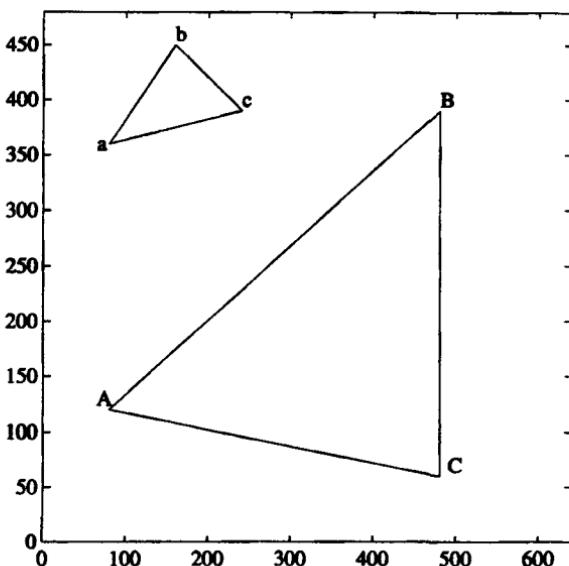
**Пример.** Рассмотрим пример аффинного преобразования, заданного тремя точками (рис. 3.10):

$$\begin{aligned}(1, 2) &\mapsto (1, 10), \\ (2, -1) &\mapsto (6, 1), \\ (3, 1) &\mapsto (6, 12).\end{aligned}$$

Матричная запись этого преобразования:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Пусть мировые координаты изменяются в пределах  $0 \leq x \leq 8$ ,  $-2 \leq y \leq 14$ . Задача состоит в том, чтобы отобразить квадрат,



**Рис. 3.11.** Пример перехода к экранным координатам

заданный в мировых координатах, в окно  $[i_1, i_2] \times [j_1, j_2]$ , где  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = 640$ ,  $j_1 = 480$ ,  $j_2 = 0$ . Мы намеренно выбрали  $j_1 = 480$  (вместо  $j_1 = 0$ ), так как обычно начало отсчета  $(0, 0)$  в экранной системе координат помещается в левый верхний угол.

Преобразование из мировых координат в экранные дается формулой:

$$T\left(\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 80 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 420 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

В этой новой системе координат соответствие между точками записывается так (рис. 3.11):

$$\begin{aligned} (80, 360) &\mapsto (80, 120), \\ (160, 450) &\mapsto (480, 390), \\ (240, 390) &\mapsto (480, 60). \end{aligned}$$

Преобразование (3.22) в новых координатах примет следующий вид:

$$T\left(\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2,0000 & 2,6667 \\ -1,1250 & 4,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1040 \\ -1230 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

**Упражнения 3.4.**

1. Найти аффинное преобразование, если известно, как оно преобразует один треугольник в другой (указаны вершины треугольников):
  - а)  $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$  в  $(3, 4), (2, 1), (1, 5)$ ,
  - б)  $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$  в  $(3, -4), (2, -1), (1, -5)$ ,
  - в)  $(3, 2), (2, 4), (1, -1)$  в  $(-2, 1), (4, -2), (0, 4)$ .
2. а) Показать, что в действительных координатах вращение пространства  $\mathbf{R}^2$  можно задать формулой:

$$R_\theta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2.$$

- б) Показать, что в комплексных координатах вращение пространства  $\mathbf{R}^2$  можно задать формулой:

$$L(z) = e^{i\theta} z, \quad z = x + iy.$$

3. а) Показать, что отражение относительно оси  $Ox$  задается следующим образом:

$$R_x \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2.$$

или, в комплексной записи:

$$L(z) = \bar{z}.$$

- б) Показать, что отражение относительно оси  $Oy$  задается следующим образом:

$$R_y \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$$

или, в комплексной записи:

$$L(z) = -\bar{z}.$$

Доказать, что любое аффинное преобразование плоскости можно записать в следующей комплексной форме:

$$L(z) = az + b\bar{z} + c,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — комплексные числа. Указание: представить  $L(z)$  в виде линейной комбинации  $L(1)$  и  $L(i)$ .

а) Доказать, что вращение, отражение и сдвиг в  $\mathbf{R}^2$  являются изометриями.

б) Доказать, что любую изометрию на плоскости можно представить в виде:

$$T(\mathbf{x}) = R_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

или

$$T(\mathbf{x}) = R_\theta R_x \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где  $R_\theta$  — матрица вращения из упр. 2, а  $R_x$  — матрица отражения из упр. 3.

Пусть  $S$  задает преобразование подобия на  $\mathbf{R}^2$  с коэффициентом подобия  $r > 0$ . Показать, что  $S$  можно представить в виде:

$$S(\mathbf{x}) = rR_\theta \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

или

$$S(\mathbf{x}) = rR_\theta R_x \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

где  $R_\theta$  — матрица вращения из упр. 2, а  $R_x$  — матрица отражения из упр. 3.

Проверить формулу (3.21) для замены координат.

Найти преобразования, соответствующие отображениям, указанным на рис. 3.12. Каждое преобразование может состоять из сжатия, вращения и отражения. Записать ответ как в комплексной форме  $T(z) = az + b\bar{z} + c$ , так и в матричной:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

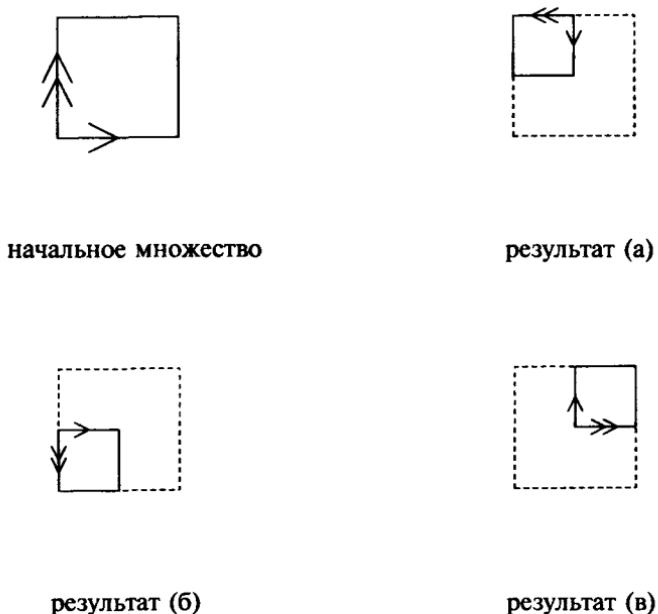


Рис. 3.12. Отображения к упр. 8

### 3.5. Метрика Хаусдорфа I

Одним из основных математических аспектов теории фракталов является вопрос о сходимости некоторой последовательности множеств к фракталу. К примеру, для того чтобы построить ковер Серпинского, мы начинаем с замкнутой треугольной области  $\mathcal{K}$ , выкидывая на каждом шаге внутренние треугольники, получаем аппроксимирующие множества. Кажется вполне правдоподобным (см. рис. 2.5), что предельное множество в действительности является фракталом.

Наша первая задача — разобраться с понятием предела последовательности множеств. Для этого необходимо определить подходящую метрику на интересующих нас множествах. Метрика, которой мы будем пользоваться, называется *метрикой Хаусдорфа*.

Метрика Хаусдорфа определяется на множестве  $\mathcal{K}$  всех непустых компактных подмножеств пространства  $\mathbf{R}^n$ . Таким образом, «точки»  $\mathcal{K}$  суть компакты. «Точками» могут быть фигуры, изображенные на рис. 2.5, или даже само предельное множество (ковер

Серпинского). Требование компактности не ограничивает применимости дальнейших результатов, так как в наших построениях мы всегда будем использовать только компактные множества; более того, оказывается, что и предельные множества — фракталы — всегда компактны.

Обозначим через  $E$  и  $F$  два непустых компактных подмножества  $\mathbf{R}^n$ . Хаусдорфово расстояние между  $E$  и  $F$  можно задать несколькими способами. В этом параграфе мы придерживаемся интуитивного определения. Вопрос о том, является ли расстояние Хаусдорфа метрикой, вынесен в прил. А.3, в котором дается другое определение и доказывается, что расстояние Хаусдорфа действительно обладает всеми свойствами метрики. Там же доказывается эквивалентность двух определений.

Для произвольного множества  $E$  из пространства  $\mathbf{R}^n$  и радиуса  $r > 0$  дилатацией<sup>3</sup>  $E$  радиуса  $r$  (обозначается  $E + r$ ), называется векторная сумма  $E + \bar{B}_r(\mathbf{0})$  (рис. 3.2). Здесь  $\bar{B}_r(\mathbf{0})$  — замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в начале координат. Формально:

$$E + r = \bigcup \{\bar{B}_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}.$$

*Замечание:* в некоторых источниках дилатация определяется с использованием открытого шара, в то время как мы используем замкнутый шар. Наш выбор обусловлен тем, что в случае замкнутого шара доказательства теорем из прил. А.3 несколько упрощаются.

**Определение.** Пусть  $E$  и  $F$  — непустые компактные подмножества  $\mathbf{R}^n$ . Расстояние Хаусдорфа между  $E$  и  $F$ :

$$H(E, F) = \min\{\varepsilon > 0 : E \subset F + \varepsilon \text{ и } F \subset E + \varepsilon\}. \quad (3.25)$$

**Пример.** Пусть  $A$  и  $B$  — эллипсы (рис. 3.13):

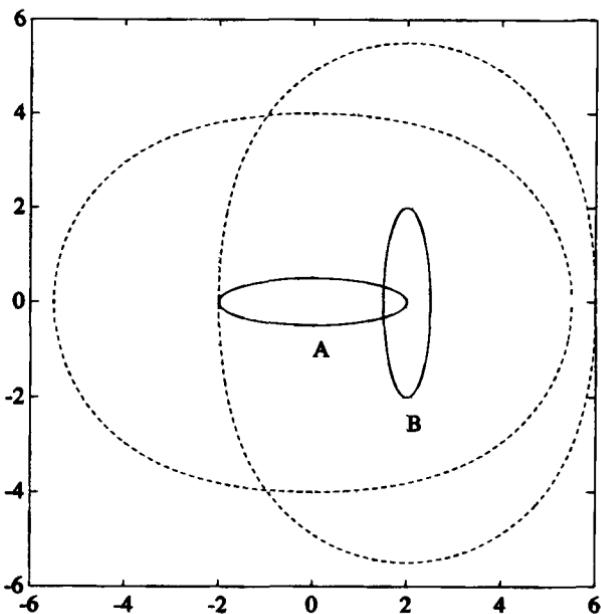
$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1 \quad \text{и} \quad 4(x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

Видно, что наименьшее  $\varepsilon$ , при котором  $A \subset B + \varepsilon$  и  $B \subset A + \varepsilon$ , составляет  $\varepsilon = 3,5$ . Поэтому  $H(A, B) = 3,5$ .

Доказательство следующей теоремы вынесено в прил. А.3.

---

<sup>3</sup>В литературе часто используется эквивалентный термин *расширение*.



**Рис. 3.13.** Определение расстояния Хаусдорфа через дилатации

**Теорема 3.5.8.** Пусть  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и  $E$  — компактные множества. Для того чтобы  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$  в метрике Хаусдорфа, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon$  нашелся такой номер  $N$ , что из  $n > N$  следует  $E_n \subset E + \varepsilon$  и  $E \subset E_n + \varepsilon$ .

**Следствие 3.5.1.** Пусть  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — последовательность компактных множеств, вложенных друг в друга:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

Введем

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда  $E$  — непустой компакт, и последовательность множеств  $E_n$  сходится к  $E$  в хаусдорфовой метрике:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E.$$

Это следствие непосредственно применимо к фракталам, при построении которых последовательно удаляются открытые подмножества. Примерами могут служить классическое множество Кантора (рис. 2.20) и ковер Серпинского (рис. 2.5). И в том, и в другом случае аппроксимирующие множества сходятся к соответствующим фракталам в метрике Хаусдорфа.

### Упражнения 3.5.

1. Обозначим через  $S$  периметр квадрата с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ . Построить дилатацию  $S + 0, 25$ .
2. Найти расстояние Хаусдорфа  $H(A, B)$ :
 
$$A = \{(x, x) : -1 \leq x \leq 1\},$$

$$B = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}.$$
3. Пусть  $C_0, C_1, C_2, \dots$  — аппроксимирующие множества классического множества Кантора  $\mathcal{C}$  (рис. 2.20).
  - а) Найти расстояние Хаусдорфа  $H(C_0, \mathcal{C})$ .
  - б) Найти расстояние Хаусдорфа  $H(C_1, \mathcal{C})$ .
  - в) Найти расстояние Хаусдорфа  $H(C_n, \mathcal{C})$ ,  $n = 2, 3, \dots$
4. Пусть  $\mathcal{C}$  — классическое множество Кантора.
  - а) Построить дилатацию  $\mathcal{C} + 1/27$ .
  - б) Сколько связных компонент образуют дилатацию  $\mathcal{C} + 1/3^n$ ?

# Глава 4.

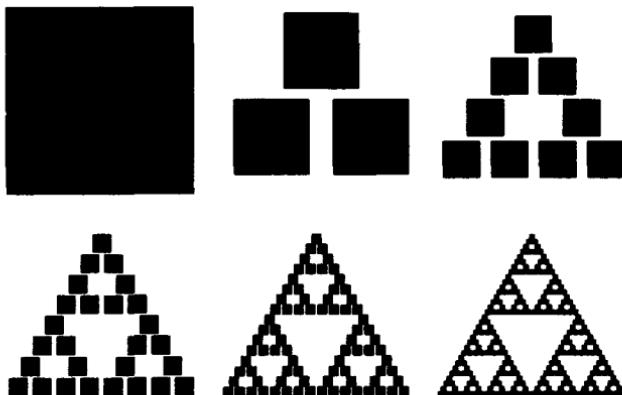
# Системы итерированных функций

Мы обратимся теперь к одному из наиболее замечательных и глубоких достижений в построении фракталов — системам итерированных функций. Математические аспекты были разработаны Джоном Хатчинсоном [23], а сам метод стал широко известен благодаря Майклу Барнсли [4] и другим. Подход на основе систем итерированных функций предоставляет хорошую теоретическую базу для математического исследования многих классических фракталов, а также их обобщений. Разработанная теория будет непосредственно использована при переходе к исследованию хаоса, связанного с фракталами (глава 7).

Следует иметь в виду с самого начала, что результат применения системы итерированных функций, называемый *аттрактором*, не всегда является фракталом. Это может быть любой компакт, включая интервал или квадрат. Тем не менее, изучение систем итерированных функций важно для фрактальной теории, так как с их помощью можно получить удивительное множество фракталов. Теория итерированных функций замечательна сама по себе и служит составной частью общей теории динамических систем, важного раздела математики.

## 4.1. Системы итерированных функций

Прежде чем углубиться в теорию систем итерированных функций, рассмотрим пример, а именно ковер Серпинского, который мы уже строили прежде. Для построения мы выбирали в качестве исходного множества треугольник и на каждом шаге выкидывали центральную треугольную часть (не включая границу) образующихся треугольников. Ниже мы рассмотрим два других метода: *детерминированный* (рис. 4.1) и *рандомизированный* (рис. 4.2).



**Рис. 4.1.** Ковер Серпинского: детерминированный алгоритм (уровни 0, 1, 2, 3, 4, 5)

В п. 3.4 для построения использовались следующие три аффинных преобразования (рис. 3.8):

$$\begin{aligned} T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ T_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если  $S$  — замкнутое множество в виде треугольника с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(1/2, \sqrt{3}/2)$ , то образы  $T_1(S)$ ,  $T_2(S)$  и  $T_3(S)$  суть три меньшие треугольные области, изображенные на рисунке справа.

В *детерминированном алгоритме* рассматривают следующую последовательность множеств:

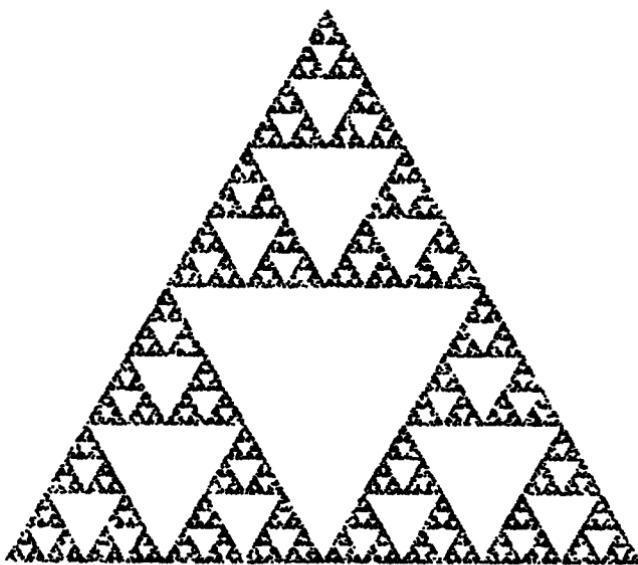
$$E_0 = \text{компактное множество (произвольное)}$$

$$E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup T_3(E_0)$$

$$\vdots$$

$$E_n = T_1(E_{n-1}) \cup T_2(E_{n-1}) \cup T_3(E_{n-1})$$

$$\dots$$



**Рис. 4.2.** Ковер Серпинского: рандомизированный алгоритм (построено 10000 точек)

Если в качестве  $E_0$  выбрать замкнутую треугольную область  $S$ , то множества  $E_n$ , построенные указанным способом, будут в точности те же, что и при выкидывании центральных треугольных частей.

В *рандомизированном алгоритме*, который часто называют *игрой «Хаос»* (см. упр. 1 в конце параграфа), в качестве начального множества выбирают одну точку:

$$x_0 = \text{начальная точка (произвольная)}$$

$$x_1 = T_1(x_0) \text{ или } T_2(x_0) \text{ или } T_3(x_0)$$

$$\vdots$$

$$x_n = T_1(x_{n-1}) \text{ или } T_2(x_{n-1}) \text{ или } T_3(x_{n-1})$$

$$\vdots$$

На каждом шаге, вместо того чтобы применять сразу три преобразования  $T_1(S)$ ,  $T_2(S)$ ,  $T_3(S)$ , мы применяем только одно, выбранное случайнным образом. Таким образом, на каждом шаге мы получаем ровно одну точку. Оказывается, что после некоторого переходного

этапа точки, сгенерированные в рандомизированном алгоритме, заполняют в точности ковер Серпинского.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории систем итерированных функций, является то, что их результат (аттрактор) совершенно не зависит от выбора начального множества  $E_0$  или начальной точки  $x_0$ . В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве  $E_0$  можно взять любое компактное множество на плоскости: предельное множество по-прежнему будет совпадать с ковром Серпинского. В случае рандомизированного алгоритма, вне зависимости от выбора начальной точки  $x_0$ , после нескольких итераций точки начинают заполнять ковер Серпинского.

Рандомизированный алгоритм часто используется на компьютерах, в которых предусмотрена возможность вывода графического изображения на экран в режиме 1 пиксел за раз. Для детерминированного алгоритма требуется большой объем памяти. Стоит отметить, что для вывода на печать необходим принтер, способный работать с большими изображениями.

В общем случае, для чтобы построить *систему итерированных функций* введем в рассмотрение совокупность сжимающих отображений:

$T_1$ , с коэффициентом сжатия  $s_1 < 1$ ,

$T_2$ , с коэффициентом сжатия  $s_2 < 1$ ,

$\vdots$

$T_m$ , с коэффициентом сжатия  $s_m < 1$ ,

действующих на  $\mathbf{R}^n$ . Эти  $m$  отображений используются для построения одного сжимающего отображения  $T$  в пространстве  $\mathcal{K}$  всех непустых компактов из  $\mathbf{R}^n$ . Преобразование Хатчинсона  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{T}(E) = T_1(E) \cup T_2(E) \cup \cdots \cup T_m(E), \quad E \in \mathcal{K}. \quad (4.1)$$

Это преобразование ставит в соответствие «точкам» из  $\mathcal{K}$  также «точки» из  $\mathcal{K}$ , причем под точками здесь понимаются компактные множества.

Таким образом, *системой итерированных функций* (СИФ) называют совокупность введенных выше отображений вместе с итерационной схемой:

$$\begin{aligned} E_0 &= \text{компактное множество (произвольное)} \\ E_1 &= \mathbf{T}(E_0), \\ E_2 &= \mathbf{T}(E_1), \\ &\vdots \\ E_n &= \mathbf{T}(E_{n-1}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Основная задача теории СИФ — выяснить, когда СИФ порождает предельное множество  $E$ :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n,$$

в смысле сходимости в метрике Хаусдорфа. Если предел существует, то множество  $E$  называют *аттрактором* системы итерированных функций. Причем аттрактор часто (но не всегда!) оказывается фрактальным множеством. Очевидно, для того чтобы обеспечить сходимость, требуется наложить определенные ограничения на введенные выше преобразования, к примеру запретить точкам уходить на бесконечность.

Основные математические идеи, необходимые для установления условий сходимости, уже были представлены. Если нам удастся показать, что  $\mathbf{T}$  является сжимающим отображением на метрическом пространстве  $(\mathcal{K}, H)$ , то мы сможем применить теорию сжимающих отображений<sup>1</sup>. В этом случае аттрактор  $E$  есть не что иное, как неподвижная точка отображения  $\mathbf{T}$ .

Таким образом, необходимо показать, что метрическое пространство  $(\mathcal{K}, H)$  является полным. Теорема 4.3.3 дает положительный ответ на этот вопрос. Затем надо убедиться в том, что множество  $T(K)$ , где  $K \in \mathcal{K}$  — произвольный компакт, также компактно. Это утверждение следует из известных теорем о непрерывных функциях (см. упр. 4 в прил. А.2). Остается последний шаг: доказать, что  $\mathbf{T}$  — сжимающее отображение на  $(\mathcal{K}, H)$ .

---

<sup>1</sup>  $H$  — метрика Хаусдорфа.

**Теорема 4.1.1.** Преобразование  $\mathbf{T}$ , определенное формулой (4.1), является сжимающим отображением на  $\mathcal{K}$  с хаусдорфовой метрикой. Его коэффициент сжатия равен:

$$s = \max\{s_1, \dots, s_m\}.$$

**Доказательство.** Я благодарен Ричарду Найдингеру за предложенное доказательство. Во-первых, заметим, что для любого компакта  $F$  выполняется  $e \in F + r$  тогда и только тогда, когда существует такой элемент  $f \in F$ , что  $d(e, f) \leq r$ . Следовательно, если  $A \subset B + r$ , то  $T_i(A) \subset T_i(B) + s_i r$  для каждого отображения  $T_i$ . По определению, неравенство  $H(E, F) \leq \varepsilon$  эквивалентно следующей записи на языке множеств:  $E \subset F + \varepsilon$  и  $F \subset E + \varepsilon$ . Положим  $r = H(A, B)$ . Тогда, если  $A \subset B + r$ , то:

$$T_i(A) \subset T_i(B) + s_i r, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Следовательно,

$$\mathbf{T}(A) \subset \mathbf{T}(B) + sr.$$

Если поменять местами  $A$  и  $B$ , получим:

$$\mathbf{T}(B) \subset \mathbf{T}(A) + sr.$$

Таким образом,

$$H(\mathbf{T}(A), \mathbf{T}(B)) \leq sr = sH(A, B). \blacksquare$$

Следующая теорема суммирует основные результаты о сходимости систем итерированных функций.

**Теорема 4.1.2.** Пусть  $T_1, T_2, \dots, T_m$  — сжимающие отображения на  $\mathbf{R}^n$ . Для произвольного начального множества  $E_0 \in \mathcal{K}$ , система итерированных функций

$$E_n = \mathbf{T}(E_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{T}$  — преобразование Хатчинсона (4.1), сходится в метрике Хаусдорфа к единственному множеству  $E \in \mathcal{K}$ . Множество  $E$  называют аттрактором СИФ. Обратно, множество  $E$  можно представить в виде:

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}^{(n)}(E_0).$$

Вопрос о сходимости рандомизированного алгоритма для системы итерированных функций рассматривается в п. 7.6.

### Упражнения 4.1.

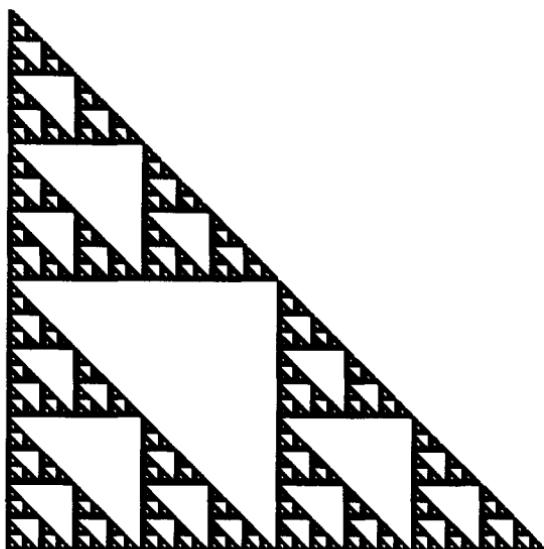
- Игра «Хаос» состоит в следующем. Положим  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0)$  и  $P_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$  и установим фишку в произвольной начальной точке  $X_0$ . Бросим игральную кость. Если выпало 1 или 2, передвинем фишку на половину расстояния между  $X_0$  и  $P_1$  в направлении  $P_1$ . Если выпало 3 или 4, передвинем фишку на половину расстояния между  $X_0$  и  $P_2$  в направлении  $P_2$ . Если выпало 5 или 6, передвинем фишку на половину расстояния между  $X_0$  и  $P_3$  в направлении  $P_3$ . Назовем новую точку  $X_1$ . Повторяя описанную процедуру снова и снова, получим последовательность точек  $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$  на плоскости, каждая из которых находится на полпути до случайно выбранной вершины. Отбросим несколько начальных точек последовательности, допустим первые 100 точек. Оказывается, оставшиеся точки заполняют ковер Серпинского.

Показать, что игра «Хаос» есть не что иное, как рандомизированный алгоритм для получения ковра Серпинского, описанный в этом параграфе.

- Найти аффинные преобразования  $T_1, T_2, T_3$  системы итерированных функций, аттрактор которой изображен на рис. 4.3. Смоделировать СИФ на компьютере с помощью детерминированного или рандомизированного алгоритма.
- Найти аффинные преобразования  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$  СИФ, аттрактор которой описан в упр. 2(а) п. 2.1.
- Построить вручную третью итерацию ковра Серпинского (см. рис. 2.5). Указать, какому из отображений  $T_1, T_2, T_3$  соответствует та или иная треугольная область.

## 4.2. Реализация СИФ

Как было отмечено в п. 4.1, имеется два подхода к реализации СИФ: детерминированный и рандомизированный. Детерминированный алгоритм позволяет получать привлекательные изображения, но требует обработки больших массивов нулей и единиц. Единица означает, что соответствующий пиксел принадлежит изображению,



**Рис. 4.3.** Модифицированный ковер Серпинского

а нуль означает, что соответствующий пиксел не принадлежит изображению. Для компьютерной программы детерминированного СИФ алгоритма лучше всего подходят такие языки программирования, как Си, Паскаль, Фортран или другие, допускающие компиляцию. Компилированная версия программы (в машинном коде) всегда работает намного быстрее версии с встроенным интерпретатором.

В рандомизированном алгоритме нет необходимости хранить большие массивы данных в памяти. Поэтому им удобно пользоваться на компьютерах с ограниченными ресурсами, вычисляя одну точку на каждом шаге и сразу же отображая ее на экране. С другой стороны, для того чтобы получить изображение приемлемого качества, требуются тысячи точек, поэтому данный подход нельзя назвать экономным.

**Детерминированный алгоритм.** Сначала выберем размеры окна  $t \times t$  для графического вывода. Размеры меньше  $200 \times 200$  используются обычно для прикидки, чтобы посмотреть, как примерно будет выглядеть конечное изображение. Начиная где-то с  $256 \times 256$ , качество изображений становится удовлетворительным.

Однако если вы хотите получить превосходный результат, размеры окна должны составлять  $400 \times 400$  или более. При этом не стоит забывать, что вычисления производятся для  $t^2$  точек на каждой итерации, и, следовательно, с ростом  $t$  объем вычислений может превысить разумные пределы.

Далее, когда размер окна зафиксирован, имеет смысл использовать преобразование мировых координат в экранные, описанное в п. 3.4, и найти эквиваленты аффинных отображений для окна  $t \times t$ . Тогда все вычисления можно будет производить в экранных координатах. Далее мы предполагаем, что все отображения заданы в экранных координатах.

Программная реализация детерминированного алгоритма не лишена подводных камней. Если какая-нибудь точка выйдет за пределы окна  $t \times t$ , это приведет к аварийному останову программы с сообщением об ошибке типа «индекс вышел за пределы». Такое может случиться, даже если визуально аттрактор целиком содержится внутри выбранного окна. Обычно подобная проблема возникает на одной из первых итераций. Практическое решение состоит в том, чтобы проверять новые точки сразу же после их нахождения и прекращать вычисления для точек, вышедших за границы окна. Это не должно привести к существенной потере информации в конечном изображении, так как большинство точек в конечном изображении являются результатом итерирования многих различных начальных точек.

Пусть СИФ задана аффинными преобразованиями:

$$T_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем хранить все коэффициенты в одной матрице  $C$  размера  $n \times 6$ :

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Далее следует детерминированный алгоритм СИФ (ДСИФ).

**Алгоритм 4.2.1. (ДСИФ)**

Назначение: детерминированная система итерированных функций.

Вход:

$C$  (аффинные коэффициенты)  
 $n$  (число аффинных отображений)  
 $m$  (размер квадратного окна)  
 $E_0$  (матрица  $m \times m$  начальных значений)  
 $level$  (число итераций)

Выход:

$T$  (бинарная матрица аттрактора размера  $m \times m$ )

Инициализация:

$S = 0$  (нулевая матрица размера  $m \times m$ )  
 $T = E_0$

Шаги:

```

for k = 1 to level
    for i = 1 to m, for j = 1 to m
        if  $T(i, j) = 1$ 
            for l = 1 to n
                ii =  $[C(l, 1)i + C(l, 2)j + C(l, 5)] + 1$ 
                if  $1 \leq ii \leq m$ 
                    jj =  $[C(l, 3)i + C(l, 4)j + C(l, 6)] + 1$ 
                    if  $1 \leq jj \leq m$ 
                        S(ii, jj) = 1
                    end if
                end if
            end for
        end if
    end for, end for
    T = S
    S = 0
end for

```

**Рандомизированный алгоритм.** Укажем два главных отличия рандомизированного алгоритма от детерминированного. Во-первых, начальное множество содержит всего одну точку. Во-вторых, на каждом шаге используется только *одно* аффинное преобразование

из всей совокупности преобразований, задающих СИФ. Это преобразование выбирается случайным образом. Полученное множество также содержит ровно одну точку, которая сразу же выводится на экран и используется для вычисления следующей итерации. Следовательно, отпадает необходимость хранить все точки, кроме текущей.

Аффинное преобразование  $T(x) = Ax + a$  уменьшает (или увеличивает) площади в  $|\det(A)|$  раз (см. упр. 1 в конце этого параграфа). Для того чтобы в процессе случайного выбора преобразования с малым детерминантом не появлялись слишком часто, имеет смысл производить выбор с вероятностями, пропорциональными детерминантам. Для этого определим веса  $p_1, p_2, \dots, p_n$ :

$$p_j = \det(A_j)/\sum_{i=1}^n \det(A_i), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_i$  — матрица аффинного преобразования  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Очевидно,  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ , то есть определенные нами веса суть вероятности. В рандомизированном алгоритме преобразование  $T_i$  выбирается с вероятностью  $p_i$ . Для этого используется внешняя подпрограмма PICK. Она принимает вектор  $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$  в качестве входного параметра и возвращает одно из чисел 1, 2, ...,  $n$ , причем число  $j$  появляется с вероятностью  $p_j$ .

Ниже приводится рандомизированный алгоритм (РСИФ), в котором все вычисления и вывод на экран производятся в мировых координатах.

#### Алгоритм 4.2.2. (РСИФ)

Назначение: рандомизированная система итерированных функций.

Вход:

$C$  (аффинные коэффициенты)

$n$  (число аффинных отображений)

$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]$  (вероятности)

$a, b, c, d$  (координаты окна,  $[a, b] \times [c, d]$ )

$(x_0, y_0)$  (начальная точка)

$level$  (число итераций, порядка тысячи)

Выход:

изображение аттрактора.

**Инициализация:**

графическое окно вывода  $[a, b] \times [c, d]$ .

**Шаги:**

for  $j = 1$  to  $100$

$k = \text{PICK}(P)$  (см. ниже)

$x = [C(k, 1)x_0 + C(k, 2)y_0 + C(k, 5)]$

$y = [C(k, 3)x_0 + C(k, 4)y_0 + C(k, 6)]$

$x_0 = x$

$y_0 = y$

end for

for  $j = 1$  to  $level$

$k = \text{PICK}(P)$  (см. ниже)

$x = [C(k, 1)x_0 + C(k, 2)y_0 + C(k, 5)]$

$y = [C(k, 3)x_0 + C(k, 4)y_0 + C(k, 6)]$

    отобразить точку  $(x, y)$

$x_0 = x$

$y_0 = y$

end for

Замечание: команда  $k = \text{PICK}(P)$  означает, что целое число  $k$  выбирается случайным образом с вероятностью  $p_k$ .

Интересные примеры аттракторов, построенных при помощи СИФ, изображены на рис. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 и 4.9. Соответствующие аффинные коэффициенты приведены в табл. 4.1.

### Упражнения 4.2.

1. Рассмотрим аффинное преобразование плоскости:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Показать, что  $T$  уменьшает (или увеличивает) площади фигур в  $D$  раз:

$$D = \det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right).$$

*Указание:* рассмотреть сначала маленькие квадраты. Для произвольных фигур определить сетку из маленьких квадратов.

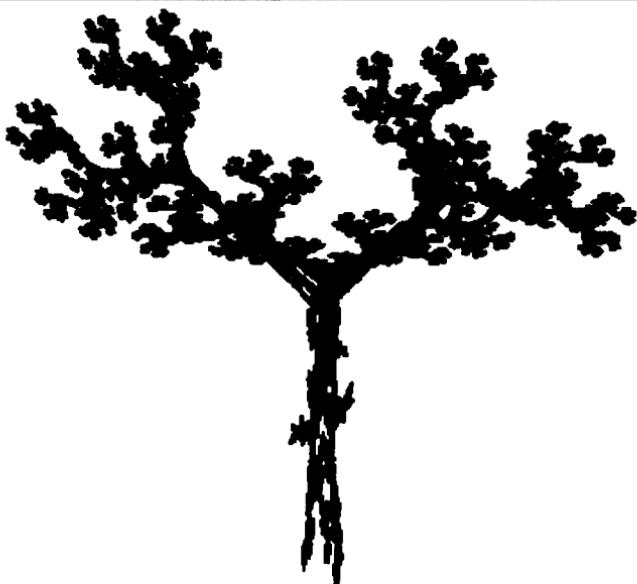
2. (Компьютерный эксперимент.) Запрограммировать алгоритмы ДСИФ и РСИФ для СИФ, заданной тремя аффинными отображениями из упр. 8, п. 3.4.



---

Рис. 4.4. Лист: программа ДСИФ

---



---

Рис. 4.5. Дерево: программа ЛСИФ

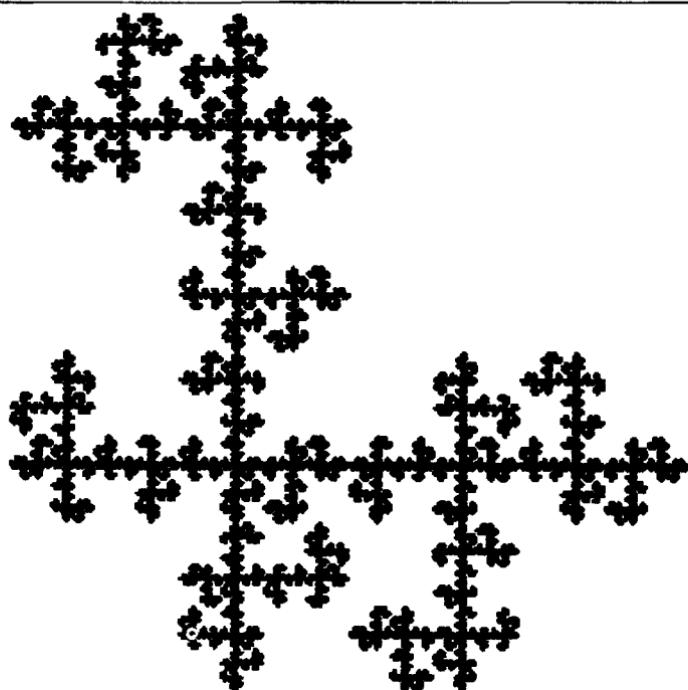


Рис. 4.6. Ковер А: программа ДСИФ

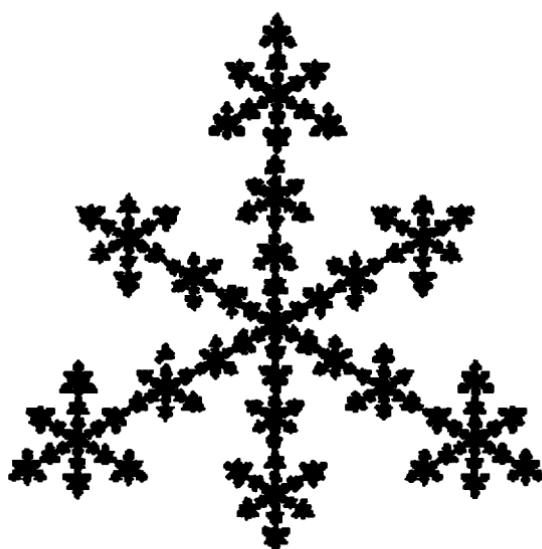


Рис. 4.7. Кристалл: программа ДСИФ

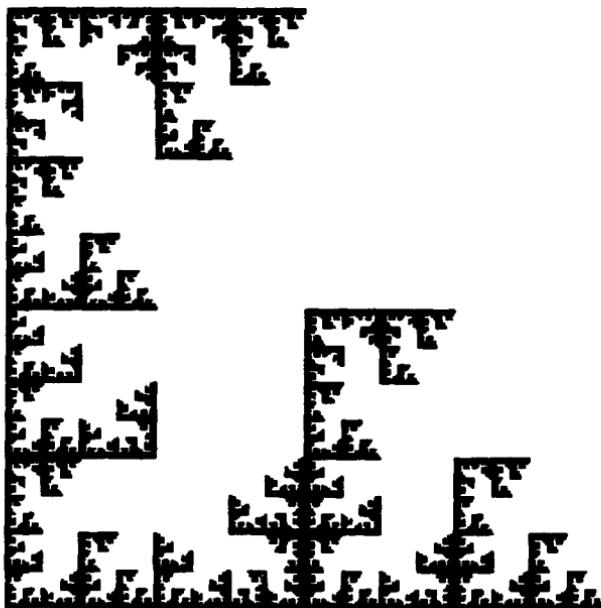


Рис. 4.8. Ковер В: программа ДСИФ

---



Рис. 4.9. Папоротник: программа ДСИФ

**Таблица 4.1.** Коэффициенты СИФ для окна  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Для перехода к экранным координатам используется алгоритм 3.4.2 (WOR2SCR).

**Кристалл (рис. 4.7; см. также [37])**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061

**Папоротник (рис. 4.9)**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070

**Ковер А (рис. 4.6)**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	0,5000
0,0000	-0,5000	-0,5000	0,0000	0,5000	0,5000
-0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	1,0000

**Ковер В (рис. 4.8)**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	1,0000
0,0000	0,5000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000

**Лист (рис. 4.4)**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000

**Ковер Серпинского (рис. 2.4)**

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,0000	0,0000
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,2500	0,4330

Дерево (рис. 4.5; см. также [37])

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

### 4.3. СИФ со сгущением

Будем по-прежнему понимать под  $\mathcal{K}$  пространство всех непустых компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ , оснащенное метрикой Хаусдорфа. *Сгущающим преобразованием*, или просто *сгущением*, называется отображение  $T_C : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ :

$$T_C(E) = C, \quad E \in \mathcal{K},$$

где  $C$  — произвольное подмножество  $\mathcal{K}$ , которое мы будем называть *множеством сгущения*. Другими словами,  $T_C$  задает тривиальное отображение на  $\mathcal{K}$ .

Сгущение  $T_C$  на  $\mathcal{K}$  есть не что иное, как сжатие с нулевым коэффициентом, так как для любых  $A, B \in \mathcal{K}$  имеет место:

$$H(T_C(A), T_C(B)) = H(C, C) = 0.$$

Пусть в нашем распоряжении имеется СИФ, заданная сжимающими отображениями  $T_i, i = 1, \dots, m$ . Добавим к ним сгущение  $T_C$ . Полученную систему итерированных функций будем называть *системой итерированных функций со сгущением* (ССИФ). Очевидно, основная теорема п. 4.1 остается в силе для ССИФ, то есть существует и притом единственное множество  $E \in \mathcal{K}$  такое, что вне зависимости от выбора начального множества  $E_0 \in \mathcal{K}$  выполняется:

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}^{(n)}(E_0),$$

где

$$\mathbf{T}_0(A) = T_C(A) \cup T_1(A) \cup \dots \cup T_m(A), \quad A \in \mathcal{K}.$$

Тем самым мы уже почти доказали основную теорему о ССИФ.

**Теорема 4.3.3.** Пусть ССИФ задана сжимающими отображениями  $T_C, T_1, T_2, \dots, T_m$ , где  $T_C$  — сгущение:

$$T_C(A) = C, \quad A \in \mathcal{K}.$$

Пусть

$$\mathbf{T}(A) = T_1(A) \cup \dots \cup T_m(A), \quad A \in \mathcal{K},$$

а также

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0(A) &= T_C(A) \cup T_1(A) \cup \dots \cup T_m(A), \\ &= T_C(A) + \mathbf{T}(A). \end{aligned}$$

Положим

$$C_n = \mathbf{T}_0^{(n)}(C), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$C_n = C \cup \mathbf{T}(C) \cup \dots \cup \mathbf{T}^{(n)}(C)$$

и

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$$

— аттрактор ССИФ.

**Доказательство.** Для доказательства первого утверждения мы воспользуемся следующим соотношением (см. упр. 5 в конце этого параграфа):

$$\mathbf{T}(A \cup B) = \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{T}(B). \quad (4.3)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbf{T}_0^{(0)}(C) = C \\ C_1 &= \mathbf{T}_0^{(1)}(C) = C \cup \mathbf{T}(C) \\ C_2 &= \mathbf{T}_0^{(2)}(C) = \mathbf{T}_0(C \cup \mathbf{T}(C)) \\ &= C \cup \mathbf{T}(C \cup \mathbf{T}(C)) \\ &= C \cup \mathbf{T}(C) \cup \mathbf{T}^{(2)}(C) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Второе утверждение,  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ , следует из теоремы 4.1.2, в которой надо положить  $E_0 = C$ . ■

Пример ССИФ представлен на рис. 4.10. Здесь множество сгущения  $C$  — фрактал, а именно фигура «сорняка», полученная с помощью L-системы. Данная ССИФ задается единственным сжимающим отображением, помимо тривиального:

$$T_1(z) = (0, 7960 + 0, 0799i)z + (-0, 2500 + 0, 7500i).$$

Для вывода на экран можно использовать программу ТЕРТЛ-ГРАФИКА, предусмотрев возможность изменения масштаба и положения изображения каждый раз, когда встречается кодовое слово для фигуры «сорняк». Само кодовое слово есть результат работы алгоритма 2.2.1 (L-СИСТЕМЫ) после двух итераций, инициализированного следующим образом:

```
axiom = F
newf = F[+F]F[-F]F
θ = π/7.
```

То есть кодовое слово задается выражением:

$F[+F]F[-F]F[+F[+F]F[-F]F]F[+F]F[-F]F[-F+F]F[-F]F[+F]F[-F]F.$

Продолжая в том же ключе, мы можем пойти дальше и использовать все множество ССИФ, показанное на рис. 4.10, в качестве множества сгущения для новой ССИФ. Добавим к тривиальному отображению сжимающее отображение, которое все уменьшает и сдвигает вправо и вверх, например такое:

$$T_2(z) = (0, 7960 - 0, 0799i)z + (-0, 2500 + 0, 7500i).$$

Результат показан на рис. 4.11. Полученное изображение можно рассматривать как дважды итерированную ССИФ, подобно двойному интегралу в математическом анализе.

Эта дважды итерированная ССИФ, очевидно, не эквивалентна ССИФ с тремя сжимающими отображениями  $T_C$ ,  $T_1$  и  $T_2$ . Результат одновременного применения всех трех отображений гораздо сложнее, как видно из рис. 4.12. Усложнение здесь происходит по той причине, что появляются всевозможные смешанные произведения  $T_1^j T_2^k$  и  $T_2^k T_1^j$ , а так как отображения  $T_1$  и  $T_2$  не коммутируют (то есть  $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$ ), то смешанные члены разного порядка дают разный результат.

С помощью алгоритма ССИФ можно строить огромное количество разнообразнейших фрактальных конфигураций. Фигура «дерево» представляет собой удачный с точки зрения эстетического восприятия пример такого построения. Здесь множество сгущения  $C$  (рис. 4.13) играет роль ствола дерева с двумя главными ветвями.

Мы выбрали аффинные преобразования  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$  таким образом, чтобы они уменьшали (и искажали) множество  $C$ , поворачивали его, а затем сдвигали получившийся элемент к концу одной из ветвей. На каждой итерации все ветви выпускают новые ветки, очень похожие на оригинал  $C$ , за исключением размера и ориентации (рис. 4.14).

Для компьютерной реализации описанного алгоритма применяется рекурсия. Главная программа ДЕРЕВО (которую мы не приводим) инициализирует графический режим, определяет и выводит на экран множество сгущения  $C$  и вызывает рекурсивную подпрограмму ВЕТВЬ (алгоритм 4.3.3). В этой подпрограмме на каждом уровне рекурсии вычисляются новые вершины, которые соединяются отрезками с вершинами предыдущего уровня.

Множество  $C$  хранится в виде массива вершин:

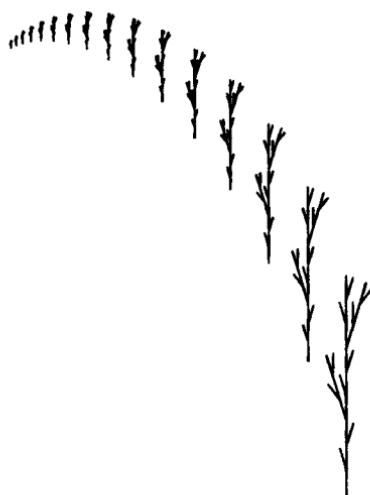
$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5i \\ 0,5i + 1,25e^{i\pi/4} \\ 0,6i + 1,50e^{i3\pi/4} \end{bmatrix}.$$

Добавление ветвей осуществляют следующие четыре аффинных преобразования (рис. 4.13):

$$\begin{aligned} T_1(V, z) &= (-0,1-i)s(z - V(1)) + V(3) && \text{ветвь вправо} \\ T_2(V, z) &= (1+0,1i)s(z - V(1)) + V(3) && \text{ветвь вверх} \\ T_3(V, z) &= (1-0,1i)s(z - V(1)) + V(4) && \text{ветвь вниз} \\ T_4(V, z) &= (-0,1+i)s(z - V(1)) + V(4) && \text{ветвь влево} \end{aligned}$$

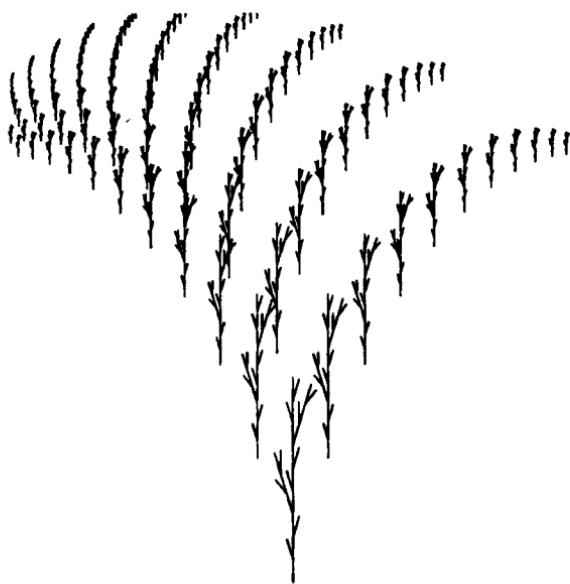
В следующем алгоритме команда «построить  $V$ » (или «построить  $V_1$ » и т. п.) означает такую последовательность действий:

- соединить отрезком  $V(1)$  и  $V(2)$ ;
- соединить отрезком  $V(2)$  и  $V(3)$ ;
- соединить отрезком  $V(2)$  и  $V(4)$ .



---

**Рис. 4.10.** ССИФ



---

**Рис. 4.11.** Итерирование предыдущей фигуры с помощью  $T_2$

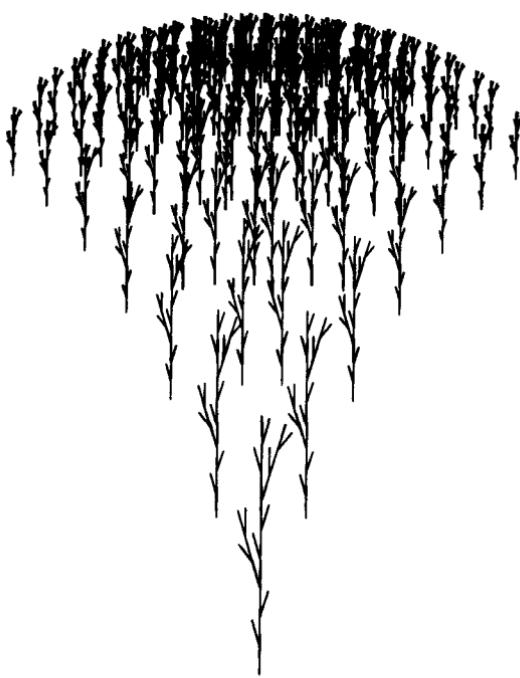
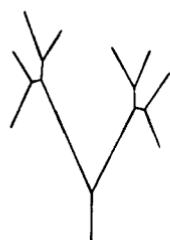


Рис. 4.12. Та же ССИФ, с использованием  $T_C$ ,  $T_1$ ,  $T_2$

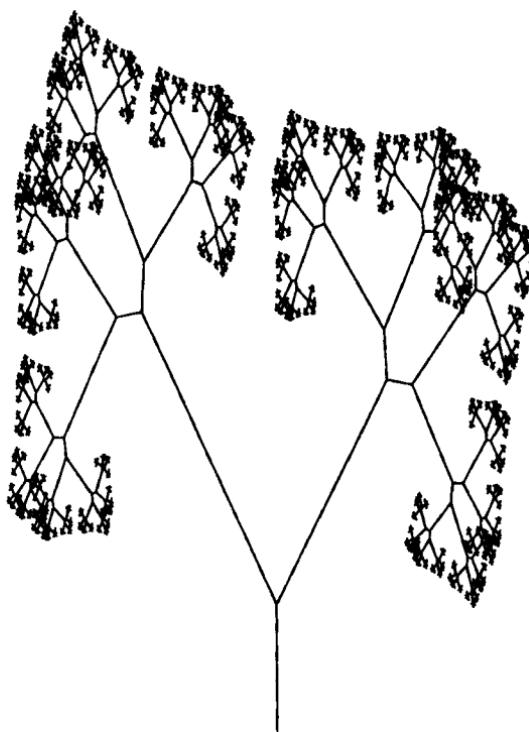


(а) множество сгущения  $C$



(б) первая итерация

Рис. 4.13. Множество сгущения  $C$  и первая итерация



**Рис. 4.14.** Дерево, построенное с помощью ССИФ

### Алгоритм 4.3.3. (ВЕТВЬ)

Назначение: рекурсивная часть кода ССИФ для фигуры «дерево»

Вход:

$V$  ( $4 \times 1$  множество вершин в комплексной форме)

$s$  (коэффициент сжатия)

$level$  (число итераций, порядка тысячи)

Выход:

изображение фигуры «дерево».

Шаги:

while  $level > 0$

$V_1 = T_1(V, s)$

    построить  $V_1$

$V_2 = T_2(V, s)$   
построить  $V_2$

$V_3 = T_3(V, s)$   
построить  $V_3$

$V_4 = T_4(V, s)$   
построить  $V_4$

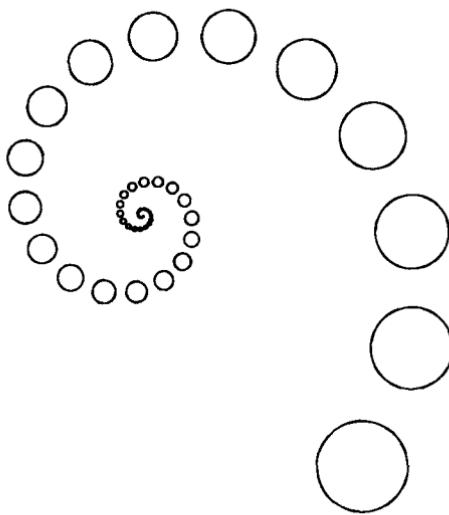
*level* = *level* - 1  
ветвь ( $V_1, s, level$ )  
ветвь ( $V_2, s, level$ )  
ветвь ( $V_3, s, level$ )  
ветвь ( $V_4, s, level$ )

end while

Использование рекурсии позволило записать алгоритм замечательно простым образом.

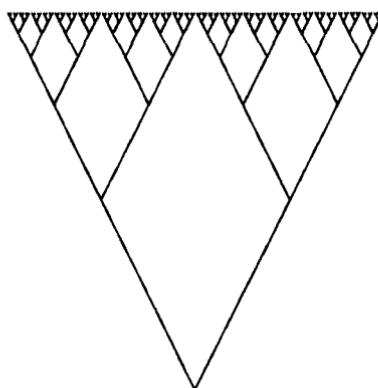
### Упражнения 4.3.

- Обозначим через  $C$  классическое множество Кантора, а через  $T_C$  — тривиальное отображение  $T_C(A) = C$ . Пусть  $T_1(x) = 1/2x + 1$ . Описать аттрактор ССИФ с отображениями  $T_C, T_1$ .
- Построить ССИФ, порождающую бесконечную спираль из окружностей (рис. 4.15).
- Построить такую ССИФ с множеством сгущения в виде буквы V (рис. 4.16), чтобы у нее кончик каждой ветви расщеплялся надвое.
- Описать аттрактор отображения  $\mathbf{T}$  следующих ССИФ:
  - $\mathbf{T}(A) = T_1(A)$ , рис. 4.10;
  - $\mathbf{T}(A) = T_2(A)$ , рис. 4.11;
  - $\mathbf{T}(A) = T_1(A) \cup T_2(A)$ , рис. 4.12;
  - $\mathbf{T}(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup T_3(A) \cup T_4(A)$ , рис. 4.12.
- Доказать, что  $\mathbf{T}(A \cup B) = \mathbf{T}(A) \cup \mathbf{T}(B)$ .



---

Рис. 4.15. Спираль для упр. 2



---

Рис. 4.16. V-множество для упр. 3

## 4.4. Коллажи

Рассмотрим задачу, обратную к нахождению аттрактора СИФ. Пусть в нашем распоряжении имеется некоторое изображение или его часть, например листка, дерева и т. п. Необходимо найти совокупность сжимающих аффинных отображений, для которых данное множество является аттрактором. Решение обратной задачи имеет большое значение для такой области прикладных исследований, как сжатие изображений, широко использующееся при передаче изображений в реальном времени. Проиллюстрируем сказанное на примере передачи телевизионного сигнала высокой четкости (HDTV<sup>2</sup>). Из-за того что стандартные кабели, подводящие сигнал к пользовательским телеприемникам, не могут передавать данные достаточно быстро, частота обновления экрана не удовлетворяет стандарту HDTV — она ниже требуемой. По некоторым оценкам, для достижения приемлемой частоты регенерации требуется сжатие данных порядка 1000:1. Было опробовано множество алгоритмов, некоторые из которых претендуют на успешное решение проблемы.

Один привлекательный способ сжатия изображения заключается в том, чтобы разбить исходное изображение на компоненты и считать их аттракторами некоторых СИФ. Так как каждое аффинное преобразование определяется всего лишь шестью коэффициентами, то полное изображение, в принципе, может быть закодировано достаточно малым числом аффинных коэффициентов. Тогда по кабелю можно передавать коэффициенты, а изображение (совокупность аттракторов) восстанавливать по ним, выполняя алгоритм СИФ.

Рассмотрим гипотетический пример. Пусть нам требуется передать изображение ковра Серпинского размером  $512 \times 512$ . Не применяя сжатия, придется послать 262144 бит информации, нуль или единицу для каждого пикселя. С другой стороны, если бы мы передали всего лишь 18 аффинных коэффициентов трех аффинных преобразований, связанных с ковром Серпинского, мы смогли бы полностью восстановить оригинал в приемной части. Можно сказать, что в этом случае мы достигли бы сжатия  $262144 : 18 = 14563 : 1$ .

Таким образом, вопрос заключается в том, как найти совокупность сжимающих аффинных отображений для данного аттрактора. Мы только коснемся этой новой темы научных исследований. Метод,

---

<sup>2</sup>High-Definition TeleVision

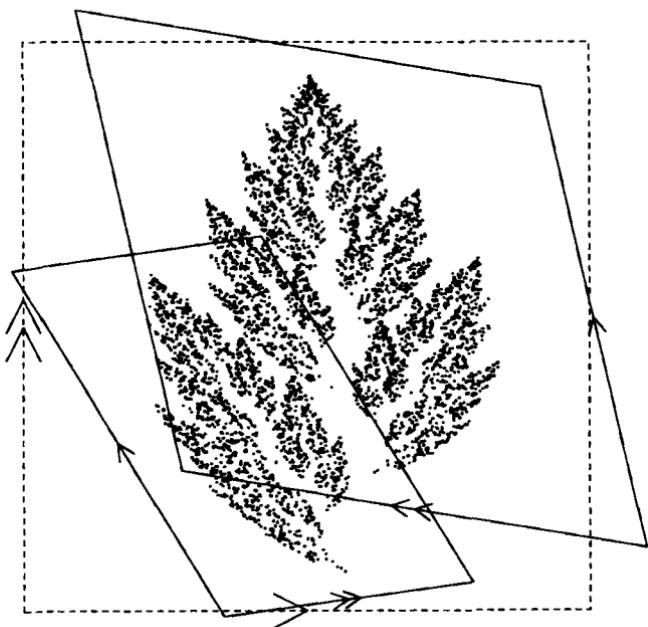


Рис. 4.17. Коллаж из фигуры «лист»

который мы рассмотрим ниже, метод **коллажа**, основан на элементарных свойствах фрактальных изображений.

Предположим, что некоторая конфигурация  $X$  представляет собой объединение (коллаж)  $N$  непересекающихся множеств, связанных с  $X$  преобразованиями подобия  $T_1, T_2, \dots, T_m$  с коэффициентами подобия  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , соответственно. В отличие от п. 2.1, коэффициенты подобия могут быть не равны друг другу. Единственное условие:  $s_i < 1, i = 1, 2, \dots, N$ . Тогда  $X$  — аттрактор СИФ, заданной преобразованиями  $T_1, T_2, \dots, T_m$ .

Например, ковер Серпинского (рис. 2.4) есть коллаж из трех копий самого себя, уменьшенных в два раза.

Вообще говоря, мы можем использовать не только преобразования подобия, но и другие. Это обстоятельство становится важным, если нам, к примеру, требуется эффект удлинения в некотором направлении, как на рис. 4.17. Безусловно, отыскание аффинных отображений для произвольного аттрактора может оказаться очень сложным делом.

Оставляя в стороне вопрос об отыскании аффинных отображений для аттрактора, соответствующего исходному изображению, обратимся к главному математическому аспекту проблемы. Оценим хаусдорфово расстояние между исходным изображением и построенным аттрактором. Следующая теорема дает необходимую оценку.

**Теорема 4.4.4.** Пусть  $I$  — непустое компактное множество (исходное изображение),  $T_1, T_2, \dots, T_m$  — сжимающие отображения с коэффициентами сжатия  $s_1, s_2, \dots, s_m$  соответственно,  $E$  — аттрактор СИФ или ССИФ, связанной с этими отображениями, и  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . Тогда, если для некоторого  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство:

$$H(I, \cup_{i=1}^m T_i(I)) < \varepsilon,$$

то

$$H(I, E) < \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

**Доказательство.** Сначала вспомним некоторые свойства сжимающего отображения  $\mathbf{T}$  с коэффициентом сжатия  $s$ , определенного на метрическом пространстве  $(X, d)$ . Выберем произвольный элемент  $x_0 \in X$ . Пусть  $x_n = \mathbf{T}(x_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , причем  $x_f = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  — неподвижная точка. Тогда

$$\begin{aligned} d(x_0, x_f) &= d(x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)] \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_1)[1 + s + \cdots + s^{n-1}] \\ &\leq \frac{1}{1-s} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Применим полученную оценку к пространству  $\mathcal{K}$  всех непустых компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ , оснащенному хаусдорфовой метрикой  $H$ . Теперь «точка»  $x_0$  — это изображение  $I$ , а «неподвижная точка»  $x_f$  — аттрактор  $E$ . Далее,  $d(x_0, x_1)$  есть не что иное, как

$$H(I, \cup_{i=1}^m T_i(I)),$$

то есть теорема доказана. ■

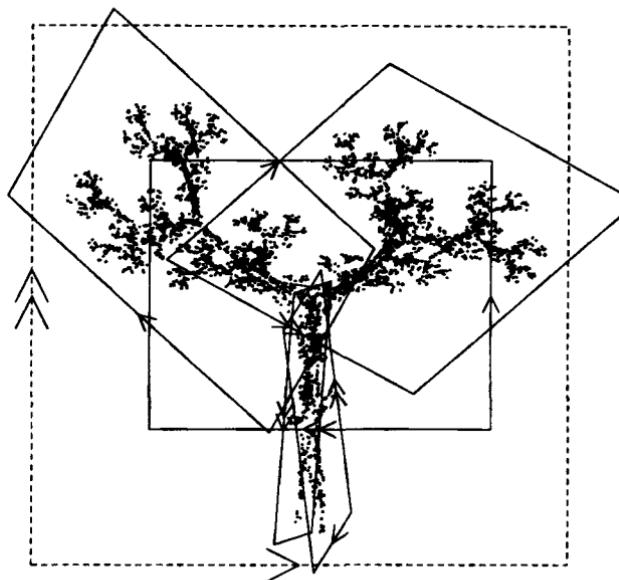


Рис. 4.18. Коллаж из фигуры «дерево»

Рис. 4.17, 4.18, 4.19 и 4.20 иллюстрируют, как используя метод коллажа можно получать некоторые из фракталов, с которыми мы уже знакомы. На этих рисунках конфигурации, обведенные штриховой линией, можно рассматривать в качестве приближения к аттрактору. Элементы коллажа обведены сплошной линией и представляют собой результат применения одного из аффинных преобразований к штрихованной фигуре. Таким образом, мы можем считать, что аттрактор составлен (приблизительно) из элементов коллажа. Очевидно, результат будет тем лучше, чем лучше мы выберем начальное приближение, как указывает теорема 4.4.4.

#### Упражнения 4.4.

- Используя метод коллажа построить СИФ, аттрактор которой есть в точности квадрат.
- Оценить расстояние Хаусдорфа между отрезком  $[0, 1]$  и аттрактором СИФ, заданной следующим образом:

$$T_1(x) = 0,51x - 0,01,$$

$$T_2(x) = 0,47x + 0,53.$$

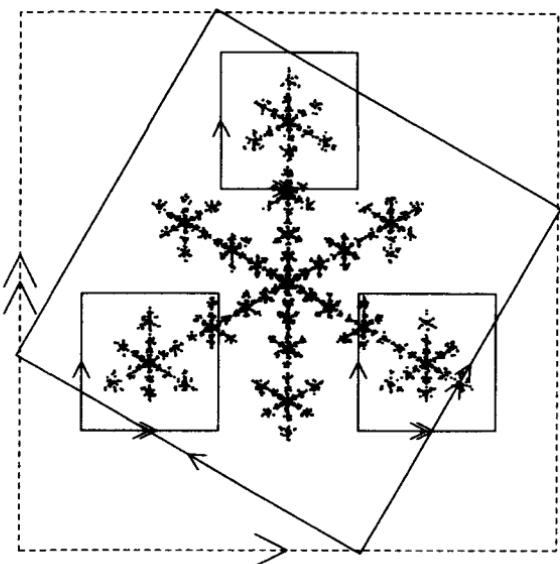


Рис. 4.19. Коллаж из фигуры «кристалл»

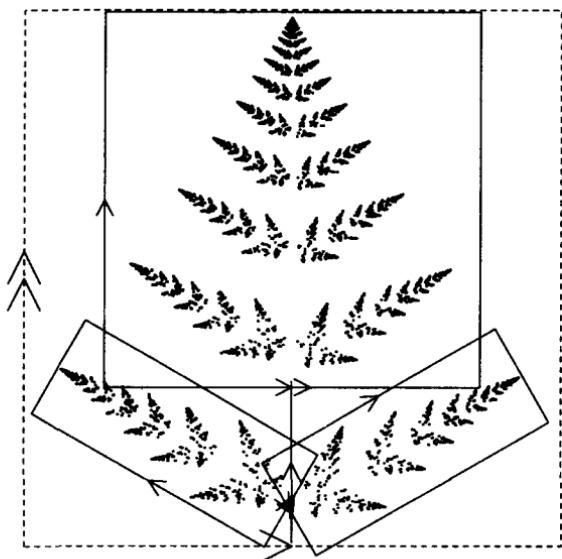


Рис. 4.20. Коллаж из фигуры «папоротник»

3. Используя метод коллажа построить СИФ, аттрактор которой внешним видом напоминает папоротник, но отличается от приведенного на рис. 4.9. Выписать преобразования полученной СИФ.
4. Используя метод коллажа построить СИФ, аттрактор которой изображен на рис. 4.8. Выписать преобразования полученной СИФ. *Указание:* достаточно трех преобразований общего вида, приведенного в упр. 8 п. 3.4.

# Глава 5.

## Размерность

Мы уже сталкивались с явлением дробной размерности в п. 2.1 при изучении размерности подобия. Например, размерность подобия границы снежинки Коха  $d \approx 1,2618$ . Размерность подобия, в том виде, как мы определили ее в п. 2.1, есть частный случай размерности Минковского<sup>1</sup> (ее также называют фрактальной размерностью), которой посвящена эта глава.

Существует несколько принципиально разных определений размерности геометрического объекта. Мы остановимся на трех: фрактальная размерность, или размерность Минковского (п. 5.1), топологическая размерность (прил. А.4) и размерность Хаусдорфа (прил. А.5). Топологическая размерность множества всегда выражается целым числом; это не противоречит интуитивному представлению о том, что кривые одномерны, а поверхности двумерны. Размерность Хаусдорфа лежит в основе фрактальной теории. В 1975 году Мандельброт определил *фрактал* как множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше топологической размерности<sup>2</sup>. Размерность Минковского может служить аналогом размерности Хаусдорфа, удобным для использования в прикладных задачах. Эти размерности, как правило, совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского намного эффективнее.

### 5.1. Размерность Минковского

Рассмотрим известные выражения для длины, площади и объема «шара» в евклидовом пространстве (рис. 3.1). Длина «шара» радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}$  составляет  $2r$ . Площадь «шара» радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^2$  равна  $\pi r^2$ . Наконец, объем шара радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^3$  равен  $4/3\pi r^3$ . Соответствующие формулы в евклидовом пространстве любого (целого) числа

<sup>1</sup> В англоязычной литературе также используется термин *box dimension*.

<sup>2</sup> См. сборник статей [56].

измерений хорошо известны:

$$V_d = \gamma(d)r^d, \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1)$$

где

$$\gamma(d) = \Gamma(1/2)^d / \Gamma(1 + d/2),$$

$\Gamma(x)$  — Гамма-функция:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Это непрерывная функция положительного аргумента, которая интерполирует факториал следующим образом:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Первый шаг в построении теории дробной размерности состоит в определении  $d$ -меры шара радиуса  $r$  в  $\mathbf{R}^n$ , где  $d$  — любое неотрицательное вещественное число. Это достигается распространением формулы (5.1) на все вещественные  $d > 0$ . Например, объем (мера) шара в  $3/2$ -мерном пространстве определяется как  $V_{3/2} = \gamma(3/2)r^{3/2}$ . Заметим, что конкретное значение коэффициента  $\gamma(d)$  в (5.1) не играет никакой роли в наших дальнейших рассуждениях и его можно считать константой.

Следующий шаг заключается в переносе понятия  $d$ -меры с шара на произвольное множество  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Для этого аппроксимируем  $A$  объединением шаров и просуммируем их объемы (рис. 5.1).

Пусть  $N(\varepsilon)$  — минимальное число шаров радиуса  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия компактного множества  $A$ . Тогда  $d$ -мера  $A$ , обозначаемая  $B_d(A)$ , удовлетворяет (приближенно):

$$B_d(A) \propto N(\varepsilon)\varepsilon^d.$$

Полагая, что  $B_d(A) > 0$ , для некоторого  $c > 0$  имеем:

$$N(\varepsilon) \approx \frac{c}{\varepsilon^d}. \quad (5.2)$$

Логарифмируя левую и правую части, получим (приближенно):

$$\log N(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon, \quad (5.3)$$



**Рис. 5.1.** Аппроксимация  $A$  объединением шаров

то есть

$$d = -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} + \frac{\log c}{\log \varepsilon}.$$

Так как  $\log \varepsilon \rightarrow -\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , то размерность Минковского  $\dim_M(A)$  множества  $A$  должна удовлетворять:

$$\dim_M(A) = d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (5.4)$$

Если предел существует, то выражение (5.4) определяет *размерность Минковского* множества  $A$ . Иногда также используют термин *дробная размерность*.

В нашем изложении опущены некоторые технические детали. Вообще говоря, можно определить две величины — верхнюю и нижнюю размерности, для которых знак  $\lim$  в (5.4) заменяется на  $\limsup$  и  $\liminf$ , соответственно. Если значения верхней и нижней размерностей совпадают, то есть предел в (5.4) существует, то размерность Минковского равна этому значению. Размерность Минковского можно определить несколькими различными способами, пять из которых приведены в книге Фалконе [14].

Наши надежды построить непротиворечивую теорию дробной размерности не оправдаются, если окажется, что такие заурядные

объекты математического анализа, как гладкие кривые и поверхности, обладают дробной размерностью. Но беспокоиться, как показывает следующая теорема, не о чём.

Напомним, что функция  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , называется *гладкой*, если ее производная  $y' = f'(x)$  непрерывна. Аналогично, функция  $z = f(x, y)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , называется *гладкой*, если ее частные производные  $\partial f / \partial x$  и  $\partial f / \partial y$  непрерывны. Кривая или поверхность называется *гладкой*, если она является графиком гладкой функции одной или двух переменных, соответственно. Докажем теперь, что размерность Минковского гладкой кривой  $d = 1$ . Заметим сразу, что размерность Минковского гладкой поверхности  $d = 2$  (упр. 2 в конце этого параграфа).

---

**Теорема 5.1.1.** Пусть функция  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , задает гладкую кривую  $\Gamma$ . Тогда

$$\dim_M(\Gamma) = 1.$$

**Доказательство.** Не теряя общности, будем считать область определения единичным отрезком  $0 \leq x \leq 1$ . Разделим этот отрезок на  $n$  интервалов равной длины  $\Delta x = 1/n$ . На вертикальной оси отложим интервалы той же длины. Тогда величина  $|\Delta f|/|\Delta x|$  может служить оценкой числа квадратных клеток размера  $\Delta x$ , необходимых для того, чтобы покрыть часть графика  $y = f(x)$  на одном интервале. По теореме о среднем значении непрерывной функции,  $\Delta f/\Delta x$  совпадает с  $f'(\xi)$  для некоторого  $\xi$  на рассматриваемом интервале. Так как  $f'(x)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , то существует такая постоянная  $M$ , что  $f'(x) \leq M$ . Учитывая, что всего имеется  $n = 1/\Delta x$  интервалов, получаем оценку числа клеток, покрывающих всю кривую:

$$N(\Delta x) \leq Mn = \frac{M}{\Delta x}.$$

Из того, что

$$-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log M/\Delta x}{\log \Delta x} = 1,$$

следует:

$$d = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta x)}{\log \Delta x} \leq 1.$$

С другой стороны, необходимо по крайней мере  $n = 1/\Delta x$  клеток размера  $\Delta x$ , чтобы покрыть  $\Gamma$ , а значит:

$$d \geq -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log 1/\Delta x}{\log \Delta x} = 1. \quad \blacksquare$$

**Пример.** Этот пример замечателен тем, что размерность Хаусдорфа и размерность Минковского компактного множества, которое мы сейчас рассмотрим, не совпадают. Подробные сведения о размерности Хаусдорфа изложены в прил. А.5. Пока же нам будет достаточно следующего результата. Для того чтобы  $d$ -мера Хаусдорфа некоторого множества  $A$  равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  множество  $A$  допускало покрытие совокупностью шаров (зависящей от  $\varepsilon$ ), сумма  $d$ -мер которых меньше  $\varepsilon$ . Такую совокупность шаров называют  $\varepsilon$ -сетью, или  $\varepsilon$ -покрытием. В примере мы рассматриваем счетное множество, поэтому его размерность Хаусдорфа равна нулю (упр. 3 в конце этого параграфа). В то же время размерность Минковского этого множества равна  $1/2$ .

---

**Теорема 5.1.2.** Пусть  $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Тогда

$$\dim_M(A) = \frac{1}{2}.$$

**Доказательство.** Положим  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $k$  — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} < \varepsilon,$$

В первом приближении,  $\varepsilon \approx 1/k^2$ . Для того чтобы покрыть точки  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{k-1}$ , требуется  $k-1 \approx 1/\sqrt{\varepsilon}$  шаров радиуса  $\varepsilon$ . Точки  $A$ , которые лежат на отрезке  $[0, \frac{1}{k}]$ , можно покрыть приблизительно  $1/(2k\varepsilon) = 1/(2\sqrt{\varepsilon})$  шарами того же радиуса. Таким образом, число шаров, необходимое для покрытия множества  $A$ :

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

По определению (5.4):

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})}{\log \varepsilon} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

**Самоподобные множества.** Будем называть компактное множество  $A$  самоподобным, если существуют такие преобразования подобия  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , что имеет место представление:

$$A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \dots \cup S_N(A) \quad (5.5)$$

причем множества  $S_i(A)$  имеют не очень много общих точек (см. точную формулировку ниже).

---

**Теорема 5.1.3.** *Пусть  $A$  — самоподобное множество, то есть выполняется (5.5), причем  $S_i(A)$  попарно не пересекаются. Обозначим через  $d$  единственное решение уравнения*

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_N^d = 1, \quad (5.6)$$

где  $r_i$  — коэффициенты подобия. Тогда, если  $B_d(A) > 0$ , то размерность Минковского множества  $A$  равна:

$$\dim_M(A) = d.$$

**Доказательство.** Выберем такое малое положительное число  $\varepsilon_0$ , чтобы дилатации  $S_1(A) + \varepsilon_0, S_2(A) + \varepsilon_0, \dots, S_N(A) + \varepsilon_0$  попарно не пересекались. Обозначим через  $N(A, \varepsilon)$  число шаров радиуса  $\varepsilon$ , необходимых для того, чтобы покрыть множество  $A$ . Для  $\varepsilon < \varepsilon_0$  имеем:

$$N(A, \varepsilon) = N(S_1(A), \varepsilon) + N(S_2(A), \varepsilon) + \dots + N(S_N(A), \varepsilon). \quad (5.7)$$

Так как  $S_i$  есть преобразование подобия с коэффициентом  $r_i$ , то  $S_i^{-1}$  преобразует  $\varepsilon$ -покрытие множества  $S_i(A)$  в  $(1/r_i)\varepsilon$ -покрытие множества  $A$ . Следовательно,

$$N(S_i(A), \varepsilon) = N(A, \frac{1}{r_i}\varepsilon).$$

Перепишем (5.7) в виде:

$$N(A, \varepsilon) = N(A, \frac{1}{r_1}\varepsilon) + N(A, \frac{1}{r_2}\varepsilon) + \dots + N(A, \frac{1}{r_N}\varepsilon).$$

С использованием (5.2):

$$c\varepsilon^{-d} = cr_1^d\varepsilon^{-d} + cr_2^d\varepsilon^{-d} + \dots + cr_N^d\varepsilon^{-d},$$

где  $d = \dim_M(A)$ . Разделив последнее равенство на  $c\varepsilon^{-d}$ , получим уравнение (5.6). ■

**Следствие 5.1.1.** Если все коэффициенты подобия в теореме 5.1.3 равны между собой, то есть  $r_i = r$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , то размерность Минковского  $d$  множества  $A$  определяется из уравнения:

$$Nr^d = 1.$$

Если все коэффициенты подобия  $r_1, r_2, \dots, r_N$  преобразований  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , соответственно, лежат в интервале  $(0, 1)$  и

$$A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \dots \cup S_N(A),$$

то решение уравнения (5.6) называется *размерностью подобия* множества  $A$ . При этом не требуется, чтобы множества  $S_i(A)$  не пересекались.

Конечно, хотелось бы распространить теорему 5.1.3 и на такие множества, в представлении (5.5) которых множества  $S_i(A)$  могли бы иметь общие точки, правда не очень много. Например, в случае ковра Серпинского (п. 4.1) вершины центральных треугольников принадлежат сразу двум смежным треугольникам. Эти пересечения, очевидно, незначительны и не должны влиять на размерность всей фигуры. Можно доказать, что достаточным условием применимости теоремы 5.1.3 является равенство нулю  $d$ -меры Хаусдорфа пересечений, где  $d$  — размерность подобия  $A$ . Это условие выполняется всегда, когда множества  $S_i(A)$  имеют лишь конечное или счетное число общих точек (упр. 3 в конце этого параграфа).

Таким образом, мы называем компактное множество  $A$  само-подобным, если оно представимо в виде (5.5) и  $d$ -мера Хаусдорфа всех попарных пересечений множеств  $S_i(A)$  равна нулю, где  $d$  — размерность подобия  $A$ .

### Эквивалентные метрики.

**Теорема 5.1.4.** Пусть  $\rho_1(x, y)$  и  $\rho_2(x, y)$  — эквивалентные метрики,  $A$  — компакт с размерностью Минковского  $\dim_M(A) = d$  в  $\rho_2$ -метрике (см. (5.4)). Тогда  $\dim_M(A) = d$  в  $\rho_1$ -метрике.

**Доказательство.** Из эквивалентности метрик  $\rho_1$  и  $\rho_2$  следует, что можно указать такие постоянные  $\lambda > 0$  и  $\mu > 0$ , для которых выполняется неравенство:

$$\lambda\rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq \mu\rho_2(x, y). \quad (5.8)$$

Обозначим через  $B_1(\mathbf{x}, r)$  и  $B_2(\mathbf{x}, r)$  шары радиуса  $r$  с центром в  $\mathbf{x}$ , а через  $N_1(\varepsilon)$  и  $N_2(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , — число шаров, необходимых для покрытия  $A$ , в  $\rho_1$ - и  $\rho_2$ -метрике, соответственно.

Несложно показать (упр. 6 в конце этого параграфа), что из (5.8) следует:

$$B_2(\mathbf{x}, \varepsilon/\mu) \subset B_1(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B_2(\mathbf{x}, \varepsilon/\lambda), \quad (5.9)$$

Тогда

$$N_2(\varepsilon/\lambda) \leq N_1(\varepsilon) \leq N_2(\varepsilon/\mu),$$

а значит, если  $0 < \varepsilon < 1$ :

$$\frac{\log N_2(\varepsilon/\lambda)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{\log N_1(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{\log N_2(\varepsilon/\mu)}{\log 1/\varepsilon}.$$

По условию,

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_2(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Учитывая, что (упр. 7 в конце этого параграфа):

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_2(\varepsilon/\lambda)}{\log 1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_2(\varepsilon/\mu)}{\log 1/\varepsilon}, \quad (5.10)$$

получаем:

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_1(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \blacksquare$$

Для численного определения размерности Минковского некоторого множества  $A$  его надо аппроксимировать конечным объединением шаров. Из последней теоремы немедленно следует, что вместо шаров в евклидовой метрике (кругов на плоскости) можно использовать кубы (квадраты на плоскости). Вопросу численного определения размерности Минковского посвящен п. 5.2.

**Следствие 5.1.2.** Пусть  $A$  — компактное подмножество  $\mathbf{R}^n$ ,  $\dim_M(A) = d$  — размерность Минковского множества  $A$ , подсчитанная с помощью покрытия  $A$  шарами в евклидовой метрике. Если

... (то есть кубы):

вместо последних использовать шары в  $\infty$ -метрике (то есть

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon\},$$

**Доказательство.** Из упр. 3(в) п. 3.2 следует, что метрики  $\|x - y\|_2$  и  $\|x - y\|_\infty$  эквивалентны, так как

$$\|x - y\|_\infty \leq \|x - y\|_2 \leq \sqrt{n}\|x - y\|_\infty. \blacksquare$$

Второе важное следствие касается размерности фракталов, подвергнутых преобразованию. Представим себе фрактал, нарисованный на резиновой пленке. Будем растягивать ее произвольным образом в разные стороны. Изменится ли размерность фрактала? При некоторых ограничениях — нет. Во-первых, будем рассматривать только взаимно однозначные преобразования, когда каждой точке исходного фрактала соответствует одна и только одна точка нового фрактала. Также потребуем, чтобы преобразование было непрерывным, что исключает возможность «нашинковать» оригинал, а затем склеить кусочки произвольным образом. Но и этого еще недостаточно для того, чтобы размерность не изменилась. За примером обратимся к теореме 5.1.2, в которой рассматривается множество  $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Если применить к  $A$  преобразование  $f(x) = x^2$ , то размерность Минковского множества  $f(A)$  будет отличаться от размерности исходного множества (см. упр. 1 в конце параграфа).

Следующий простой критерий сохранения размерности сформулирован в терминах евклидовой метрики на  $\mathbf{R}^n$ , но применим также и в случае произвольной эквивалентной метрики.

**Следствие 5.1.3.** Пусть  $A'$  — компакт в  $\mathbf{R}^n$ . Рассмотрим взаимно однозначное преобразование  $A$  в  $A'$ :

$$y = f(x),$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

и

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_{n'}(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть все частные производные  $\partial f_j / \partial x_k$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ , непрерывны на  $A$ , а все частные производные компонент обратного преобразования  $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$  непрерывны на  $\tilde{A}$ . Тогда

$$\dim_M(A) = \dim_M(\tilde{A}).$$

**Доказательство.** Ограничимся случаем  $n = 2$ . Определим новую метрику на  $A$ :

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})\|_2.$$

Так как преобразование  $\mathbf{f}$  — взаимно однозначное, то  $\rho$  действительно является метрикой. Докажем эквивалентность  $\rho$ -метрики и евклидовой метрики на  $A$ . Сначала покажем, что

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \leq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|_2$$

для некоторого  $\mu > 0$ . По условию, частные производные непрерывны, а значит существует такое число  $M > 0$ , что

$$|\partial f_j / \partial x_k| \leq M, \quad j, k = 1, 2.$$

Положим

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |f_1(x_1, x_2) - f_1(t_1, t_2)| = \\ &= |(f_1(x_1, x_2) - f_1(t_1, x_2)) + (f_1(t_1, x_2) - f_1(t_1, t_2))| \\ &\leq |f_1(x_1, x_2) - f_1(t_1, x_2)| + |f_1(t_1, x_2) - f_1(t_1, t_2)| \\ &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\xi, x_2)(t_1 - x_1) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(t_1, \eta)(t_2 - x_2) \right| \\ &\leq M|t_1 - x_1| + M|t_2 - x_2| \\ &\leq \sqrt{2M} \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|_2. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство выполняется и для  $|f_2(x_1, x_2) - f_2(t_1, t_2)|$ . Объединяя оба неравенства, получим:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})\|_2 \leq 2M \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\|_2.$$

Обратное преобразование  $\mathbf{f}^{-1}$  удовлетворяет аналогичному неравенству. Таким образом,  $\rho$ -метрика эквивалентна евклидовой.

По теореме 5.1.4 размерность  $A$  (или  $\tilde{A}$ ) в евклидовой метрике и в  $\rho$ -метрике одна и та же. Следовательно, размерность  $\tilde{A}$  в евклидовой метрике в точности равна размерности  $A$  в  $\rho$ -метрике. ■

### Упражнения 5.1.

1. Пусть  $A = \{0, 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots\}$ . Найти  $\dim_M(A)$ .
2. Доказать, что размерность Минковского гладкой поверхности, заданной на прямоугольнике, равна  $d = 2$  (см. теорему 5.1.1).
3. Показать, что если  $A$  — конечное или счетное множество в  $\mathbf{R}^n$ , то  $d$ -мера Хаусдорфа  $A$  равна нулю. (Для того чтобы  $d$ -мера Хаусдорфа некоторого множества  $A$  равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  множество  $A$  допускало покрытие совокупностью шаров (зависящей от  $\varepsilon$ ), сумма  $d$ -мер которых меньше  $\varepsilon$ .)
4. Доказать, что  $d$ -мера Хаусдорфа отрезка  $[0, 1]$  равна нулю при любом  $d > 1$ .
5. Доказать, что  $d$ -мера Хаусдорфа квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$  равна нулю при любом  $d > 2$ .
6. Проверить соотношение (5.9) из доказательства теоремы 5.1.4.
7. Проверить соотношение (5.10) из доказательства теоремы 5.1.4.
8. Пусть  $E$  — компактное подмножество плоскости с размерностью Минковского  $d$ ,  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$  — взаимно однозначное аффинное преобразование, причем  $\tilde{E} = T(E)$ . Доказать, что размерность Минковского множества  $E$  также равняется  $d$ .
9. Пусть  $F$  — фрактал в  $\mathbf{R}^+$ ,  $f(x) = x^2$  и  $G = \{f(x) : x \in F\}$ . Доказать, что  $\dim_M(G) = \dim_M(F)$ .
10. Пусть  $f$  — непрерывное взаимно однозначное отображение компакта  $K_1$  в компакт  $K_2$ , причем  $f$  и  $f^{-1}$  удовлетворяют условию Липшица. Доказать, что размерности Минковского множеств  $K_1$  и  $K_2$  равны.

## 5.2. Вычисление размерности

Компьютерные алгоритмы<sup>3</sup> вычисления размерности Минковского  $d$  обычно опираются на соотношение (5.3). Для удобства приведем его еще раз:

$$\log N(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon,$$

---

<sup>3</sup>О физическом подходе к вычислению размерности см. [68].

где  $c$  — константа. Как видно, график зависимости  $\log N(\varepsilon)$  от  $\log \varepsilon$  — прямая с угловым коэффициентом  $-d$ . Напомним, что через  $N(\varepsilon)$  обозначено минимальное число клеток со стороной  $\varepsilon$ , необходимых для покрытия фрактала. Для определения неизвестных параметров  $c$  и  $d$  (хотя значение  $c$  обычно не представляет интереса) необходимо оценить  $N(\varepsilon)$  для нескольких значений  $\varepsilon$ . Следствие 5.1.2 облегчает нашу задачу, позволяя использовать квадратные клетки вместо кругов при оценке  $N(\varepsilon)$ .

Если использовать клетки только двух размеров,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , то неизвестные  $c$  и  $d$  можно определить из системы уравнений:

$$\log N(\varepsilon_1) = \log c - d \log \varepsilon_1,$$

$$\log N(\varepsilon_2) = \log c - d \log \varepsilon_2.$$

Тем не менее, учитывая, что величины  $N(\varepsilon)$  могут быть найдены лишь приближенно, имеет смысл оценить  $N(\varepsilon)$  для большего числа различных значений  $\varepsilon$ . В этом случае мы получим переопределенную систему (число уравнений больше числа неизвестных), которая, скорее всего, не будет иметь точного решения. Стандартный прием в подобной ситуации заключается в том, чтобы найти значения  $\log c$  и  $d$ , минимизирующие сумму квадратов отклонений.

**Приближение по методу наименьших квадратов.** Рассмотрим задачу об интерполяции точек

$$(\xi_i, \eta_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

прямой линией. Полученный результат понадобится нам при вычислении размерности, а также в главе 9.

Положим  $y_i = b + m\xi_i$ . Прямая

$$y = b + mx$$

называется наилучшим приближением к  $\eta(\xi)$  по методу наименьших квадратов (МНК-прямой), если сумма квадратов отклонений  $y_i - \eta_i$  минимальна. Иначе говоря, мы ищем значения  $b$  и  $m$ , при которых функция

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b + m\xi_i - \eta_i)^2$$

достигает минимума. Значения этих параметров найдутся решением системы уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial m} = 0.$$

В матричной записи (см. упр. 3 в конце этого параграфа):

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \sum_{i=1}^n \xi_i & \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \eta_i \\ \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

### Алгоритм 5.2.1. (МНК-ПРЯМАЯ)

Назначение: вычисляет МНК-прямую  $y = b + mx$ .

Вход:

$n$  (число точек)

$(\xi_i, \eta_i), i = 1, \dots, n$  (точки)

Выход:

$b$  (сдвиг)

$m$  (наклон)

Шаги:

$$A_{11} = n$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$A_{21} = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

$$d_1 = \sum_{i=1}^n \eta_i$$

$$d_2 = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$$

$$D = A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}$$

$$D_1 = d_1 A_{22} - d_2 A_{12}$$

$$D_2 = A_{11} d_2 - A_{21} d_1$$

$$b = D_1 / D$$

$$m = D_2 / D$$

**Клеточный метод.** Простейший способ определения размерности Минковского фрактала  $A$  состоит в следующем. Разобьем область, содержащую  $A$ , на квадратные клетки (двумерный случай) нескольких размеров. Затем подсчитаем число клеток, необходимых для покрытия  $A$  в каждом случае, и подставим полученные значения в соотношение (5.3). Очевидно, если фрактал  $A$  является подмножеством прямой, то вместо квадратов надо использовать отрезки.

Если же  $A$  — подмножество трехмерного пространства, то квадраты заменяются кубами.

Следующий простой алгоритм вычисления размерности на плоскости лучше всего работает при сравнительно больших размерах окна,  $200 \times 200$  и более. Его главный недостаток заключается в том, что подсчитанное значение  $N(L)$  не является *наименьшим* числом клеток со стороной  $L$ , покрывающих фрактал. Для достижения лучших результатов алгоритм может быть усовершенствован.

### **Алгоритм 5.2.2. (РАЗМЕРНОСТЬ МИНКОВСКОГО)**

Назначение: вычисляет размерность плоского фрактала.

Вход:

$S$  (бинарная квадратная матрица фрактала)  
 $p$  (размер  $S$ )

Выход:

$d$  (оценка размерности Минковского)

Инициализация:

$L_{max}$  = наибольшее целое  $\leq p/10$   
(максимальный размер клетки)

Шаги:

for  $L = 1$  to  $L_{max}$

$N(L) = 0$

$B$  = наибольшее целое  $\leq p/L$

    for  $i = 1$  to  $B$

        for  $j = 1$  to  $B$

$cnt = \sum_{k=(i-1)L+1}^{iL} \left( \sum_{l=(j-1)L+1}^{jL} S(k, l) \right)$   
(число точек в клетке)

            if  $cnt > 0$ ,  $N(L) = N(L) + 1$ , end if

        end for

    end for

end for

for  $L = 1$  to  $L_{max}$

$\xi_L = \log(L)$

$\eta_L = \log(N(L))$

end for

найти МНК-прямую по точкам  $(\xi_L, \eta_L), L = 1, \dots, L_{max}$

$d$  = модуль углового коэффициента МНК-прямой

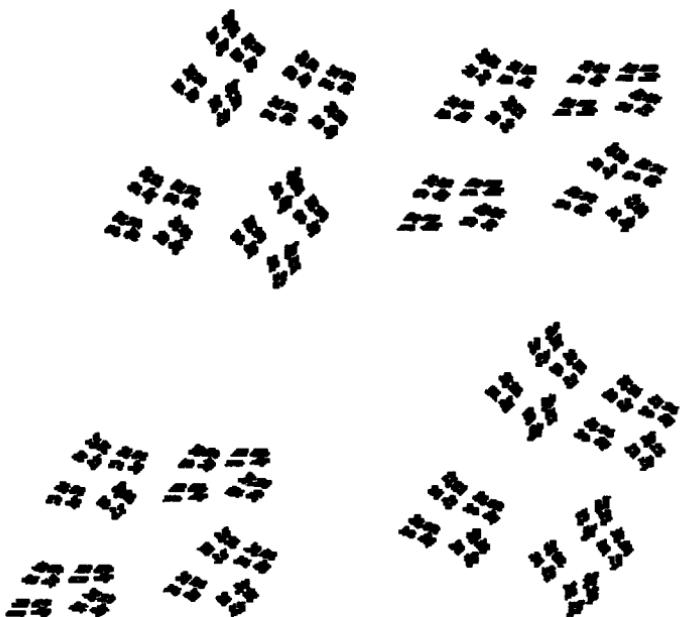
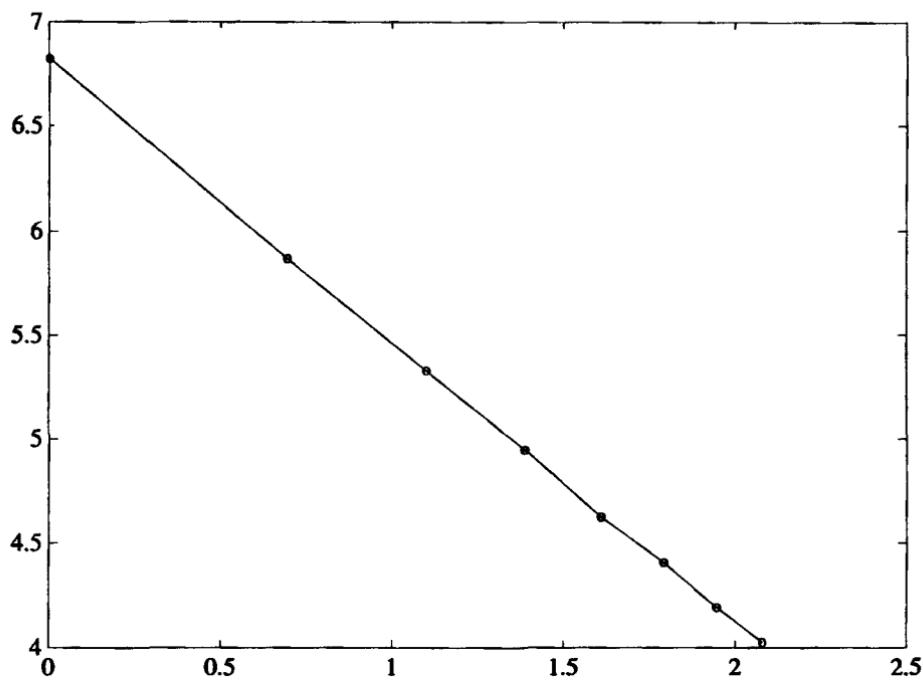


Рис. 5.2. Фрактал, размерность которого находится численно

**Пример.** Обозначим через  $S$  фрактал, изображенный на рис. 5.2. Это самоподобный фрактал ( $N = 4$ ,  $r = 0,37$ ), теоретическая размерность которого составляет  $d = \log(4) / \log(1/0,37) = 1,3943$ . Как рисунок, так и данные для моделирования были получены с помощью алгоритма детерминированной СИФ (глава 4).

В результат работы алгоритма 5.2.2 были получены следующие результаты:

$L$	$N(L)$
1	917
2	354
3	206
4	141
5	102
6	82
7	66
8	56

Рис. 5.3. Зависимость  $\log N(L)$  от  $\log L$ 

Зависимость  $\log N(L)$  от  $\log L$  приведена на рис. 5.3. Угловой коэффициент МНК-прямой в этом случае равен  $-1,3460$ , а значит численное значение размерности Минковского  $d = 1,3460$ .

**Точечный метод.** Точечный метод представляет собой альтернативный подход к вычислению размерности фрактала [45]. Рассмотрим сетку, покрывающую весь фрактал. Ее узлы будем называть ячейками. Каждую ячейку, имеющую с фракталом непустое пересечение, будем считать за одну точку. Ясно, что именно эта схема реализуется при графическом выводе фрактала на экран как массива пикселов. В этом параграфе «подсчет числа точек в клетке» означает подсчет числа ячеек (или пикселов) в клетке. Это не то же самое, что считать действительное число геометрических точек в клетке — ведь их бесконечно много. Точечный метод принципиально отличается от клеточного; в первом подсчитывается число точек в клетке, а во втором — число клеток, необходимых для покрытия фрактала.

Для упрощения вычислений будем считать клетки квадратными. Размер  $L$  клетки означает число ячеек по каждой стороне. Ограничимся нечетными значениями  $L$ ; в этом случае центральная ячейка клетки будет равноудалена от всех сторон. Сначала вычислим вероятности  $P(m, L)$  того, что клетка размера  $L$  содержит  $m$  точек (ячеек) фрактала. Для этого вокруг каждой точки фрактала, считая ее центральной, построим клетку размера  $L$  и подсчитаем число точек, попавших в нее. Предположим, что фрактал содержит  $M$  точек. Тогда  $P(m, L)$  равно числу клеток, содержащих  $m$  точек,  $m = 1, \dots, M$ , деленному на  $M$ . Заметим, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{m=1}^M P(m, L) = 1.$$

Как и в предыдущем алгоритме,  $N(L)$  есть число клеток размера  $L$ , необходимых для покрытия фрактала. Как подсказывает интуиция, число клеток размера  $L$ , содержащих  $m$  точек, равно  $(M/m)P(m, L)$ . Поэтому оценка числа клеток, покрывающих все изображение, равна

$$\langle N(L) \rangle = \sum_{m=1}^K (M/m)P(m, L) = M \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L),$$

где  $K$  — возможное число точек в клетке. Следовательно,

$$\tilde{N}(L) = \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L)$$

также пропорционально  $L^{-d}$  и может быть использовано для оценки фрактальной размерности  $d$ .

### **Алгоритм 5.2.3. (РАЗМЕРНОСТЬ МИНКОВСКОГО II)**

Назначение: вычисляет  $d$  через  $P(m, L)$ .

Вход:

$S$  (бинарная матрица  $J \times K$  фрактала)

$J, K$  (размеры  $S$ )

$L_{max}$  (максимальный размер клетки, нечетное целое)

Выход:

$d$  (оценка размерности Минковского)

**Инициализация:**

$LM2 = \text{наибольшее целое} \leq L_{max}/2$   
 нулевая матрица размера  $(L_{max})^2 \times LM2$

**Шаги:**

```
for i = LM2 + 1 to J - LM2
    for j = LM2 + 1 to K - LM2
        if S(i, j) = 1
            for L = 1 to LM2
                m =  $\sum_{r=i-L}^{i+L} \sum_{s=j-L}^{j+L} S(r, s)$ 
                if m > 0, P(m, L) = P(m, L) + 1, end if
            end for
        end if
    end for
end for
```

**Замечание:** для удобства вместо  $P(m, L)$  вычисляется  $\alpha P(m, 2L+1)$ ,  
 где  $\alpha$  — несущественная константа.

```
for j = 1 to LM2
    s = 0
    for i = 1 to  $L_{max}^2$ 
        s = s + P(m, L)/i
    end for
    N(j) = s
end for
```

```
for L = 1 to LM2
     $\xi_L = \log(2L + 1)$ 
     $\eta_L = \log(N(L))$ 
end for
```

найти МНК-прямую по точкам  $(\xi_L, \eta_L), L = 1, \dots, L_{max}$   
 $d$  = модуль углового коэффициента МНК-прямой

Практически, как в клеточном, так и в точечном методе не удается определить размерность Минковского с точностью более одного или двух десятичных разрядов, что, конечно, не всегда приемлемо. Тем не менее, численная оценка размерности Минковского может применяться для распознавания образов. Например, с помощью

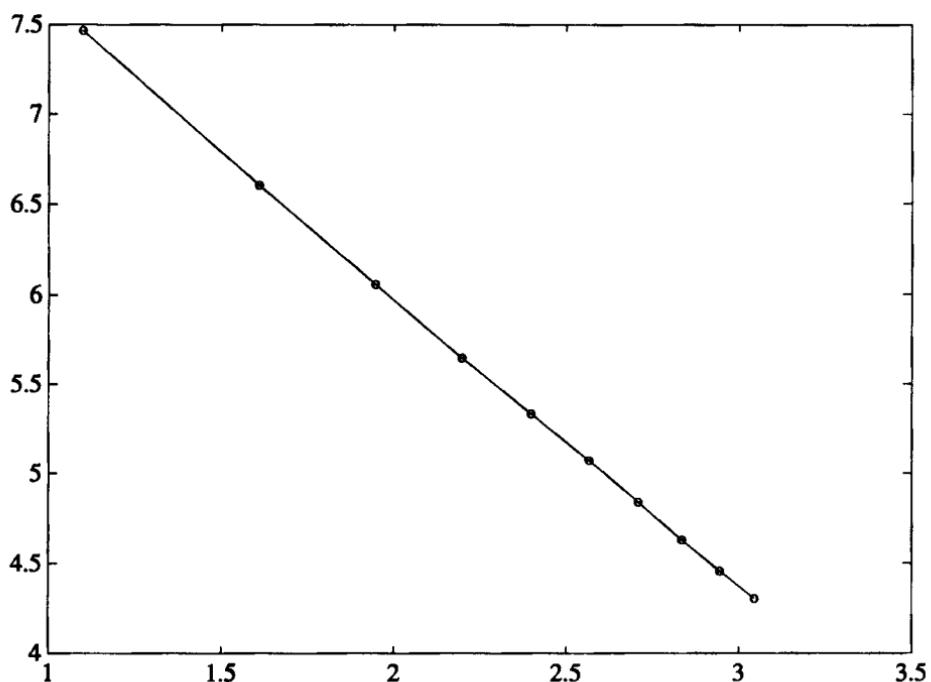


Рис. 5.4. Зависимость  $\log \tilde{N}(L)$  от  $\log L$

фрактальной размерности можно отличить контур дерева от очертания гор на фоне неба. В первом случае обычно  $d \approx 1,5$ , а во втором —  $d \approx 1,2$ .

Точность вычислений может быть проиллюстрирована следующим примером. Численно оценивалась фрактальная размерность ковра Серпинского, теоретическое значение которой нам известно из построения:  $d = \log 3 / \log 2 \approx 1,5850$ . Использовалось изображение фрактала размером  $300 \times 300$  пикселов, причем вокруг него был оставлен белый фон — граница в 20 пикселов шириной, так что полное изображение занимало  $340 \times 340$  пикселов. Размер клетки  $L$  пробегал все нечетные значения от 3 до 21. На рис. 5.4 приведен график зависимости  $\log \tilde{N}(L)$  от  $\log L$ .

На первый взгляд, график почти не отклоняется от прямой. Однако если провести МНК-прямую (алгоритм 5.2.1) для всех наборов из четырех последовательных точек, то получим следующие значения  $d$  (угловые коэффициенты, взятые с обратным знаком):

1,6555  
 1,6147  
 1,5888  
 1,5744  
 1,6105  
 1,6301  
 1,5959

Таким образом, оценка фрактальной размерности имеет лишь один верный десятичный разряд ( $d = 1, 6$ ).

### Упражнения 5.2.

1. Отложим классическое множество Кантора на диагонали единичного квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Нанесем сетку с шагом  $1/3^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , как по горизонтальной, так и по вертикальной оси. Определить размерность Минковского множества Кантора.
2. Следующие результаты были получены при определении размерности Минковского некоторого фрактала. Построить наилучшую в смысле среднеквадратичных отклонений прямую  $\log(N(L))$  от  $\log(L)$ . Определить значение размерности Минковского.

$L$	$N(L)$
2	2502
3	1270
4	854
5	622
6	447
7	354
8	309
9	246
10	208
11	178

3. Вывести систему уравнений (5.11) (задача об МНК-прямой).

# Глава 6.

# Хаотическая динамика I

## 6.1. Аттрактор Лоренца

До настоящего момента мы изучали фракталы, которые являются статическими фигурами. Наш подход вполне приемлем до тех пор, пока не возникает необходимость рассмотрения таких природных явлений, как падающие потоки воды, турбулентные завихрения дыма, метеосистемы и потоки на выходе реактивных двигателей. В этих случаях один-единственный фрактал соответствует моментальному снимку данного феномена. Структуры, изменяющиеся во времени, мы определяем как динамические системы. Интуитивно понятно, что динамической противоположностью фрактала является хаос. Это означает, что хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

Достаточно скоро стало ясно, что многие хаотические динамические системы, описывающие феномены окружающего нас мира, устроены очень сложно и не могут быть в полной мере представлены традиционными методами математического анализа. По-видимому, нет никакой возможности получить математические выражения для решений в замкнутом виде, даже если использовать бесконечные ряды или специальные функции.

Рассмотрим знаменитый пример, весьма наглядно демонстрирующий, что стоит за термином «хаотическая динамика». Эдвард Лоренц из Массачусетского технологического института в 1961 году занимался численными исследованиями метеосистем, в частности моделированием конвекционных токов в атмосфере<sup>1</sup>. Он написал программу для решения следующей системы дифференциальных

---

<sup>1</sup> Исследование аттрактора Лоренца включается сейчас в любой математический пакет, например, Mathematica, Maple [59].

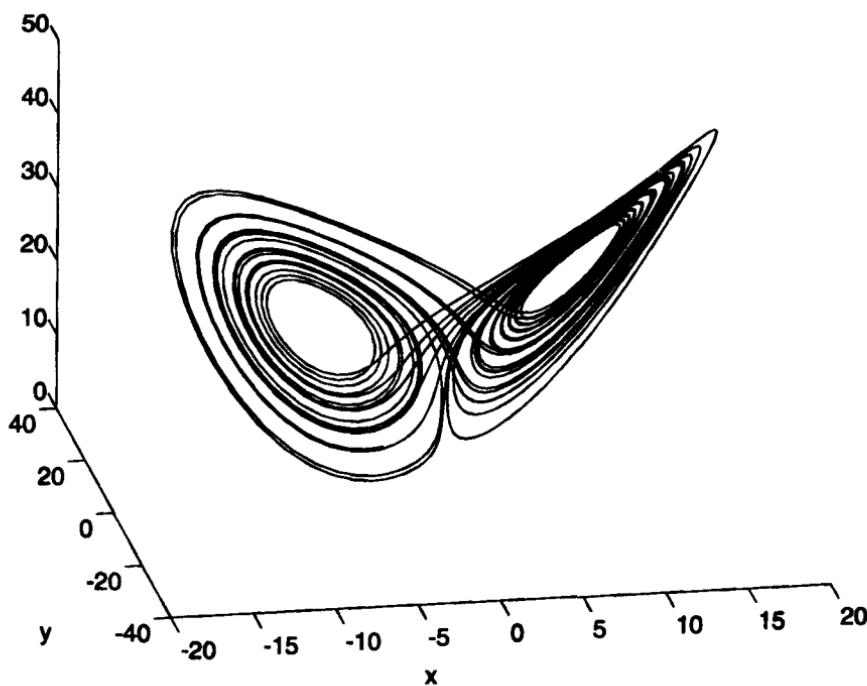


Рис. 6.1. Аттрактор Лоренца

уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(-x + y), \\ \frac{dy}{dt} &= r x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy. \end{aligned}$$

В дальнейших расчетах параметры  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  постоянны и принимают значения  $\sigma = -10$ ,  $r = 28$  и  $b = 8/3$ .

Согласно описанию эксперимента, принадлежащему самому Лоренцу, он вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого

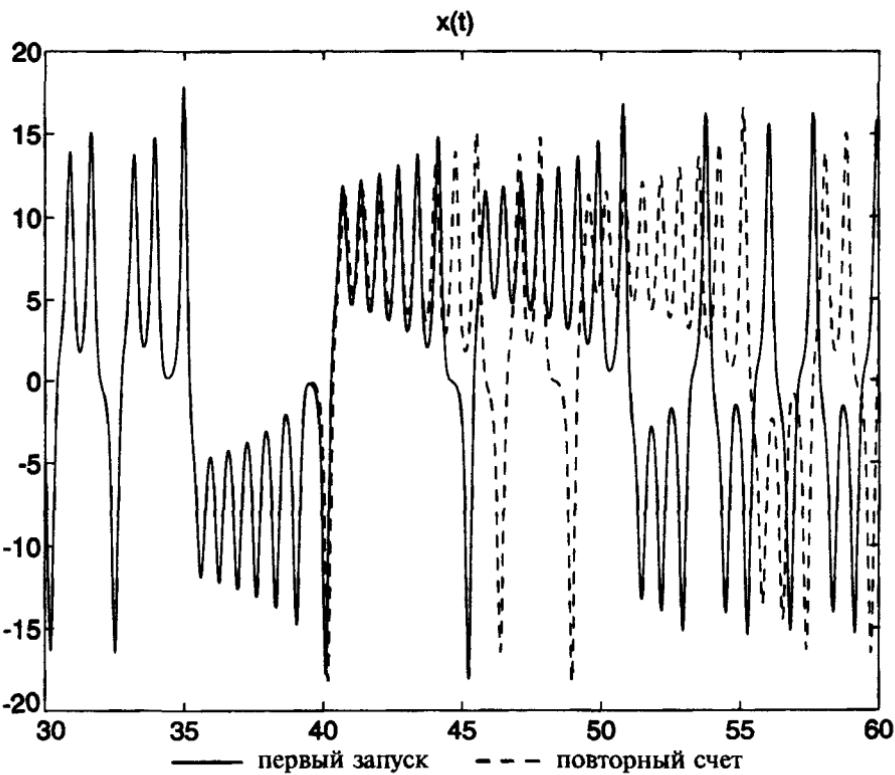


Рис. 6.2. Результаты численного эксперимента Лоренца

момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Но самое неожиданное было впереди. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо соглашалось со старым. Однако, по мере счета расхождение возрастало, и постепенно стало ясно, что новое решение вовсе не напоминает старое (см. рис. 6.1, 6.2).

Лоренц вновь повторял и проверял вычисления (вероятно, не доверяя компьютеру), прежде чем осознал важность эксперимента. То, что он наблюдал, теперь называется *существенной зависимостью от начальных условий* — основной чертой, присущей хаотической динамике. Существенную зависимость иногда называют *эффектом бабочки*. Такое название относится к невозможности делать долго-

статье «Предсказуемость: может ли взмах крыльышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?», опубликованной в 1979 году [17, с. 322].

Несмотря на большую значимость эксперимента Лоренца, в настоящем тексте не будут рассматриваться модели, связанные с динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями. Напротив, мы будем рассматривать наиболее простые модели хаотической динамики. Это означает, что мы ограничимся изучением только дискретных динамических систем, а не непрерывных типа странного аттрактора Лоренца, описанного выше. Но не расстраивайтесь. Обнаружение хаотической динамики в поведении дискретных динамических систем столь же неожиданно, как и в непрерывном случае. Многие известные и эффектные графические примеры соответствуют именно дискретным системам. В числе их можно упомянуть знаменитое и вездесущее множество Мандельброта и сопутствующие ему множества Жюлиа.

## 6.2. Итерированные отображения

Простейшая дискретная динамическая система состоит из начальной точки  $x_0$  и итерируемой функции  $f$ :

$$\begin{aligned}x_0 &= \text{начальная точка} \\x_1 &= f(x_0) \\x_2 &= f(x_1) \\&\vdots \\x_n &= f(x_{n-1}) \\&\vdots\end{aligned}$$

Последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f^{(n)}(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$  называют *орбитой*<sup>2</sup> начальной точки  $x_0$ . Конечно, данный пример представляет собой простейший случай итерированной системы функций, рассмотренной в главе 4.

---

<sup>2</sup>  $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f \dots (f(x)))}_{n \text{ раз}}$

Пока будем полагать  $x_0$  действительным числом, а функцию  $f$  элементарной, например:

$$\begin{aligned}x^2 + c, \\cx(1 - x), \\\cos x.\end{aligned}$$

В отличие от примеров, рассмотренных в предыдущих главах, отображение  $f$  теперь не предполагается сжимающим. Вследствие этого теорема о неподвижной точке неприменима и уже нельзя сделать вывод о сходимости последовательности  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ . Фактически, с точки зрения динамической теории, подобные системы интересны именно потому, что в них происходят вещи, отличные от сходимости к пределу.

В хаотической динамике рассматривают нелинейные (неаффинные) функции, которые нельзя представить в виде  $f(x) = ax + b$ , так как в линейном или аффинном случаях хаотического поведения не наблюдается.

Напомним, что в главе 3 неподвижная точка отображения  $f$  определялась как точка  $x$ , удовлетворяющая условию  $f(x) = x$ . Неподвижная точка  $x$  называется *притягивающей* в том случае, если орбиты всех точек из некоторой ее окрестности (возможно, очень малой) сходятся к ней. Неподвижная точка  $x$  называется *отталкивающей*, если орбиты всех достаточно близких к ней точек удаляются от нее.

Простой способ определения, является ли неподвижная точка притягивающей или отталкивающей, заключается в рассмотрении величины  $|f'(x)|$ , в предположении, что она существует. Если  $x$  неподвижная точка и  $|f'(x)| < 1$ , то  $x$  — притягивающая, а если  $|f'(x)| > 1$ , то  $x$  — отталкивающая. В случае, когда  $|f'(x)| = 1$ , определенного вывода сделать нельзя: точка  $x$  может быть притягивающей, отталкивающей или ни той и ни другой (см. упр. 1 в конце настоящего параграфа).

Орбита называется *периодической* с периодом  $p$ , если  $x_{n+p} = x_n$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В некоторых случаях, когда мы говорим, что орбита имеет период  $p$ , подразумевается наименьший период. Обычно из контекста всегда ясно, что имеется в виду. Если же уравнение периодичности  $x_{n+p} = x_n$  становится справедливым только после некоторого конечного числа шагов, скажем, для  $n \geq n_0$ , то говорят, что орбита является в *конечном итоге* *периодической*.

Особенно удобным способом графического представления орбиты вещественнозначной функции  $f$  является *паутинная диаграмма* (алгоритм 3.3.1). На паутинных диаграммах хорошо видна динамика орбит, особенно если на отрезках показаны стрелки, обозначающие направление движения (см. рис. 6.3–6.8).

Несколько возможных вариантов поведения дискретных динамических систем демонстрируется приведенными ниже примерами.

**Пример.** Функция  $f(x) = x^2$  (рис. 6.3). Если начальная точка  $x_0 = 0$  или  $x_0 = 1$ , то есть  $x_0$  принимает значения неподвижных точек  $f$ , то орбиты постоянны. Если  $x_0 > 1$ , то орбита стремится к  $+\infty$ . Если  $0 < x_0 < 1$  или  $-1 < x_0 < 0$ , то орбита сходится к неподвижной точке 0. Если  $x_0 = -1$ , то орбита принимает вид:

$$[ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots ],$$

то есть орбита является в конечном итоге периодической. Если  $x_0 < -1$ , то  $x_n \rightarrow \infty$ . В этом случае говорят, что орбита расходится. В данном примере неподвижная точка 0 является притягивающей, а неподвижная точка 1 — отталкивающей.

**Пример.** Функция  $f(x) = x^2 - 1$  (рис. 6.4). Две неподвижные точки равны  $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$ . Обе они отталкивающие, так как  $|f'(x)| = 2|x| > 1$  в обоих случаях. Но есть еще одно обстоятельство, которое надо отметить, так как оно важно при рассмотрении динамики. Непосредственно видно, что любая неподвижная точка  $f^{(2)}(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$  есть точка периода 2 функции  $f(x)$ . В этом случае орбиты принимают вид:

$$[ x_0 \ x_1 \ x_0 \ x_1 \ x_0 \ \dots ].$$

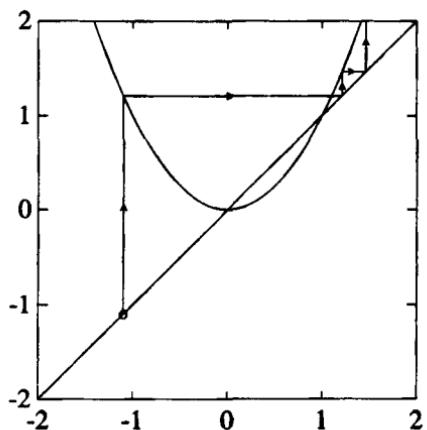
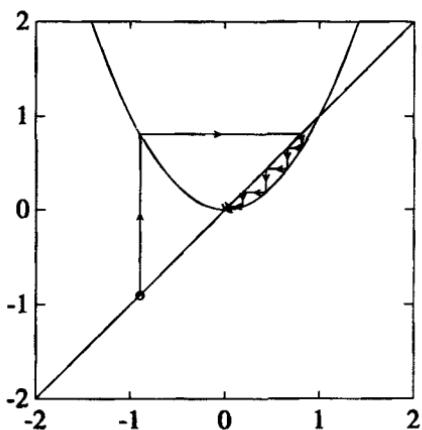
Неподвижные точки  $f^{(2)}(x)$  суть корни полинома  $x^4 - 2x^2 - x$  и равны 0,  $-1$  и  $(1 \pm \sqrt{5})/2$ . Две последние являются к тому же неподвижными точками  $f(x)$ , поэтому они обладают периодическими орбитами наименьшего периода 1. Орбиты двух новых точек, 0 и  $-1$ :

$$[ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ \dots ]$$

и

$$[ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ \dots ],$$

имеют наименьший период 2.

(a)  $x_0 = -1,1$ (б)  $x_0 = -0,9$ Рис. 6.3. Функция  $f(x) = x^2$ . а)  $x_0 = 1,1$ ; б)  $x_0 = -0,9$ 

Функции  $x^2$  и  $x^2 - 1$  являются частными случаями отображения  $x^2 + c$ , которое широко применяется в динамической теории<sup>3</sup>. Хотя  $f(x) = x^2 + c$  — всего-навсего квадратичная функция, пожалуй, нет такой области динамической теории, где бы она не использовалась. Многие уже видели удивительные графические изображения множества Мандельброта и связанных с ним множеств Жюлиа. Так вот, они получаются в результате рассмотрения того же квадратичного полинома, но только с использованием комплексных чисел вместо действительных.

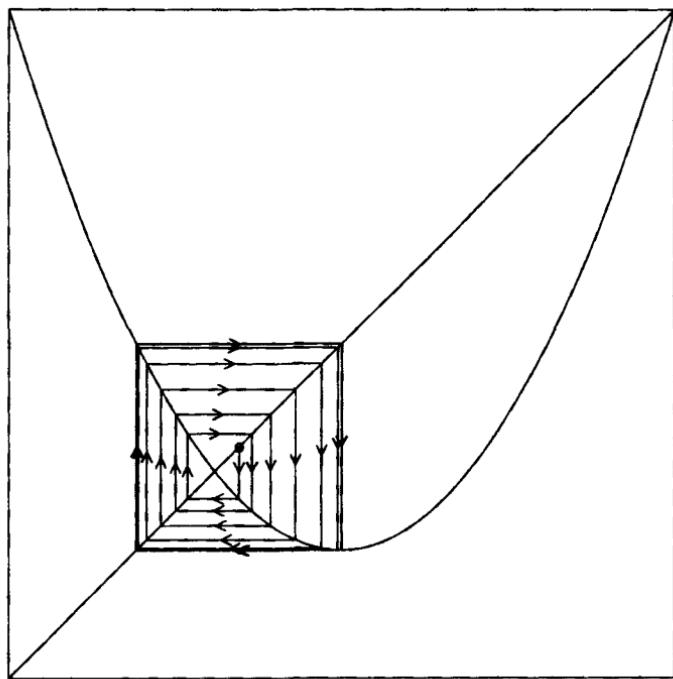
Рассмотрим подробнее действительный случай, то есть полагая  $x$  и  $c$  с действительными числами. Для любого значения  $c$  неподвижные точки, которые суть решения уравнения  $x^2 + c = x$ , имеют вид:

$$\xi = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2},$$

$$\eta = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Таким образом, неподвижные точки будут действительными числами, только если  $1 - 4c \geq 0$ . Алгебраически несложно показать, что если  $c \leq 1/4$ , то  $-\xi < \eta < \xi$ . Кроме того,  $f(-\xi) = \xi$ . Орбиты для

<sup>3</sup>См. [60].



**Рис. 6.4.** Функция  $f(x) = x^2 - 1$ ;  $x_0 = -0,5$

$x_0 > \xi$  и  $x_0 < -\xi$  не представляют интереса, так как для этих случаев все они стремятся к  $+\infty$  (упр. 3(б) в конце настоящего параграфа).

Вследствие этого в данном параграфе мы полагаем, что  $c \leq 1/4$  и  $-\xi \leq x_0 \leq +\xi$ . Дополнительные несложные вычисления дают:

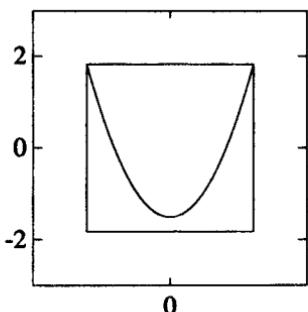
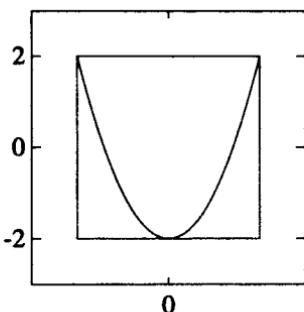
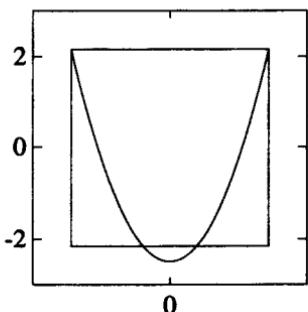
$$f(x_0) \leq +\xi$$

и, если  $-2 \leq c$ :

$$-\xi \leq f(x_0).$$

Три возможных случая, соответствующих  $-2 < c \leq 1/4$ ,  $c = -2$  и  $c < -2$ , приведены на рис. 6.5. Оставим в качестве упражнения доказательство корректности рисунка, соответствующего  $c < -2$ , то есть того, что нижняя точка графика лежит ниже  $-\xi$  (упр. 5 в конце настоящего параграфа).

Пусть  $I$  — замкнутый интервал  $[-\xi, \xi]$ . В случае  $-2 \leq c \leq 1/4$ , если  $x_0 \in I$ , то  $f(x_0) \in I$  и вся орбита целиком находится в  $I$ . Если

(а)  $c = -1,5$ (б)  $c = -2,0$ (в)  $c = -2,5$ **Рис. 6.5.** а)  $-2 < c \leq 1/4$ , б)  $c = -2$ , в)  $c < -2$ 

$c < -2$  и  $x_0 \in I$ , то возможны два случая: либо орбита остается в  $I$  или же в конечном счете некоторое значение  $x_0$  становится меньше  $-\xi$  и тогда орбиты устремляются к  $+\infty$ .

Когда  $-3/4 < c < 1/4$ , неподвижная точка  $\eta$  является притягивающей, так как  $|f'(\eta)| = |1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$  и все орбиты (начинающиеся в  $I$ ) сходятся к  $\eta$ . По мере того как  $c$  убывает и становится меньше  $-3/4$ , величина  $|f'(\eta)|$  возрастает и становится больше 1, то есть  $\eta$  становится отталкивающей. В то же время функция  $f^{(2)}$  доставляет пару притягивающих неподвижных точек, которые приводят к появлению цикла с периодом 2 для  $f$  (рис. 6.6 и 6.7). Этот феномен наблюдался в примере 2. Говорят, что система претерпевает *биfurкацию удвоения периода*, когда  $c$  проходит через значение  $-3/4$ .

Другая бифуркация удвоения периода возникает при  $c = -5/4$ . Когда  $c$  становится меньше этого значения, орбиты начинают при-

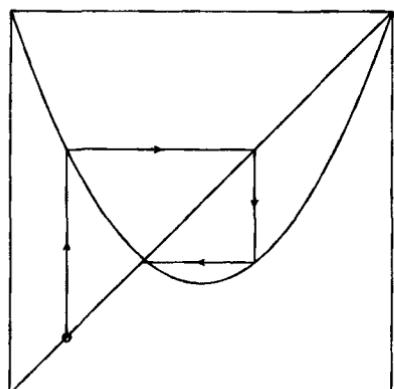
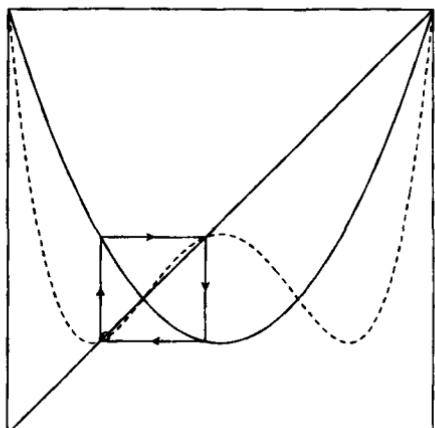
(a)  $c=0,6$ (б)  $c=-0,9$ 

Рис. 6.6. Бифуркация удвоения периода

тягиваться циклом с периодом 4. По мере того как  $c$  убывает, мы последовательно встречаем притягивающие периодические орбиты длины 8, 16 и так далее. Рассматривая диаграммы орбит (рис. 6.9), можно заметить нечто большее. В действительности, мы построили пример того, что называется *получением хаоса с помощью удвоения периода*. Мы вернемся к этому вопросу в п. 6.3 и 6.4, где будут рассмотрены исследования Фейгенбаума и Шарковского.

Частный случай  $c = -2$  заслуживает особенного внимания. При этом значение  $\xi$  равно 2, а интервал  $I$  равен  $[-2, 2]$ . Как следует из рис. 6.5(б), график  $y = f(x)$  для  $x \in I$  в точности заполняет квадрат  $I \times I$ , в том смысле, что не существует меньшего квадрата со сторонами, параллельными осям координат, который бы полностью содержал данный график. То же самое верно для  $y = f^{(2)}(x)$ ,  $y = f^{(3)}(x)$ , ..., как показано на рис. 6.8. Прямая  $y = x$  пересекает график  $y = f^{(n)}(x)$  точно  $2^n$  раз в квадрате  $I \times I$ . Каждое пересечение есть не что иное, как неподвижная точка функции  $f^{(n)}$  и, следовательно, периодическая точка с периодом  $n$  (не обязательно наименьшим). Из сказанного выше следует, что для  $c = -2$  существуют периодические орбиты функции  $f$  с периодами длины 2, 3, 4, ...

Перейдем к рассмотрению диаграммы орбит. Эта диаграмма представляет собой график, в котором величины с откладывают-

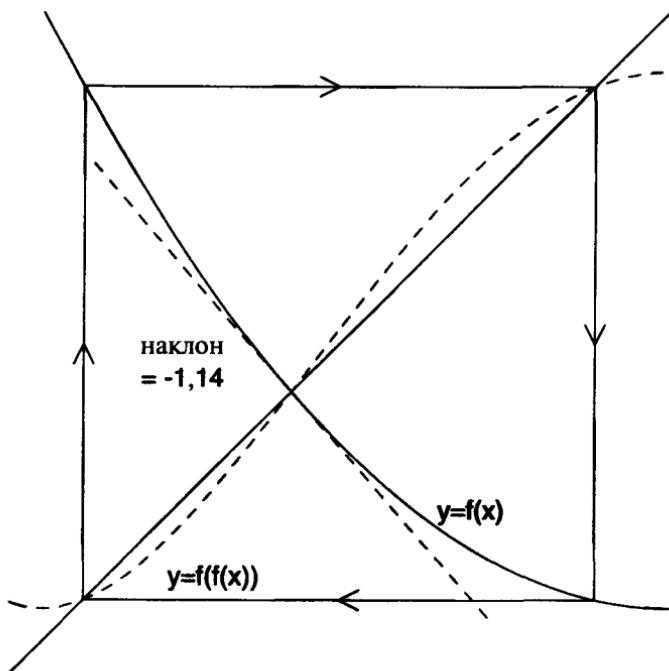


Рис. 6.7. Увеличенное изображение графика  $f(x) = x^2 - 0,9$

ся по оси ординат, а на каждой горизонтальной прямой  $y = c$  наносятся точки притягивающих периодических орбит для  $x^2 + c$ . Достаточно ограничиться значениями  $c$  из  $(-2, 1/4)$ . Для получения притягивающей периодической орбиты для заданного  $c$  положим  $x_0 = 0$  (причина выбора нуля станет ясна далее при изучении множества Мандельброта). Затем вычисляется орбита с помощью функции  $f(x) = x^2 + c$ . На практике достаточно вычислить 200 точек. Отбросим первые 50. Оставшиеся 150 точек дают достаточно хорошую аппроксимацию периодической орбиты. Для каждого  $n = 51, \dots, 200$ , нанесем на диаграмму точку  $(x_n, c)$ . Достаточно подробная диаграмма орбит может быть построена таким образом при шаге по параметру  $c$  в указанных выше пределах, равном 0,00625. Конечно, более точное изображение диаграммы орбит (как на рис. 6.9) может быть получено в результате вычисления орбит большей длины и при меньшем шаге по параметру  $c$ .

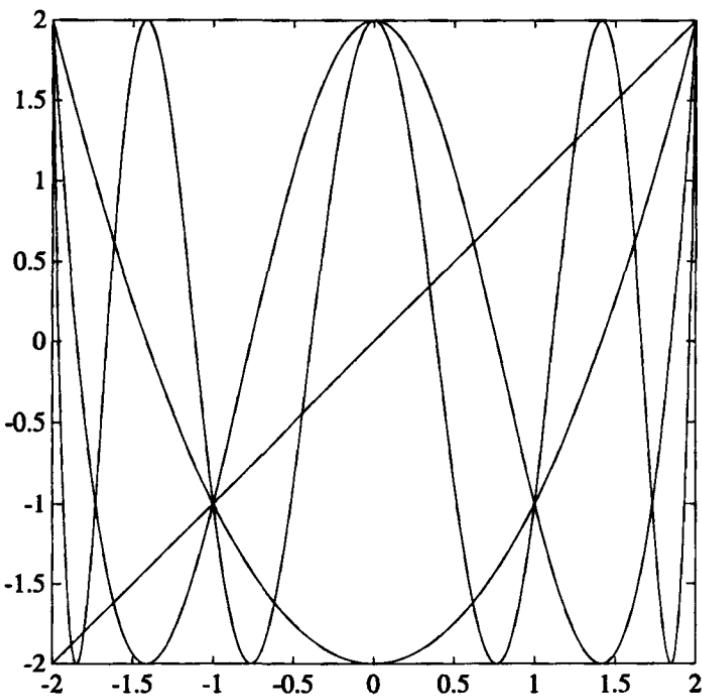


Рис. 6.8. Графики \$f\$, \$f^{(2)}\$ и \$f^{(3)}\$ при \$c = -2\$

**Упражнения 6.2.**

- Пусть \$x\$ — неподвижная точка действительной дифференцируемой функции \$f\$.
  - Покажите, что если \$|f'(x)| < 1\$, то \$x\$ является притягивающей точкой.
  - Покажите, что если \$|f'(x)| > 1\$, то \$x\$ является отталкивающей точкой.
  - Покажите, что если \$|f'(x)| = 1\$, то \$x\$ может не быть ни притягивающей, ни отталкивающей (приведите пример).
- Докажите, что функция \$f(x) = \cos x\$ имеет только одну неподвижную точку и при любом выборе начальной точки орбита (итерационная последовательность) сходится к ней.

*В упр. 3-6 принимаем \$f(x) = x^2 + c\$, а \$\xi = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\$, \$\eta = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\$ в качестве неподвижных точек.*

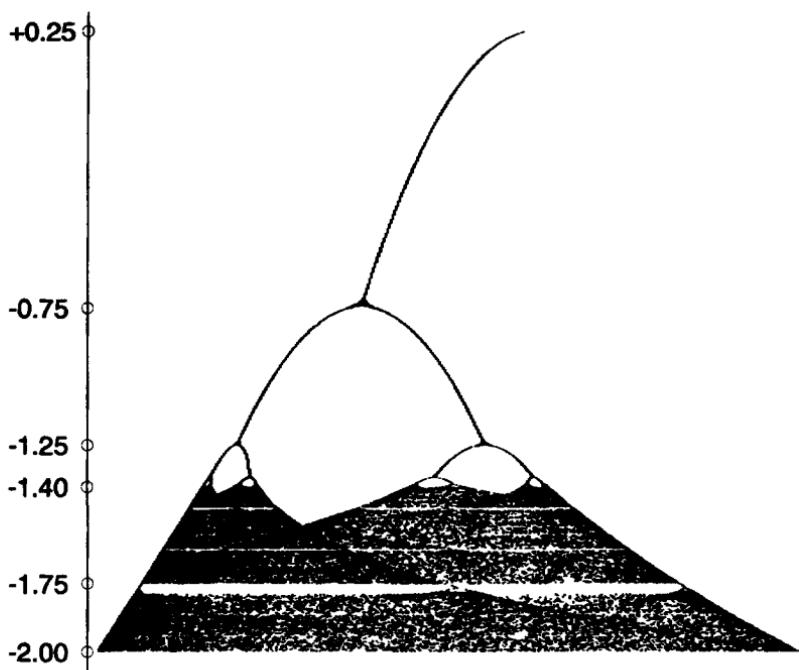
3. а. Покажите, что если  $c < 1/4$ , то  $-\xi < \eta < \xi$ .  
 б. Покажите также, что если  $x_0 > \eta$  или  $x_0 < -\eta$ , то орбита  $x_0$  стремится к  $+\infty$ .
4. Покажите, что при прохождении параметра  $c$  через значение  $-3/4$ , величина  $|f'(\eta)|$ , возрастая, проходит через 1, и, следовательно,  $\eta$  из притягивающей становится отталкивающей.
5. Покажите, что если  $c < -2$ , то наименьшая величина  $f(x)$  при  $-\eta \leq x \leq \eta$  меньше  $-\eta$ .
6. Покажите, что если  $c < 2$  и любой член итерации  $x_n$  становится меньше  $-\eta$ , то орбита стремится к  $+\infty$ .
7. Положим  $f(x) = \pi \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ . Нарисуйте  $f^{(2)}(x)$  и  $f^{(3)}(x)$ . Что вы можете сказать о числе неподвижных точек  $f^{(n)}(x)$ ?

### 6.3. Универсальность Фейгенбаума

Основной вопрос в теории турбулентности сводится к тому, как предсказать ее возникновение, исходя из условия кажущейся стабильности и равновесия. Примеры такого перехода к хаосу наблюдаются нами ежедневно. Дым от зажженной сигареты вначале поднимается в виде столба. Но немного спустя этот столб испытывает бифуркации и становится хаотическим. Вода начинает капать из крана с одной капли, а затем кап-кап, потом кап-кап-кап — все быстрее и быстрее, до тех пор, пока не возникает хаос. Есть даже любители, стремящиеся найти все новые и новые примеры естественного хаоса [17, с. 262].

Фейгенбаум начал свои исследования с анализа интервалов между бифуркациями (удвоениями периода) в диаграмме орбит для квадратичной функции<sup>4</sup>  $y = cx(1 - x)$ . Соответствующая диаграмма орбит выглядит почти так же, как и для функции  $y = x^2 + c$  (рис. 6.9). Основное значение анализа, проведенного Фейгенбаумом, заключается в его универсальности. Описанный им механизм, известный теперь под названием «получение хаоса с помощью удвоения периода», возникает не только при итерациях  $cx(1 - x)$ , но и в

<sup>4</sup>Это отображение называют логистическим. Оно возникает при рассмотрении экосистем и впервые было исследовано П. Ферхюльстом в 1845 году, поэтому диаграмма орбит (бифуркационная диаграмма) часто называется *диаграммой Ферхюльста*.

Рис. 6.9. Диаграмма орбит для  $x^2 + c$ 

случае широкого класса двузначных отображений интервала в себя, таких, как  $x^2 + c$ ,  $c \sin(\pi x)$  и  $cx^2 \sin(\pi x)$ , определенных на подходящих интервалах. В частности, этот класс включает в себя функции  $f$ , заданные на  $[0, 1]$  и достигающие максимума в точке  $x_M \in (0, 1)$ , при условии, что  $f''(x_M) = 0$ , причем  $f$  монотонна на отрезках  $[0, x_M]$  и  $[x_M, 1]$  и ее производная Шварца отрицательна<sup>5</sup> при всех  $x \in [0, 1]$  (см. [24, прил. D]):

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Обозначим через  $c_0, c_1, c_2, \dots$  точки бифуркации на диаграмме орбит (рис. 6.9), то есть те точки  $c_n$ , в которых итерирование  $f(x) = x^2 + c$  сменяет притягивающую орбиту периода  $2^n$  на притягивающую

<sup>5</sup>Важность отрицательности шварциана в теории однопараметрических семейств одномерных отображений впервые отметил Д. Зингер [61].

орбиту периода  $2^{n+1}$ . Эти точки приведены также в табл. 6.1. Из п. 6.2 нам известно, что не существует вещественных неподвижных точек при  $c < 1/4$ . При  $1/4 < c < -3/4$  существует притягивающая орбита периода 1. При  $-3/4 < c < -5/4$  существует притягивающая орбита периода 2, которая превращается в притягивающую орбиту периода 4, когда  $c$  проходит через значение  $-5/4$ . Проведенное рассмотрение дает нам значения  $c_0 = -3/4$ , и  $c_1 = -5/4$ . По мере увеличения  $n$  определять эти точки бифуркации становится все труднее и труднее. Остальные значения в таблице приведены по [7, табл. 1.25] для функции  $1 - \mu x^2$  (упр. 1 в конце данного параграфа).

При рассмотрении табл. 6.1 можно сделать два важных наблюдения. Первое заключается в том, что значения точек бифуркации  $c_n$  стремятся к пределу  $c_\infty$ :

$$c_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1,401155\dots \quad (6.1)$$

Иногда точка  $c_\infty$  называется *точкой Фейгенбаума*. В диапазоне между  $c = 1/4$  и  $c_\infty$  удвоение периода присходит по мере того как  $c \rightarrow c_\infty$ . Другой участок, где  $c > c_\infty$ , иногда называется *областью хаоса*. В следующем параграфе рассматривается наиболее важная черта области хаоса, так называемое окно периода 3, которое соответствует наиболее светлому участку диаграммы орбит в окрестности  $c = -1,7548777\dots$

**Таблица 6.1.** Точки бифуркации для  $x^2 + c$

$n$	$c_n$	$(c_n - c_{n-1})/(c_{n+1} - c_n)$
0	-0,75	
1	-1,25	4,233738275
2	-1,3680989394	4,551506949
3	-1,3940461566	4,645807493
4	-1,3996312389	4,663938185
5	-1,4008287424	4,668103672
6	-1,4010852713	4,668966942
7	-1,401140214699	4,669147462
8	-1,401151982029	4,66919003
9	-1,401154502237	4,66916224
10	-1,401155041989	

Второе наблюдение заключается в том, что отношение длин последовательных интервалов между точками бифуркации, оказывается, имеет предел:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,669162\dots \quad (6.2)$$

Константа  $d = 4,669162\dots$  называется *постоянной Фейгенбаума*. Конечно, замечательно, что в данном примере существуют два предела  $c_\infty$  и  $d$ . Но следует ли ожидать такого же поведения у других двузначных функций? Первое и вполне правдоподобное предположение заключается в том, что они тоже будут давать диаграмму орбит, имеющую область удвоения периода, а также пределы, сходные с (6.1) и (6.2). Разумеется, это так и есть. Причем, как легко видеть на примере функции  $\text{cx}(1-x)$ , значение  $c_\infty$  в общем случае не совпадает с (6.1).

Но самым замечательным обстоятельством является то, что постоянная Фейгенбаума  $d$ , заданная формулой (6.1), имеет одно и то же значение для многих различных двузначных функций, включая те, которые были приведены в начале этого параграфа. По этой причине значение  $d$  называется *универсальной* константой. Она применяется для предсказания наступления хаоса. Пусть

$$\lambda_n = c_n - c_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$d \approx \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$$

и

$$\lambda_n \approx \frac{1}{d^{n-1}} \lambda_1.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} c_n &\approx c_{n-1} + \frac{1}{d^{n-1}} \lambda_1 \\ &\approx c_{n-2} + \left( \frac{1}{d^{n-2}} + \frac{1}{d^{n-1}} \right) \lambda_1 \\ &\vdots \\ &\approx c_0 + \left( \frac{1}{d^0} + \dots + \frac{1}{d^{n-2}} + \frac{1}{d^{n-1}} \right) \lambda_1 \\ &\rightarrow c_0 + \frac{d}{d-1} \lambda_1. \end{aligned}$$

Таким образом, интервал между  $c_0$  и  $c_\infty$  приблизительно равен:

$$\frac{d}{d-1} \lambda_1.$$

Были выполнены лабораторные эксперименты, основанные на приведенном выше принципе, с использованием реальных данных. И хотя полученные численные значения не совсем точно соответствовали теоретическим значениям, приведенным в табл. 6.1, они показали достаточно хорошую согласованность.

Достаточно трудно, если вообще возможно, аналитически определить точки бифуркации  $c_n$  для конкретной функции, такой, как  $x^2 + c$ , и таким образом завершить тщательный анализ константы Фейгенбаума, описываемой выражением (6.2). К счастью, имеется другой путь. Между каждой парой точек бифуркации  $c_n$  и  $c_{n+1}$  существует точка  $c_n^*$ , которая обладает сверхпритягивающей орбитой с периодом  $2^n$ . Для этого значения  $c$ , критическая точка  $x_0$  функции  $f_c$  удовлетворяет уравнению  $f_c^{(n)}(x_0) = x_0$ . Было доказано, что постоянная Фейгенбаума  $d$  определяется также в виде:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n^* - c_{n-1}^*}{c_{n+1}^* - c_n^*}. \quad (6.3)$$

Значения  $c_n^*$  можно находить численно, используя метод Ньютона для нахождения корней.

Напомним, что нахождение корня уравнения  $\phi(x) = 0$  методом Ньютона начинается с нулевого приближения  $r_0$  и продолжается по формуле

$$r_n = r_{n-1} - \phi(r_{n-1})/\phi'(r_{n-1}).$$

Если  $r_0$  достаточно близко к корню  $r$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$  (упр. 6 из п. 3.3). Из (6.3) следует, что

$$c_n^* \approx c_{n-1}^* + \frac{c_{n-1}^* - c_{n-2}^*}{d}. \quad (6.4)$$

Подходящее начальное значение  $x_0$  для  $c_n^*$  можно получить, заменив  $d$  в (6.4) на  $d_{n-1}^*$ , где

$$d_n^* = \frac{c_{n-1}^* - c_{n-2}^*}{c_n^* - c_{n-1}^*}, \quad n = 2, 3, \dots$$

При этом возникает проблема для начальных значений при  $n = 1, 2$ , которую мы разрешаем, полагая  $d_1^* = d_2^* = 4$ .

Таким образом, для настоящей задачи метод Ньютона применяется к функции

$$\phi(c) = f_c^{(2^{n-1})}(x_0) - x_0,$$

где  $x_0$  суть критическая точка  $f_c$ . Значение  $\phi(c)$  вычисляется итерированием  $x_k = f_c(x_{k-1})$ . Производная  $\phi'(c)$  также вычисляется итерированием. Пусть  $z_k = f_c(x_{k-1})$ . В случае  $f_c(x) = x^2 + c$ , это дает

$$z_k = 2x_{k-1}z_{k-1} + 1,$$

и для  $f_c(x) = cx(1-x)$  получаем:

$$z_k = x_{k-1}(1-x_{k-1}) + c(1-2x_{k-1})z_{k-1}.$$

Можно выбрать следующий критерий окончания итерационного процесса. Вычисления по формуле Ньютона следует вести до выполнения неравенства  $(x_n - x_{n-1})/x_n < \varepsilon$ , то есть пока относительная ошибка не станет меньше машинного нуля используемой ЭВМ. Машинным нулем называется такое наименьшее положительное число  $\varepsilon$ , представленное в виде с плавающей запятой, что  $1 + \varepsilon > 1$ . Результаты, приведенные в табл. 6.2, получены при  $\varepsilon = 5 \times 10^{-16}$ .

### Упражнения 6.3.

- Показать, что точки бифуркации для  $1 - \mu x^2$  совпадают с точками  $c_0, c_1, c_2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$

## 6.4. Периодичность Шарковского

Диаграмма орбит (рис. 6.9) изображает притягивающие периодические орбиты для  $f_c(x) = x^2 + c$ . Обратите внимание, что на некоторых участках диаграмма чрезвычайно разрежена. Например, на участке около  $c \approx -1,75$  видна белая полоса и притягивающие орбиты имеют период 3. Вопрос, который следует задать, звучит так: существуют ли другие периодические орбиты? Они, эти орбиты, по необходимости должны быть отталкивающими, так как на диаграмме мы наблюдаем только притягивающие орбиты. В связи с этим оказывается, что наличие орбиты периода 3 означает наличие орбит с периодами  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Далее в этом параграфе, когда мы говорим, что орбита имеет период  $n$ , имеется в виду наименьший период  $n$ .

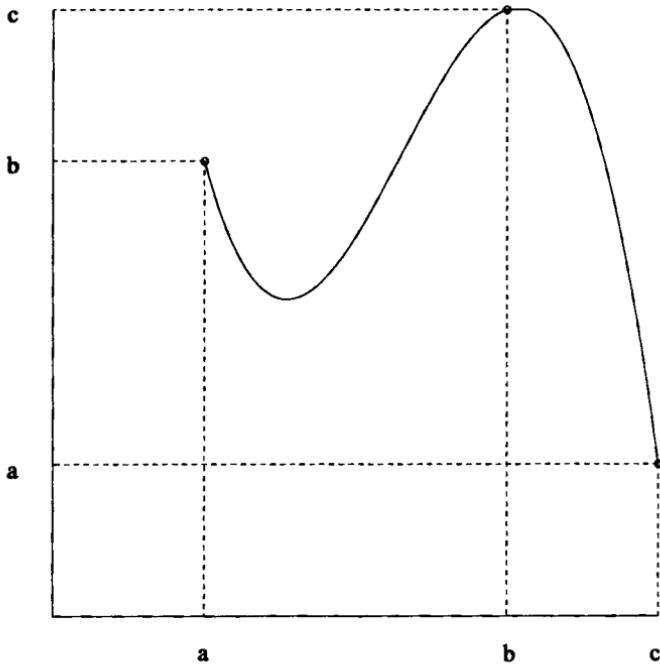
**Таблица 6.2.** Сверхпритягивающие точки для  $x^2 + c$ 

$n$	$c_n^*$	$(c_n^* - c_{n-1}^*)/(c_{n+1}^* - c_n^*)$
0	0	
1	-1,000000000000000	3,21851142203809
2	-1,31070264133683	4,38567759856834
3	-1,38154748443206	4,60094927653812
4	-1,39694535970456	4,65513049539190
5	-1,40025308121478	4,66611194782723
6	-1,40096196294484	4,66854858148123
7	-1,40111380493978	4,66906066057753
8	-1,40114632582695	4,66917155556749
9	-1,40115329084992	4,66919514619589
10	-1,40115478254662	

Рассматриваемая ниже теория применима к вещественнозначным функциям, отображающим интервал в себя. Важный случай орбит с периодом 3 (теорема 6.4.1 ниже) был рассмотрен в 1975 году Т.-Й. Ли и Джеймсом Йорком [29]. Достаточно неожиданно их результат оказался частным случаем теоремы А. Н. Шарковского (теорема 6.4.2), опубликованной в 1964 году в Украинском Математическом Журнале, и поэтому неизвестной на Западе. Мы приводим здесь только доказательство для случая периода 3 вследствие его элементарности и краткости. Общая теорема Шарковского использует те же самые элементарные рассуждения, но занимает больше места.

**Лемма 6.4.1.** *Пусть  $f$  — вещественнозначная непрерывная функция, заданная на отрезке  $I = [a, b]$ . Предположим, что  $c \leq a < b \leq d$  и  $f(I)$  содержит отрезок  $J = [c, d]$ . Тогда существует неподвижная точка  $f$  на отрезке  $I$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим  $g(x) = f(x) - x$ . Если  $f(a) = a$  или  $f(b) = b$ , то  $a$  или  $b$  является неподвижной точкой. Рассмотрим противоположный случай. Пусть существуют точки  $x_0$  и  $x_1$ , принадлежащие отрезку  $[a, b]$ , такие, что  $f(x_0) = a$  и  $f(x_1) = b$ . Для этих точек  $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = a - x_0 < 0$  и  $g(x_1) = f(x_1) - x_1 = b - x_1 > 0$ . Из теоремы о среднем значении из курса математического анализа следует, что существует такая точка  $p$ , лежащая между  $x_0$

Рис. 6.10.  $f([a, b]) \subset [b, c]$  и  $f([b, c]) \subset [a, c]$ 

и  $x_1$ , что  $g(p) = 0$ . Эта точка является неподвижной точкой  $f$  и принадлежит  $[a, b]$ . ■

**Лемма 6.4.2.** В условиях леммы 6.4.1 существует такой замкнутый подинтервал  $\hat{I} = [\hat{a}, \hat{b}] \subset I$ , что  $f$  отображает  $\hat{I}$  на  $J$ , то есть  $f(\hat{I}) = J$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_0 = \inf\{x \in I : f(x) = c\}$ . Если  $x_0 \neq b$ , положим  $\hat{b} = \inf\{f^{-1}(d) \cap [x_0, b]\}$ ,  $\hat{a} = \sup\{f^{-1}(c) \cap [x_0, \hat{b}]\}$ . Если  $x_0 = b$ , то положим  $\hat{b} = x_0$ ,  $\hat{a} = \sup\{f^{-1}(d) \cap [a, b]\}$ . В обоих случаях  $f([\hat{a}, \hat{b}]) = J$ . ■

**Теорема 6.4.1.** Пусть  $I$  — конечный или бесконечный интервал в  $\mathbb{R}$ . Предположим, что отображение  $f : I \rightarrow I$  непрерывно. Если существует точка отображения  $f$  периода 3, то существуют также точки периода  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Доказательство.** Пусть сначала  $n > 3$ . Рассмотрим орбиту с периодом 3:  $a, b, c, a, \dots$  Без потери общности можно предположить, что  $a < b$  и  $a < c$ . Возможны два случая: либо  $a < b < c$ , либо  $a < c < b$ . Рассмотрим случай  $a < b < c$ . Другой случай рассматривается аналогично. Заметим, что  $f([a, b]) \supset [b, c]$  и  $f([b, c]) \supset [a, b]$ , если  $a < b < c$  (рис. 6.10).

Идея доказательства состоит в следующем. Рассмотрим последовательность отрезков  $I_1, I_2, \dots, I_n$ :

$$\begin{aligned} f(I_1) &= [b, c], \\ f(I_2) &= I_1, \\ &\vdots = \\ f(I_{n-1}) &= I_{n-2}, \\ f(I_n) &= I_{n-1}, \end{aligned}$$

причем все из них, кроме  $I_{n-1}$ , лежат в  $[b, c]$ , а  $I_{n-1}$  лежит в  $[a, b]$ . Если нам удастся построить такую последовательность, то  $f^{(n)}(I_n) = [b, c]$ . Из леммы 6.4.1 следует, что существует неподвижная точка  $p$  отображения  $f^{(n)}$  на отрезке  $I_n$  и, следовательно, в  $[b, c]$ . Отметим, что  $f(p) \in [a, b]$ , а высшие итерации принадлежат  $[b, c]$ . Из этого следует, что  $p$  является точкой периода  $n$  отображения  $f$ .

Для того чтобы построить отрезки  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , воспользуемся леммой 6.4.2  $n$  раз. Так как  $f([b, c]) \supset [b, c]$ , то существует такой отрезок  $I_1$  в  $[b, c]$ , что  $f(I_1) = [b, c]$ . Таким же образом строится отрезок  $I_2$ , лежащий внутри  $I_1$ , такой, что  $f(I_2) = I_1$ . Продолжая эту процедуру, получаем систему отрезков, вложенных друг в друга:

$$I_{n-2} \subset \cdots \subset I_2 \subset I_1 \subset [b, c]$$

как было записано выше. Так как  $f([a, b]) \supset [b, c] \supset I_{n-2}$ , то существует такой отрезок  $I_{n-1} \subset [a, b]$ , что  $f(I_{n-1}) = I_{n-2}$ . И, наконец, так как  $f([b, c]) \supset [a, b] \supset I_{n-1}$ , то существует такой отрезок  $I_n \subset [b, c]$ , что  $f(I_n) = I_{n-1}$ . Это завершает доказательство для случая  $n > 3$ .

Для случая  $n = 1$  заметим, что  $f([b, c])$  содержит  $[b, c]$  и по лемме 6.4.1  $f$  имеет неподвижную точку в  $[b, c]$ .

Для  $n = 2$  сначала заметим, что существует такой отрезок  $\hat{I} \subset [a, b]$ , что  $f(\hat{I}) = [b, c]$ . Поэтому  $f^{(2)}(\hat{I}) \supset f([b, c]) \supset [a, b]$  и  $f^{(2)}$  имеет неподвижную точку в  $\hat{I}$ . Эта неподвижная точка является точкой периода 2 для  $f$ . ■

**Теорема 6.4.2 (Шарковского).** Пусть  $I$  — конечный или бесконечный интервал в  $\mathbb{R}$ . Предположим, что отображение  $f : I \rightarrow I$  непрерывно. Если существует точка  $f$  периода  $n$ , то существуют также точки  $f$  периода  $k$  для каждого целого положительного  $k$ ,  $k > n$ , из следующего списка (называемого упорядочением Шарковского):

$$\begin{aligned} & 3, 5, 7, 9, \dots \\ & 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 9, \dots \\ & 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 9, \dots \\ & 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, 2^3 \cdot 7, 2^3 \cdot 9, \dots \\ & \vdots \\ & \dots, 2^n, \dots, 2^2, 2^1, 1. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство можно найти в [43, 11]. ■

Очевидно, что доказательство для периода 3 является частным случаем теоремы Шарковского, так как число 3 — первое в списке Шарковского. Из рассмотрения приведенного списка можно сделать и другие интересные выводы. Например, число различных периодов для орбит  $f$  конечно только в том случае, когда периоды выражаются числами

$$2^n, \dots, 2^2, 2^1, 1$$

для некоторого значения  $n$ . Если же существует орбита нечетного периода, большего единицы, то число различных периодов бесконечно.

Следует отметить, что теорема Шарковского применима только к вещественнонозначной функции, заданной на действительном интервале. Если, к примеру, функция  $f$  задает вращение каждой точки окружности на угол  $2\pi/n$ , то орбиты всех точек имеют один и тот же период  $n$ . В этом случае никаких других периодов не существует, и, следовательно, теорема Шарковского не применима.

### Упражнения 6.4.

- Непосредственно убедитесь, что если  $f$  имеет орбиту периода  $n$ , то она имеет орбиту периода 1, то есть она имеет неподвижную точку.
- Непосредственно убедитесь, что если  $f$  имеет орбиту периода  $2^n$ , то обладает орбитой периода  $2^k$  для  $n > k$ .

3. Пусть  $f$  задана в точках 1, 2, 3, 4, 5:

$$f(1) = 3,$$

$$f(4) = 5,$$

$$f(2) = 4,$$

$$f(3) = 2,$$

$$f(5) = 1$$

и определена как линейная функция между этими точками. Заметим, что орбита  $x = 1$  имеет вид 1, 3, 4, 2, 5, 1, ..., то есть обладает периодом 5. Нарисуйте графики  $f$  и  $f^{(3)}$ . Покажите, что не существует орбиты периода 3.

## 6.5. Хаос

Следует особо подчеркнуть, что под хаосом мы, как и в большей части математической литературы, понимаем некоторое свойство детерминированных динамических систем, таких, как системы итерированных отображений. Позднее, в другой главе, мы будем рассматривать случайные процессы, которые генерируют фракталы. Но стохастичность представляет собой совершенно другое явление, отличное от хаоса в детерминированном смысле. И детерминированность является единственным смысловым контекстом, в котором мы будем в дальнейшем применять термин «хаос». Примеры такого типа хаоса встречаются во многих математических дисциплинах, включая, например, исследования математических моделей метеосистем.

**Определение хаоса.** Большинство читателей знает из популярной литературы, что основополагающей чертой хаоса является существенная зависимость от начальных условий. Определение хаоса, которое принимаем мы, первоначально было сформулировано Девани [11], и имеет три составные части. В дополнение к условию существенной зависимости в него входит условие перемешивания, именуемое *транзитивностью*, и условие регулярности, именуемое *плотностью периодических точек*<sup>6</sup>. Достаточно неожиданным явились то, что, как доказал Дж. Бэнкс с соавторами [3] в 1992 году, условие существенной зависимости от начальных условий является избыточным, то есть из выполнения условий транзитивности и периодичности следует условие существенной зависимости. Это доказа-

<sup>6</sup>В дальнейшем автор для краткости использует термин *периодичность*.

тельство приведено в п. 7.1. Тем не менее, чтобы облегчить понимание хаоса, мы будем давать его определение в первоначальном виде и непосредственно доказывать условие существенной зависимости, когда это требуется, не ссылаясь на указанную выше теорему.

Рассмотрим метрическое пространство  $(X, d)$ . Будем называть отображение  $f : X \mapsto X$  *хаотическим*, если выполняются следующие условия.

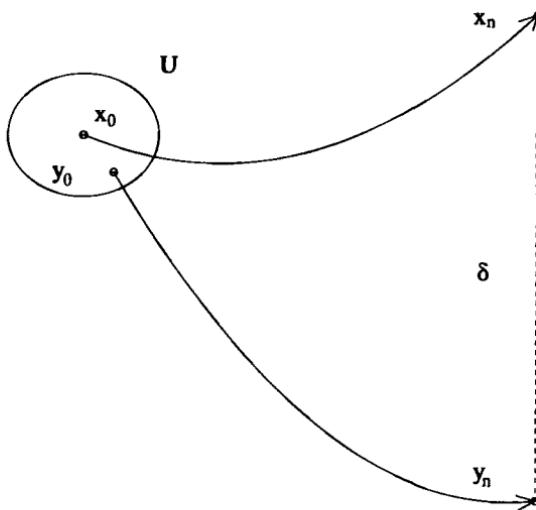
1.  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных условий.
2.  $f$  транзитивно.
3. Периодические точки  $f$  плотны в  $X$ .

Строгая формулировка первого условия такова. Пусть  $x \in X$ , а  $U$  — открытое множество, содержащее  $x$ . Отображение  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных условий, если для некоторого  $\delta > 0$  существуют такое целое число  $n > 0$  и такая точка  $y \in U$ , что  $d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) > \delta$  (см. рис. 6.11).

Отображение  $f$  называется *транзитивным*, если для любой пары  $U, V$  открытых множеств существует такое  $n \geq 0$ , что  $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$  (см. рис. 6.12). Используя теорему Бэра о категориях из теории метрических пространств, можно показать, что если метрическое пространство  $(X, d)$  полное, то транзитивность равносильна существованию плотной орбиты, то есть такой орбиты, замыкание которой равно всему  $X$ .

Наконец, свойство *плотности периодических точек* означает, что в любой окрестности любой точки в  $X$  существует по крайней мере одна периодическая точка (и, следовательно, бесконечно много периодических точек).

Существуют и другие определения хаоса. Например, Гулик [19] называет хаос, описанный выше, *строгим хаосом*. Просто хаос, по его определению, существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической. Мы отсылаем читателей к [19] за обсуждением показателей Ляпунова. Как было сказано выше, Бэнкс с соавторами [3] доказали, что условие существенной зависимости является избыточным при наличии транзитивности и плотности периодических точек. Позже Ассад и Гадбуа построили контрпримеры [2], из которых следовало, что ни транзитивность, ни плотность периодических точек невыводимы



**Рис. 6.11.** Существенная зависимость от начальных условий

из оставшихся двух условий. Недавно Кнудсен [28] показал, что как существенная зависимость, так и транзитивность устойчивы по отношению к замыканию, а также при ограничении на плотные инвариантные подмножества. Он высказал предположение, что функция, заданная на ограниченном метрическом пространстве, может быть определена как хаотическая, если она имеет плотную орбиту и обладает существенной зависимостью от начальных условий.

**Удвоение угла.** Рассмотрим простейший пример хаотического поведения. Обозначим через  $S^1$  окружность (одномерную сферу) на плоскости,  $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ . В комплексной записи

$$S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbf{R}\}.$$

Определим  $f : S^1 \mapsto S^1$  уравнением:

$$f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}.$$

Если же обозначить элементы  $S^1$  как комплексные числа  $z$ , тогда получаем:

$$f(z) = z^2, \quad (6.5)$$

то есть обычный комплексный квадратичный полином.

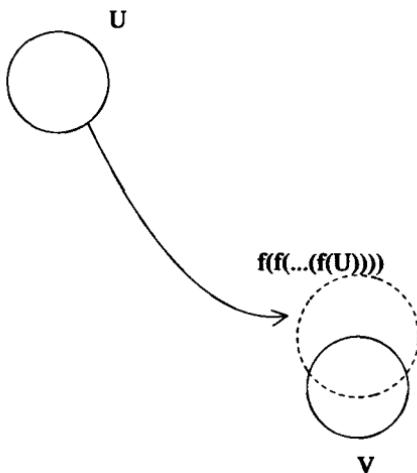


Рис. 6.12. Транзитивность

**Теорема 6.5.3.** Функция  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ , или, что эквивалентно, квадратичная функция  $f(z) = z^2$ , хаотична на окружности  $S^1$ .

**Доказательство.** Мы должны показать, что  $f$  удовлетворяет условиям существенной зависимости, транзитивности и периодичности.

**Существенная зависимость.** Предположим, что  $e^{i\theta} \in S^1$ , а  $U$  — открытое множество, содержащее  $e^{i\theta}$ . Пусть  $A$  — открытая дуга в  $U$ , содержащая  $e^{i\theta}$ . Отметим, что  $f^{(n)}(A)$  представляет собой дугу, которая имеет в  $2^n$  раз большую протяженность, чем  $A$ , если допустить многократный обход окружности (рис. 6.13). При достаточно большом  $n$ ,  $f^{(n)}(A)$  покрывает всю окружность  $S^1$ . Зафиксируем такое  $n$ . Для выбранного  $n$  существуют точки в  $A$ , а следовательно, и в  $U$ , которые разнесены посредством  $f^{(n)}$  по крайней мере на единичное расстояние. Таким образом, условие существенной зависимости выполняется при  $\delta = 1$ .

**Транзитивность.** Пусть  $U$  и  $V$  — открытые множества в  $S^1$ . Рассуждая таким же образом, как и выше, для достаточно большого  $n$  получаем, что  $f^{(n)}(U)$  покрывает  $S^1$  и поэтому пересекает  $V$ .

**Периодичность.** Точки  $e^{i\theta}$ , имеющие период  $n$ , удовлетворяют равенству  $e^{i2^n\theta} = e^{i\theta}$ , то есть они являются корнями из единицы порядка  $2^n - 1$ . Множество всех корней такого вида (для всех  $n$ )

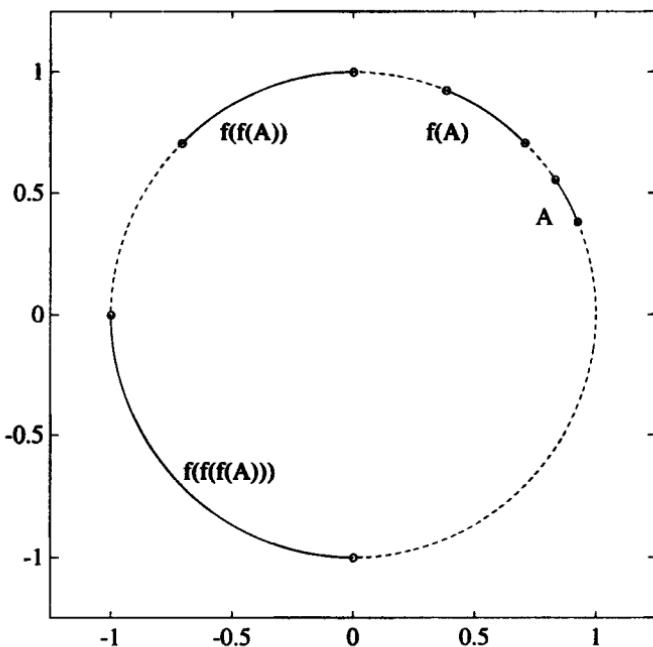


Рис. 6.13. Действие  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$

плотно в  $S^1$ . Подробности доказательства оставлены для упражнений (упр. 1 в конце данного параграфа). ■

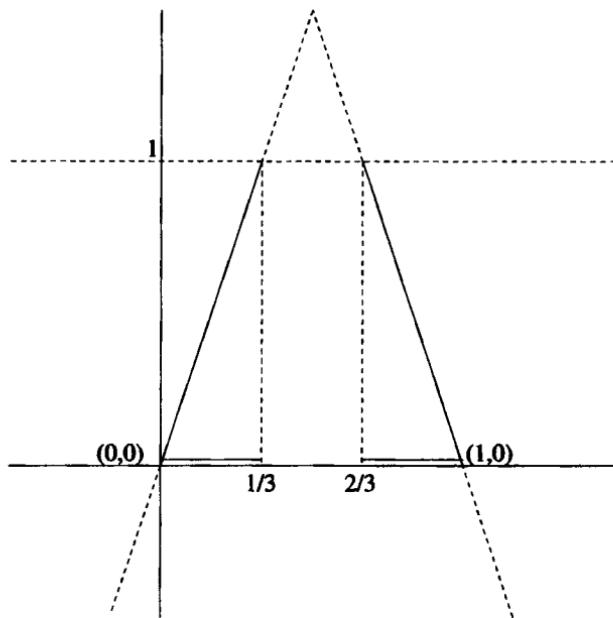
**Тентообразное отображение.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1/2 \\ 3 - 3x, & x > 1/2, \end{cases}$$

график которой приведен на рис. 6.14, иногда называется *тентообразным отображением*. Рассмотрим его динамику при итерировании. Пусть  $x_0$  — начальная точка, и пусть  $x_n = f(x_{n-1})$  или, что равносильно,

$$x_n = f^{(n)}(x_0).$$

Обозначим через  $\Lambda$  множество начальных точек, которым соответствуют ограниченные орбиты  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ . Легко видеть (упр. 2 в конце настоящего параграфа), что если при некотором  $n \geq 0$  либо  $x_n < 0$ , либо  $x_n > 1$ , то орбита расходится к  $-\infty$ . Таким образом,  $\Lambda \subset [0, 1]$ .

Рис. 6.14. Тентообразное отображение,  $y = f(x)$ 

Более того, в  $\Lambda$  не входят все точки отрезка  $[0, 1]$ , в которых  $f^{(n)}(x) > 1$  для некоторого  $n$ . Для  $n = 1$  это означает, что  $\Lambda$  не содержит открытый интервал  $(1/3, 2/3)$ . Для  $n = 2$  два интервала,  $(1/9, 2/9)$  и  $(7/9, 8/9)$ , не принадлежат  $\Lambda$  (рис. 6.15). Продолжая далее в таком же духе, мы убеждаемся, что из  $\Lambda$  выбрасываются те же самые открытые интервалы, что и при построении классического канторова множества  $\mathcal{C}$ . Таким образом,

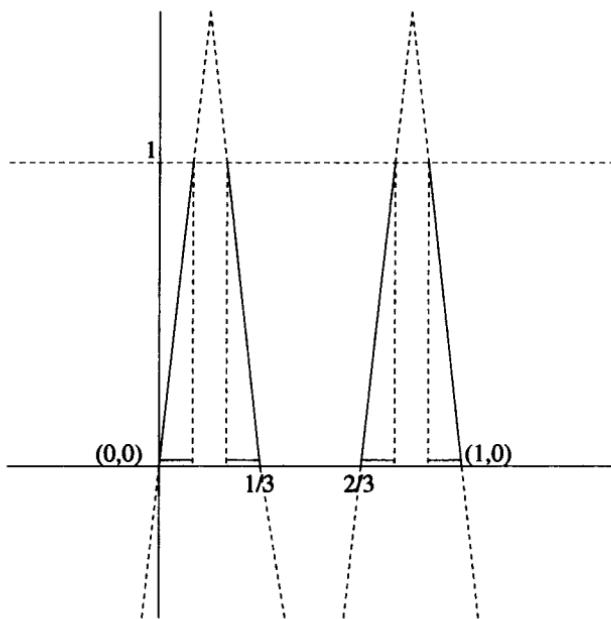
$$\Lambda \subset \mathcal{C}.$$

Для того чтобы убедиться, что  $\Lambda = \mathcal{C}$ , покажем, что  $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ . Положим, что  $x \in \mathcal{C}$  имеет представление (см. п. 2.3):

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots$$

где  $x_i = 0$  или 2. Если  $x_1 = 0$ , то

$$f(x) = 3x = \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots \in \mathcal{C}.$$



**Рис. 6.15.**  $y = f^{(2)}(x)$

Если  $x_1 = 2$ , то

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 - 3x = 3 - \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots \right) \\ &= \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots \right) - \left( \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \dots \right) \\ &= \frac{(2 - x_2)}{3} + \frac{(2 - x_3)}{3^2} + \dots \end{aligned}$$

Так как каждый числитель в последнем выражении принимает значение 0 или 2, то и в этом случае  $f(x) \in \mathcal{C}$ .

#### **Теорема 6.5.4.** Тентообразная функция

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1/2 \\ 3 - 3x, & x > 1/2, \end{cases}$$

хаотична на классическом канторовом множестве  $\mathcal{C}$ .

**Доказательство.** Мы докажем свойства существенной зависимости, транзитивности и периодичности, сопутствующие хаосу.

*Существенная зависимость.* Пусть  $x \in \mathcal{C}$  и  $\delta = 1/2$ . Пусть  $U$  — открытое множество, содержащее  $x$ . Выберем такое достаточно большое  $n$ , чтобы  $B_r(x) \subset U$  при  $r = 1/3^n$ . Пусть  $C_n$  — множество, полученное на шаге  $n$  построения канторова множества (рис. 2.20). Для  $n \geq 1$  такое множество состоит из  $2^n$  интервалов длины  $1/3^n$ . Обозначим через  $I_n$  некоторый интервал, содержащий  $x$ . Из выражений, приведенных непосредственно перед данной теоремой, имеем  $f^{(n)}(I_n) = [0, 1]$ . Из этого следует, что существует такая точка  $y \in I_n \cap C$ , что

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| > 1/2 = \delta.$$

*Транзитивность.* Транзитивность следует из тех же соображений, которые использовались при доказательстве существенной зависимости. В любой окрестности  $U$  существует интервал  $I_n$ , для которого  $f^{(n)}(I_n) = [0, 1]$ , и поэтому  $f^{(n)}(U)$  имеет непустое пересечение с каждой окрестностью  $V$ , содержащей точки  $\mathcal{C}$ .

*Периодичность.* Графики функций  $y = f^{(n)}(x)$  и  $y = x$ , очевидно, пересекаются в точности  $2^n$  раз, а значит  $f^{(n)}$  имеет  $2^n$  неподвижных точек. Орбиты этих неподвижных точек по необходимости ограничены и поэтому они принадлежат отмеченному множеству  $\Lambda$  и, следовательно,  $\mathcal{C}$ . Из того, что каждый из  $2^n$  подинтервалов, образующих  $C_n$ , содержит по две неподвижные точки  $f^{(n+1)}$ , следует, что эти неподвижные точки образуют плотное подмножество в  $\mathcal{C}$ . ■

**Обратный сдвиг.** Пусть  $\mathcal{C}$  — классическое канторово множество, образуемое выбрасыванием серединных третей отрезков. Напомним, что каждому  $x \in \mathcal{C}$  соответствует единственное троичное представление

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \quad (\text{по основанию } 3),$$

в котором каждая цифра  $x_i \in \{0, 2\}$ . Это означает, что

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots$$

Мы покажем, что функция, именуемая *обратным сдвигом* (или просто *сдвигом*) троичного представления, хаотична на  $\mathcal{C}$ . Эта функция определяется как

$$B(x) = 0, x_2 x_3 x_4 \dots \tag{6.6}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} B^{(2)} &= 0, x_3 x_4 x_5 \dots, \\ B^{(3)} &= 0, x_4 x_5 x_6 \dots, \\ &\vdots \\ B^{(n)} &= 0, x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Так как

$$3x = x_1 + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3^2} + \frac{x_4}{3^3} + \dots,$$

то, следовательно,  $B(x)$  может быть описана арифметически в виде уравнения:

$$B(x) = 3x \pmod{1}, \quad x \in \mathcal{C}, \quad (6.7)$$

за исключением значений  $x = 1/3$  или  $x = 1$ .

Приводимое ниже доказательство теоремы интересно само по себе, но оно также указывает путь, по которому в п. 7.2 будет доказываться важный результат о хаотическом поведении сдвига в абстрактно определенном «символьном» пространстве.

**Теорема 6.5.5.** *Обратный сдвиг ведет себя хаотически на канторовом множестве  $\mathcal{C}$ .*

#### Доказательство.

*Существенная зависимость.* Положим  $\delta = 1/3$ . Пусть  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \in \mathcal{C}$  и пусть  $U$  — открытое множество, содержащее  $x$ . Выберем такое  $n$ , чтобы шар  $B_r(x)$  радиуса  $r = 1/3^n$  содержался в  $U$ . Образуем точку  $y \in \mathcal{C}$ , сначала полагая  $y = x$ , а затем изменения значения  $y_{n+1}$  с  $x_{n+1}$  на  $2 - x_{n+1}$ . По построению,

$$\begin{aligned} B^{(n)}(x) &= 0, x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots, \\ B^{(n)}(y) &= (2 - x_{n+1}) x_{n+2} x_{n+3} \dots \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$|B^{(n)}(x) - B^{(n)}(y)| = 2/3 > \delta,$$

то есть условие существенной зависимости выполняется.

*Транзитивность.* Для доказательства транзитивности положим, что  $U$  и  $V$  — открытые множества, которые без потери общности можно считать не имеющими общих элементов. Выберем точку  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$  из  $\mathcal{C}$ , которая принадлежит  $U$  и точку  $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$  из  $\mathcal{C}$ , которая принадлежит  $V$ . Выберем такое  $n$ , что для  $r = 1/3^n$ ,  $B_r(x) \subset U$  и  $B_r(y) \subset V$ . При таком выборе  $n$  точка  $z \in \mathcal{C}$ , определенная как

$$z = 0, x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n \dots$$

принадлежит  $U$ , так как

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x_{n+1} - y_1|/3^{n+1} + |x_{n+2} - y_2|/3^{n+2} + \dots \\ &\leq 2/3^{n+1} + 2/3^{n+2} = \dots \\ &= 2/3^{n+1}(1 + 1/3 + 1/3^2 + \dots) \\ &= 1/3^n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$B^{(n)}(z) = y \in V.$$

Таким образом, обратный сдвиг транзитивен.

Как уже отмечалось при определении транзитивности, она эквивалентна наличию единственной точки  $x$ , орбита которой плотна в пространстве. В приведенном примере такая точка  $x$  имеет вид:

$$x = 0, 02|00 02 20 22|000 002 \dots \quad (\text{по основанию } 3).$$

Эта запись получена последовательным выписыванием всех блоков нулей и двоек длины 1, затем всех блоков длины 2 и т. д. Вертикальная черта используется для отделения блоков длины 1 от блоков длины 2 и т. д. При любом  $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ , принадлежащем  $\mathcal{C}$ , и любом  $n$ , существует такой блок длины  $n$  в представлении  $x$ , что первые его  $n$  элементов равны соответствующим элементам в представлении  $y$ . Положим, что такой блок начинается с индекса  $k + 1$  в представлении  $x$ . Тогда

$$B^{(k)}(x) = 0, y_1 y_2 \dots y_n x_{n+k+1} \dots \tag{6.8}$$

Из этого следует, что  $|B^{(k)}(x) - y| \leq 1/3^n$  (упр. 7 в конце данного параграфа). Так как при любом  $\varepsilon > 0$  можно выбрать достаточно большое  $n$  такое, что  $1/3^n < \varepsilon$ , то существует точка  $B^{(k)}$  орбиты  $x$ ,

которая принадлежит  $\varepsilon$ -шару с центром в  $y$ . Следовательно, орбита точки  $x$  плотна в  $C$ .

**Периодичность.** Покажем, что любая точка  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \in C$  может быть аппроксимирована с заданной точностью периодической точкой. Последовательность периодических точек в  $C$ , определенная как

$$\begin{aligned} &x_1 \overline{x_1} \dots, \\ &x_1 x_2 \overline{x_1 x_2} \dots, \\ &x_1 x_2 x_3 \overline{x_1 x_2 x_3} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

должна сходиться к  $x$ , что и требовалось доказать. ■

**Применение обратного сдвига.** Приведем еще один пример хаотической функции, заданной при помощи оператора обратного сдвига. Он аналогичен предыдущему примеру обратного сдвига, определенного на троичных представлениях точек классического канторова множества  $C$ . Однако теперь мы будем иметь дело непосредственно с абстрактными символами, а не с конкретными представлениями, как в троичном случае. Данный пример можно рассматривать как введение или предварительное рассмотрение темы п. 7.3, «Хаос и фракталы».

Пусть  $S$  — аттрактор для итерированной функции, определенной в виде аффинных отображений (рис. 6.16):

$$\begin{aligned} T_1(z) &= (1/3)z, \\ T_2(z) &= (1/3)z + 1, \\ T_3(z) &= (1/3)z + i. \end{aligned}$$

Аттрактор  $S$  представляет собой вполне несвязное множество и, фактически, является модифицированным множеством Кантора.

Сопоставим каждой точке  $x \in S$  последовательность целых чисел

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots, \quad \sigma_i = 1, 2, 3 \tag{6.9}$$

которая служит ее *адресом*. Например, наличие адреса точки  $x$  в виде  $\sigma = 2312 \dots$  просто означает, что выполняются утверждения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in T_2(S), \\ \mathbf{x} &\in T_2T_3(S), \\ \mathbf{x} &\in T_2T_3T_1(S), \\ \mathbf{x} &\in T_2T_3T_1T_2(S), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Адреса точек в  $S$  на уровне 2 изображены на рис. 6.17.

Легко видеть, что каждая точка  $\mathbf{x} \in S$  имеет единственный адрес в виде (6.9) и что каждая последовательность вида (6.9) определяет единственную точку  $\mathbf{x} \in S$ . Если  $\mathbf{x}$  имеет адрес  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ , а  $\mathbf{y}$  имеет адрес  $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$ , то мы можем оценить расстояние между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  следующим образом. Если  $\sigma_i = \tau_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ , но  $\sigma_{n+1} \neq \tau_{n+1}$ , то  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  лежат в множестве  $T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_n}(S)$ , и диаметр этого множества равен  $1/(3^{(n-1)}\sqrt{2})$ , так что

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq 1/(3^{(n-1)}\sqrt{2}). \quad (6.10)$$

Используя адреса, можно естественным образом задать хаотическое отображение на аттракторе  $S$ . Если точка  $\mathbf{x} \in S$  имеет адрес  $\sigma$ , то оператор обратного сдвига  $B$  действует на  $\mathbf{x}$  следующим образом:

$$B(\sigma) = B(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots \quad (6.11)$$

Определим теперь  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  как точку  $\mathbf{y} \in S$ , имеющую адрес  $B(\sigma)$ . Будем называть  $f$  *отображением на  $S$ , индуцированным обратным сдвигом*.

---

**Теорема 6.5.6.** *Отображение  $f : S \rightarrow S$ , индуцированное обратным сдвигом в соответствии с формулой (1.11), хаотично.*

**Доказательство.** Доказательство в основном повторяет рассуждения, приведенные в теореме 6.5.5.

**Существенная зависимость.** Пусть  $\mathbf{x} \in S$ ,  $U$  — открытое множество, содержащее  $\mathbf{x}$ ,  $\delta = 1/2$  — минимальное расстояние между точками в любой паре множеств  $T_1(S)$ ,  $T_2(S)$  и  $T_3(S)$ . Зададим адрес  $\mathbf{x}$  в виде:

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \dots \quad \sigma_i = 1, 2 \text{ или } 3.$$

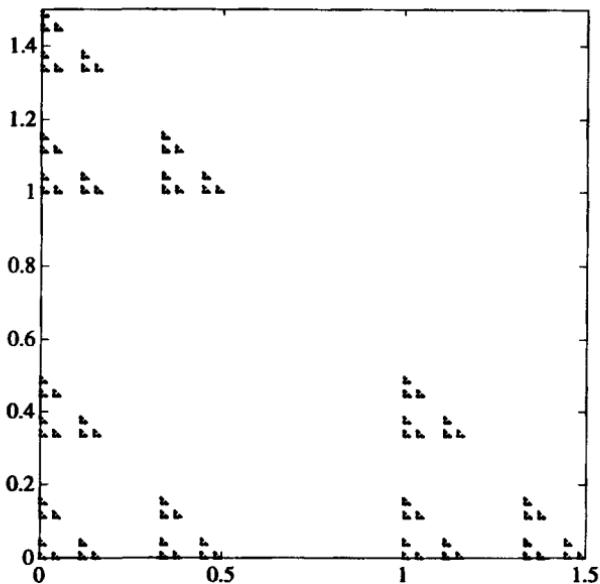


Рис. 6.16. Вполне несвязный ковер Серпинского (уровень 3)

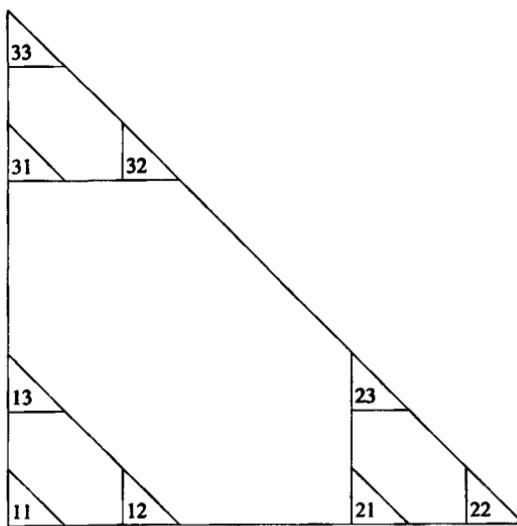


Рис. 6.17. Адреса на уровне 2

Выберем такое  $n$ , чтобы шар  $B_r(\mathbf{x})$  радиуса  $r = 1/3^{n-1}$  содержался в  $U$ . Создадим адрес

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots,$$

сначала полагая  $\tau = \sigma$ , а затем изменения символ  $\tau_{n+1}$  так, чтобы он уже не равнялся  $\sigma_{n+1}$ . Пусть  $\mathbf{y}$  — точка в  $S$ , имеющая адрес  $\tau$ . В соответствии с неравенством (1.10),

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq 1/(3^{(n-1)}\sqrt{2}) < 1/3^{n-1}.$$

В частности,  $\mathbf{y} \in U$ .

По построению

$$\begin{aligned} B^{(n)}(\sigma) &= \sigma_{n+1} \sigma_{n+2} \sigma_{n+3} \dots, \\ B^{(n)}(\tau) &= \tau_{n+1} \tau_{n+2} \tau_{n+3} \dots \end{aligned}$$

Из этого следует, что  $f^{(n)}(\mathbf{x})$  и  $f^{(n)}(\mathbf{y})$ , которые имеют адреса  $B^{(n)}(\sigma)$  и  $B^{(n)}(\tau)$ , лежат в разных множествах  $T_1(S)$ ,  $T_2(S)$  и  $T_3(S)$ . Поэтому

$$\|f^{(n)}(\mathbf{x}) - f^{(n)}(\mathbf{y})\|_2 \geq \delta = 1/2,$$

что подтверждает выполнение условия существенной зависимости.

*Транзитивность.* Для доказательства транзитивности положим, что  $U$  и  $V$  открытые множества, которые без потери общности можно предположить не имеющими общих элементов. Выберем точки  $\mathbf{x} \in U$  и  $\mathbf{y} \in V$ , и пусть соответствующие им адреса имеют вид

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

и

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots$$

Выберем такое  $n$ , что для  $r = 1/3^{n-1}$  имеет место  $B_r(\mathbf{x}) \subset U$ . Тогда точка  $\mathbf{z} \in S$ , имеющая адрес

$$\zeta = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots$$

содержится в  $U$  в соответствии с неравенством (1.10). Более того,  $f^{(n)}(\mathbf{z})$  имеет адрес  $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots$ , и поэтому

$$f^{(n)}(\mathbf{z}) = \mathbf{y}.$$

Таким образом, условие транзитивности выполняется.

*Периодичность.* Мы должны доказать, что любая точка  $x \in S$  может быть аппроксимирована с любой точностью периодической точкой. Пусть  $x$  имеет адрес  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ . Последовательность периодических точек в  $S$ , определенных адресами

$$\begin{aligned} &\sigma_1\bar{\sigma}_1, \\ &\sigma_1\sigma_2\bar{\sigma_1\sigma_2}, \\ &\sigma_1\sigma_2\sigma_3\bar{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

должна сходиться к  $x$ , что и доказывает периодичность. ■

### Упражнения 6.5.

1. Убедитесь, что периодические точки функции  $z^2$ , действующей на  $S^1$ , плотны в  $S^1$ .
2. Рассмотрим итерации тентообразного отображения (рис. 6.14). Убедитесь, что если для некоторого  $n \geq 0$  либо  $x_n < 0$ , либо  $x_n > 1$ , то орбита расходится к  $-\infty$ .
3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 1/2, \\ 4 - 4x, & x > 1/2. \end{cases}$$

В пунктах (а)–(в) основным методом является построение паутинных диаграмм.

- а) Покажите, что если  $x < 0$ , то  $T^n(x) \rightarrow -\infty$ , и если  $x > 1$ , то  $T^n(x) \rightarrow -\infty$ .
  - б) Покажите, что если  $x \in (1/4, 3/4)$ , то орбита  $T^n(x)$  расходится.
  - в) Покажите, что если  $x \in (1/16, 3/16)$  или  $x \in (13/16, 15/16)$ , то орбита  $T^n(x)$  расходится.
  - г) Учитывая сказанное выше, что вы думаете о том, какой вид должно иметь множество  $\Lambda$ ?
  - д) Покажите, что отображение  $T$  ведет себя хаотически на множестве  $\Lambda$ .
4. Найдите элемент аттрактора, изображенного на рис. 6.16, орбита которого при обратном сдвиге плотна в аттракторе.
  5. (Математический и компьютерный проект.) Проведите исследование динамики итерирования функций с модулем. Сравните

динамику для приведенных ниже случаев. Мы благодарны Кэрол Ховальд, которая предложила и выполнила эти эксперименты.

- а)  $y = -|x| + 1$ ,
  - б)  $y = -4|x - 1/2| + 2$ ,
  - в)  $y = -2|x - 1/2| + 1$ ,
  - г)  $y = -|x - 1/2| + 1/2$ ,
  - д)  $y = -8|x - 1/2| + 4$ ,
  - е)  $y = -4|x| + 2$ .
6. (Компьютерный проект.) Выполните эксперименты по хаотическим отображениям и распределениям вероятностей (см. [34]).
7. Убедитесь в справедливости неравенства (1.8),  $|B^{(k)}(x) - y| \leq 1/3^n$ , возникающего при обсуждении транзитивности обратного сдвига на множестве Кантора.
8. Покажите, что если отображение  $f : X \rightarrow X$  обладает плотной орбитой для некоторой точки  $x \in X$ , то  $f$  является транзитивным.

# Глава 7.

# Хаотическая динамика II

## 7.1. Существенная зависимость

Следующая теорема, касающаяся определения хаоса, появилась в [3] в 1992 году.

---

**Теорема 7.1.1.** *Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство, содержащее бесконечное множество точек. Если отображение  $f : X \rightarrow X$  непрерывно и транзитивно, а периодические точки  $f$  плотны в  $X$ , то  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных условий.*

\* **Доказательство.** Во-первых, договоримся об обозначениях. Орбита точки  $x \in X$  определяется как

$$\mathcal{O}(x) = \{f^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Если  $x, q \in X$ , то

$$d(x, \mathcal{O}(q)) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathcal{O}(q)\}.$$

Если  $q_1, q_2 \in X$ , то

$$d(\mathcal{O}(q_1), \mathcal{O}(q_2)) = \inf\{d(a, b) : a \in \mathcal{O}(q_1), b \in \mathcal{O}(q_2)\}.$$

**Замечание:** использование обозначения  $d(E, F)$  в данном контексте отличается от приведенного в прил. А.3.

Выберем две произвольные периодические точки  $q_1$  и  $q_2$ , имеющие непересекающиеся орбиты  $\mathcal{O}(q_1)$  и  $\mathcal{O}(q_2)$ . Пусть

$$\delta_0 = d(\mathcal{O}(q_1), \mathcal{O}(q_2)).$$

Мы покажем, что условие существенной зависимости выполняется при  $\delta = \delta_0/8$ .

Заметим, что  $\delta_0 > 0$  и что для любого  $x \in X$ , либо  $d(x, \mathcal{O}(q_1)) \geq \delta_0/2$ , либо  $d(x, \mathcal{O}(q_2)) \geq \delta_0/2$ .

Пусть  $x \in X$ , а  $U$  — открытое множество, содержащее  $x$ . Как обычно, обозначим через  $B_\delta(x)$  открытый шар радиуса  $\delta$  с центром в  $x$ . Пусть  $p$  — периодическая точка в  $W = U \cap B_\delta(x)$  периода  $n$ . Исходя из приведенных выше рассуждений, одна из периодических точек,  $q_1$  или  $q_2$  (обозначим ее  $q$ ), имеет орбиту, удовлетворяющую неравенству  $d(x, \mathcal{O}(q)) > 4\delta$ . Положим

$$V = \bigcap_{i=0}^n f^{(-i)}(B_\delta(f^{(i)}(q))).$$

Множество  $V$  непусто, так как  $q \in V$ , и открыто, так как прообразы при непрерывных отображениях открытых множеств открыты (прил. А.2). Вследствие транзитивности  $f$  существуют точка  $y \in W$  и целое число  $k$ , такие, что  $f^{(k)}(y) \in V$ .

Пусть  $j$  — целая часть  $k/n + 1$ . Следовательно,  $k/n + 1 = j + r$ , где  $r$  — дробная часть,  $0 \leq r < 1$ . Очевидно, что целое число  $nj - k$  равно  $n - rn$ . Отсюда следует, что  $1 \leq nj - k \leq n$ .

По построению,

$$\begin{aligned} f^{(nj)}(y) &= f^{(nj-k)}(f^{(k)}(y)) \\ &\in f^{(nj-k)}(V) \subset B_\delta(f^{(nj-k)}(q)). \end{aligned}$$

Оценим  $d(f^{(nj)}(p), f^{(nj)}(y))$ , или, что эквивалентно,  $d(p, f^{(nj)}(y))$ , так как  $p$  имеет период  $n$ . Пусть

$$\begin{aligned} a &= f^{(nj)}(y), \\ b &= f^{(nj-k)}(q). \end{aligned}$$

Заметим, что  $d(a, b) < \delta$ . Применим неравенство треугольника к треугольникам с вершинами  $p, a, b$  и  $x, p, b$ :

$$\begin{aligned} d(p, b) &\leq d(p, a) + d(a, b), \\ d(x, b) &\leq d(x, p) + d(p, b). \end{aligned}$$

Тогда

$$d(x, b) \leq d(x, p) + d(p, a) + d(a, b),$$

или

$$d(p, a) \geq d(x, b) - d(x, p) - d(a, b).$$

По построению,

$$d(x, b) = d(x, f^{(n_j-k)}(q)) \geq d(x, \mathcal{O}(q)) \geq 4\delta.$$

Так как  $p \in B_\delta(x)$ , то  $d(x, p) < \delta$  и поэтому

$$d(p, b) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta,$$

то есть

$$d(f^{(n_j)}(p), f^{(n_j)}(y)) > 2\delta.$$

Применяя неравенство треугольника к треугольнику с вершинами  $f^{(n_j)}(x), f^{(n_j)}(p), f^{(n_j)}(y)$ , получаем:

$$d(f^{(n_j)}(x), f^{(n_j)}(p)) > \delta \quad \text{или} \quad d(f^{(n_j)}(x), f^{(n_j)}(y)) > \delta,$$

так как если длина одной из сторон треугольника больше  $2\delta$ , то одна из двух оставшихся сторон имеет длину по меньшей мере  $\delta$ . В обоих случаях существует точка ( $y$  или  $p$ ) в  $W$ ,  $n_j$ -итерация которой находится на расстоянии, большем  $\delta$ , от  $f^{(n_j)}(x)$ . ■

## 7.2. Символическая динамика

Одним из основных способов доказательства наличия хаоса в дискретной динамической системе является использование *символической динамики*<sup>1</sup> на некотором «символьном» пространстве. Понимание этого подхода является ключевым при рассмотрении других, более общих форм хаоса. Перед прочтением этого параграфа будет уместно еще раз просмотреть материал, относящийся к обратному сдвигу из п. 6.5.

*Символьное пространство  $\Sigma$  на  $N$  элементах* определяется как множество всех последовательностей

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots, \quad \sigma_n \in \{1, \dots, N\}.$$

Если

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$$

---

<sup>1</sup>Отправная идея — кодировать каждую траекторию бесконечной последовательностью символов, — высказанная в середине 30-х годов Хедлундом, развившаяся теперь в богатую теорию, окрещенную Марстоном Морсом *символической динамикой* [62].

и

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots,$$

то расстояние между ними определяется как

$$d(\sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sigma_n - \tau_n|}{(N+1)^n}. \quad (7.1)$$

В соответствии с упр. 1 в конце данного параграфа символьное пространство  $(\Sigma, d)$  является метрическим пространством.

**Теорема 7.2.2.** *Символьное пространство  $(\Sigma, d)$  на  $N$  элементах метрически эквивалентно канторову множеству и, следовательно, компактно, совершенно и вполне несвязно.*

**Доказательство.** Пусть  $X$  — множество всех точек  $x \in [0, 1]$ , представленных в виде:

$$\begin{aligned} x &= 0, x_1 x_2 x_3 \dots && (\text{по основанию } N+1), \\ &= \frac{x_1}{(N+1)} + \frac{x_2}{(N+1)^2} + \frac{x_3}{(N+1)^3} + \dots, \end{aligned}$$

причем  $x_i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . То есть  $X$  представляет собой канторово множество типа «выброшенная цифра», как в п. 2.3. В данном случае  $X$  состоит из точек отрезка  $[0, 1]$ , записанных в системе счисления по основанию  $N+1$ , причем  $x_i \neq 0$ . В евклидовой метрике  $|x - y|$  множество  $X$  компактно, совершенно и вполне несвязно.

Из метрической эквивалентности пространств  $(\Sigma, d)$  и  $X$  с евклидовой метрикой немедленно следует, что  $(\Sigma, d)$  компактно, совершенно и вполне несвязно, в силу стандартных топологических теорем (прил. А.2).

Точке

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \in X$$

сопоставим последовательность

$$\sigma = \phi(x) = x_1 x_2 x_3 \dots$$

Подробнее, образ  $\sigma$  (в символьном пространстве) точки  $x \in X$  мы получаем, отбрасывая десятичную точку в записи  $x$  и рассматривая полученную последовательность как набор символов из

$\{1, 2, \dots, N\}$ . Очевидно, что функция  $\phi$  отображает  $X$  на  $\Sigma$  взаимно однозначно. Для того чтобы продемонстрировать метрическую эквивалентность, нам необходимо указать такие константы  $K_1, K_2 > 0$ , что

$$K_1 d(\phi(x), \phi(y)) \leq |x - y| \leq K_2 d(\phi(x), \phi(y))$$

для всех  $x, y \in X$ .

Легче найти  $K_2$ . Для  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$  и  $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$  из  $X$ , по неравенству треугольника, имеем:

$$|x - y| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} = d(\phi(x), \phi(y)).$$

Таким образом, можно положить  $K_2 = 1$ .

Пусть  $n$  — наименьшее значение индекса  $i$ , для которого  $x_i \neq y_i$ . Многократно применяя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{(N+1)^i} - \frac{y_i}{(N+1)^i} \right| \\ &\geq \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n} - \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right| \\ &\geq \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \\ &\geq \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{(N+1)^i} \\ &= \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n} - \frac{N-1}{N} \frac{1}{(N+1)^n} \\ &= \left( |x_n - y_n| - \frac{N-1}{N} \right) \frac{1}{(N+1)^n}. \end{aligned}$$

Так как  $1 \leq |x_n - y_n| \leq N$  (упр. 5 в конце параграфа), то

$$|x_n - y_n| - \frac{N-1}{N} \geq \frac{1}{N^2} \left( |x_N - y_n| + \frac{N-1}{N} \right),$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
 |x - y| &\geq \frac{1}{N^2} \left( |x_n - y_n| + \frac{N-1}{N} \right) \frac{1}{(N+1)^n} \\
 &\geq \frac{1}{N^2} \left( \frac{|x_n - y_n|}{(N+1)^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i} \\
 &= \frac{1}{N^2} d(\phi(x), \phi(y)).
 \end{aligned}$$

Следовательно, можно положить  $K_1 = 1/N^2$ . ■

Оператор обратного сдвига  $B$ , обычно называемый просто оператором сдвига, определяется на  $\Sigma$  как

$$B(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots \quad (7.2)$$

**Теорема 7.2.3.** Сдвиг  $B : \Sigma \mapsto \Sigma$  хаотичен.

\* **Доказательство.**

*Существенная зависимость.* Пусть  $\delta$  — любое положительное число,  $\delta > 1/(N+1)$ . Пусть  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$  из  $\Sigma$ , и пусть  $U$  — открытое множество, содержащее  $\sigma$ . Выберем такое  $n$ , чтобы  $1/(N+1)^n$ -окрестность  $\sigma$  содержалась в  $U$ . Создадим точку  $\tau \in \Sigma$ , полагая сначала  $\tau = \sigma$ , а затем изменяя значение  $\tau_{n+1}$  таким образом, чтобы  $\tau_{n+1} \neq \sigma_{n+1}$ . По построению,  $B^{(n)}(\sigma) = \sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\sigma_{n+3}\dots$  и  $B^{(n)}(\tau) = \tau_{n+1}\sigma_{n+2}\sigma_{n+3}\dots$  Откуда следует, что  $d(B^{(n)}(\sigma), B^{(n)}(\tau)) \geq 1/(N+1) > \delta$ .

*Транзитивность.* Для доказательства транзитивности предположим, что  $U$  и  $V$  — открытые множества в  $\Sigma$ . Без потери общности можно считать, что  $U \cap V = \emptyset$ . Выберем точку  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$  в  $U$  и точку  $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$  в  $V$ . Выберем  $n$  таким, чтобы  $1/(N+1)^n$ -окрестности  $\sigma$  и  $\tau$  лежали в  $U$  и  $V$ , соответственно. При таком выборе  $n$  точка  $\xi \in \Sigma$ , определяемая последовательностью

$$\sigma_1\dots\sigma_n\tau_1\dots\tau_n\dots,$$

лежит в  $U$ . С другой стороны,

$$B_{(n)}(\xi) = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots = \tau$$

и, следовательно, лежит в  $V$ .

Как уже было упомянуто ранее в п. 6.5, транзитивность эквивалентна наличию единственной точки  $\xi$ , орбита которой плотна в пространстве. В случае  $N = 2$  такая точка  $\xi$  имеет вид:

$$\xi = 1\ 2|11\ 12\ 21\ 22|111\ 112\dots,$$

Эта запись получена последовательным выписыванием всех блоков нулей и двоек длины 1, затем всех блоков длины 2 и т. д. Вертикальная черта здесь служит для отделения блоков длины 1 от блоков длины 2 и так далее. При любой заданной  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$  из  $\Sigma$  и любом  $n$  существует блок длины  $n$  в записи  $\xi$ , который совпадает с первыми  $n$  элементами последовательности для  $\sigma$ . Предположим, что этот блок начинается с индекса  $k + 1$  в представлении  $\xi$ . Тогда

$$B^{(k)}(\xi) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \tau_{n+k+1} \dots$$

и, следовательно,  $d(B^{(k)}(\xi), \sigma) \leq 1/(N + 1)^n$  в соответствии с упр. 2 в конце данного параграфа. Из этого следует, что орбита  $\xi$  плотна в  $\Sigma$ .

*Периодичность.* Мы должны доказать, что любая точка  $\sigma \in \Sigma$  может быть аппроксимирована с заданной точностью периодической точкой. Пусть  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$  Последовательность периодических точек в  $\Sigma$

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \sigma_1 \overline{\sigma_1} \dots \\ & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \overline{\sigma_1 \sigma_2} \dots \\ & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \overline{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

должна сходиться к  $\sigma$ , что и доказывает утверждение. ■

Обратимся теперь к понятию топологической сопряженности. Пусть  $f : \Lambda \mapsto \Lambda$  — непрерывное отображение,  $B : \Sigma \mapsto \Sigma$  — сдвиг в символическом пространстве. Хотя множество  $\Lambda$  может быть любым компактным подмножеством метрического пространства, мы

ограничимся рассмотрением компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ . Мы говорим, что отображение  $f$ , действующее на  $\Lambda$ , является *топологически сопряженным* по отношению к сдвигу  $B$ , действующему на  $\Sigma$ , если существует гомеоморфизм  $T$ , то есть такое взаимно однозначное бинепрерывное отображение  $T$  из  $\Lambda$  в  $\Sigma$ , что приведенная ниже диаграмма коммутативна. Это означает, что  $B \circ T(x) = T \circ f(x)$  для всех  $x \in \Lambda$  или, что равносильно,  $f(x) = T^{-1} \circ B \circ T(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \Sigma & \xrightarrow{B} & \Sigma \end{array} \quad (7.3)$$

Перед доказательством основной теоремы о топологической сопряженности приведем следующую лемму.

---

**Лемма 7.2.1.** *Предположим, что  $T$  в коммутативной диаграмме (7.3) есть гомеоморфизм. Положим  $\hat{\delta} > 0$  и определим*

$$\delta = \inf\{\|x - y\|_2 : d(T(x), T(y)) > \hat{\delta}\}.$$

*Тогда  $\delta > 0$ .*

\* **Доказательство.** Доказательство будем проводить методом от противного. Если  $\delta = 0$ , то для каждого  $n > 0$  существуют  $x_n$  и  $y_n$  из  $\Lambda$ , для которых  $d(T(x_n), T(y_n)) > \hat{\delta}$  и  $|x_n - y_n| < 1/n$ . Так как  $\Sigma$  компактно, то существуют точка  $T(x_0) \in \Sigma$  и подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , такие, что  $T(x_{n_k}) \rightarrow T(x_0)$ . Без потери общности можно полагать, что  $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ . Кроме того, существует точка  $y_0$ , относительно которой, также без потери общности, можно сделать предположение, что  $T(y_n) \rightarrow T(y_0)$ . Функция  $T$  равномерно непрерывна на  $\Lambda$ , и так как  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , то должно быть:  $d(T(x_n), T(y_n)) \rightarrow 0$ . Мы получили противоречие, так как по построению:  $d(T(x_n), T(y_n)) > \hat{\delta} > 0$ . Лемма доказана. ■

---

**Теорема 7.2.4.** *Отображение  $f : \Lambda \mapsto \Lambda$ , топологически сопряженное к  $B : \Sigma \mapsto \Sigma$ , хаотично на  $\Lambda$ .*

\* **Доказательство.** Нам надо показать, что  $f$  удовлетворяет условиям существенной зависимости от начальных условий, транзитивности и периодичности.

*Существенная зависимость.* Обозначим через  $\hat{\delta}$  то значение  $\delta$ , которое используется в условии существенной зависимости для сдвига  $B$ , действующего на  $\Sigma$ . Пусть  $\delta$  задано предыдущей леммой. Положим, что  $U$  открыто в  $\Lambda$  и  $\mathbf{x} \in U$ . Пусть  $\sigma = T(\mathbf{x})$  и  $\hat{U} = T(U)$ . Тогда  $\hat{U}$  открыто в  $\Sigma$ , и существует такая точка  $\tau \in \hat{U}$  и такое  $n > 0$ , что  $d(B^{(n)}(\tau), B^{(n)}(\sigma)) > \hat{\delta}$ . Имеется также точка  $\mathbf{y} \in \Lambda$  такая, что  $\tau = T(\mathbf{y})$ . Так как  $B^{(n)}(\sigma) = T \circ f^{(n)}(\mathbf{x})$  и  $B^{(n)} = T \circ f^{(n)}(\mathbf{y})$ , то по лемме получаем, что  $|f^{(n)}(\mathbf{x}) - f^{(n)}(\mathbf{y})| \geq \delta > 0$ .

*Транзитивность.* Пусть  $U$  и  $V$  — открытые подмножества  $\Lambda$ . Тогда  $\hat{U} = T(U)$  и  $\hat{V} = T(V)$  — открытые множества в  $\Sigma$ . Используем транзитивность  $B$  и найдем  $n > 0$ , для которого  $B^{(n)}(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \emptyset$ . Из этого немедленно следует, что  $f(n)(U) \cap V \neq \emptyset$ .

*Периодичность.* Если  $T(\mathbf{p})$  является точкой периода  $n$  для  $B$ , то  $\mathbf{p}$  есть точка периода  $n$  для  $f$ . Периодические точки  $B$  плотны в  $\Sigma$ . Пусть  $\mathbf{x}$  — произвольная точка в  $\Lambda$ , и пусть  $\{\sigma^{(n)}\}$  — такая последовательность периодических точек в  $\Sigma$ , что  $\sigma^{(n)} \rightarrow T(\mathbf{x})$ . Тогда последовательность периодических точек  $\{\mathbf{x}_n\}$ ,  $T(\mathbf{x}_n) = \sigma^{(n)}$ , существует и сходится к  $\mathbf{x}$ . Таким образом, периодические точки плотны в  $\Lambda$ . Это завершает доказательство теоремы. ■

Рассмотрим понятие слабой топологической сопряженности, носящей название полусопряженности. Это соответствует тому случаю, когда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (7.4)$$

коммутативна в том смысле, что  $g \circ T = T \circ f$ , но где  $T$  просто непрерывно и является сюръективным<sup>2</sup> отображением. В этом случае оно не обязательно взаимно однозначное и, следовательно, может не иметь обратного. В самом крайнем случае, когда  $T$  отображает  $X$  на единственную точку,  $g$  очевидным образом не удовлетворяет условию существенной зависимости, даже если для  $f$  оно выполняется. Тем не менее, справедлива следующая полезная теорема.

<sup>2</sup>Сюръективным отображением называют отображение на. Говорят, что  $f$  есть

**Теорема 7.2.5.** Предположим, что диаграмма (7.4) коммутативна, то есть  $g \circ T = T \circ f$ , и что отображение  $T$  является непрерывным и сюръективным. Если  $f$  удовлетворяет условиям транзитивности и/или периодичности на  $X$ , то и  $g$  удовлетворяет этим условиям на  $Y$ .

**Доказательство.** См. теорему 7.2.4. ■

Вернемся к анализу динамики вещественных квадратичных отображений. Пусть  $f(x) = x^2 + c$ ,  $c < -2$ . Определим  $\Lambda$  как множество всех начальных точек, орбиты которых захватываются, то есть

$$\Lambda = \{x_1 : x_n \text{ остаются ограниченными при } n \rightarrow \infty\}.$$

Нам уже известно, что  $\Lambda \subset [-\xi, \xi]$ , где  $\xi = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$ . Как следует из рис. 6.5(в), незамкнутая средняя часть графика  $y = f(x)$  лежит ниже  $y = -\xi$ . Таким образом, множество захвата  $\Lambda$  не включает в себя эту среднюю часть. Обозначим левый замкнутый отрезок через  $A_1$ , а правый — через  $B_1$ . Это интервалы первого уровня. На  $A_1$  и  $B_1$  значения  $f(x)$  находятся в диапазоне от  $-\xi$  до  $\xi$ . Значения  $f^{(2)}(x)$  на каждом из этих двух интервалов находятся в том же диапазоне, что и значения  $f(x)$  на исходном отрезке  $[-\xi, \xi]$ . Это приводит к появлению еще двух выброшенных открытых интервалов, средних частей  $A_1$  и  $B_1$ , соответствующих  $f^{(2)}(x) < -\xi$ . Получающиеся в результате замкнутые интервалы 2-го уровня будем обозначать как  $A_2$  и  $B_2$ . Если  $I_1$  есть  $A_1$  или  $B_1$ , то  $A_2$  и  $B_2$  являются подинтервалами  $I_1$ , полученными, как изображено на рис. 7.1, и поэтому

$$A_2 = f^{(-1)}(A_1) \cap I_1,$$

$$B_2 = f^{(-1)}(B_1) \cap I_1.$$

На следующем этапе, соответствующем условию  $f^{(3)}(x) < -\xi$  на интервалах  $A_2$  и  $B_2$ , выбрасываются открытые средние части и удерживаются получающиеся восемь замкнутых интервалов  $A_3$  и  $B_3$ . Эта процедура повторяется до бесконечности. Если  $I_n$  обозначает один из интервалов  $A_n$  или  $B_n$  на уровне  $n$ , то подинтервалы  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$  из  $I_n$  выбираются таким образом:

$$A_{n+1} = f^{(-1)}(A_n) \cap I_n,$$

$$B_{n+1} = f^{(-1)}(B_n) \cap I_n.$$

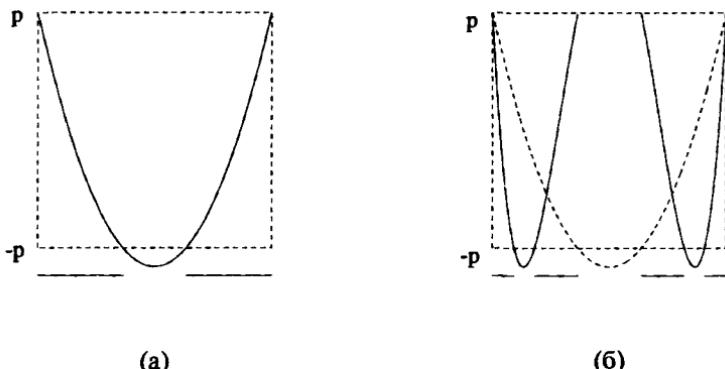


Рис. 7.1. Построение интервалов  $A_n$  и  $B_n$

Заметим, что если  $x$  принадлежит интервалу  $A_n$ , то  $f^{(n-1)}(x) \in A_1$ , и если  $x$  — из интервала  $B_n$ , то  $f^{(n-1)}(x) \in B_1$ .

Если у вас возникло ощущение, что вы уже где-то встречали такую схему, то так оно и есть. При построении классического канторова множества (п. 2.3) всегда выбрасываются открытые срединные трети интервалов на каждом этапе построения. Получающееся в результате множество  $C$  топологически характеризуется как *компактное, совершенное и вполне разрывное*. То же самое можно сказать и про множество  $\Lambda$  точек, обладающих захваченными орбитами из данного примера. Множество  $\Lambda$  является одной из форм множества Кантора<sup>3</sup>.

**Лемма 7.2.2.** Пусть  $f(x) = x^2 + c$ . Тогда существует такое число  $c^* < -2$ , что если  $c \leq c^*$  и  $\{I_n\}$  есть вложенная последовательность интервалов, причем каждый  $I_n$  есть интервал  $A_n$  или  $B_n$ , то длина  $I_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

**Комментарий:** утверждение леммы верно для любого  $c < -2$ , а не только для  $c \leq c^* < -2$ . Ради простоты доказательства мы рассматриваем только этот частный случай.

<sup>3</sup>Сказанное выше справедливо не только для квадратичного отображения. Например, отображение окружности связано с явлением «фазовой синхронизации», которое наблюдал Христиан Гюйгенс еще в XVII веке на примере часов, висящих на одной стене [51]. Возникновение хаоса в системах фазовой синхронизации описано в [63, гл. 10].

**Доказательство.** Множество, на котором  $f(x) < -\xi$ , представляет собой интервал с центром в точке 0 и конечными точками, которые удовлетворяют

$$x^2 + c = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

В этих граничных точках  $|f'(x)|$ , равная  $|2x|$ , изменяется от 0 до  $+\infty$ , по мере того как  $c$  убывает от  $c = -2$  до  $-\infty$ . Величина  $c^*$ , которую мы хотим найти, соответствует условию, когда в граничных точках  $|f'(x)| = 1$ . Если  $c < c^*$ , то величина  $|f'(x)|$  на множестве захваченных точек  $\Lambda$  строго больше 1, скажем,  $|f'(x)| \geq \lambda > 1$ . Величина  $c^* \approx 2.3$ . Применяя цепное правило дифференцирования сложной функции, получаем, что  $|(f^{(n)})'(x)| \geq \lambda^n$  на  $\Lambda$ .

Пусть  $\{I_n\}$  — последовательность интервалов, заданная в условии леммы. Пересечение этих интервалов есть отрезок  $[a, b]$ . По теореме о среднем значении из анализа известно, что существует точка  $t \in [a, b]$ , для которой

$$f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a) = (f^{(n)})'(t)(b - a)$$

и, следовательно,

$$|f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)| \geq \lambda^n |b - a|.$$

Так как это справедливо для любого  $n > 0$ , получаем  $b = a$ . ■

**Теорема 7.2.6.** Отображение  $f(x) = x^2 + c$  при  $c < c^*$  хаотично на множестве  $\Lambda$ .

\* **Доказательство.** Пусть  $\Lambda$  — множество захвата,  $x \in \Lambda$  и

$$[x_1 = x \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots]$$

— орбита  $x$ . Обозначим *маршрут*  $x$  следующим образом:

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots,$$

положив  $\sigma = 1$  или 2, в соответствии с тем, какому интервалу,  $A_1$  или  $B_1$ , принадлежит точка  $x_n = f^{(n-1)}(x_1)$ .

Мы покажем, что отображение  $T : \Lambda \rightarrow \Sigma$ , устанавливающее соответствие между точкой  $x$  и ее маршрутом, то есть

$$T(x) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots,$$

удовлетворяет условиям теоремы 7.2.4. Из этой теоремы следует, что функция  $f$  хаотична на  $\Lambda$ .

По построению, отображение  $T$  определено на всем  $\Lambda$ . Для того чтобы показать, что  $T$  взаимно однозначно, предположим, что  $T(s) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ ,  $T(t) = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$  и  $T(s) = T(t)$ . Для каждого  $n$ , обе точки  $s_n = f^{(n-1)}(t)$  и  $t_n = f^{(n-1)}(t)$  лежат либо в  $A_1$ , либо в  $B_1$ . Рассмотрим интервал  $[s, t]$ . Функция  $f^{(n-1)}$  однозначна на этом интервале. По теореме о среднем значении (см. доказательство леммы 7.2.2) существует такая постоянная  $\lambda > 1$ , что выполняется  $|f^{(n-1)}(s) - f^{(n-1)}(t)| \geq \lambda^{n-1}|s - t|$ . Так как  $\lambda^{n-1} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , это возможно, только если  $s = t$ . Следовательно, отображение  $T$  взаимно однозначно.

Покажем, что  $B \circ T = T \circ f$ . Пусть  $x \in \Lambda$  и ее орбита есть

$$[x_1 = x \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots].$$

Тогда орбита  $f(x)$  имеет вид

$$[x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \dots].$$

Отсюда следует, что если  $T(x) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ , то  $T \circ f(x) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots$  Но  $B \circ T(x)$  также равно  $\sigma_2\sigma_3\sigma_4\dots$ , и следовательно,  $B \circ T(x) = T \circ f(x)$ .

Докажем, что  $T$  отображает  $\Lambda$  на  $\Sigma$ . Пусть  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma$ . Положим  $I_1 = A_1$ , если  $\sigma_1 = 1$ , или  $I_1 = B_1$ , если  $\sigma_1 = 2$ . Выберем  $I_2, I_3, \dots$  так, что

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

и каждый интервал  $I_n$  равен  $A_n$ , если  $\sigma_n = 1$ , или  $B_n$ , если  $\sigma_n = 2$ . По лемме 7.2.2 длина интервалов  $I_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Существует ровно одна точка  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ . По построению интервалов  $A_n$  и  $B_n$ , если  $I_n$  есть  $A_n$  интервал, то  $f^{(n-1)} \in A_1$  и  $n$ -ый символ в выражении для  $T(x)$  равен 1. Соответственно, если  $I_n$  есть  $B_n$  интервал, то  $f^{(n-1)} \in B_1$  и  $n$ -ый символ в выражении для  $T(x)$  равен 2. Это показывает, что символическое выражение для  $T(x)$  в точности такое же, как  $\sigma$ , с которого мы начали. Следовательно,  $T$  есть сюръективное отображение.

Непрерывность  $T$  доказывается следующим образом. Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $n$  достаточно большим, чтобы  $1/3^n < \varepsilon$ . Выберем  $\delta > 0$  меньше минимального расстояния между двумя последовательным интервалами  $A_n$  или  $B_n$ . Пусть  $s, t \in \Lambda$  и  $T(x) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ , а  $T(t) = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$ . Если  $|s - t| < \delta$ , то для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$  значения  $f^{(k)}(s)$  и  $f^{(k)}(t)$  лежат в одних и тех же интервалах  $A_k$  или  $B_k$ . Следовательно,  $\sigma_k = \tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , из чего следует, что

$$\begin{aligned} d(T(s), T(t)) &\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \dots \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon \end{aligned}$$

Непрерывность доказана.

Если  $T$  — взаимно однозначное непрерывное отображение из компактного метрического пространства  $(\Lambda)$  в метрическое пространство  $(\Sigma)$ , то  $T^{-1}$  автоматически является непрерывным (теорема A.2.5). Следовательно,  $T$  есть гомеоморфизм. ■

**Теорема 7.2.7.** Квадратичная функция  $g(x) = x^2 - 2$  хаотична на интервале  $[-2, 2]$ .

**Доказательство.** Чтобы доказать утверждение теоремы, начнем с того, что покажем полусопряженность этого отображения с  $f(z) = z^2$ , действующим на  $S^1$ . Пусть  $T : S^1 \mapsto [-2, 2]$  определено как

$$T(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta.$$

Ясно, что  $T$  непрерывно и сюръективно. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{t} & S^1 \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ [-2, 2] & \xrightarrow{g} & [-2, 2] \end{array}$$

коммутативна, так как  $g \circ T(e^{i\theta}) = T \circ f(e^{i\theta}) = 2 \cos 2\theta$ . Функция  $T$  не является взаимно однозначной. Каждой точке отрезка соответствует пара точек окружности  $S^1$  (за исключением точек  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$ ). Тем не менее, теорема 7.2.5 применима, и так как  $f$  хаотична на  $S^1$  — и потому что получаем что  $a$  удовлетворяет условиям

транзитивности и периодичности для хаоса. По теореме 7.1.1, функция  $g$  также удовлетворяет требованию существенной зависимости от начальных условий и таким образом хаотична.

Условие существенной зависимости легко доказывается и непосредственно. Пусть  $U$  — открытое множество в  $[-2, 2]$ . Так как  $T$  непрерывно, то  $\hat{U} = T^{-1}(U)$  открыто в  $S^1$ . Пусть  $A$  — дуга в  $\hat{U}$ . Для некоторого  $n > 0$ ,  $f^{(n)}(A)$  покрывает всю  $S^1$ . Из этого следует, что  $g^{(n)}(U)$  покрывает весь интервал  $[-2, 2]$ . В частности, если  $\delta = 1$ , то существуют точки  $x, y \in U$ , для которых  $|g^{(n)}(x) - g^{(n)}(y)| > \delta$ . ■

## Упражнения 7.2.

1. Докажите, что символическое пространство  $(\Sigma, d)$  есть метрическое пространство.
2. Докажите, что если  $\sigma$  и  $\tau$  принадлежат символическому пространству  $(\Sigma, d)$ , определенному на  $N$  элементах и если  $\sigma_i = \tau_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ , то  $d(\sigma, \tau) \leq 1/(N + 1)^n$ . Докажите, что если  $d(\sigma, \tau) < 1/(N + 1)^n$ , то  $\sigma_i = \tau_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ .
3. Докажите, что символическое пространство  $(\Sigma, d)$  на двух элементах метрически эквивалентно классическому канторову множеству  $\mathcal{C}$ . Используйте для этого теорему 7.2.2.
4. Покажите, что оператор обратного сдвига  $B : \Sigma \mapsto \Sigma$ ,

$$B(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots) = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \dots,$$

непрерывен.

5. Убедитесь в верности утверждения, содержащегося в доказательстве теоремы 7.2.2:

$$|x_n - y_n| - \frac{N - 1}{N} \geq \frac{1}{N^2}(|x_n - y_n| + \frac{N - 1}{N}),$$

при заданных  $x_n, y_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

6. Пусть  $f(x) = x^2 - 6$ . Положим  $A_1 = [-3, -\sqrt{3}]$  и  $B_1 = [\sqrt{3}, 3]$ .

- a) Найдите  $T(\sqrt{3})$ .
- б) Найдите  $T^{(-1)}(111\bar{1}\dots)$  и  $T^{(-1)}(222\bar{2}\dots)$ .
- в) Что можно сказать о  $T(x)$ , если  $x$  — граничная точка какого-либо интервала  $A_i$  или  $B_i$ ?
- г) Что можно сказать о  $T^{(-1)}(\sigma)$ , если  $\sigma$  — повторяющаяся последовательность  $n$  цифр?

- д) Перечислите все точки периода 4 (не ниже) оператора  $B$  на  $\Sigma$ . Сколько точек периода 4 существует у функции  $f$  на  $\mathbf{R}$ ?
- е) Используя  $T^{(-1)}$ , определите особую точку в  $\Lambda$ : (1) не являющуюся граничной точкой любого из интервалов  $A_i$  или  $B_i$ ; (2) непериодическую (даже после нескольких итераций); (3) периодическую с периодом 7.
- ж) Для любой заданной точки  $x \in \Lambda$ , определите точку с «противоположной орбитой», такую, что на каждой итерации  $x_i$  и  $y_i$  имеют противоположные знаки.
- з) Для произвольной точки  $x \in \Lambda$ , определите последовательность точек, которая сходится к  $x$ , так что каждая точка в последовательности имеет орбиту, которая в конечном итоге (после нескольких итераций) является «противоположной» по отношению к  $x$ , как описано в пункте (ж) (эта задача предложена Ричардом Нейдингером).

7. Пусть  $Q(x) = 4x(1 - x)$  при  $0 \leq x \leq 1$  и пусть

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1 - x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Покажите, что отображение  $Q$  топологически сопряжено по отношению к  $T$  на  $[0, 1]$  при помощи  $H(x) = \sin^2 \frac{\pi}{2}x$ . (В первую очередь покажите, что  $H$  есть гомеоморфизм  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ .)

8. (Продолжение упр. 7.) Найдите орбиту  $Q(x)$  периода 3, показав, что  $\{2/7, 4/7, 6/7\}$  является 3-циклом для  $T(x)$  и используя сопряженность двух отображений.
9. (Продолжение упр. 7.) Найдите орбиты  $Q(x)$  периода 4 и 5.
10. Пусть  $f_c(x) = x^2 + c$  и  $Q(x) = \lambda x(1 - x)$ ,  $0 < \lambda < 4$ . Покажите, что если  $c = -\lambda^2/4 + \lambda/2$  и  $H(x) = -x/\lambda + 1/2$ , то  $f_c$  и  $Q$  топологически сопряжены посредством отображения  $H$ .

### 7.3. Хаос и фракталы

В этом параграфе мы покажем, что итерированная система функций при определенных условиях индуцирует хаотическое отображение на своем аттракторе. Эта теория основывается на переносе известного хаотического поведения обратного сдвига, действующего

на символьном пространстве, на индуцированное отображение, действующее на аттракторе. Детали наиболее просто воспринимаются в том случае, когда аттрактор вполне несвязен, то есть является канторовым множеством.

Рассмотрим итерированную систему функций, состоящую из полного метрического пространства  $X$  и сжимающих отображений  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , действующих на  $X$ . Будем предполагать, что коэффициенты сжатия равны  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , соответственно, и что  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ . По теореме 4.1.2 (Хатчинсона), итерированная система функций

$$E_0 = \text{компактное множество (произвольное)}$$

 $\vdots$ 

$$E_k = T_1(E_{k-1}) \cup T_2(E_{k-1}) \cup \dots \cup T_N(E_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

сходится к единственному компактному аттрактору  $E$ .

Мы связываем с этой системой итерированных функций символьное пространство  $\Sigma$  на  $N$  элементах, описанное в п. 7.2. В первую очередь рассмотрим отображение множества  $\Sigma$  на аттрактор  $E$ .

**Теорема 7.3.8.** Пусть  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma$ . Для каждого  $x \in X$  предел

$$\Phi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}(x) \quad (7.5)$$

существует и его значение не зависит от выбора  $x \in X$ . Функция  $\Phi$  отображает  $\Sigma$  на аттрактор  $E$ .

★ **Доказательство.** Пусть  $\mathbf{T}$  — оператор Хатчинсона (см. (4.1)):

$$\mathbf{T}(A) = T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_N(A),$$

где  $A$  — любое компактное подмножество  $X$ . Выберем  $x \in X$  и обозначим через  $\{x\}$  множество, состоящее из единственной точки  $x$ . Определим

$$C_x = \{x\} \cup \mathbf{T}(\{x\}) \cup \mathbf{T}^2(\{x\}) \cup \dots$$

Из теоремы 4.3.3 следует, что множество  $C_x$  можно рассматривать как аттрактор СИФ со сгущением, причем множеством сгущения является множество  $\{x\}$ . Роль  $C_x$  в данном случае заключается в том, чтобы заменить возможно некомпактное множество  $X$  на

компактное множество, на котором  $T_1, \dots, T_N$  действуют как СИФ. Отметим, что  $C_x$  является инвариантным множеством для каждого  $T_i$  и что основной аттрактор  $E$  является подмножеством  $C_x$ . Для любых положительных целых  $l > k$ ,

$$\|T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_l}(x) - T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x)\|_2 \leq s^k \delta(C_x), \quad (7.6)$$

где  $\delta(C_x)$  есть диаметр  $C_x$ . Это следует из повторного применения неравенств сжатия

$$\|T_i(x_1) - T_i(x_2)\|_2 \leq s_i \|x_1 - x_2\|_2 \leq s \delta(C_x), \quad x_1, x_2 \in C_x.$$

Неравенство (7.6) справедливо для любого  $x \in E$ , а значит последовательность  $\{T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  удовлетворяет критерию Коши (см. прил. А.1) сходимости в полном метрическом пространстве  $C_x$ , то есть при заданном  $\varepsilon > 0$  существует целое  $K > 0$  такое, что если  $l > K$  и  $k > K$ , то

$$\|T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_l}(x) - T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x)\|_2 < \varepsilon.$$

Таким образом, сходимость к пределу в выражении (7.5) доказана. То, что этот предел принадлежит аттрактору  $E$ , следует из теоремы Хатчинсона. Для доказательства независимости этого обстоятельства от выбора  $x \in E$  положим, что  $x_1$  и  $x_2$  — две начальные точки из  $X$ . Будем теперь рассматривать множество  $\{x_1, x_2\}$  как множество сгущения, а через  $C$  обозначим результирующий аттрактор СИФ со сгущением. Рассуждая как и выше, получаем

$$\|T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x_1) - T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x_2)\|_2 \leq s^k \delta(C).$$

Правая часть стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Из этого следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x_2).$$

Осталось показать, что  $\Phi$  отображает  $\Sigma$  на  $E$ . Пусть  $e \in E$ . Так как

$$E = T_1(E) \cup T_2(E) \cup \dots \cup T_N(E),$$

то существуют  $\sigma_1 \in \{1, \dots, N\}$  и  $e_1 \in E$  такие, что

$$e = T_{\sigma_1}(e_1).$$

Аналогично, существуют индексы  $\sigma_2, \sigma_3, \dots$  и точки  $e_2, e_3, \dots$  в  $E$ , для которых

$$e_{k-1} = T_{\sigma_k}(e_k), \quad k = 2, 3, \dots,$$

так что

$$e = T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}(e_k).$$

Для каждого  $x \in X$  получаем

$$\begin{aligned} \|T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}(x) - e\|_2 &= \|T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}(x) - T\sigma_1T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}(e_k)\|_2 \\ &\leq s^k \delta(C_x) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что если  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ , то  $\Phi(x) = e$ . ■

**Теорема 7.3.9.** *Отображение  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ , определенное формулой (7.5), непрерывно.*

\* **Доказательство.** Пусть  $\phi(\sigma) = e$  и пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдем  $\delta > 0$  такое, что если  $\Phi(\tau) = f$  и  $d(\sigma, \tau) < \delta$ , то  $\|e - f\|_2 < \varepsilon$ .

Пусть  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$  и  $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$  Если для некоторого  $k > 0$

$$d(\sigma, \tau) < 1/(N+1)^k,$$

то должно иметь место равенство  $\sigma_i = \tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  (упр. 7 из п. 7.2). Более того, из неравенства (7.6) следует

$$\begin{aligned} \|e - f\|_2 &= \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \{T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_n}(x) - T_{\tau_1}T_{\tau_2}\dots T_{\tau_n}(x)\} \right\|_2 \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \{T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}\dots T_{\sigma_n}(x) - T_{\sigma_1}T_{\sigma_2}\dots T_{\sigma_k}T_{\tau_{k+1}}\dots T_{\tau_n}(x)\} \right\|_2 \\ &\leq s^k \delta(C_x). \end{aligned}$$

Найдем  $k$  из условия  $s^k \delta(C_x) < \varepsilon$ , а  $\delta$  выберем таким, чтобы выполнялось неравенство  $\delta < 1/(N+1)^k$ . ■

**Пример.** В качестве простейшего примера отображения  $\Sigma$  на аттрактор рассмотрим СИФ, определенную преобразованиями:

$$T_1(x) = \frac{1}{3}x,$$

Аттрактором  $E$  для такой СИФ служит классическое канторово множество, рассмотренное в п. 2.3. Напомним, что каждая точка  $x \in E$  имеет единственное представление:

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \quad (\text{по основанию } 3),$$

цифрами в котором служат только 0 и 2. Из (7.5) следует, что существуют такие точки  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$  в  $X$ , что

$$x = T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k} (x^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом,  $x$  принадлежит области значений  $T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}$ .  $T_1$  отображает  $[0, 1]$  в  $[0, 1/3]$ , а  $T_2$  отображает  $[0, 1]$  в  $[2/3, 1]$ . Таким же образом,  $T_1 T_1$ ,  $T_1 T_2$ ,  $T_2 T_1$  и  $T_2 T_2$  отображают  $[0, 1]$  в  $[0, 1/9]$ ,  $[2/9, 1/3]$ ,  $[2/3, 7/9]$  и  $[8/9, 1]$ , соответственно. Эта процедура повторяется, и очевидно, что первые  $k$  троичных цифр точки из области значений  $T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}$  равны

$$x_i = \begin{cases} 0, & \sigma_i = 1, \\ 2, & \sigma_i = 2. \end{cases}$$

Так как это справедливо при  $i = 1, 2, \dots, k$  для всех  $k \geq 1$ , то это выполняется для всех  $i \geq 1$ . Таким образом, троичные коэффициенты точки  $x$  те же, что и символы в формуле (7.5), и отличаются только тем, что символы, равные 1, становятся 0 в троичном представлении. Символы, равные 2, остаются без изменений и в троичном представлении.

Например, если

$$\sigma = 11212212 \dots,$$

то

$$x = \Phi(\sigma) = 0, 00202202 \dots \quad (\text{по основанию } 3).$$

**Хаос: полностью несвязный случай.** Продолжая предыдущий пример, вспомним, что сдвиг  $B$  (п. 7.2), действующий на символьном пространстве  $\Sigma$ , образованном символами 1 и 2, обладает хаотическим поведением. Отметим также, что действие  $B$  на  $\Sigma$  соответствует в точности оператору  $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , определенному как

$$\beta(0, x_1 x_2 x_3 \dots) = 0, x_2 x_3 \dots$$

Оператор  $\beta$  был обозначен как  $B$  в теореме 6.5.5, но здесь переименован в  $\beta$  для того, чтобы отличить его от текущего использования  $B$

в качестве обратного сдвига на символьном пространстве. Таким образом,

$$\Phi(B(\sigma)) = \beta(\Phi(\sigma)),$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{B} & \Sigma \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ E & \xrightarrow{\beta} & E \end{array} \quad (7.7)$$

коммутативна. Как следует из теоремы о топологической сопряженности, доказанной в п. 7.2, оператор  $\beta$ , действующий на канторовом множестве, хаотичен, что впервые было доказано в теореме 6.5.5.

Приведенный пример служит прототипом для целого класса систем итерированных функций, обладающих аттракторами, на которых можно определить хаотический оператор сдвига. Такой класс называется *вполне несвязные СИФ*.

**Вполне несвязные СИФ.** СИФ, определенная взаимно однозначными сжатиями  $T_1, T_2, \dots, T_N$  и имеющая аттрактор  $E$ , является вполне несвязной, если выполняется условие:

$$T_i(E) \cap T_j(E) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Как легко заметить, если СИФ вполне несвязна, то и аттрактор  $E$  есть вполне несвязное множество (упр. 1 в конце параграфа).

**Теорема 7.3.10.** Если СИФ, определенная взаимно однозначными сжатиями  $T_1, T_2, \dots, T_N$  и обладающая аттрактором  $E$ , является вполне несвязной, то отображение  $\Phi$ , определенное формулой (7.5), взаимно однозначное.

**Доказательство.** Рассмотрим  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$  и  $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$  из  $\Sigma$ ,  $\sigma \neq \tau$ . Пусть  $k$  — наименьший индекс  $i$ , для которого  $\sigma_i \neq \tau_i$ . Пусть  $A = T_{\sigma_k}(E)$  и  $B = T_{\tau_k}(E)$ . Тогда  $A \cap B = \emptyset$ . Более того,

$$\Phi(\sigma) \in T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_{k-1}} A$$

и

$$\Phi(\tau) \in T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_{k-1}} B$$

Но множества в правой части не имеют общих точек, так как  $\sigma_i = \tau_i$  для  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  и каждое  $T_{\sigma_i} (= T_{\tau_i})$  отображает непересекающиеся множества на непересекающиеся множества. Таким образом,  $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\tau)$ . ■

На основании теоремы 7.3.10 можно определить функцию  $\beta : E \rightarrow E$ , которая делает диаграмму (7.7) коммутативной. (Выше  $\beta$  в диаграмме (7.7) соотносилась только со случаем классического множества Кантора.) Определение таково:

$$\beta(x) = \Phi(B(\Phi^{-1}(x))), \quad x \in E. \quad (7.8)$$

Это определение не очень информативно. Конечно, его достаточно для того, чтобы представить, что  $\beta$  действует на точках  $E$  точно так же, как обратный сдвиг действует на символическом пространстве  $\Sigma$ . Оказывается, можно задать функцию  $\beta$  в терминах отображений  $T_1, T_2, \dots, T_N$  и аттрактора  $E$ .

---

**Теорема 7.3.11.** Для каждого  $x \in E$  значение  $\beta(x)$  определяется следующим образом:

$$\beta(x) = T_i^{-1}(x), \quad (7.9)$$

где  $i$  — единственный индекс, для которого  $x \in T_i(E)$ .

Доказательство этой теоремы оставлено в качестве упражнения (упр. 2 ниже).

Приведенная ниже теорема обобщает факты, связанные с полностью несвязным случаем.

---

**Теорема 7.3.12.** Положим, что взаимно однозначные сжимающие отображения  $T_1, T_2, \dots, T_N$  определяют вполне несвязную СИФ, имеющую аттрактор  $E$ . Пусть  $\Sigma$  — символическое пространство, определенное на  $N$  символах. Отображение  $\Phi$ , определенное формулой (7.5), есть взаимно однозначное отображение  $\Sigma$  на  $E$ . Индуцированное отображение  $\beta : E \rightarrow E$ , определенное формулой (7.8) или (7.9), делает диаграмму (7.7) коммутативной, и таким образом  $\beta : E \rightarrow E$  становится топологически сопряженным по отношению к  $B : \Sigma \rightarrow \Sigma$ . В результате получаем, что  $\beta$  есть хаотическая функция на аттракторе  $E$ .

### Упражнения 7.3.

- Докажите, что аттрактор  $E$  вполне несвязной СИФ представляет собой вполне несвязное множество.
- Докажите теорему 7.3.11, заключающуюся в том, что для каждого  $x \in E$  значение  $\beta(x)$  определяется как  $\beta(x) = T_i^{-1}(x)$ , где  $i$  — единственный индекс, для которого  $x \in T_i(E)$ .

## 7.4. Подъем

**Хаос: не полностью несвязный случай.** В предыдущем параграфе мы показали, как вполне несвязная СИФ индуцирует хаотическую функцию на своем аттракторе. В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда СИФ не является вполне несвязной. Основной результат заключается в том, что такая СИФ может быть поднята в высшую размерность, где она будет уже вполне несвязной, а получающийся аттрактор и динамическая система проектируются назад в пространство меньшей размерности.

Не полностью несвязный случай может быть реализован двумя способами. Первый из них называется *случаем чистого касания*, а второй называется *случаем наложения*.

**Пример 1.** Пример СИФ с чистым касанием выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}T_1(x) &= \frac{1}{2}x, \\T_2(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Аттрактором в этом случае служит интервал  $[0,1]$ . Термин *чистое касание* происходит из-за того, что

$$T_1([0, 1]) \cap T_2([0, 1]) = [0, 1/2] \cap [1/2, 1] = [1/2].$$

Так как  $T_1^{-1}(x) = 2x$  и  $T_2^{-1}(x) = 2x - 1$ , то невозможно определить единственное значение для  $\beta(1/2)$ , которое бы давало

$$\beta(x) = \begin{cases} T_1^{-1}(x) = 2x, & \text{если } x \in T_1([0, 1]); \\ T_2^{-1}(x) = 2x - 1, & \text{если } x \in T_2([0, 1]), \end{cases}$$

как это было сделано в формуле (7.9). Таким образом, мы не можем сконструировать функцию  $\beta$ , которая бы делала диаграмму (7.7) коммутативной. Или, что эквивалентно, функция  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ , определенная формулой (7.5), не является взаимно однозначной.

Тем не менее, можно произвольно выбрать  $\beta(1/2) = 1$  или  $\beta(1/2) = 0$ , в результате чего функция  $\beta$  будет вести себя хаотически на аттракторе  $E = [0, 1]$  (см. упр. 1 в конце данного параграфа).

**Пример 2.** Пример наложения дается СИФ следующего вида

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \frac{1}{2}x, \\ T_2(x) &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Аттрактором в этом случае также служит интервал  $[0, 1]$ . Термин *наложение* происходит из-за того, что

$$T_1([0, 1]) \cap T_2([0, 1]) = [0, 1/2] \cap [1/4, 1] = [1/4, 1/2].$$

В этом примере целый интервал  $[1/4, 1/2]$  препятствует такому определению  $\beta(x)$ , которое позволило бы сделать диаграмму (7.7) коммутативной. Как и в примере 1, функция  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ , определенная формулой (7.5), не является взаимно однозначной.

**Подъем СИФ.** Трудности, встретившиеся при определении индуцированной функции  $\beta$  на аттракторе  $E$ , очевидным образом связаны с тем, что функция  $\Phi$  не является взаимно однозначной. Но независимо от фракталов и хаоса существует стандартный метод, позволяющий так изменять исходную функцию, чтобы новая функция была бы уже взаимно однозначной. Пусть

$$f : X \rightarrow Y$$

— произвольная функция (предположительно, не взаимно однозначная). Определим новую функцию

$$\hat{f} : X \rightarrow X \times Y,$$

называемую *поднятой функцией*, положив:

$$\hat{f}(x) = (x, f(x)), \quad x \in X.$$

Таким образом, вместо отображения  $x$  в значение  $f(x)$ , новое отображение переводит  $x$  в точку  $(x, f(x))$  графика  $y = f(x)$ . Ясно, что новая функция  $\hat{f}$  является взаимно однозначной и содержит в себе всю информацию о функции  $f$ .

Применим эту методику подъема к функции  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ , заданной формулой (7.5). Определим ее график следующим образом:

$$\hat{E} = \{(\sigma, \Phi(\sigma)), \sigma \in \Sigma\},$$

а поднятую функцию как

$$\hat{\Phi}(\sigma) = (\sigma, \Phi(\sigma)), \sigma \in \Sigma. \quad (7.10)$$

Теперь нам осталось сделать принципиальный шаг. Мы должны изменить исходную СИФ таким образом, чтобы ее аттрактором стало множество  $\hat{E}$ . Для этого поднимем отображения  $T_1, \dots, T_N$  с  $X$  (через  $X$  обозначен аттрактор  $E$ ) на  $\hat{X} = \Sigma \times E$ .

**Теорема 7.4.13.** Пусть  $\hat{X} = \Sigma \times E$  и пусть  $\hat{d}$  определено как

$$\hat{d}((\sigma, x), (\tau, y)) = \max\{d(\sigma, \tau), \|x - y\|_2\}.$$

Тогда  $(\hat{X}, \hat{d})$  есть компактное метрическое пространство, поднятые отображения

$$\hat{T}_i(\sigma, x) = (i\sigma, T_i(x)), \quad (\sigma, x) \in \hat{X}, \quad (7.11)$$

являются сжимающими на  $(\hat{X}, \hat{d})$ , а множество  $\hat{E}$ , то есть график  $\hat{\Phi}$ , является аттрактором СИФ  $\{\hat{X}, \hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N\}$ .

\* **Доказательство.** Отображение  $\sigma \rightarrow i\sigma$  на  $(\Sigma, d)$  есть сжатие с коэффициентом  $c = \frac{N-1}{(N+1)N}$ . Это следует из того, что

$$\begin{aligned} d(i\sigma, i\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma_k - \tau_k|}{(N+1)^{k+1}} \\ &\leq (N-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^{k+1}} \leq \frac{N-1}{(N+1)N}. \end{aligned}$$

Как известно из упр. 7 п. 3.3,  $\hat{d}$  является метрикой на  $\hat{X}$ . Как следует из определения  $\hat{d}$ , топология  $(\hat{X}, \hat{d})$  представляет собой топологию произведения  $\Sigma \times X$ . Так как  $\Sigma$  и  $X$  компактны, то компактно и их произведение. Это доказывает первое утверждение.

Сжимающий характер  $\hat{T}_i$  также следует из результатов упр. 7 п. 3.3. Коэффициент сжатия для  $\hat{T}_i$  можно положить равным  $\hat{s}_i = \max\{c, s_i\}$ , где  $s_i$  есть коэффициент сжатия  $T_i$ .

Остается определить аттрактор для поднятой СИФ. Как следует из теоремы 7.3.8, отображение из  $\Sigma$  в  $\hat{X}$ , определенное как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{T}_{\sigma_1} \hat{T}_{\sigma_2} \dots \hat{T}_{\sigma_k}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \hat{X}, \quad (7.12)$$

переводит  $\Sigma$  в аттрактор, а предел не зависит от выбора  $(\tau, x) \in \hat{X}$ . Фактически, это то же отображение, что и  $\hat{\Phi}$ , определенное формулой (7.10). По построению

$$\hat{T}_{\sigma_1} \hat{T}_{\sigma_2} \dots \hat{T}_{\sigma_k}(\tau, x) = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \tau, T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x)).$$

Справедливо также

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \tau = \sigma,$$

в силу того, что

$$d(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \tau, \sigma) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \tau_{i-k}|}{(N+1)^i} \rightarrow 0.$$

Приведенные утверждения доказывают, что предел в формуле (7.12) равен  $(\sigma, \Phi(\sigma))$ , то есть  $\hat{\Phi}(\sigma)$ . Таким образом, аттрактор поднятой СИФ является графиком  $\hat{E}$  функции  $\Phi$ . ■

Как и в случае исходной СИФ, мы ограничиваем действие отображений аттрактором. То есть преобразования  $\hat{T}_i$  действуют лишь на  $\hat{E}$ , а не на множестве  $\Sigma \times E$ , на котором они были первоначально определены. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{B} & \Sigma \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \hat{\Phi} \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{\beta}} & \hat{E} \end{array} \quad (7.13)$$

Так как  $\Phi$  взаимно однозначная функция, то поднятая СИФ является вполне несвязной, и по теореме 7.3.12 индуцированное отображение

$$\hat{\beta} = \hat{\Phi} \circ B \circ \hat{\Phi}^{-1} \quad (7.14)$$

хаотично на  $\hat{E}$ .

**Теорема 7.4.14.** Отображение  $\hat{\beta}$ , определенное формулой (7.14), можно представить следующим образом:

$$\hat{\beta}(\sigma, \Phi(\sigma)) = (B(\sigma), \Phi(B(\sigma))). \quad (7.15)$$

\* **Доказательство.** Так как поднятая СИФ вполне несвязна, то применима теорема 7.3.11, что дает

$$\hat{\beta}(\sigma, \Phi(\sigma)) = \hat{T}_i^{-1}(\sigma, \Phi(\sigma)),$$

где  $i$  — единственный индекс, для которого  $(\sigma, \Phi(\sigma)) \in \hat{T}_i(\hat{E})$ .

Но

$$\hat{T}_i^{-1}(\sigma, \Phi(\sigma)) = (B(\sigma), T_i^{-1}(\Phi(\sigma))).$$

Дело в том, что если

$$(\tau, y) = \hat{T}_i^{-1}(\sigma, \Phi(\sigma)),$$

то

$$(\sigma, \Phi(\sigma)) = \hat{T}_i(\tau, y) = (i\tau, T_i(y)),$$

а значит  $\sigma = i\tau$  и  $\Phi(\sigma) = T_i(y)$ , то есть  $\tau = B\sigma$ ,  $y = T_i^{-1}(\Phi(\sigma))$ .

Окончательно, из

$$\Phi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\sigma_1} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x)$$

следует, что

$$T_{\sigma_1}^{-1} \Phi(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\sigma_2} \dots T_{\sigma_k}(x) = \Phi(B(\sigma)). \blacksquare$$

**Пример 3 (продолжение).** Продолжим рассмотрение случая СИФ с чистым касанием:

$$T_1(x) = \frac{1}{2}x,$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Построим соответствующую поднятую СИФ. Символьное пространство  $\Sigma$ , определенное на двух символах 1, 2, метрически эквивалентно классическому канторову множеству  $\mathcal{C}$  (упр. 3 из п. 7.2), получаемому в виде аттрактора СИФ:

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x,$$

$$S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

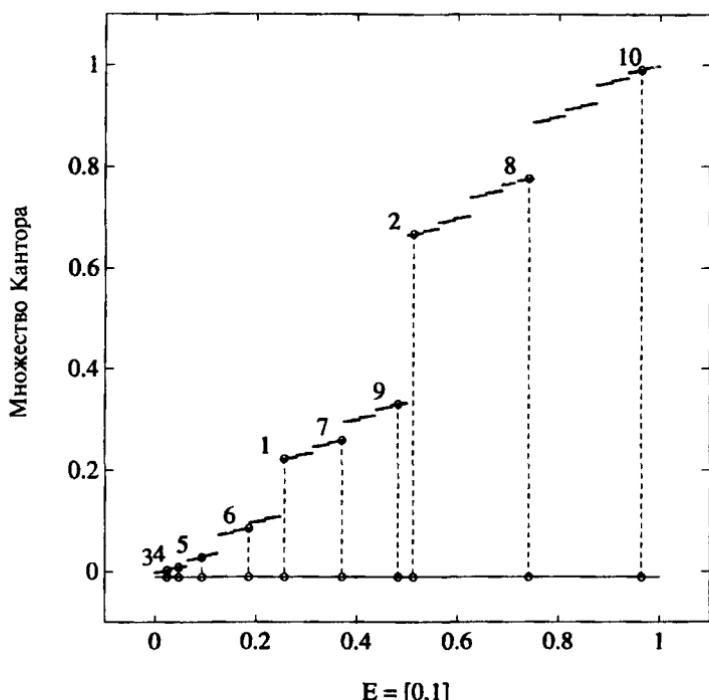


Рис. 7.2. Динамика поднятой СИФ

Мы можем заменить  $\Sigma$  на  $\mathcal{C}$ , а отображения  $\sigma \rightarrow 1\sigma$ ,  $\sigma \rightarrow 2\sigma$  на  $S_1$ ,  $S_2$ , соответственно. Учитывая сказанное, поднятые варианты отображений  $T_1$  и  $T_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{T}_1(t, x) &= (S_1(t), T_1(x)), & t \in \mathcal{C}, x \in E, \\ \hat{T}_2(t, x) &= (S_2(t), T_2(x)), & t \in \mathcal{C}, x \in E.\end{aligned}$$

В матрично-векторном виде эти уравнения записываются как

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}, \\ \hat{T}_2 \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

На рис. 7.2 построен аттрактор поднятой СИФ. Аттрактор исходной СИФ изображен на горизонтальной оси. Проекциями аттрактора

поднятой СИФ на оси координат являются  $E$  и  $C$ . Изображены также некоторые точки орбиты поднятой СИФ и их проекции.

### Упражнения 7.4.

1. Убедитесь в справедливости утверждения примера 1: при произвольном выборе  $\beta(1/2) = 1$  или  $\beta(1/2) = 0$  функция  $\beta$  обладает хаотическим поведением на аттракторе  $E = [0, 1]$ .
2. (Компьютерный эксперимент.) Используя компьютер, получите график, подобный рис. 7.2, применительно к случаю СИФ с перекрытием из примера 2:

## 7.5. Затенение

Что можно сказать о неточно определенных орбитах  $\beta(x)$  на аттракторе СИФ? Ради простоты рассмотрения мы ограничимся полностью несвязанным случаем, когда аттрактор  $E$  представляет собой объединение непересекающихся множеств  $T_1(E), T_2(E), \dots, T_N(E)$ , а  $\beta(x)$  определена как  $T_i^{-1}(x)$ , где  $i$  — единственный индекс, при котором  $x \in T_i^{-1}(E)$ . Как и ранее, мы полагаем коэффициенты сжатия равными  $s_1, s_2, \dots, s_N$  и  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ .

Следующая *теорема затенения* говорит о том, что вблизи каждой неточно сосчитанной орбиты в  $E$  существует точная орбита.

*Предостережение.* Эта теорема не говорит о том, что именно происходит в результате ошибок округления. Трудность заключается в том, что из-за ошибок округления вычисленные точки обычно покидают аттрактор, и как только это происходит,  $\beta(x)$  становится плохо определенной. Орбита устремляется к бесконечности, даже если каждый раз контролировать выбор функции  $T_i^{-1}$  (см. упр. 1 в конце параграфа).

---

**Теорема 7.5.15.** Пусть  $\tilde{x}_0 \in E$  — произвольная начальная точка,  $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^\infty$  — приближенная орбита:

$$\tilde{x}_i \approx \beta(\tilde{x}_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

причем

$$d(\tilde{x}_{i-1}, \beta(\tilde{x}_{i-1})) < \varepsilon.$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность. Тогда существует точная орбита  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ , которая находится в тени  $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$ , то есть:

$$d(\tilde{x}_i, x_i) \leq \frac{s\varepsilon}{1-s} \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.16)$$

\* **Доказательство.** Каждая точка  $\tilde{x}_i$  равна приблизительно  $\beta(\tilde{x}_{i-1})$ , а  $\beta(\tilde{x}_{i-1})$  равно  $T_{\sigma_i}^{-1}(\tilde{x}_{i-1})$  для некоторого  $\sigma_i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Точка  $x_0$ , которую мы ищем для вычисления точной орбиты, определяется в терминах индексов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$

$$x_0 = \Phi(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots),$$

где функция  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$  задана формулой (7.5). Таким образом, точная орбита включает в себя точки

$$x_i = T_{\sigma_i}^{-1}(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

или, что равносильно,

$$x_i = \Phi(\sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \sigma_{i+3} \dots).$$

Заметим, что для любого индекса  $i > 0$ , оба значения  $\beta(x_i)$  и  $\beta(\tilde{x}_i)$  вычисляются с использованием  $T_{\sigma_{i+1}}^{-1}$ , откуда

$$\begin{aligned} d(x_i, \tilde{x}_i) &= d(T_{\sigma_{i+1}}\beta(x_i), T_{\sigma_{i+1}}\beta(\tilde{x}_i)) \\ &\leq s d(\beta(x_i), \beta(\tilde{x}_i)). \end{aligned}$$

Пусть  $k$  — положительное целое. Тогда

$$\begin{aligned} d(x_{k-1}, \tilde{x}_{k-1}) &\leq s d(\beta(x_{k-1}), \beta(\tilde{x}_{k-1})) \\ &\leq s \delta(E), \end{aligned}$$

где  $\delta(E)$  есть диаметр  $E$ . Поэтому

$$\begin{aligned} d(\beta(x_{k-2}), \beta(\tilde{x}_{k-2})) &= d(x_{k-1}, \beta(\tilde{x}_{k-2})) \\ &\leq d(x_{k-1}, \tilde{x}_{k-1}) + d(\tilde{x}_{k-1}, \beta(\tilde{x}_{k-2})) \\ &= s \delta(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} d(x_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}) &\leq s d(\beta(x_{k-2}), \beta(\tilde{x}_{k-2})) \\ &\leq s[s \delta(E) + \varepsilon] \\ &= s^2 \delta(E) + s \varepsilon. \end{aligned}$$

На следующем уровне

$$\begin{aligned} d(x_{k-3}, \tilde{x}_{k-3}) &\leq s d(\beta(x_{k-3}), \beta(\tilde{x}_{k-3})) \\ &\leq s [d(x_{k-2}, \tilde{x}_{k-2}) + d(\tilde{x}_{k-2}, \beta(\tilde{x}_{k-3}))] \\ &\leq s[s^2\delta(E) + s\varepsilon + \varepsilon] \\ &= s^3\delta(E) + s^2\varepsilon + s\varepsilon. \end{aligned}$$

Продолжая в таком же духе, получаем, что для любого  $j < k$ ,

$$d(x_{k-j}, \tilde{x}_{k-j}) \leq (s^{j-1} + s^{j-2} + \dots + s)\varepsilon + s^j\delta(E).$$

Заменяя  $k - j$  на  $i$ , получаем

$$\begin{aligned} d(x_i, \tilde{x}_i) &\leq (s^{k-i-1} + s^{k-i-2} + \dots + s)\varepsilon + s^{k-i}\delta(E) \\ &\leq (s + s^2 + s^3 + \dots)\varepsilon + s^{k-i}\delta(E) \\ &= \frac{s\varepsilon}{1-s} + s^{k-i}\delta(E). \end{aligned}$$

Устремляя  $k \rightarrow \infty$ , получаем требуемое неравенство. ■

### Упражнения 7.5.

1. Приведите пример, иллюстрирующий следующее утверждение. Если неточно сосчитанная орбита (например, искаженная ошибками округления) покидает аттрактор, то даже если контролировать каждый раз выбор одной из применяемых функций  $T_i^{-1}$ , орбита может уйти в бесконечность.

## 7.6. Алгоритм рандомизированной СИФ

Прежде чем завершить рассмотрение темы отображения символьного пространства  $\Sigma$  на аттрактор, обратим внимание на то, почему же собственно работает алгоритм РСИФ рандомизированной системы итерированных функций. Пусть СИФ задана сжатиями  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , причем  $E$  — аттрактор,  $s_1, s_2, \dots, s_N$  — коэффициенты сжатия,  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ . Алгоритм 4.2.2, который реализует РСИФ, известен также как игра «Хаос» (упр. 1 из п. 4.1) и заключается в выборе произвольной начальной точки  $x_0 \in X$  и итерировании

$$x_i = T_{\sigma_i}(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

причем каждый индекс  $\sigma_i \in \{1, 2, \dots, N\}$  выбирается случайным образом, так что вероятность того, что  $\sigma_i = j$ , равна  $p_j$ . Естественно, полагаем, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$ .

**Теорема 7.6.16.** Пусть  $e \in E$  и положим  $\varepsilon > 0$ . Тогда, почти наверное, существует такая точка  $x_n$ , получаемая алгоритмом РСИФ, что

$$\|e - x_n\|_2 < \varepsilon.$$

\* **Доказательство.** Так как  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$  (см. (7.5)) является отображением на, то существует по меньшей мере одна точка

$$\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots \in \Sigma,$$

для которой  $\Phi(\tau) = e$ . Выберем  $K_1$  такое, что если  $k > K_1$ , то

$$\|e - T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_k}(x_0)\|_2 < \varepsilon/2.$$

Пусть  $C_{x_0}$  — аттрактор СИФ с множеством сгущения  $\{x_0\}$  (см. доказательство теоремы 4.3.3). Рассмотрим множества

$$C_k = T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_k}(C_{x_0}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти множества вложены друг в друга в порядке убывания, а их диаметры удовлетворяют неравенству

$$\delta(C_k) \leq s^k \delta(C_{x_0}).$$

Пусть  $K_2$  — достаточно большая величина. Тогда

$$s^k \delta(C_{x_0}) < \varepsilon/2, \quad k > K_2.$$

Теперь зафиксируем  $k > \max\{K_1, K_2\}$ . Рассмотрим достаточно длинную последовательность итераций РСИФ, скажем, длины  $L$ , такую, что индексы

$$\sigma_L, \sigma_{L-1}, \dots, \sigma_{L-k-1}$$

соответствуют индексам

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k.$$

Тогда

$$x_L = T_{\sigma_L} T_{\sigma_{L-1}} \dots T_{\sigma_{L-k+1}} \dots T_{\sigma_1}(x_0) \in C_k,$$

и

$$\begin{aligned} \|x_L - e\|_2 &< \|x_L - T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_k}(x_0)\|_2 + \|T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_k}(x_0) - e\|_2 \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Появление этих индексов (почти наверное) имеет место, так как вероятность этого события равна положительному числу:

$$p_1 p_2 \dots p_k. \blacksquare$$

# Глава 8.

## Комплексная динамика

### 8.1. Множества Жюлия

Вероятно, нельзя привести пример такого компьютерного эксперимента, который впечатлением от результатов превосходил бы то чувство удивления и восхищения, которое вызывает графическое построение множеств Жюлия и множества Мандельброта на плоскости. Материал данной главы является продолжением изучения динамики итераций, фрактальных аттракторов и хаоса. Но для более глубокого понимания предмета требуются знания достаточно продвинутых разделов теории функций комплексного переменного, которые вряд ли уместно излагать здесь в полном объеме. Заинтересованный читатель может ознакомиться с необходимыми сведениями по ТФКП в [8], а доказательство теорем, относящихся к комплексной динамике, он найдет в [11] или [14].

Через  $C$  будем обозначать множество всех комплексных чисел  $a + ib$ . Комплексное число будем обозначать  $z = a + ib$ . *Вещественная часть*  $z$  равна  $a$ , а *мнимая часть*  $z$  равна *вещественному* числу  $b$ . Будем обозначать их как

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{и} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

Модуль комплексного числа  $z = a + ib$ , обозначаемый  $|z|$ , определяется как евклидова длина вектора  $[a \quad b]^t$ , то есть

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Когда мы говорим, что последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  стремится к бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

то под этим мы понимаем, что для любого данного  $M > 0$  существует  $N > 0$  такое, что для всех  $n > N$  справедливо  $|z_n| > M$ , то есть все

точки  $z_n$  лежат вне круга радиуса  $M$  для достаточно больших значений  $n$ . При этом не требуется, чтобы  $z_n$  стремились к  $\infty$  вдоль по прямой или какой-то кривой, просто абсолютные величины должны расти неограниченно.

Ограничимся далее рассмотрением функций, которые представляют собой полиномы одного комплексного переменного. Пусть

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

— полином степени  $n \geq 2$ , коэффициенты  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  — комплексные числа (в частном случае, вещественные).

*Множество Жюлия* функции  $f$ , обозначаемое  $J(f)$ , определяется как

$$J(f) = \partial\{z : f^{(n)} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Таким образом, множество Жюлия функции  $f$  есть граница множества точек  $z$ , стремящихся к бесконечности при итерировании  $f(z)$ . Множество названо в честь французского математика Гастона Жюлия (1893–1978), который одновременно с Пьером Фату (1878–1929) в 1917–19 гг. написал основополагающие статьи по итерированию функций комплексного переменного. Еще раз мы видим впечатляющий пример математических исследований, которые далеко опередили свое время в том смысле, что потребовалось более пятидесяти лет, прежде чем компьютерная графика достигла уровня, позволяющего наблюдать эти математические объекты.

Простейшее множество Жюлия соответствует случаю  $f(z) = z^2$ . Так как  $f^{(n)}(z) = z^{(2^n)}$ , то  $f^{(n)}(z) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда  $|z| > 1$ . Границей этого множества, то есть множеством Жюлия, является единичная окружность  $\{z : |z| = 1\}$ , которая фракталом не является, хотя в общем случае множество Жюлия есть фрактал. Тем не менее, функция  $f(z) = z^2$  хаотична на своем множестве Жюлия (на единичной окружности), как было показано в главе 6.

Можно написать простую программу для построения заполняющего множества Жюлия. Заполняющее множество Жюлия состоит из точек, орбиты которых пойманы, в отличие от границы этого множества, которое и является настоящим множеством Жюлия. Заполняющие множества более привлекательны визуально и именно по этой причине наиболее часто реализуются программно. Такая программа наилучшим образом работает в случае множеств Жюлия, обладающих притягивающей периодической орбитой.

В первую очередь и в основном, мы будем изучать множества Жюлиа квадратичных функций

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

где  $c$  — константа в  $\mathbf{C}$ . Такой подход не является ограниченным, как это может показаться, так как рассмотрение произвольного квадратичного полинома, скажем,  $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ ,  $a_2 \neq 0$ , может быть сведено к указанному выше частному случаю простой заменой переменных (упр. 1 в конце данного параграфа). Множество Жюлиа для  $f_c$  симметрично относительно горизонтальной оси. При написании программы это обстоятельство можно использовать для уменьшения объема вычислений, то есть вычислить множество Жюлиа в верхней полуплоскости, а затем отразить его на нижнюю полуплоскость. Однако в алгоритме 8.1.1 этого не делается с целью оставить возможность отображения множества на весь экран в различных масштабах. Как следует из приводимой ниже теоремы, в случае  $c < 0$  можно прекратить вычисление орбиты, как только величины достигают значения 2 по модулю. Орбиты таких точек гарантированно стремятся к бесконечности.

---

**Теорема 8.1.1.** *Предположим, что  $|c| < 2$ . Пусть  $z \in \mathbf{C}$  и пусть  $z_n = f_c^{(n)}(z)$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Если существует такое  $n_0$ , что  $|z_{n_0}| \geq 2$ , то имеет место*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

*то есть орбита  $\{f^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$  стремится к бесконечности и  $z$  не принадлежит множеству Жюлиа  $J(f_c)$ .*

**Доказательство.** Без потери общности можно предположить, что  $|z| \geq 2$ . Получаем

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \\ &\geq |z^2| - |c| \\ &= |z|(|z| - |c|/|z|). \end{aligned}$$

Пусть  $\delta$  удовлетворяет условию  $|c| = 2 - 2\delta$ . Исследуя производную вещественноненесимметричной функции  $\phi(x) = x - |c|/x$  на интервале  $[2, \infty]$ , легко видеть, что  $\phi'(x) \geq \phi'(2)$  и вследствие этого

$$|z|(|z| - |c|/|z|) \geq |z|(2 - |c|/2) = |z|(1 + \delta).$$

Таким образом,

$$|f_c(z)| \geq (1 + \delta)|z|$$

и

$$|f_c^{(2)}(z)| \geq (1 + \delta)|f_c(z)| \geq (1 + \delta)^2|z|.$$

Для  $n$ -ой итерации получим:

$$|f_c^{(n)}(z)| \geq (1 + \delta)^n|z|,$$

и это выражение стремится к  $\infty$ , когда  $n$  становится достаточно большим. ■

Следующая программа, записанная в псевдокодах, строит заполняющее множество Жюлиа.

---

#### Алгоритм 8.1.1.

#### (ЗАПОЛНЯЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО ЖЮЛИА)

Назначение: строит заполняющее множество Жюлиа для функции  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Вход:

$c_1, c_2$  ( $c = c_1 + ic_2$ )

$(a, b)$  (центр окна)

$s$  (размер окна)

$p$  (число пикселов в каждой стороне)

Выход:

изображение заполняющего множества Жюлиа

Инициализация:

графический экран для окна  $[a - s/2, a + s/2] \times [b - s/2, b + s/2]$

Шаги:

for  $m = 1$  to  $p$

$x_0 = a - s/2 + ms/p$

  for  $n = 1$  to  $p$

$y_0 = b - s/2 + ns/p$

$x = x_0$

$y = y_0$

$z = 0$

$iter = 1$

    while  $iter < 20$

```

iter = iter + 1
x1 = x2 + y2 + c1
y1 = 2xy + c2
x = x1
y = y1
z = x2 + y2
if z > 4, выход из цикла, end if
end while
if z < 4, построить (x0, y0), end if
end for
end for

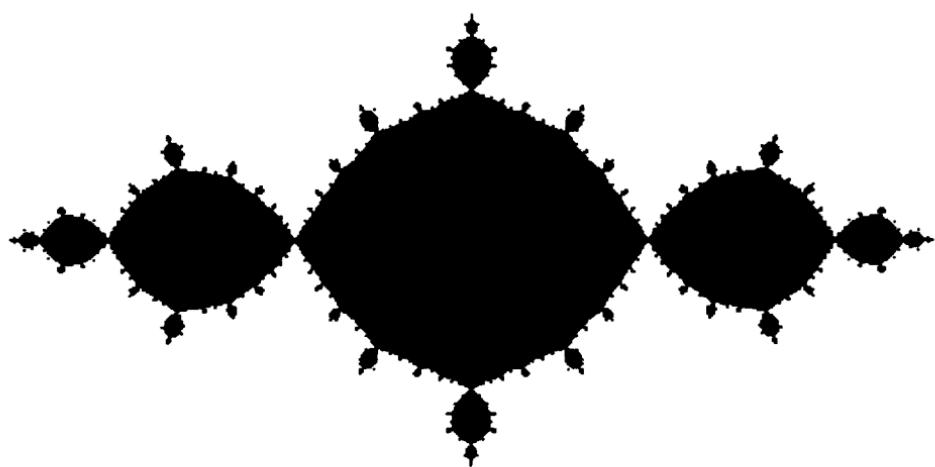
```

На рис. 8.1, 8.2, 8.3 и 8.4 приведены некоторые заполняющие множества Жюлиа, полученные с помощью алгоритма 8.1.1 (окно  $576 \times 576$  пикселов).

Несложно написать программу, отображающую только граничные точки, то есть настоящее множество Жюлиа. Отличие этой программы от предыдущей заключается в том, что как только находится точка, обладающая захваченной орбитой, скажем, в пикселе с координатами  $(j, k)$ , то сразу проверяются орбиты точек, являющихся четырьмя «соседями» с координатами  $(j, k - 1)$ ,  $(j, k + 1)$ ,  $(j - 1, k)$  и  $(j + 1, k)$ , на свойство ухода в бесконечность (рис. 8.5). Если хотя бы одна из них стремится к бесконечности, то точка с координатами  $(j, k)$  помечается как элемент множества Жюлиа.

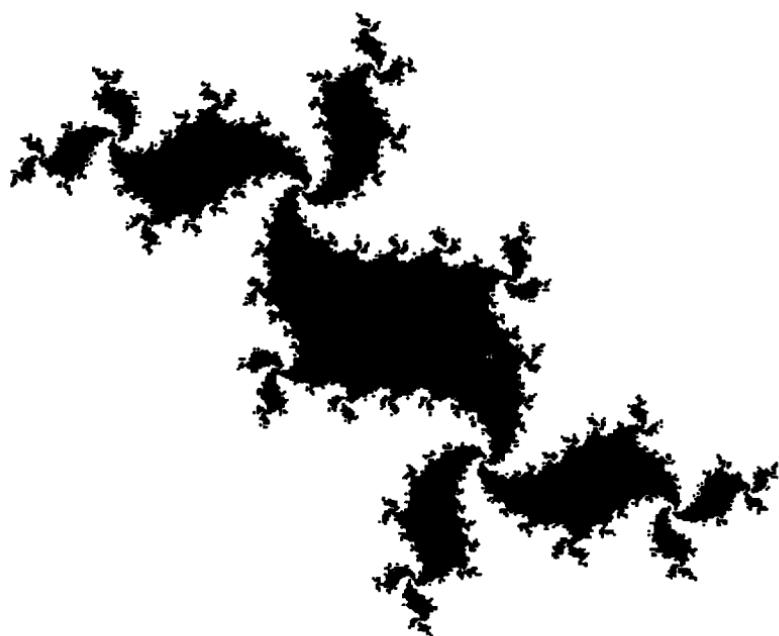
Для того чтобы сократить объем требуемой памяти, но при этом сохранить возможность доступа к уже просчитанным орбитам, можно хранить три строки (или столбца) результатов, причем значение 1 кодирует захваченные точки, а значение 0 — точки, уходящие в бесконечность. Значения средней строки проверяются с помощью описанного выше критерия для обнаружения граничных точек. Как только это проделано и полученные значения отображены на экран, запоминается новая строка, а предыдущая строка стирается. Процедура повторяется до тех пор, пока не будут обработаны все внутренние строки.

На рис. 8.6, 8.7 и 8.8 изображены несколько множеств Жюлиа, построенных по этой программе для окон  $576 \times 576$  пикселов. Существует еще один алгоритм, наиболее подходящий для цветных изображений, известный под названием «алгоритм времени убегания», в котором цвета (или уровни черно-белого) используются



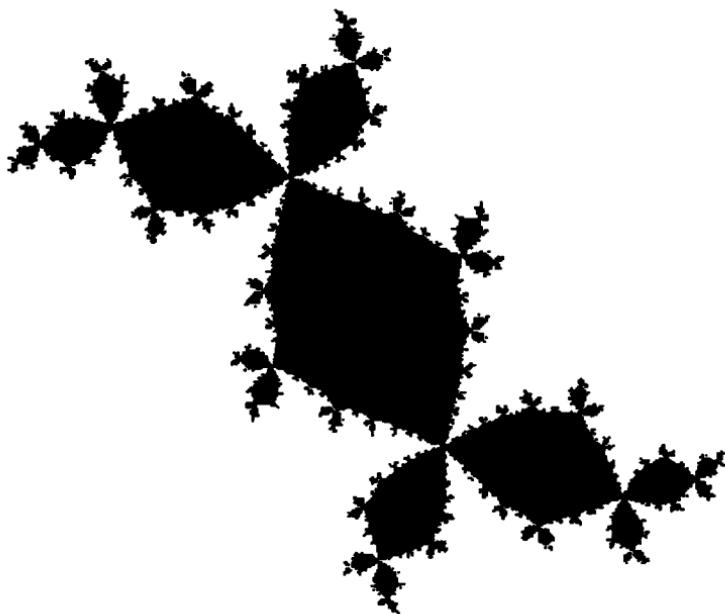
---

Рис. 8.1. Заполняющее множество Жюлиа для  $z^2 - 1$



---

Рис. 8.2. Заполняющее множество Жюлиа для  $z^2 - 0,20 + 0,75i$



---

Рис. 8.3. Заполняющее множество Жюлиа для  $z^2 - 0,1244 + 0,7560i$

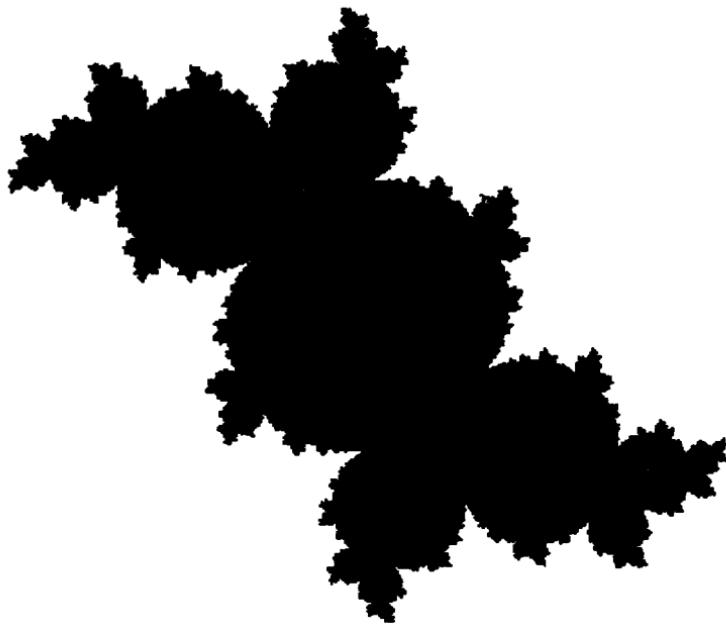


Рис. 8.4. Заполняющее множество Жюлиа для  $z^2 - 0,1194 + 0,6289i$

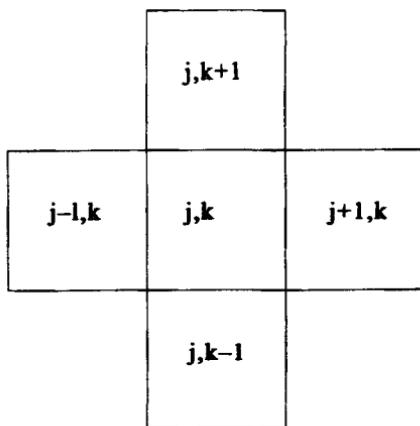


Рис. 8.5. Тест для граничных точек

для индикации относительных промежутков времени (числа итераций), необходимых для того, чтобы выполнялось условие убегания  $|f_c^{(n)}(z)| \geq 2$ . Примеры изображений, полученных таким методом, приведены на рис. 3, 4 и 6 цветной вклейки.

### Упражнения 8.1.

- Пусть  $g(z) = a_2 z^2 + 2a_1 z + a_0$ ,  $a_2 \neq 0$ , и пусть  $f_c(z) = z^2 + c$ . Убедитесь в том, что если  $T(z) = a_2 z + a_1$  и  $c = -a_1^2 + a_1 + a_2 a_0$ , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{g} & \mathbf{C} \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{f_c} & \mathbf{C} \end{array}$$

коммутативна, то есть  $f_c \circ T(z) = T \circ g(z)$ .

- (Компьютерный эксперимент.) Используйте компьютер для получения изображений множеств Жюлиа для  $f(z) = z^3 + c$ . Убедитесь в том, что если  $|z| > |c|$  и  $|z^2| > 2$ , то орбита  $z$  стремится к  $\infty$ .
- (Компьютерный эксперимент.) Используйте компьютер для получения изображений множеств Жюлиа для какого-нибудь полинома от  $z$ .

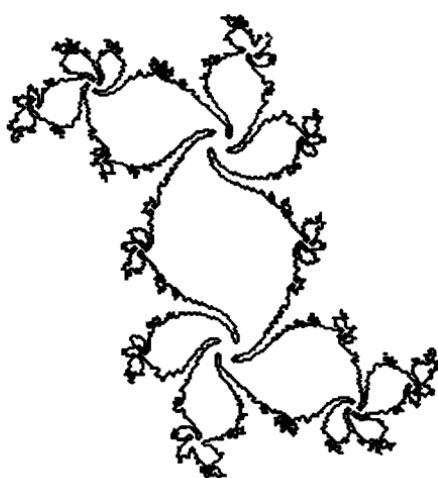
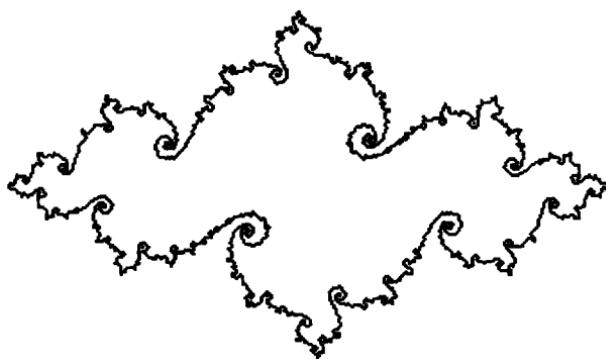


Рис. 8.6. Множество Жюлиа для  $z^2 + 0,25 + 0,52i$



Рис. 8.7. Множество Жюлиа для  $z^2 + 0,377 - 0,248i$

Рис. 8.8. Множество Жюлиа для  $z^2 - 0,7382 + 0,0827i$ 

## 8.2. Орбиты в множествах Жюлиа

В этом параграфе мы изучим еще один подход к вычислению множеств Жюлиа. Эта теория важна для понимания множества Мандельброта.

Пусть  $z$  — точка множества Жюлиа  $J(f)$ . Далее полагаем, что  $f_c(z)$  — полином. В соответствии с определениями, приведенными в главе 6, точка  $z$  — периодическая с периодом  $p$  (но не обязательно с наименьшим периодом  $p$ ), если  $f^{(p)} = z$ . Существуют несколько возможных типов поведения, зависящих от величины производной  $(f^{(p)})'$ , которую будем обозначать через  $\lambda$ . Будем говорить, что периодическая точка  $z$ :

*сверхпритягивающая*, если  $\lambda = 0$ ;

*притягивающая*, если  $|\lambda| < 1$ ;

*нейтральная*, если  $|\lambda| = 1$ ;

*отталкивающая*, если  $|\lambda| > 1$ .

Если  $w$  есть притягивающая или сверпритягивающая неподвижная точка, то *область (бассейн) притяжения* для  $w$  определяется как

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) \rightarrow w \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Точка  $\infty$  может быть классифицирована таким же образом. В теории функций комплексного переменного величина  $\infty$  допустима и удовлетворяет, помимо прочих соотношений, уравнению  $z/\infty = 0$  при любом  $z \in \mathbb{C}$ . *Окрестность бесконечно удаленной* точки  $\infty$  определяется в виде  $\infty \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  при некотором  $r > 0$ .

Динамическое поведение комплексной функции  $f$ , определенной в окрестности  $W$  бесконечно удаленной точки  $\infty$ , может быть исследовано заменой  $z$  на  $1/z$ . Поведение функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке  $\infty$  эквивалентно поведению функции  $F(z) = 1/f(1/z)$  в окрестности точки 0, что очевидно из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & \mathbf{C} \\ 1/z \downarrow & & \downarrow 1/z \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \end{array}$$

Точка  $\infty$  является притягивающей периодической точкой  $f$ , если точка 0 — притягивающая периодическая точка  $F$ . Например, если  $f(z) = z^2 + c$ , то  $F(z) = 1/f(1/z) = z^2/(1+cz^2)$ , и  $F'(z) = 2z/(1+cz^2)^2$  принимает значение 0 при  $z = 0$ . Из этого следует, что бесконечно удаленная точка  $\infty$  является сверхпритягивающей неподвижной точкой для  $f(z) = z^2 + c$ . Следующая теорема представляет собой основной результат о соотношении множеств Жюлиа с орбитами  $f(z)$  при прямых и обратных итерациях. Подробное доказательство можно найти в [11] и [14].

**Теорема 8.2.2.** *Пусть  $f$  — полином степени  $n \geq 2$ . Следующие определения множества Жюлиа  $J(f)$  эквивалентны.*

1.  *$J(f)$  есть граница области притяжения всех притягивающих неподвижных точек  $f$ , включая  $\infty$ .*
2. *Каждая отталкивающая периодическая точка принадлежит  $J(f)$ , и  $J(f)$  является замыканием множества всех отталкивающих периодических точек  $f$ .*
3. *Если  $w \in J(f)$ , то  $J(f)$  есть замыкание  $\cup_{n=1}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(w)$  (через  $(f^{(n)})^{-1}(w)$  обозначено множество  $\{z \in \mathbf{C} : f^{(n)}(z) = w\}$ ).*

Более того, за исключением самое большее одной точки  $w$  на плоскости  $\mathbf{C}$ , множество Жюлиа  $J(f)$  удовлетворяет

$$J(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cup_{k=n}^{\infty} \{(f^{(k)})^{-1}(w)\}, \quad (8.1)$$

где предел понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Первое характеристическое свойство обобщает определение, первоначально данное для множества Жюлиа полинома:

$$J(f) = \partial \{z : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\},$$

так как  $\infty$  является притягивающей неподвижной точкой в случае полинома, что было доказано выше в частном случае  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Второе характеристическое свойство, касающееся плотности отталкивающих периодических точек, часто приводится как определение множества Жюлиа. В отличие от первого характеристического свойства, оно применимо не только к полиномам. Заметим также, что это определение автоматически удовлетворяет одному из требований, предъявляемых к хаотической динамической системе, а именно, условию плотности периодических точек.

Третье характеристическое свойство и определение (8.1) часто используются для вычисления множеств Жюлиа и их графического представления.

Продолжим рассмотрение примера  $f(z) = z^2$ , начатое в предыдущем параграфе. В этом случае имеются три неподвижные точки:  $z = 0$ ,  $z = 1$  и  $z = \infty$ . Две точки,  $0$  и  $\infty$ , являются сверхпритягивающими, а точка  $z = 1$  — отталкивающей. Области притяжения для  $z = 0$  и  $z = \infty$ :

$$A(0) = \{z : |z| < 1\}$$

и

$$A(\infty) = \{z : |z| > 1\},$$

соответственно. По определению 1 теоремы 8.2.2:

$$J(z^2) = \partial A(0) = \partial A(\infty) \quad (= \{z : |z| = 1\}).$$

Периодические точки порядка  $p = 1, 2, 3, \dots$  удовлетворяют уравнению  $z^{2^p} = z$ . Если  $z \neq 0$ , то  $z^{2^p-1} = 1$ , а значит имеется точно  $2^p - 1$  периодических точек. Все они лежат на единичной окружности и распределены на ней равномерно. Все эти ненулевые периодические точки являются отталкивающими, так как  $|f^{2^p}(z)| > 1$  (упр. 1 в конце данного параграфа), а их совокупность образует плотное подмножество единичной окружности. Таким образом, определение 2 теоремы дает тот же результат, что и определение 1, в частном случае  $f(z) = z^2$ . Мы оставляем читателю самому убедиться, что определение 3 приводит к тому же множеству Жюлиа (упр. 2 в конце настоящего параграфа). Заметим только, что за исключением точки  $w = 0$  в  $\mathbf{C}$ , обратные орбиты точки  $w$  сходятся к единичной окружности, то есть к  $J(z^2)$ .

Следующий алгоритм требует вычисления квадратных корней из комплексных чисел. Если  $z = re^{i\theta}$ , то два квадратных корня

записываются в виде  $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ . Однако, обычно нам приходится работать с числами вида  $z = a + ib$ , и в этом случае удобнее использовать следующую формулу (см. упр. 3 в конце параграфа):

$$z = \pm \left[ \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \operatorname{sgn}(b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right]. \quad (8.2)$$

При каждом обращении к этой формуле может быть вычислено любое из двух значений квадратного корня.

Алгоритм 8.2.2 вычисляет и отображает множество Жюлиа для  $z^2 + c$ . Этот алгоритм использует обратную итерацию и основывается на третьем определении теоремы 8.2.2. Для того чтобы начать процесс итерирования, необходимо вычислить одну отталкивающую периодическую точку. Этот шаг выполняется в первой части алгоритма с помощью вычисления двух неподвижных точек и удержания той из них, которая имеет большую абсолютную величину. Эта неподвижная точка всегда отталкивающая (упр. 4 в конце параграфа).

---

### **Алгоритм 8.2.2. (ПОЛУЧЕНИЕ МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ ИТЕРАЦИИ)**

Назначение: строит множество Жюлиа для  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Вход:

$c_1, c_2$  ( $c = c_1 + ic_2$ )

*level* (число итераций, обычно 10–15)

Выход:

изображение множества Жюлиа

Инициализация:

графический экран для окна  $[-a, a] \times [-a, a]$ ,  $a = \max(2, 2\sqrt{|c|})$ .

Шаги.

Часть 1: вычисление отталкивающей неподвижной точки.

$$c = c_1 + ic_2$$

$$w = \sqrt{1 - 4c}$$

$$z_1 = 0,5(1 + w)$$

$$z_2 = 0,5(1 - w)$$

if  $|z_1| > |z_2|$ ,  $z = z_1$ , else  $z = z_2$ , end if

Часть 2 (основной цикл): итерации  $(f_c)^{(-1)}(z) = \sqrt{z - c}$ .

$k = 1$

$w = \sqrt{z - c}$

$z = \{w, -w\}$

построить  $z$  (см. ниже)

while  $k \leq level$

$k = k + 1$

$w = \sqrt{z - c}$  (см. ниже)

$z = \{w, -w\}$

построить  $z$

end while

**Комментарий.** Если  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ , тогда «построить  $z$ » означает, что надо отобразить отдельные точки  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

**Комментарий.** Если  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ , то определим  $\sqrt{z - c} = \{\sqrt{z_1 - c}, \sqrt{z_2 - c}, \dots, \sqrt{z_r - c}\}$ .

На рис. 8.9, 8.10, 8.11 приведены множества Жюлиа, полученные с помощью алгоритма 8.2.2.

### Упражнения 8.2.

- Пусть  $f(z)$  — полином,  $z_0$  дано и пусть  $z_{n+1} = f(z_n)$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Покажите, что

$$(f^{(p)})'(z_0) = \prod_{j=0}^{p-1} f'(z_j).$$

В частном случае  $f(z) = z^2$ , если  $z$  — ненулевая периодическая точка порядка  $p \geq 1$ , то  $|(f^{(p)})'(z)| > 1$ , и поэтому точка  $z$  — отталкивающая.

- Непосредственно убедитесь в том, что третье характеристическое свойство множества Жюлиа<sup>1</sup> функции  $f(z) = z^2$  выполняется, а именно, если  $w \in J(f)$ , то  $J(f)$  — замыкание  $\cup_{n=1}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(w)$ .
- Убедитесь в правильности формул для квадратных корней из комплексного числа  $a + ib$  (см. (8.2)).
- Убедитесь в том, что неподвижная точка, вычисленная в части 1 алгоритма 8.2.2, является отталкивающей.

<sup>1</sup>Здесь подразумевается, что множество Жюлиа — единичная окружность.

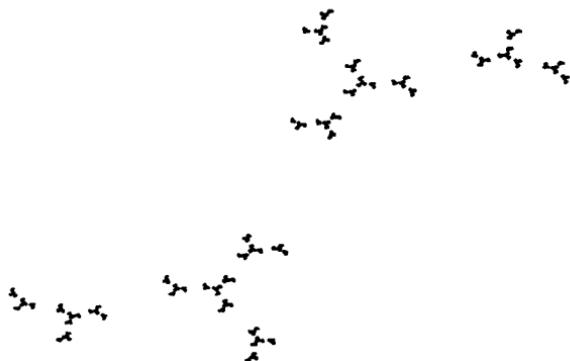


Рис. 8.9. Множество Жюлиа для  $z^2 - 1, 2i$

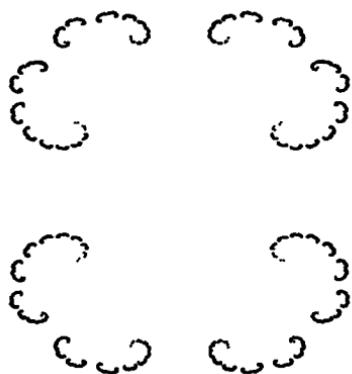


Рис. 8.10. Множество Жюлиа для  $z^2 + 0, 50$

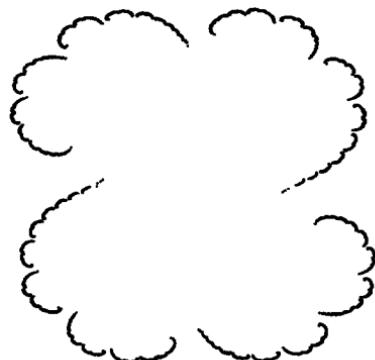


Рис. 8.11. Множество Жюлиа для  $z^2 + 0, 31 + 0, 04i$

### 8.3. Множество Мандельброта

Мы уже убедились в том, что множества Жюлиа функции  $z^2 + c$  обладают большим разнообразием. Действительно, для каждого нового значения  $c$  мы получаем впечатляющие изображения. Тем не менее, на самом деле существуют всего два типа множеств Жюлиа. Каждое множество Жюлиа функции  $f_c(z) = z^2 + c$  либо связано, либо вполне несвязано. Конечно, они могут выглядеть совершенно различным образом, даже принадлежа к одному и тому же типу. Некоторые связные множества Жюлиа выглядят как простые замкнутые кривые, которые являются фракталами, как это имеет место в случае  $0 < |c| < 1/4$ . Существуют также связные множества Жюлиа, которые не являются простыми замкнутыми кривыми, как, например, в случае  $c = -1$  (рис. 8.1). С другой стороны, все вполне несвязные множества Жюлиа обладают тем свойством, что они представляют собой «канторову пыль». Это мы наблюдаем на рис. 8.9, 8.10 и 8.11.

Множество Мандельброта (см. рис. 8.12, 8.13 и рис. 1 вклейки) служит индикатором для двух типов множеств Жюлиа функции  $z^2 + c$ . Каждая точка в множестве Мандельброта представляет значение  $c$ , для которого множество Жюлиа  $J(f_c)$  связано. Каждая точка из дополнения к множеству Мандельброта представляет значение  $c$ , для которого  $J(f_c)$  вполне несвязано. В определении множества Мандельброта об этом ничего не говорится, но основная теорема настоящего параграфа говорит именно об этом.

Множество Мандельброта  $\mathcal{M}$  для полинома  $f_c(z) = z^2 + c$  определяется как множество всех  $c \in \mathbf{C}$ , для которых орбита точки 0 ограничена, то есть

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbf{C} : \{f_c^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена}\}.$$

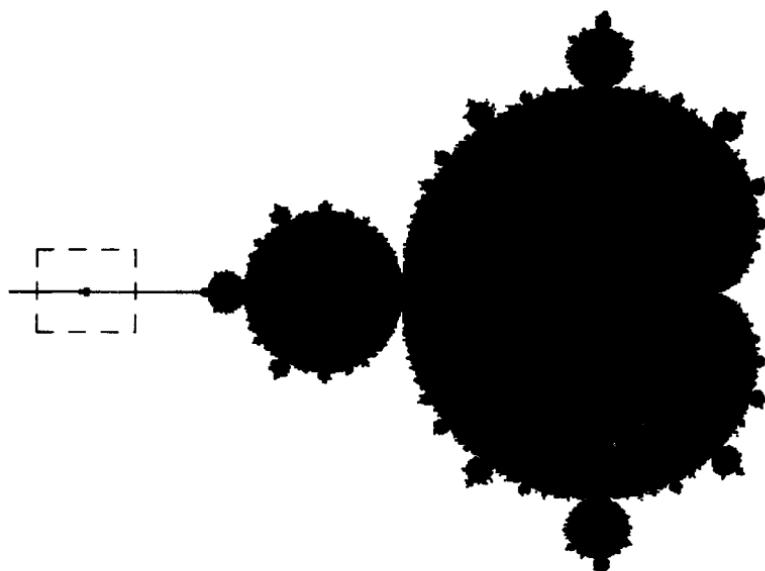
Равносильное определение записывается как

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbf{C} : f_c^{(n)}(0) \not\rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Равносильность этих определений следует из того, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + c}{z} = \infty,$$

а значит, существует такое  $R > 0$ , что из  $|z| > R$  следует  $|f_c(z)| > 2|z|$ . Если для некоторого  $n_0$  имеет место неравенство  $|f_c^{(n_0)}(0)| > R$ , то



**Рис. 8.12.** Множество Мандельброта для  $z^2 + c$

для всех  $n > n_0$ :

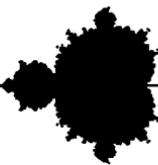
$$|f_c^{(n)}(0)| > 2^{n-n_0}R,$$

то есть  $f_c^{(n)}(0) \rightarrow \infty$ .

Выбор точки 0 в качестве начальной станет ясен из доказательства основной теоремы. Это связано с тем обстоятельством, что точка 0 — единственная критическая точка  $f_c$ , то есть единственная точка, в которой производная обращается в нуль. Определение множества Мандельброта  $\mathcal{M}$ , приведенное выше, является рабочим, то есть оно может быть прямо использовано для написания программы, определяющей принадлежность точки множеству Мандельброта. Задача проверки орбит на ограниченность упрощается при использовании следующей теоремы.

---

**Теорема 8.3.3.** *Если  $|c| > 2$  и  $|z| \geq |c|$ , то орбита  $z$  устремляется к  $\infty$ . В частности, из этого следует, что точка  $c$  не принадлежит  $\mathcal{M}$ .*

Рис. 8.13. Окно множества Мандельброта около точки  $c = -1,75 + 0i$ 

**Доказательство.** Положим  $|c| = 2 + \delta$ , где  $\delta > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |f_c(z)| &= |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| \\ &= |z|(|z| - 1) \\ &\geq |z|(|c| - 1) \\ &\geq |z|(1 + \delta). \end{aligned}$$

В частности,  $|f_c(z)| > |c|$  и при итерировании получаем:

$$\begin{aligned} |f_c^{(2)}(z)| &\geq |f_c(z)|(1 + \delta) \geq |z|(1 + \delta)^2, \\ &\vdots \\ |f_c^{(n)}(z)| &\geq |z|(1 + \delta)^n. \end{aligned}$$

Вследствие этого,  $f_c^{(n)}(z) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этим доказано первое утверждение. Относительно второго утверждения: так как орбита точки  $c$  стремится к бесконечности и  $f_c(0) = c$ , то орбита нуля также стремится к бесконечности. ■

Объединяя полученный результат с теоремой 8.1.1, получаем, что проверять нужно только точки  $|c| \leq 2$ . Причем в случае  $|c| < 2$ , если орбита достигает состояния, когда ее величина превосходит 2, то это означает, что она стремится к бесконечности, и следовательно, проверяемая точка не принадлежит  $\mathcal{M}$ . Точка  $c = -2$  — единственная точка окружности  $|c| = 2$ , которая принадлежит множеству Мандельброта.

Несложно написать программу для построения множества Мандельброта. Единственная проблема, которая может возникнуть при использовании этой программы на малых ЭВМ — большой объем вычислений. Для того чтобы получить приемлемое изображение

множества  $M$ , желательно отображать по меньшей мере  $256 \times 256$  пикселов. Более удачные визуализации получаются при использовании окна  $400 \times 400$  пикселов и более. На рис. 8.12 приведено изображение множества Мандельброта размером  $576 \times 576$  пикселов. Итеративные вычисления для определения того, является ли орбита захваченной или она стремится к бесконечности, должны выполняться для каждого пикселя, то есть для каждой пары  $(x, y)$ , принадлежащей решетке точек, которые следует проверить. Приводимая ниже программа позволяет организовать получение результатов по столбцам (все значения  $y$  при одном фиксированном  $x$ ). Это позволяет избежать хранения огромной матрицы, представляющей выход полностью, и обычно требует значительно меньше времени, чем получение результата для каждой орбиты, по мере того как вычисления для нее завершаются. Применяемый тест на ограниченность орбиты следующий:  $|f_c^{(n)}(z)|^2 < 4$  для  $n = 1, 2, \dots, 20$ . Лучшие результаты можно получить за счет значительного увеличения времени вычислений, то есть за счет увеличения  $n$  с 20 до 50, 100 и более.

---

### Алгоритм 8.3.3. (МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА)

Назначение: строит множество Мандельброта для  $f_c(z) = z^2 + c$ .

Вход:

$a, b$  (координаты центра окна, например  $(0, 0)$ )

$s$  (размер окна  $s \times s$ )

$p$  (число пикселов по каждой координате)

$iter$  (число итераций при проверке орбиты на ограниченность)

Выход:

графический экран множества Мандельброта.

Инициализация:

графический экран для окна  $[a - s/2, a + s/2] \times [b - s/2, b + s/2]$ .

Шаги:

for  $m = 1$  to  $p$

$c_1 = a - s/2 + ms/p$

    for  $n = 1$  to  $iter$

$c_2 = b - s/2 + ns/p$

$x = 0$

$y = 0$

```

iter = 1
while iter ≤ 20
    iter = iter + 1
    x1 = x2 - y2 + c1
    y1 = 2xy + c2
    x = x1
    y = y1
    z = x2 + y2
    if z > 4, выйти из цикла, end if
end while
if z < 4
    plot(c1, c2)
end if
end for
end for

```

Для доказательства основной теоремы о множестве Мандельброта воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 8.3.1.** Пусть  $\Gamma$  — гладкая, простая замкнутая кривая на плоскости, и пусть  $f_c(z) = z^2 + c$ . Обозначим через  $\Gamma_{-1}$  прообраз  $\Gamma$ :

$$\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma) = \{w : z = f_c(w) \in \Gamma\}.$$

Относительно  $\Gamma_{-1}$  можно утверждать следующее.

1. Если точка  $c$  находится строго внутри  $\Gamma$ , то  $\Gamma_{-1}$  также является гладкой, простой замкнутой кривой. Внутренность  $\Gamma_{-1}$  взаимно однозначно соответствует внутренности  $\Gamma$  (рис. 8.14).

2. Если точка  $c$  лежит на кривой  $\Gamma$ , то в этом случае  $\Gamma_{-1}$  имеет вид гладкой восьмерки. Каждая из внутренних областей  $\Gamma_{-1}$  (лепестки восьмерки) взаимно однозначно соответствует внутренней области  $\Gamma$  (рис. 8.15).

**Доказательство.** Идея доказательства проста, но детали несколько техничны. Проведем доказательство для случая, когда  $\Gamma$  — окружность.

1. Пусть  $c$  содержится строго внутри  $\Gamma$ , как показано на рис. 8.14. Рассмотрим любую точку  $z \in \Gamma$ . Обозначим через  $t$  аргумент комплексного числа  $z - c$ , то есть  $z - c = |z - c| \exp(it)$ . Квадратные корни

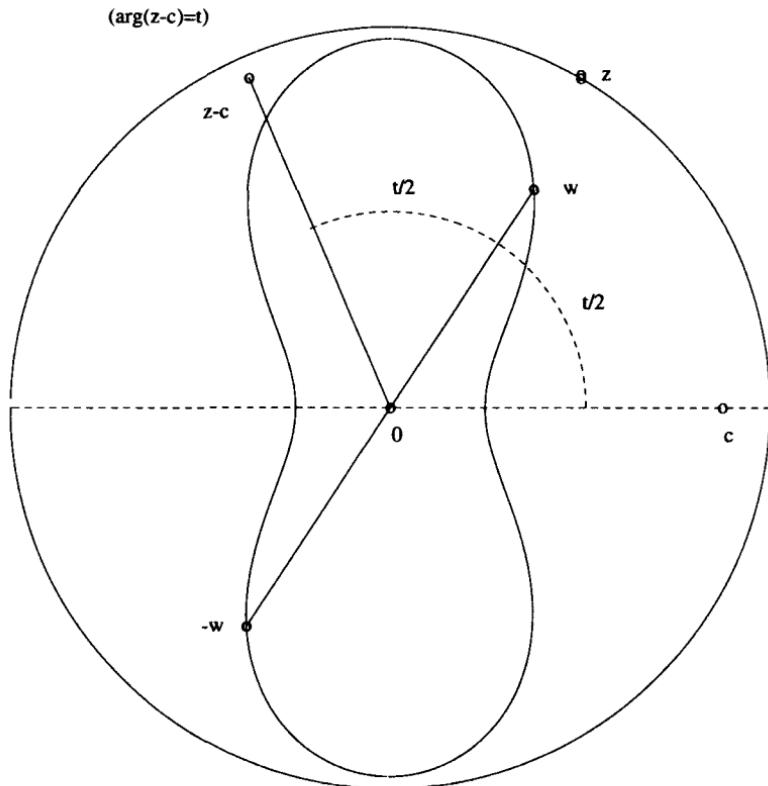
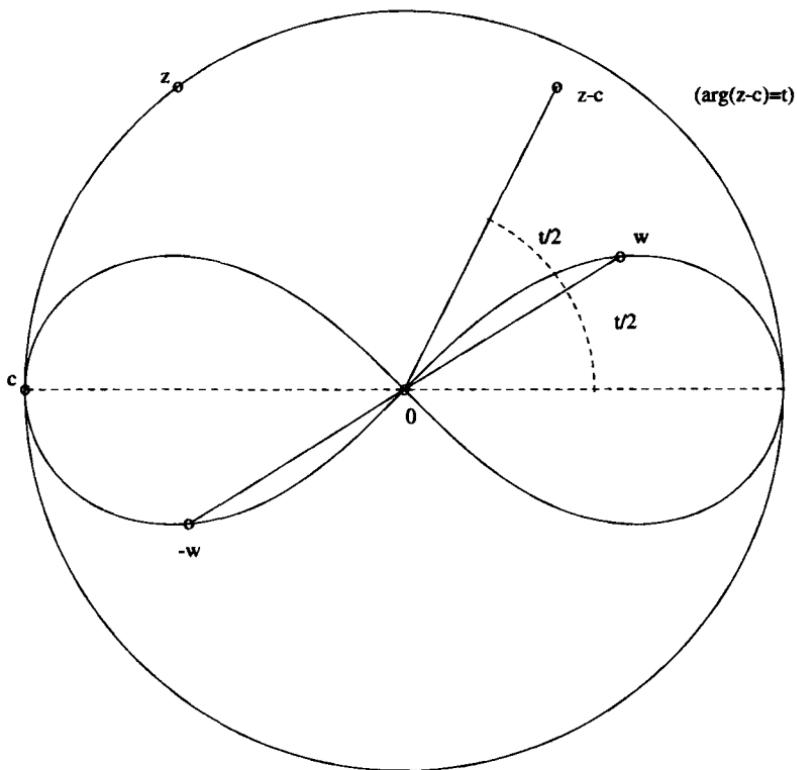


Рис. 8.14.  $f_c^{-1}(\Gamma)$  для  $c$  внутри  $\Gamma$

из  $z - c$  равны  $w = \pm\sqrt{|z - c|} \exp(it/2)$ . По мере того как  $z$  движется по  $\Gamma$ , точки  $+w$  и  $-w$  перемещаются по верхней и нижней половине  $\Gamma_{-1}$ , соответственно. Лучи, направленные из  $0$  в  $+w$  и  $-w$ , заполняют область внутри  $\Gamma_{-1}$ , и соответствие между внутренностью  $\Gamma$  и  $\Gamma_{-1}$  является взаимно однозначным.

2. Если точка  $c$  принадлежит контуру  $\Gamma$ , как изображено на рис. 8.15, то когда  $z$  движется по  $\Gamma$ , точка  $+w$  движется по замкнутой петле — границе одного из лепестков восьмерки. Лучи, направленные из  $0$  в  $+w$ , заполняют область внутри этого лепестка, и соответствие между внутренностью  $\Gamma$  и этим лепестком является взаимно однозначным. Второй лепесток, не пересекающийся с первым, за исключением точки  $0$ , прочерчивается точкой  $-w$ , и его внутренность также находится во взаимно однозначном соответствии с внутренностью  $\Gamma$ . ■

Рис. 8.15.  $f_c^{-1}(\Gamma)$  для  $c$  на  $\Gamma$ 

**Теорема 8.3.4.** Пусть  $M$  — множество Мандельброта.

- Для каждой точки  $c \in M$  соответствующее ей множество Жюлиа  $J(f_c)$  связно.
- Для каждой точки  $c \notin M$  соответствующее множество Жюлиа  $J(f_c)$  вполне несвязно и является на самом деле канторовым множеством.

#### Доказательство.

- Предположим, что последовательность  $\{f_c^{(n)}(0)\}$  ограничена. В первую очередь, мы покажем, что заполняющее множество Жюлия  $K(f_c)$  есть пересечение вложенной последовательности замкнутых областей, то есть множеств, которые являются объединениями простых замкнутых кривых и областей, ограниченных ими. Пусть  $\Gamma_0$

— окружность достаточно большого радиуса, содержащая все точки  $f_c^{(n)}(0)$ , причем точки  $f_c^{-1}(\Gamma_0)$  лежат внутри  $\Gamma_0$ , а точки вне  $\Gamma_0$  при итерировании стремятся к  $\infty$ .

Точка  $c$  находится внутри  $\Gamma_0$ , так как  $c = f_c(0)$ . Пусть  $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma_0)$ . По лемме 8.3.1,  $f_c$  отображает внутреннюю область  $\Gamma_{-1}$  во внутреннюю область  $\Gamma_0$ . В частности, так как  $f_c(c) = f_c^2(0)$  находится внутри  $\Gamma_0$ , то  $c$  лежит внутри  $\Gamma_{-1}$ , равно как и внутри  $\Gamma_0$ .

Продолжим итерацию этого процесса. Пусть  $\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  На каждом шаге точка  $c$  попадает внутрь  $\Gamma_{-n}$ , так как  $f_c^{(n+1)}(0)$  находится внутри  $\Gamma_0$ , а это означает, что  $f_c^{(n)}(0)$  находится внутри  $\Gamma_{-1}$  и так далее до тех пор, пока окончательно  $c = f_c(0)$  не попадет во внутреннюю область, ограниченную  $\Gamma_{-n}$ . Это позволяет применять лемму на каждом шаге, что и обеспечивает возможность итерирования (рис. 8.16).

Положим  $K_{-n} = \Gamma_{-n} \cup (\text{внутренность } \Gamma_{-n})$  и  $K = \cap_{n=0}^{\infty} K_{-n}$ . По построению, каждая точка вне  $K_{-n}$  при итерировании стремится к  $\infty$ . Из этого следует, что область притяжения  $A(\infty)$  определяется как

$$A(\infty) = \mathbf{C} \setminus K.$$

Таким образом, заполняющее множество Жюлиа  $\mathcal{K}(f_c)$  есть множество  $K$ . Множество Жюлиа  $J(f_c)$  является границей  $A(\infty)$ , и следовательно, границей  $K$ .

Связность  $\mathcal{K}(f_c)$  следует из топологических соображений. Рассмотрим вложенную последовательность компактных, связных множеств, чьи дополнения связны. Их пересечение обладает теми же тремя свойствами. Более того, граница этого пересечения связна. Так как последовательность множеств  $K_{-n}$  обладает вышеуказанными свойствами, то множества  $\mathcal{K}(f_c)$  и  $J(f_c)$  связны.

2. Предположим, что последовательность  $\{f_c^{(n)}(0)\}$  не ограничена. Мы знаем, что в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{(n)}(0) = \infty.$$

Пусть  $\Gamma_0$  — окружность достаточно большого радиуса, причем:

- а)  $\Gamma_{-1} = f_c^{-1}(\Gamma_0)$  лежит внутри  $\Gamma_0$ ;
- б) все точки вне  $\Gamma_0$  итерируются к  $\infty$ ;
- в) существует  $n_0$  такое, что:

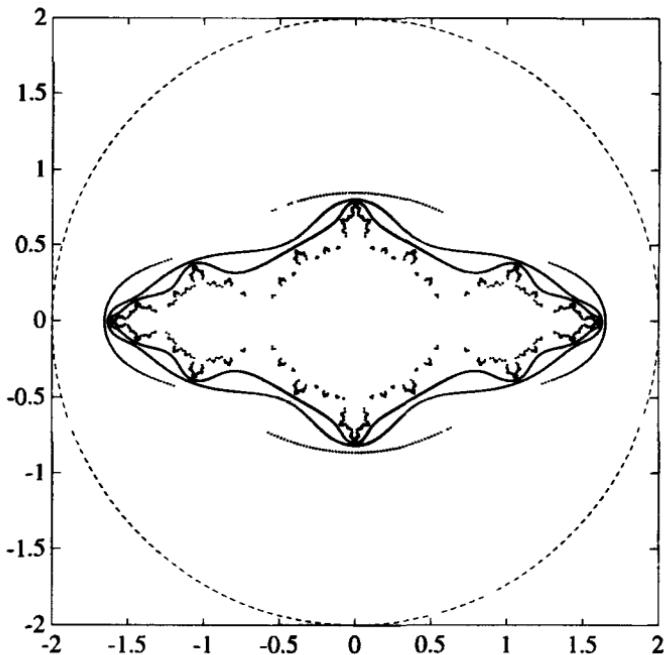


Рис. 8.16. Сжатие на связном множестве Жюлиа

$$f_c^{(n_0-1)}(c) = f_c^{(n_0)}(0) \in \Gamma_0;$$

$f_c^{(n_0)}(c)$  лежит внутри  $\Gamma_0$  при  $n < n_0$ ;

$f_c^{(n_0)}(c)$  лежит вне  $\Gamma_0$  при  $n > n_0$ .

Начнем с того же, что и при доказательстве части 1 теоремы, предположив, что  $\Gamma_{-(n+1)} = f_c^{-1}(\Gamma_{-n})$ . Эта процедура работает до тех пор, пока мы не достигаем  $n = n_0$  и не сталкиваемся с точкой  $c$  на кривой  $\Gamma_{-(n_0-1)}$ , а не *внутри*  $\Gamma_{-(n_0-1)}$ . В этом месте мы используем вторую часть леммы 8.3.1, где говорится, что  $\Gamma_{-n_0}$  имеет вид восьмерки, а множество Жюлиа  $J(f_c)$  содержитя в объединении двух внутренних областей. Так как каждая из этих областей отображается на полную внутренность  $\Gamma_{-(n_0-1)}$ , каждая должна содержать непустое подмножество  $J(f_c)$ . В результате мы приходим к выводу, что множество  $J(f_c)$  должно быть несвязным.

После прохождения  $n_0$ , множества  $\Gamma_{-n}$  представляют собой объединения восьмерок. Каждая восьмерка порождает еще две восьмерки на следующем шаге. На каждом шаге  $J(f_c)$  окружено вось-

мерками для этого шага (рис. 8.17). В результате получаем, что  $J(f_c)$  имеет бесконечно много компонент. Более того, верно и то, что каждая из этих компонент есть на самом деле одна-единственная точка, что и делает  $J(f_c)$  вполне несвязным. Для доказательства этого надо провести еще дополнительный анализ. Наиболее просто это делается в случае достаточно большого  $c$ . Доказательство для  $c > (5 + 2\sqrt{6})/4 \approx 2,475$  можно найти в [14], а для  $c > 22/9 \approx 2,444$  — в [11].

Кроме того, в этом случае  $J(f_c)$  является еще и совершенным множеством, то есть оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Таким образом,  $J(f_c)$  обладает всеми требуемыми свойствами, чтобы считать его пылью Кантора, а именно, оно компактно, вполне несвязно и совершенно (когда  $c \notin \mathcal{M}$ ). ■

**Роль критической орбиты.** Возможно, что значимость выбора орбиты  $\{f_c^{(n)}(0)\}$  в определении множества Мандельброта ускользнула от внимания читателя. Точка  $z = 0$  — это единственное значение  $z$ , для которого  $f'_c(z) = 0$ , и орбита точки 0 называется *критической орбитой*. Причина, по которой мы выделяем эту орбиту, заключается в том, что она является единственной, для которой восьмерки появляются регулярным образом, как это требуется в доказательстве части 2 теоремы 8.3.4.

Разложение в ряд Тейлора функции  $f_c(z)$  в окрестности любой точки  $z_0$  имеет вид:

$$f_c(z) = f_c(z_0) + f'_c(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''_c(z_0)(z - z_0)^2.$$

Если  $f'_c(z_0) = 0$ , то  $f_c(z)$  является двулистным отображением в малой окрестности  $z_0$  (за исключением самой точки  $z_0$ ). Этот факт объясняет поведение, описанное в части 2 леммы 8.3.1, а именно, что  $f_c^{-1}(\Gamma)$  имеет вид восьмерки, если  $c \in \Gamma$ . Если же  $f'_c(z_0) \neq 0$ , то  $f_c(z)$  является взаимно однозначным отображением в малой окрестности  $z_0$ , и мы не получаем никаких восьмерок.

**Периоды и обрамление.** Доминирующей фигурой в множестве Мандельброта является большая кардиоида. Внутренность этой кардиоиды соответствует точкам  $c$ , для которых множество Жюлиа для  $f_c(z)$  имеет притягивающую неподвижную точку. Это объясняется следующим образом. Если  $z$  есть притягивающая неподвижная

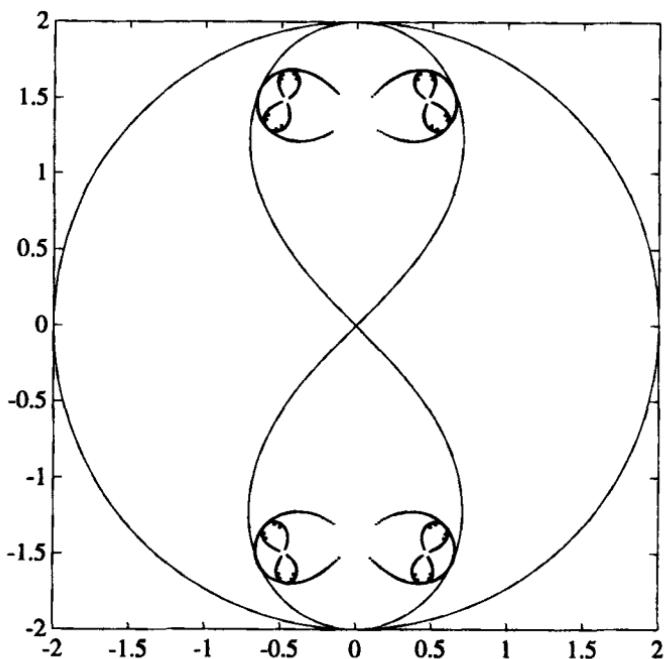


Рис. 8.17. Сжатие на вполне несвязном множестве Жюлиа

точка, то

$$f_c(z) = z^2 + c = z$$

и

$$\left| \frac{d}{dz} f_c(z) \right| = |2z| < 1.$$

Граница таких точек удовлетворяет  $|2z| = 1$  или

$$z = \frac{1}{2}e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Уравнение  $z^2 + c = z$  принимает вид

$$c = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}, \tag{8.3}$$

которое описывает большую кардиоиду, когда  $\theta$  изменяется в пределах  $[0, 2\pi]$  (см. упр. 1 в конце параграфа). Таким образом, границей притягивающих неподвижных точек является кардиоида, и притягивающие неподвижные точки лежат внутри нее. Заметим, что по оси  $x$

кардиоида располагается от  $-3/4$  до  $1/4$ , что соответствует той части орбитной диаграммы (рис. 6.9), где существует только одна ветвь.

Если  $z$  является притягивающей периодической точкой периода 2, то она есть неподвижная точка  $f_c^{(2)}(z)$ , и поэтому

$$(z^2 + c)^2 + c = z.$$

Это уравнение решается разложением на множители:

$$(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 + z + 1 + c)(z^2 + c - z).$$

Решения  $z^2 + c - z = 0$  — это просто неподвижные точки  $f_c(z)$ . Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — решения уравнения:

$$z^2 + z + 1 + c = 0. \quad (8.4)$$

Так как они являются точками периода 2 для  $f_c(z)$ , то:

$$z_1^2 + c = z_2$$

и

$$z_2^2 + c = z_1.$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z_1) &= 4z_1(z_1^2 + c) \\ &= 4z_1 z_2, \end{aligned}$$

а также

$$\frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z_2) = 4z_1 z_2.$$

Произведение  $z_1 z_2$  двух решений уравнения (8.4) равно свободному члену этого уравнения, так что получаем

$$z_1 z_2 = 1 + c.$$

Условие для производной в притягивающей периодической точке:

$$\left| \frac{d}{dz} f_c^{(2)}(z) \right| < 1,$$

дает

$$|4(1 + c)| < 1.$$

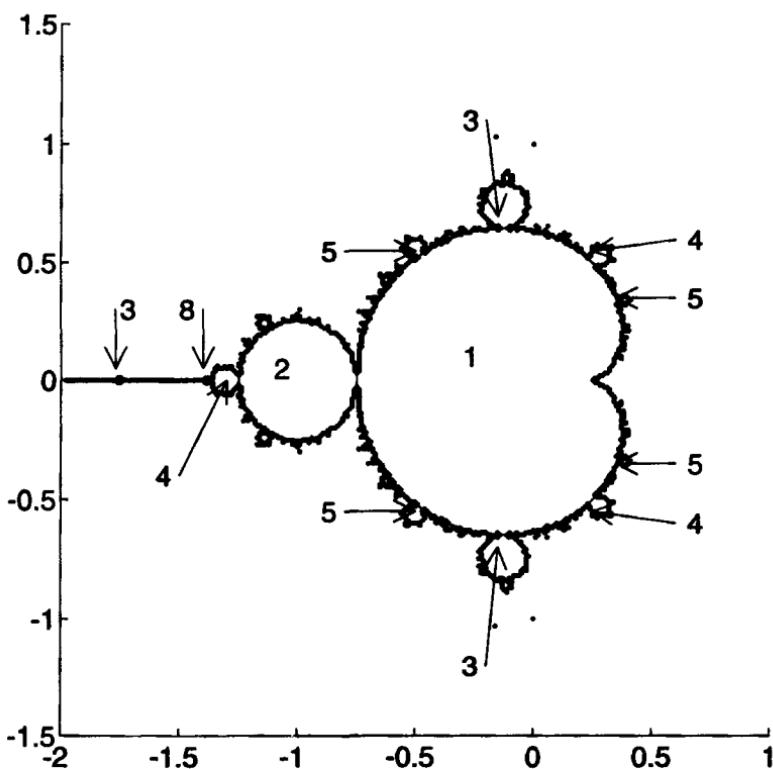


Рис. 8.18. Периоды обрамлений

Таким образом, значения  $c$ , для которых существуют периодические притягивающие точки периода 2 в множестве Жюлиа, лежат внутри круга  $|c + 1| = 1/4$ . Отметим, что по оси  $x$  этот круг расположен от  $-5/4$  до  $-3/4$ , что соответствует той части орбитной диаграммы, где она имеет две ветви.

На рис. 8.18 изображены некоторые участки (иногда называемые *обрамлением*) множества Мандельброта, соответствующие существованию притягивающих периодических точек различных периодов. Орбитная диаграмма (рис. 6.9) говорит о том, что происходит на вещественной оси множества Мандельброта. Каждая бифуркация соответствует новому обрамлению, которое пересекает ось  $x$ , и период в этом случае соответствует числу ветвей орбитной диаграммы.

Установить связь периодов с обрамлениями для периодов, больших чем 2, аналитическими методами затруднительно, если вообще

возможно. Задача экспериментального определения периодов для притягивающих периодических точек упрощается с помощью следующего результата [11, п. 3.4]. Именно, если  $z_0$  есть притягивающая периодическая точка для полинома, то существует критическое значение, которое лежит в области притяжения  $z_0$ . В случае  $f_c(z) = z^2 + c$  этим критическим значением является точка 0. Для данного обрамления мы обычно можем определить периоды, хотя иногда это и не совсем просто. Для этого мы начинаем с тщательного построения изображения множества Мандельброта и находим аппроксимацию центра (значение  $c$ ) определенного обрамления. Затем мы вычисляем определенный участок орбиты  $\{f_c^{(n)}(0)\}$  и пытаемся определить по ее асимптотическому поведению значение периода. Для значений  $c$ , близких к границе, анализ вычислений становится затруднительным (см. ниже упр. 3).

### Упражнения 8.3.

- Покажите, что уравнение

$$c = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$$

описывает кардиоиду при изменении  $\theta$  в пределах  $[0, 2\pi]$ .

- Покажите, что множество Мандельброта симметрично относительно вещественной оси. Для этого покажите, что отображение  $z^2 + c$  топологически сопряжено по отношению к  $z^2 + \bar{c}$ , где  $c$  и  $\bar{c}$  — комплексно сопряженные числа. Затем исследуйте орбиты точки 0 при этих двух отображениях.
- (Компьютерный эксперимент.) Начните с тщательного построения изображения множества Мандельброта и приближенно определите центр (значение  $c$ ) какого-либо элемента обрамления, например, одной из окружностей, касающихся главной кардиоиды. Затем вычислите определенный участок орбиты  $\{f_c^{(n)}(0)\}$  и постараитесь по ее асимптотическому поведению определить период. Проделайте это для нескольких окружностей, отмеченных на рис. 8.18.
- (Компьютерный эксперимент.) Используйте компьютер для получения изображения множества Мандельброта для  $f(z) = z^3 + c$ . Покажите, что если  $|c| > 2$ , то орбита  $z$  стремится к  $\infty$ .

## 8.4. Хаос и множества Жюлия

Квадратичная функция  $f_c(z) = z^2 + c$  проявляет хаотическое поведение на своем множестве Жюлия  $J(f_c)$ . Вспомним теорему 6.5.3, где было доказано, что отображение  $z^2$  хаотично на единичной окружности  $S^1$ , которая, как было отмечено в п. 8.1, является множеством Жюлия для  $z^2$ . Фактически, в главе 6 был рассмотрен и ряд других примеров, подобных хаотическому поведению  $f_c(z)$  на  $J(f_c)$ .

Одним из таких примеров является хаотическое поведение<sup>2</sup> вещественной функции  $x^2 - 2$  на отрезке  $[-2, 2]$ . Как следует из приводимой ниже леммы, множество Жюлия комплексной функции  $z^2 - 2$  есть также отрезок  $[-2, 2]$ , а значит  $z^2 - 2$  хаотична на  $J(f_{-2})$ .

**Лемма 8.4.2.** *Отрезок  $[-2, 2]$  является множеством Жюлия функции  $z^2 - 2$ .*

**Доказательство.** В п. 6.2 было отмечено, что если  $f_c(x) = x^2 - 2$ , то график  $f_c^{(n)}(x)$  пересекает прямую  $y = x$  на отрезке  $[-2, 2]$  точно  $2^n$  раз (см. рис. 6.8) и точки пересечения различны. Таким образом,  $f_c^{(n)}(x)$  имеет  $2^n$  различных периодических точек на  $[-2, 2]$ . Комплексный полином  $f_c^{(n)}(z) - z$  степени  $2^n$  имеет самое большое  $2^n$  нулей в  $\mathbb{C}$ . Таким образом, мы нашли все периодические точки, и они лежат на отрезке  $[-2, 2]$ . Более того, они образуют плотное подмножество отрезка  $[-2, 2]$  (их замыкание есть  $[-2, 2]$ ). Наклоны функций  $f^{(n)}(x)$  в точках пересечения с прямой  $y = x$ , как видно из графика, больше 1 по абсолютной величине. Следовательно, эти периодические точки отталкивающие. По определению 2 теоремы 8.2.2, множество  $J(f_{-2})$  суть замыкание отталкивающих периодических точек, то есть отрезок  $[-2, 2]$ . ■

В теореме 7.2.6 было доказано, что для вещественных  $x$  и вещественных  $c$ , при  $c < c^*$  для определенного значения  $c^* < -2$ , функция  $x^2 + c$  хаотична на некотором множестве захвата  $\Lambda$ .  $\Lambda$  является множеством точек  $x_0$ , для которых итерированные величины  $x_n = x_{n-1}^2 + c$  остаются ограниченными при  $n \rightarrow \infty$ . Подробности см. в упр. 1 в конце параграфа.

<sup>2</sup>Хаотическое поведение при  $c = -2$  было впервые получено фон Нейманом и Уламом при вычислениях на одной из первых ЭВМ в 1947 году [64].

Основная теорема о хаотическом поведении на множествах Жюлиа немедленно следует из теоремы 8.2.2.

**Теорема 8.4.5.** *Квадратичная функция  $f_c(z) = z^2 + c$  хаотична на своем множестве Жюлиа  $J(f_c)$  при всех  $c \in \mathbb{C}$ .*

**Доказательство.** Доказательство основывается на установлении условий периодичности и транзитивности, описанных в п. 6.5. Существенная зависимость от начальных условий при этом непосредственно следует из теоремы 7.1.1.

**Периодичность.** Условие периодичности, заключающееся в том, что периодические точки плотны в  $J(f_c)$ , следует из определения 2 теоремы 8.2.2.

**Транзитивность.** Условие транзитивности состоит в том, что для любой пары открытых множеств  $U$  и  $V$ , которые пересекаются с  $J(f_c)$ , существует  $n \geq 0$  такое, что  $f_c^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Выполнение этого условия следует из определения 3 теоремы 8.2.2. Пусть  $U$  и  $V$  — открытые множества, пересекающиеся с  $J(f_c)$ , и пусть  $v \in V \cap J(f_c)$ . По определению 3,  $J(f_c)$  является замыканием множества

$$\cup_{n=1}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(v).$$

В частности, это объединение пересекается с  $U$ , и поэтому для некоторого  $n \geq 1$  выполняется  $(f^{(n)})^{-1}(v) \cap U \neq \emptyset$ . Выберем любую точку  $u$  в этом пересечении. Тогда  $f_c^{(n)}(u) = v$ , и следовательно,  $f_c^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ . ■

### Упражнения 8.4.

- Используя ту же аргументацию, как при доказательстве теоремы 8.4.2, убедитесь, что множество захвата  $\Lambda$  для вещественного квадратичного полинома  $x^2 + c$ ,  $c < c^*$ , является множеством Жюлиа для комплексного квадратичного полинома  $z^2 + c$  (см. теорему 7.2.6).
- Рассматривая доказательство части 2 теоремы 8.3.4, покажите, что если  $c \notin M$ , то отображение  $f_c(z) = z^2 + c$ , действующее на множестве Жюлиа  $J(f_c)$ , топологически сопряжено с обратным сдвигом  $B$  на символическом пространстве  $\Sigma$  двух символов. Следовательно, оно хаотично. Чтобы упростить ситуацию, предположим, что  $J(f_c)$  — то же самое, что и заполняющее множество Жюлиа  $K(f_c)$ , и что точки в  $J(f_c)$  есть пересечения внутренних областей восьмерок.

## 8.5. Проблема Кэли

В 1879 году сэр Артур Кэли поставил задачу итерирования комплексных функций [6], которая позднее стимулировала исследования Гастона Жюлиа по проблемам теории множеств, названных теперь его именем. Свой знаменитый мемуар [25] по этой тематике Жюлиа опубликовал в 1918 году. Проблема Кэли заключается в исследовании сходимости классического алгоритма Ньютона нахождения кубических корней, но при условии, что вещественные числа заменяются на комплексные. Заинтересованный читатель может найти дальнейшие сведения в книге Пайтгена и Рихтера [35].

Метод Ньютона для нахождения вещественного корня  $f(x)$  заключается в следующем. Выберем начальное приближение  $x_0$ , вычислим точки

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и найдем предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Предполагается, что  $f$ ,  $f'$  и  $f''$  существуют и непрерывны в окрестности нуля, скажем, при  $x = c$ . Если  $x_0$  находится достаточно близко к  $c$  и если  $f'(c) \neq 0$ , то (упр. 6 п. 3.3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Для  $f(x) = x^3 - 1$  нули равны кубическим корням из 1, и итерации Ньютона принимают вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2}.$$

Кэли предложил исследовать поведение этих итераций для комплексных  $z_n$ :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}. \quad (8.5)$$

Имеются три кубических корня из 1, а именно,  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 1 + i\sqrt{3}/2$  и  $w_3 = 1 - i\sqrt{3}/2$ . Область притяжения для корня  $w_i$  есть множество

$$A(w_i) = \{z \in \mathbf{C} : \text{если } z_0 = z, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w_i\}.$$

Кэли поставил задачу описания областей  $A(w_1)$ ,  $A(w_2)$  и  $A(w_3)$ .

Уравнение (8.5) является результатом итерирования функции

$$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \quad (8.6)$$

Нули  $f(z)$  являются неподвижными точками  $g(z)$ , и так как

$$g''(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2},$$

они сверхпритягивающие. В случае, когда  $f(z)$  является полиномом, например,  $f(z) = z^3 - 1$ , функция Ньютона  $g(z)$  есть рациональная функция от  $z$ , то есть равна частному полиномов. В п. 8.1 мы определили множество Жюлиа  $J(g)$  для полинома  $g(z)$  как границу множества точек, которые стремятся к  $\infty$  при итерировании. Множество Жюлиа для рациональной функции от  $z$  определяется иначе, чем для полиномов. Один из способов — считать множеством Жюлиа замыкание множества отталкивающих точек. Как мы уже видели в теореме 8.2.2, эти определения совпадают в случае полиномов. Однако в случае рациональных функций они различаются.

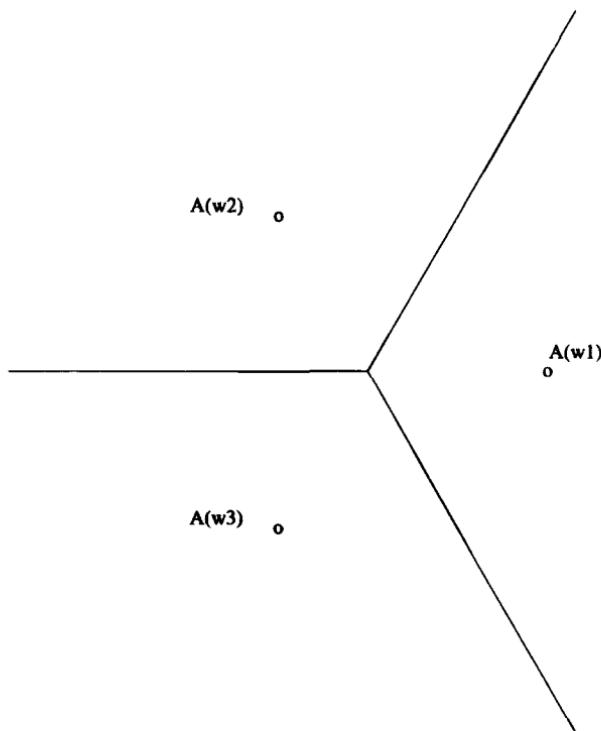
Как и в случае вещественных итераций, если начальная точка  $z_0$  находится достаточно близко к корню  $w_i$ , то ньютоновские итерации сходятся к этому корню. Таким образом, каждая область  $A(w_i)$  содержит окрестность  $w_i$ . Но какую часть комплексной плоскости занимает  $A(w_i)$  и какова ее геометрия? Ответ на этот вопрос крайне нетривиален.

Перед исследованием проблемы Кэли для кубических корней рассмотрим соответствующую задачу для квадратных корней. В этом случае  $f(z) = z^2 - 1$  и ньютоновские итерации имеют вид:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n}.$$

Если  $z_0$  лежит в правой полуплоскости, то  $z_n \rightarrow +1$  при  $n \rightarrow \infty$ , а если  $z_0$  лежит в левой полуплоскости, то  $z_n \rightarrow -1$  при  $n \rightarrow \infty$  (упр. 1 в конце параграфа). Таким образом, за исключением начальных точек  $z_0$ , которые равноудалены от двух корней,  $z_n$  сходится к корню, ближайшему к  $z_0$ . Если  $z_0$  лежит на мнимой оси, то в этом случае итерации не сходятся (см. упр. 2 в конце параграфа).

По аналогии со случаем  $z^2 - 1$  можно предположить, что в случае  $z^3 - 1$  итерированные значения  $z_n$ , вычисленные по формуле (8.5),



**Рис. 8.19.** Является ли это решением задачи Кэли?

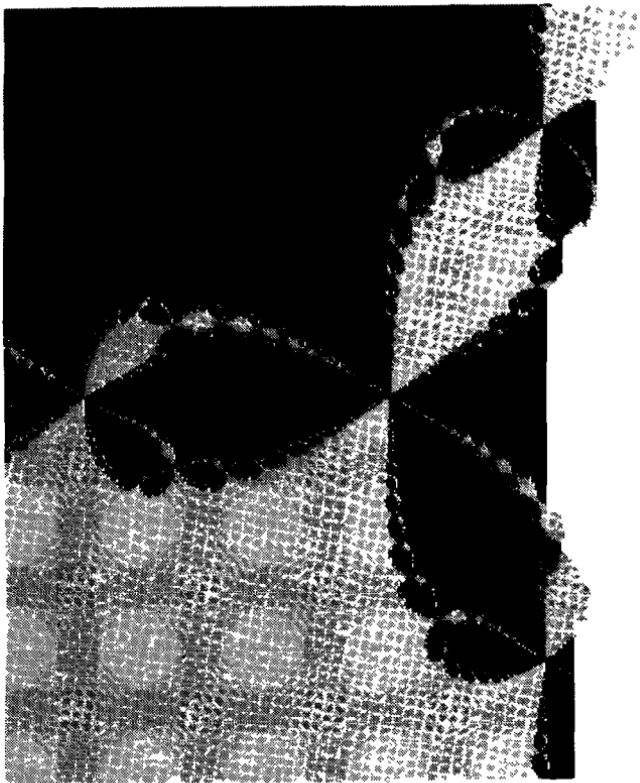
сходятся к кубическому корню, ближайшему к  $z_0$ , если такой ближайший корень существует. Таким образом, ответ на вопрос Кэли предположительно выглядит так, как показано на рис. 8.19. Как ни странно, это предположение оказывается неверным.

**Теорема 8.5.6.** Пусть  $g(z) = z - (z^3 - 1)/(3z^2)$  — функция Ньютона для  $z^3 - 1$ . Тогда множество Жюлиа для  $g$  имеет вид:

$$J(g) = \partial A(1) = \partial A(-1 + i\sqrt{3}/2) = \partial A(-1 - i\sqrt{3}/2), \quad (8.7)$$

то есть  $J(g)$  является границей каждой из областей притяжения для трех притягивающих неподвижных точек  $1, -1 \pm i\sqrt{3}/2$ .

**Доказательство.** См. [35, с. 96]. ■



**Рис. 8.20.** Бассейны притяжения для кубических ко

Теорема 8.5.6 говорит нам о том, что ответ на возможно, отличается от того, что изображено на рис. начала координат точки на границе любой области имеют малые окрестности, пересекающиеся ровно с двуми. Но выражение (8.7) говорит о том, что в произвольности каждой граничной точки любой из этих областей находится точки, принадлежащие всем трем областям. Правда, изображение трех бассейнов притяжения для  $g(z)$  дано на рис.

Иными словами, можно задать вопрос: как закрасить плоскость тремя красками, чтобы на границе каждой цветной области существовали точки двух других цветов, которые были бы расположены произвольно близко? Ответ мы получим, раскрасив области притяжения для  $g(z)$  разными красками.

**Упражнения 8.5.**

## 1. Для схемы итерирования

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n},$$

соответствующей применению метода Ньютона к  $f(z) = z^2 - 1$ , покажите, что если  $z_0$  лежит в правой полуплоскости, то  $z_n \rightarrow +1$  при  $n \rightarrow \infty$ , а если  $z_0$  лежит в левой полуплоскости, то  $z_n \rightarrow -1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для этого покажите, что функция Ньютона

$$N(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z}$$

топологически сопряжена с  $z^2$  при помощи отображения

$$H(z) = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Вам потребуется использовать то обстоятельство, что  $H$  отображает мнимую ось на единичную окружность с центром в начале координат, правую полуплоскость — во внутреннюю область окружности, а левую полуплоскость — на ее внешность.

2. Покажите, что если в предыдущей задаче  $z_0$  лежит на мнимой оси, то процесс итерирования не сходится.
3. (Компьютерный эксперимент.) Используя компьютер, постройте графическое изображение области притяжения  $A(1)$  для  $f(z) = z^4 - 1$ .
4. (Компьютерный эксперимент.) Повторите эксперимент из упр. 3 для  $g(z) = z^3 - z$ .

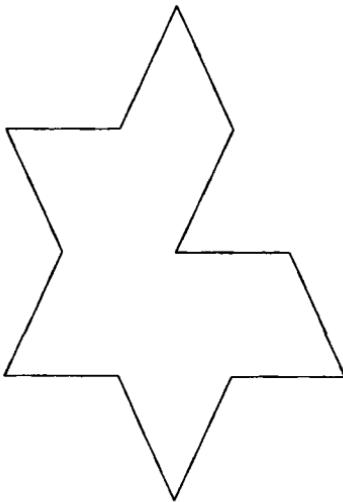
# Глава 9.

## Случайные фракталы

Фрактальные объекты повсеместно встречаются в природе. Теперь читатель вполне обоснованно ожидает увидеть фрактальную модель практически во всем, что окружает нас во внешнем мире. Мы уже познакомились с фрактальными моделями для многих естественных объектов, когда изучали L-системы в главе 2 и системы итерированных функций (СИФ) в главе 4. Это модели снежинок, деревьев, кустов, листьев и тому подобных объектов. Конечно, фигура снежинки может одновременно служить моделью береговой линии острова, а дерево может быть использовано для представления анатомических объектов, таких, например, как бронхиальное или артериальное дерево.

Однако фракталы, получаемые с помощью L-систем или СИФ, обладают одним явным недостатком, ограничивающим их применение для моделирования естественных объектов. Они *детерминированы*. Хотя каждый может распознать кленовый лист, фактически, никакие два листа не будут в точности подобны друг другу. Одной из причин такого положения вещей является то, что случайность есть неотъемлемое свойство реального мира. Конечно, с большой степенью достоверности можно предполагать, что существует детерминированный генетический код для кленового листа. Однако реальный рост листа в значительной степени зависит от таких факторов, как наличие воды, солнечного света, питательных веществ, а также болезней и множества других подобных воздействий. Все эти факторы окружающей среды приводят к возмущениям в процессах роста и, следовательно, определяют появление случайных различий в конфигурациях листа.

В этой главе мы введем новый класс объектов для моделирования широкого спектра «естественных фракталов»: гор, облаков, поверхностей лесных массивов и других подобных геометрических конфигураций. Построение этих фракталов не сводится к случайным возмущениям детерминированных фракталов. Напротив, случайный



**Рис. 9.1.** Построение снежинки «внутрь и наружу»

характер присущ им изначально, что связано со случайными процессами. Основной моделью и главной темой настоящей главы является фрактальное броуновское движение — случайным процессом, широко распространенный в природе. Но сначала мы кратко рассмотрим методы случайных возмущений.

## 9.1. Случайные возмущения

Мы можем построить рандомизированную снежинку Коха, добавляя на каждом шаге равносторонние треугольники, обращенные как внутрь, так и наружу (рис. 9.1).

Если на каждом шаге мы сделаем выбор направления внутрь или наружу случайнym, то в итоге получим фрактальную кривую, которая по-прежнему имеет размерность  $d = \log(4)/\log(3) \approx 1,2619$  (при условии, что перекрытий не слишком много). Кривые, полученные таким образом, могут использоваться для моделирования береговых линий островов (хотя лучшей моделью является линия уровня фрактальной броуновской поверхности; см. п. 9.4). На рис. 9.2 приведена кривая Коха, рандомизированная подобным образом.

Возможны и другие варианты рандомизации L-систем и СИФ. Например, в случае ковра Серпинского, при построении которо-

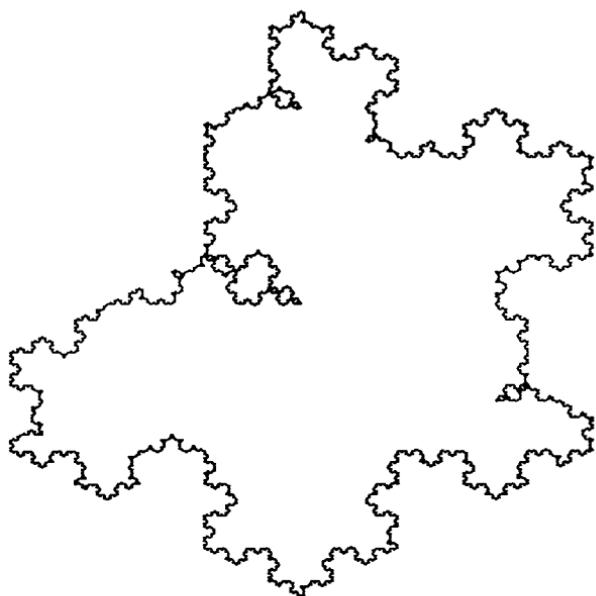


Рис. 9.2. Рандомизированная кривая Коха

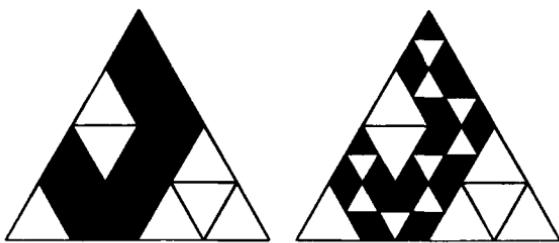
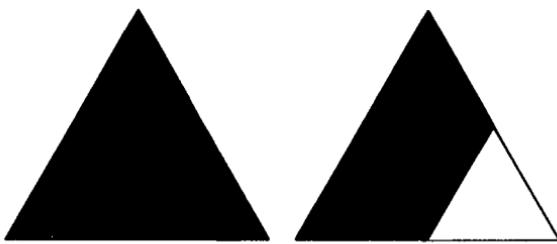


Рис. 9.3. Рандомизированный ковер Серпинского

го обычно удаляется средняя из четырех треугольных областей (рис. 2.4), мы можем случайно удалять любой из четырех треугольников (рис. 9.3).

Приведенные примеры лишь поверхностно иллюстрируют предмет рандомизированных фракタルных построений. Другие способы заключаются в рандомизации параметров, используемых в детерминированных конструкциях. В качестве примера можно привести рандомизацию длин интервалов, удаляемых при построении множества Кантора. Существует ряд глубоких теорем о размерности фракталов, получаемых подобным образом. Ряд интересных теорем описывает также свойства протекания фракталов типа рандомизированных ковров. За дополнительной информацией мы отсылаем читателя к книге Фалконе [14].

### Упражнения 9.1.

1. (Компьютерный эксперимент.) Используйте компьютер для создания фракталов со случайными возмущениями. Примените эту методику к описанным ниже и собственным конструкциям.
  - а) Рандомизированная снежинка Коха, как на рис. 9.2.
  - б) Рандомизированная снежинка Коха, в которой на каждом шаге удаляется средний сегмент и заменяется сторонами равностороннего треугольника, как и в исходной конструкции Коха. Но в данном варианте длина каждого удаляемого сегмента равна доле  $r$  стороны, где  $r$  — равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1/3]$  случайная величина.
  - в) Рандомизированный ковер Серпинского, как на рис. 9.3.
  - г) Рандомизированное множество Кантора, в котором на каждом шаге производится случайный выбор того, какой из подинтервалов выбрасывается: первый, средний или третий.
  - д) Рандомизированное множество Кантора, в котором длины выбрасываемых срединных интервалов случайны (см. [14, с. 226]).

## 9.2. Броуновское движение

Начало исследования броуновского движения датируется 1827 годом, когда шотландский ботаник Роберт Броун обнаружил, что маленькие частицы, взвешенные в жидкости, совершают непрерывное беспорядочное движение. В 1905 году Альберт Эйнштейн объяснил это движение хаотическими столкновениями с молекулами



Рис. 9.4. График гауссовского случайного блуждания

окружающей среды. Норберт Винер в 1923 году построил первую удовлетворительную с математической точки зрения модель выборочных реализаций и доказал их «почти наверное» (на языке теории вероятностей) непрерывность<sup>1</sup>. На сегодняшний день по этому предмету имеется обширная литература. Страгое описание броуновского движения можно найти у Карлина и Тейлора [26] (см. также [10] и [65]).

Простейшей дискретной аппроксимацией броуновского движения служит одномерное случайное блуждание. В этом случае частица первоначально располагается в точке  $x_0 = 0$  на прямой. Частица совершает единичный шаг вправо или влево в зависимости от случайного выбора, например, бросания монеты. Случайное блуждание происходит итеративно. Для каждого  $n = 1, 2, 3, \dots$  положим

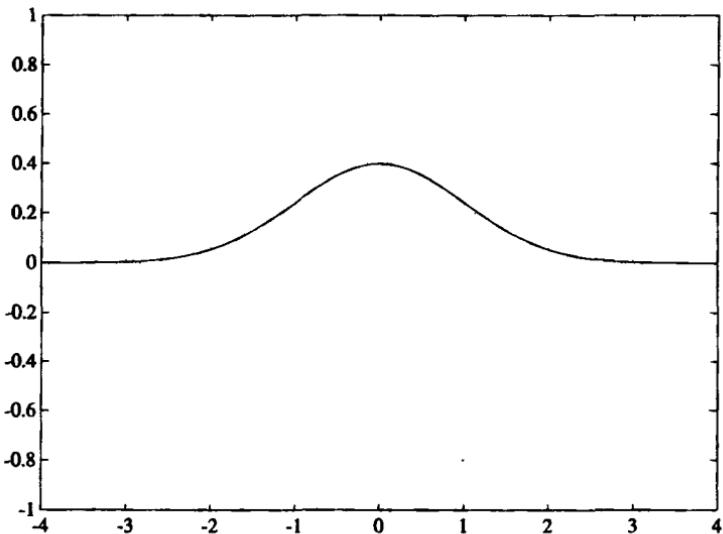
$$x_n = x_{n-1} \pm 1.$$

Более точным приближением к реальному броуновскому движению является замена шагов  $\pm 1$  случайными величинами  $g_n$ , имеющими гауссовское, или нормальное распределение. После первого шага частица находится в положении  $x_1 = x_0 + g_1$ , а после  $n$  шагов — в положении

$$x_n = x_{n-1} + g_n.$$

На рис. 9.4 изображена типичная реализация гауссовского случайного блуждания.

<sup>1</sup>Если какое-либо свойство выполняется для каждой точки данного множества, исключая, быть может, лишь множество меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется на данном множестве *почти всюду* или *почти наверное*.

Рис. 9.5. Нормированная гауссовская кривая:  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ 

Случайная величина  $X$  называется *гауссовой*, или *нормальной* с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ , если она распределена по закону:

$$F_X(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2\right) ds,$$

то есть ее плотность вероятности  $f(x)$  имеет вид [10, с. 218]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

График  $y = f(x)$  напоминает колокол (рис. 9.5). В наших приложениях математическое ожидание  $\mu$  обычно равно нулю.

Гауссовское случайное блуждание легко реализуется на компьютере. Единственная сложность — необходим генератор гауссовых случайных чисел. Если имеется генератор равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$  случайных чисел, то вполне приемлемое приближение можно получить, используя формулу:

$$g = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6, \quad (9.1)$$

Можно использовать и более общую формулу:

$$g = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^n u_i - \sqrt{3n}. \quad (9.2)$$

Очевидно, что формула (9.1) есть частный случай (9.2) при  $n = 12$ . Эти аппроксимации следуют из применения центральной предельной теоремы [37, с. 77–78].

**Определение броуновского движения.** Мы возвращаемся к рассмотрению броуновского движения, определенного на конечном интервале, например, на отрезке  $[a, b]$ . Приведенное ниже определение позволяет сфокусировать внимание на его принципиальных свойствах. Большинство утверждений о броуновском движении в нашем изложении относится к одномерному случаю, но имеет соответствующие аналоги для случая двух и большего числа измерений.

Прежде всего нам понадобится определение гауссовского случайного процесса. Случайный процесс  $X(t)$  называется *гауссовским*, если для каждого конечного набора моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  вектор  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$  имеет гауссовское распределение. Подробности см. в [26]. Двумерный гауссовский процесс  $X(x, y)$  определяется аналогично.

**Определение.** Гауссовский процесс  $X(t)$  называется *одномерным броуновским движением*, или *винеровским* процессом на интервале  $[a, b]$ , если он обладает следующими свойствами.

1.  $X(0) = 0$  и функция  $X(t)$  почти всегда непрерывна<sup>2</sup>.
2. Свойство гауссовости приращений: случайная величина

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad t_2 > t_1,$$

имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\sigma^2(t_2 - t_1)$ , где  $\sigma$  — положительная константа, то есть

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du.$$

В следующих параграфах, посвященных фрактальному броуновскому движению, мы иногда будем называть собственно броуновское движение *обычным* или *классическим* броуновским движением.

<sup>2</sup>То есть почти все реализации процесса  $X(t)$  непрерывны.

**Закон дисперсии и стационарность.** Из свойства 2 вытекает закон дисперсии для приращений броуновского движения:

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1| \quad (9.3)$$

для любых  $t_1$  и  $t_2$  из интервала  $[a, b]$ . Так как дисперсия  $\sigma^2 |t_2 - t_1|$  зависит только от разности  $t_1$  и  $t_2$ , а не от самих значений, то говорят, что приращения *стационарны*.

**Свойство независимости приращений.** Две случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *независимыми*, если для любых вещественных чисел  $x$  и  $y$ :

$$P(X < x \text{ и } Y < y) = P(X < x)P(Y < y).$$

Подобное утверждение справедливо и для конечного набора  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  случайных величин. Важным следствием независимости случайных величин является равенство математического ожидания произведения случайных величин произведению математических ожиданий:

$$E[X_1 X_2 \dots X_n] = E[X_1]E[X_2] \dots E[X_n].$$

Броуновское движение обладает независимыми приращениями в том смысле, что если

$$0 \leq t_1 \leq t'_1 \leq t_2 \leq t'_2 \leq \dots \leq t_k \leq t'_k \leq 1,$$

то приращения

$$X(t'_1) - X(t_1), X(t'_2) - X(t_2), \dots, X(t'_k) - X(t_k)$$

являются независимыми случайными величинами.

**Марковское свойство.** Броуновское движение, как и любой процесс с независимыми приращениями, есть марковский процесс. Это означает, что условная вероятность события « $X(t_2)$  достигает определенного значения при данном значении  $X(t_1)$ », где  $t_1 < t_2$ , зависит только от  $t_1$  и  $t_2$ . Эта вероятность не зависит от поведения  $X(t)$  при  $t < t_1$ , то есть в процессе случайного блуждания каждый шаг делается без какой-либо информации о том, каким образом процесс достиг текущего значения.

Условная вероятность события  $A$  при заданном событии  $B$  обозначается  $P(A|B)$ . Формальное определение марковского процесса:

$$\begin{aligned} P(X(t_k) \leq x_k / \{X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \dots, X(t_1) = x_1\}) &= \\ &= P(X(t_k) \leq x_k / X(t_{k-1}) = x_{k-1}) \end{aligned}$$

где

$$t_1 < t_2 \dots < t_k.$$

### Величина приращений.

**Теорема 9.2.1.** Пусть  $X(t)$  — броуновское движение на интервале  $[a, b]$ . Тогда математическое ожидание приращения равно

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi\sigma^2} \sqrt{|t_2 - t_1|}. \quad (9.4)$$

**Доказательство.** Если случайная величина  $X$  имеет плотность вероятности  $f(t)$ , то математическое ожидание функции  $r(X)$  равно [10, п. 4.1]:

$$E[r(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)f(t)dt.$$

Соответственно, при  $t_2 > t_1$ ,

$$\begin{aligned} E[|X(t_2) - X(t_1)|] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_0^{+\infty} u \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du. \end{aligned}$$

После подстановки  $s = u/\sqrt{2\sigma^2(t_2 - t_1)}$  и упрощения получаем:

$$\begin{aligned} E[|X(t_2) - X(t_1)|] &= \sqrt{2/\pi\sigma^2\sqrt{t_2 - t_1}} \int_0^{+\infty} 2s \exp(-s^2) ds \\ &= \sqrt{2/\pi\sigma^2\sqrt{t_2 - t_1}}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Недифференцируемость.** Из теоремы 9.2.1 следует недифференцируемость броуновского движения  $X(t)$ . Если предположить, что  $X'(t)$  существует, то, рассуждая нестрого, получим:

$$\begin{aligned}|X'(t)| &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{|h|} \\&\approx \sqrt{2/\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} \\&= +\infty.\end{aligned}$$

Мандельброт и Ван Несс дали полное доказательство в [33] не только для классического броуновского движения, но также и для фрактального броуновского движения, которое рассматривается в п. 9.4.

**Размерность реализации броуновского движения.** Мы используем результат теоремы 9.2.1 для вычисления фрактальной размерности реализации броуновского движения. Без потери общности можно предположить, что интервал определения равен  $[0, 1]$ . Разделим этот интервал на  $n$  равных подинтервалов одинаковой длины  $\Delta t = 1/n$  и таким же образом разделим вертикальную ось на подинтервалы длины  $\Delta t$ . Выражение  $|\Delta X|/|\Delta t|$  служит в качестве оценки числа квадратов размера  $\Delta t$ , необходимых для покрытия части графика  $y = X(t)$ , расположенной над одним подинтервалом. Так как математическое ожидание величины  $|\Delta X|$  пропорционально  $\sqrt{\Delta t}$ , то число квадратов, необходимых на одном подинтервале, пропорционально  $\sqrt{\Delta t}$ . Всего имеется  $1/\Delta t$  таких подинтервалов, и поэтому общее число квадратов пропорционально

$$N(\Delta t) \propto \Delta t^{-3/2}. \quad (9.5)$$

Учитывая (5.4), получим:

$$d = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 1,5.$$

**Статистическое самоподобие.**

**Теорема 9.2.2.** *Приращение реализации броуновского движения обладает свойством статистического самоподобия, то есть:*

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{r}}(Xt + r\Delta t) - X(t)) \quad (9.6)$$

для любого  $r > 0$ . (Символ  $\stackrel{\Delta}{=}$  означает, что две случайные величины имеют одинаковое распределение и, в частности, одни и те же математическое ожидание и дисперсию.)

**Доказательство.** Необходимо доказать, что

$$P(X(t + \Delta t) - X(t) \leq x) = P(X(t + r\Delta t) - X(t) \leq \sqrt{r}x). \quad (9.7)$$

По свойству 2 броуновского движения, левая часть выражения (9.7) равна:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2\Delta t}\right) ds,$$

а правая часть равна:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\sqrt{r}x} \exp\left(-\frac{s^2}{2r\sigma^2\Delta t}\right) ds.$$

Замена переменных  $s = \sqrt{r}u$  в последнем интеграле сводит его к предыдущему. ■

**Броуновские поверхности.** Двумерный вариант броуновского движения определяется по аналогии с одномерным случаем. Гауссовский процесс  $X(x, y)$  называется двумерным броуновским движением, если он обладает следующими свойствами.

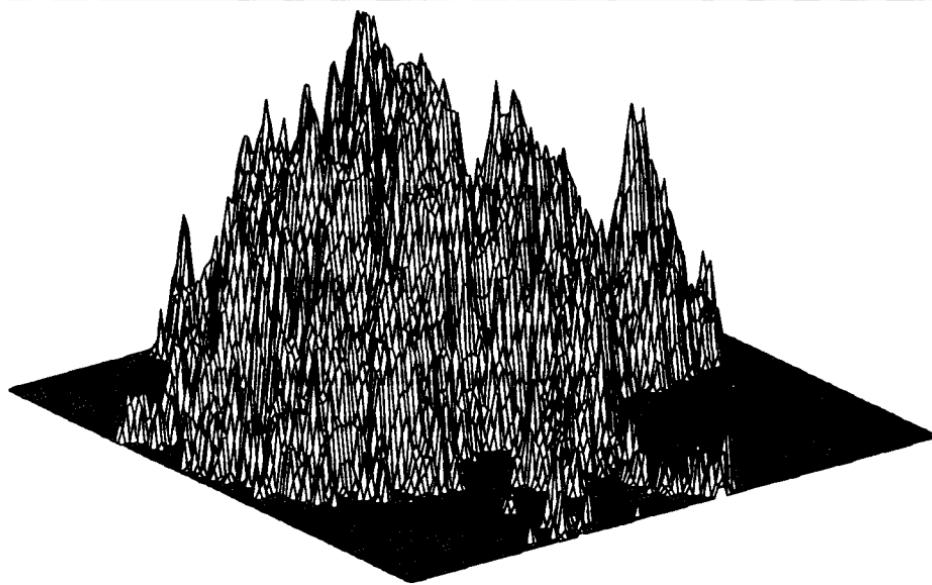
1.  $X(0, 0) = 0$  и функция  $X(x, y)$  почти всегда непрерывна.
2. Свойство гауссности приращений: случайная величина

$$\Delta X = X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y)$$

имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией  $\sigma^2\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , где  $\sigma$  — положительная константа, то есть

$$P(\Delta X < s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}\right) du.$$

Изображением двумерного броуновского движения является поверхность, такая, например, как на рис. 9.6. Как и в одномерном



**Рис. 9.6.** Броуновская поверхность

случае, двумерное броуновское движение почти наверное недифференцируемо. Фрактальная размерность двумерного броуновского движения равна  $d = 2,5$ . Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству для одномерного случая (упр. 1 в конце параграфа).

Поверхность, изображенная на рис. 9.6, фактически является графиком функции  $\max(X, 0)$ , где  $X$  — броуновская поверхность. Она напоминает горный массив, поднимающийся над поверхностью моря. В п. 9.4 мы покажем, как можно моделировать более реалистичный горный ландшафт с меньшей фрактальной размерностью (равной  $d = 2,2$ ). Труднее ответить на вопрос, чему равна фрактальная размерность береговой линии (линии уровня) двумерного броуновского движения. Ответ таков:  $d - 1$ , что равняется 1,5 в данном случае [1].

### Упражнения 9.2.

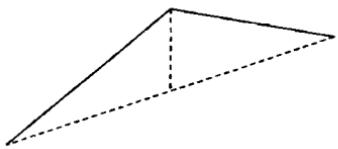
- Докажите, что размерность поверхности двумерного броуновского движения равна  $d = 2,5$ , по аналогии с доказательством для размерности в одномерном случае ( $d = 1,5$ ).

2. Докажите, что одномерное броуновское движение  $X(t)$  не монотонно (почти наверное) на любом интервале.
  3. Докажите, что если  $X(t)$  — одномерное броуновское движение и  $0 < \lambda < 1/2$ , то  $X(t)$  удовлетворяет (почти наверное) условию равномерности Гельдера
- $$|X(t + \Delta t) - X(t)| \leq c|\Delta t|^\lambda.$$
4. Пусть  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  — независимые одномерные броуновские движения, определенные для  $0 \leq t \leq 1$ . Докажите, что путь на плоскости, заданный в виде  $f(t) = (X_1(t), X_2(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , имеет фрактальную размерность  $d = 2$  (почти наверное).
  5. Пусть  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  и  $X_3(t)$  — независимые одномерные броуновские движения, определенные для  $0 \leq t \leq 1$ . Докажите, что путь в  $\mathbf{R}^3$ , заданный в виде  $f(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(T))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , имеет размерность  $d \leq 2$  (почти наверное).

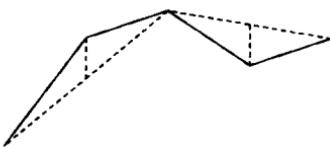
### 9.3. Срединное смещение

Возникновение метода *случайного срединного смещения*, применяемого как для моделирования, так и для конструктивного доказательства существования броуновского движения, восходит к работам Винера, выполненным в 20-х годах. Он может показаться несколько более сложным по сравнению с рассмотренным выше методом суммирования гауссовых случайных чисел. Однако, этот метод необходим, когда фрактальная кривая должна проходить через заданные точки — своего рода фрактальная интерполяция. Метод также обобщается на случай двух и более измерений, то есть на случай  $n$ -мерных броуновских движений.

В следующем алгоритме реализация  $X(t)$  вычисляется на диадических рациональных числах, то есть в точках  $k/2^n$  интервала  $[0, 1]$ . Реализация  $X(t)$  строится последовательно в конечных точках 0 и 1, затем в  $1/2$ , потом в  $1/4$  и  $3/4$  и так далее, причем таким образом, что закон дисперсии для приращений (9.3) выполняется для этих точек. Первая и вторая итерации представлены на рис. 9.7. Параметр  $\sigma$  выбирается заранее и просто определяет масштаб по вертикальной оси, не воздействуя на фрактальную размерность реализации. В тексте программы каждое появление буквы  $g$  в формуле означает новый



уровень 1



уровень 2

Рис. 9.7. Случайное срединное смещение: шаги 1 и 2

запуск генератора гауссовых случайных чисел с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

### Алгоритм 9.3.1. (СРЕДИННОЕ СМЕЩЕНИЕ I)

Назначение: аппроксимирует одномерное броуновское движение.

Вход:

$n$  (число шагов)

$\sigma$  (параметр вертикального масштаба)

Выход:

$X$  (значения функции  $X(t)$ ,  $t = k/2^n$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2^n$ )

Инициализация:

$$X(0) = 0$$

$$X(1) = \sigma g$$

Шаги:

Шаг 1:

$$X(1/2) = \frac{1}{2}(X(0) + X(1)) + \frac{1}{2}\sigma g$$

Шаг 2:

$$X(1/4) = \frac{1}{2}(X(0) + X(1/2)) + \frac{1}{2^{3/2}}\sigma g$$

$$X(3/4) = \frac{1}{2}(X(1/2) + X(1)) + \frac{1}{2^{3/2}}\sigma g$$

⋮

Шаг  $n$ :

$$X(1/2^n) = \frac{1}{2}(X(1/2^{n-1}) + X(0)) + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sigma g$$

⋮

$$X(1 - 1/2^n) = \frac{1}{2}(X(1 - 1/2^{n-1}) + X(1)) + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sigma g$$

**Теорема 9.3.3.** Значения  $X(t)$ , полученные в результате работы алгоритма срединного смещения (9.3.1), удовлетворяют закону дисперсии (9.3).

**Доказательство.** Начиная с  $X(0) = 0$  и  $X(1) = \sigma g$ , получаем

$$D[X(1) - X(0)] = D[\sigma g] = \sigma^2.$$

Так как

$$X(1/2) = \frac{1}{2}(X(0) + X(1)) + \frac{1}{2}\sigma g,$$

то

$$[X(1/2) - X(0)] = \frac{1}{2}(X(1) - X(0)) + \frac{1}{2}\sigma g.$$

Два слагаемых в правой части представляют собой независимые события, и поэтому

$$\begin{aligned} D[X(1/2) - X(0)] &= \frac{1}{4}D[X(1) - X(0)] + D[\frac{1}{2}\sigma g] \\ &= \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^2, \end{aligned}$$

что согласуется с (9.3). Подобным же образом

$$D[X(1) - X(1/2)] = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

На шаге 2 получаем

$$X(1/4) - X(0) = \frac{1}{2}[X(1/2) - X(0)] + \frac{1}{2^{3/2}}\sigma g,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} D[X(1/4) - X(0)] &= \frac{1}{4}D[X(1/2) - X(0)] + D[\frac{1}{2^{3/2}}\sigma g] \\ &= \frac{1}{8}\sigma^2 + \frac{1}{8}\sigma^2 = \frac{1}{4}\sigma^2. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} D[X(1/2) - X(1/4)] &= D[X(3/4) - X(1/2)] \\ &= D[X(1) - X(3/4)] \\ &= \frac{1}{4}\sigma^2. \end{aligned}$$

Продолжая таким же образом до  $n$ -го шага, получаем

$$X(1/2^n) - X(0) = \frac{1}{2}[X(1/2^{n-1}) - X(0)] + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sigma g$$

и

$$\begin{aligned} D[X(1/2^n) - X(0)] &= \frac{1}{4}D[X(1/2^{n-1}) - X(0)] + D[\frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sigma g] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sigma^2 + \frac{1}{2^{n+1}}\sigma^2 = \frac{1}{2^n}\sigma^2. \end{aligned}$$

Дисперсии, соответствующие интервалам  $[k/2^n, (k+1)/2^n]$ , вычисляются аналогично.

Итак, закон дисперсии (9.3) выполняется для всех интервалов вида  $[k/2^n, (k+1)/2^n]$ . Осталось показать, что он выполняется также и для интервалов вида  $[k/2^m, p/2^n]$ ,  $0 \leq k/2^m < p/2^n \leq 1$ . Без потери общности можно положить  $m = n$  и  $k < p$ . Для упрощения введем  $t_i = i/2^n$ . Получаем

$$X(t_p) - X(t_k) = \sum_{i=k}^{p-1} (X(x_{i+1}) - X(x_i)),$$

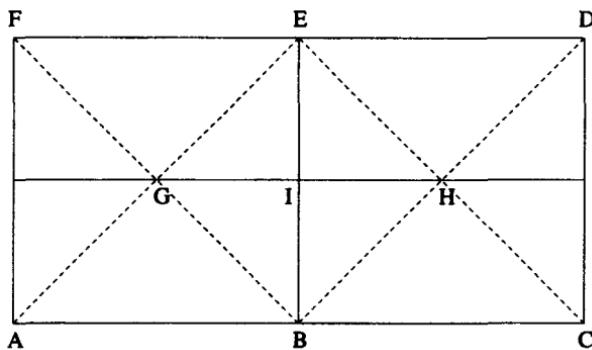
так что

$$\begin{aligned} D[X(t_p) - X(t_k)] &= \sum_{i=k}^{p-1} D[(X(x_{i+1}) - X(x_i))], \\ &= \sum_{i=k}^{p-1} \frac{1}{2^n} \sigma^2 = \frac{p-k}{2^n} \sigma^2, \end{aligned}$$

то есть закон дисперсии (9.3) выполняется. ■

Алгоритм срединного смещения может быть обобщен для моделирования броуновского движения на плоскости и в пространстве. Изображение двумерного броуновского движения  $B(x, y)$  в виде броуновской поверхности приведено на рис. 9.6.

Алгоритм для двумерного броуновского движения представляет собой частный случай алгоритма 9.5.5, приведенного в п. 9.5. В качестве значения  $X$  в середине квадрата берется среднее по его вершинам плюс случайное смещение  $gr$ , где  $g$  — нормальная случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а  $r$  — величина смещения, которая зависит от текущего шага построения.



**Рис. 9.8.** Построение броуновской поверхности

Присваивания осуществляются в два этапа: квадраты со сторонами, параллельными осям координат, чередуются с квадратами, образованными диагоналями. Это поясняет рис. 9.8, где величины  $X(A)$ ,  $X(B)$ ,  $X(C)$ ,  $X(D)$ ,  $X(E)$  и  $X(F)$  предполагаются уже заданными. На первом этапе мы определяем  $X(G)$  и  $X(H)$  по формулам

$$\begin{aligned} X(G) &= \frac{1}{4}[X(A) + X(B) + X(E) + X(F)] + gr, \\ X(H) &= \frac{1}{4}[X(B) + X(C) + X(D) + X(E)] + gr, \end{aligned}$$

где

$$r = r/\sqrt{2}.$$

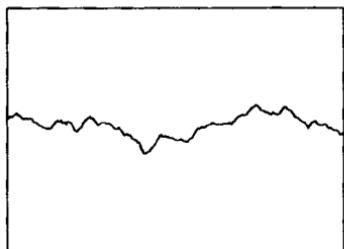
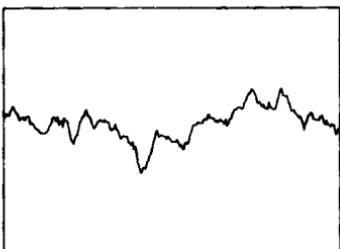
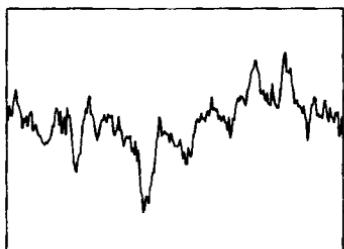
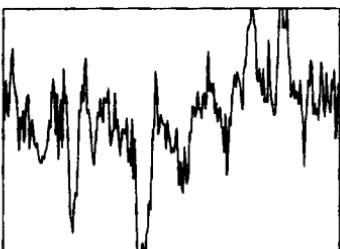
После этого приступаем ко второму этапу:

$$X(I) = \frac{1}{4}[X(G) + X(B) + X(H) + X(E)] + gr.$$

В граничных точках формулы изменяются: производится усреднение по имеющимся граничным точкам с добавлением соответствующих случайных смещений.

## 9.4. Фрактальное броуновское движение

Классическое броуновское движение, рассмотренное выше, представляет собой хорошую модель марковских случайных фракталов, для которых условная вероятность того, что  $X(t_2)$  достигнет определенного значения при заданном  $X(t_1)$  ( $t_1 < t_2$ ), зависит только от  $t_1$

 $h=0,8 \ D=1,2$  $h=0,6 \ D=1,4$  $h=0,4 \ D=1,6$  $h=0,2 \ D=1,8$ **Рис. 9.9.** Реализации ФБД:  $H = 0,2; 0,4; 0,6$  и  $0,8$ 

и  $t_2$ , а не от поведения  $X(t)$  при  $t < t_1$ . Ясно, что существует необходимость введения такого случайного процесса, который обладал бы некоторой памятью. Такой процесс получил название *фрактального броуновского движения* (ФБД) и был исследован Мандельбротом и Ван Нессом в 1968 году [33]. Как отмечается в [33], ФБД в неявном виде рассматривалось еще Колмогоровым в 1940 году [27].

Для аппроксимации фрактального броуновского движения нет простого метода, вроде суммирования гауссовских случайных величин, как в случае классического броуновского движения. С математической точки зрения наиболее логичным представляется использование аппарата Фурье. Этот подход будет описан в п. 9.6. Многие исследователи и в этом случае использовали метод срединного смещения, но при этом не получается настоящее ФБД. Такой подход и его недостатки рассматриваются в п. 9.5.

Фрактальное броуновское движение удобно определить при помощи параметра  $H$ ,  $0 < H < 1$ . При  $H = 1/2$  фрактальное броунов-

ское движение совпадает с классическим. Как будет показано ниже, реализация одномерного ФБД с параметром  $H$  имеет размерность  $d = 2 - H$ . Графическим изображением двумерного ФБД является поверхность, имеющая размерность  $d = 3 - H$ . Таким образом, параметр  $H$  соответствует степени изрезанности графика. Как видно из рис. 9.9, при малых  $H \approx 0$  график получается сильно изрезанным, а при больших  $H \approx 1$  — весьма плавным (хотя и не гладким).

Существование ФБД доказано Мандельбротом и Ван Нессом [33] с использованием стохастических интегралов. Как и в случае классического броуновского движения, мы дадим определение, основанное на нескольких аксиомах, которые характеризуют процесс. Большинство из приведенных утверждений относятся к одномерному случаю, хотя имеют аналоги для ФБД в высших размерностях.

**Определение.** Гауссовский процесс  $X(t)$  называется *фрактальным броуновским движением* с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ , если он обладает следующими свойствами.

1.  $X(0) = 0$  и функция  $X(t)$  почти всегда непрерывна.
2. Свойство гауссности приращений: случайная величина

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$$

имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}$ , где  $t_2 > t_1$ ,  $\sigma$  — положительная константа, то есть

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^H} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) du.$$

Фрактальное броуновское движение с параметром  $H = 1/2$  совпадает с классическим броуновским движением.

**Закон дисперсии и стационарность.** Из второго свойства следует закон дисперсии для фрактального броуновского движения:

$$E[(X(t_2) - X(t_1))^2] = \sigma^2|t_2 - t_1|^{2H} \quad (9.8)$$

для любых  $t_1$  и  $t_2$  в интервале  $[a,b]$ . Так как дисперсия  $\sigma^2|t_2 - t_1|^{2H}$  зависит только от разности  $t_1$  и  $t_2$ , а не от самих значений, то приращения стационарны.

**Зависимость приращений.** В отличие от классического броуновского движения, приращения которого независимы, фрактальное броуновское движение с параметром  $H \neq 1/2$  не обладает этим свойством.

---

**Теорема 9.4.4.** *Пусть  $X(t)$  — фрактальное броуновское движение с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ . Приращения  $X(t)$  независимы тогда и только тогда, когда  $H = 1/2$ .*

**Доказательство.** Если  $X(t)$  имеет независимые приращения, то случайные величины  $X(t) - X(0)$  и  $X(t + \Delta t) - X(t)$ ,  $\Delta t > 0$ , независимы. Это означает, что

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X(0))(X(t + \Delta t) - X(t))] &= \\ &= E[X(t) - X(0)] \cdot E[X(t + \Delta t) - X(t)] = 0. \end{aligned}$$

Так как  $X(0) = 0$ , то

$$\begin{aligned} (X(t) - X(0))(X(t + \Delta t) - X(t)) &= \\ &= \frac{1}{2}\{(X(t + \Delta t) - X(0))^2 - (X(t) - X(0))^2 - (X(t + \Delta t) - X(t))^2\}, \end{aligned}$$

и следовательно, по закону дисперсии (9.8):

$$\begin{aligned} E[(X(t) - X(0))(X(t + \Delta t) - X(t))] &= \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2[(t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H}]. \end{aligned}$$

Последнее выражение отрицательно при  $H < 1/2$ , равно нулю при  $H = 1/2$  и положительно при  $H > 1/2$  (см. упр. 1 в конце параграфа). Утверждение доказано. ■

**Немарковское свойство.** Из вычислений, приведенных при доказательстве теоремы 9.4.4, можно извлечь большее. Если  $H > 1/2$ , то  $X(t) - X(0)$  и  $X(t + h) - X(t)$ , скорее всего, имеют одинаковые знаки и функция  $X(t)$  обычно возрастает в будущем, если она возрастила в прошлом. Если же  $H < 1/2$ , то  $X(t) - X(0)$  и  $X(t + h) - X(t)$ , скорее всего, имеют различные знаки, а значит функция  $X(t)$  обычно убывает в будущем, если она возрастила в прошлом. Вместе эти факты говорят о том, что фрактальное броуновское движение не является марковским процессом, за исключением случая  $H = 1/2$ .

**Величина приращений.** Пусть  $X(t)$  — фрактальное броуновское движение с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ . Тогда математическое ожидание приращения равно

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi} \sigma (t_2 - t_1)^H. \quad (9.9)$$

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 9.2.1, в которой рассматривается специальный случай  $H = 1/2$ .

**Недифференцируемость.** Как и в случае классического броуновского движения, следует ожидать, что фрактальное броуновское движение почти наверное недифференцируемо. Доказательство проводится аналогично доказательству для классического случая. Как было отмечено в п. 9.2, Мандельброт и Ван Несс дали полное доказательство этого утверждения в [33].

### Статистическое самоподобие.

**Теорема 9.4.5.** *Приращения фрактального броуновского движения обладают свойством статистического самоподобия, то есть*

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \frac{1}{r^H} (X(t + r\Delta t) - X(t)) \quad (9.10)$$

для любого  $r > 0$ .

**Доказательство.** Доказательство полностью аналогично соответствующему доказательству для классического броуновского движения с заменой  $r$  на  $r^{2H}$  (см. упр. 3 в конце параграфа). ■

**Размерность реализации.** Фрактальная размерность реализации одномерного броуновского движения вычисляется так же, как и для классического броуновского движения. Основное отличие состоит в том, что оценка числа квадратов (9.5) заменяется новой оценкой

$$N(\Delta t) \approx \sigma / \Delta t^{2-H},$$

что приводит к значению

$$d = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 2 - H.$$

Подробные вычисления оставлены читателю в качестве упражнения (упр. 2 в конце параграфа).

Определение размерности большинства фрактальных кривых обычно сопряжено с большими вычислительными затратами. Тем не менее, не составляет труда вычислить размерность  $d = 2 - H$  графика реализации ФБД. Параметр  $H$  можно найти из закона дисперсии (9.8). Извлекая квадратные корни и затем логарифмируя обе части (9.8), получаем

$$\log \sigma_{rms}(\Delta X) = c + H \log |\Delta t|, \quad (9.11)$$

где  $\sigma_{rms}(\Delta X)$  — стандартное среднеквадратичное отклонение приращений  $\Delta X$ , соответствующих интервалу  $\Delta t$ ,  $c$  — константа. Алгоритм 9.4.2 вычисляет  $\log \sigma_{rms}(\Delta X)$  для нескольких величин интервалов  $\Delta t$  и затем использует алгоритм 5.2.1 для определения параметров  $c$  и  $H$  в (9.11).

#### **Алгоритм 9.4.2. (HCALC)**

Назначение: вычисляет параметр  $H$  одномерного ФБД.

Внешние функции:

функция  $STD$  вычисления среднеквадратичного отклонения;  
функция вычисления МНК-прямой (алгоритм 5.2.1).

Вход:

$X$  (вектор, представляющий ФБД)  
 $L$  (длина  $X$ )

Выход:

$H$  (параметр ФБД)

Инициализация:

$pmax = 10$  (максимальная длина приращения)

Шаги:

```
for  $p = 1$  to  $p = pmax$ 
    for  $i = 1$  to  $i = L - pmax$ 
         $dX(i) = X(i + p) - X(i)$ 
    end for
     $s(p) = STD(dX(i), i = 1$  to  $i = L - pmax)$ 
     $\xi(p) = \log(p)$ 
     $\eta(p) = \log(s(p))$ 
end for
```

Найти МНК-прямую по точкам  $(\xi(p), \eta(p))$ ,  $p = 1, \dots, pmax$

$H$  = угловой коэффициент МНК-прямой

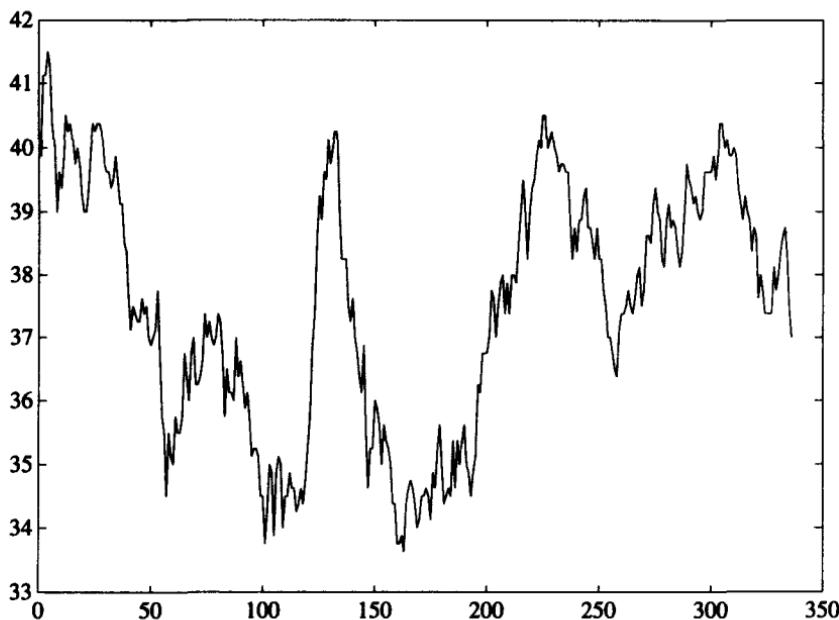


Рис. 9.10. Цены на акции компании Boeing

В качестве примера использования алгоритма 9.4.2 для анализа практической задачи рассмотрим график заключительных цен на акции компании Boeing для 336 последовательных биржевых дней 1992–1993 года (рис. 9.10). Соседние точки на графике соединены отрезками прямых. Мы исследуем эту реализацию с целью установить, насколько хорошо она может быть смоделирована при помощи ФБД.

Обозначим через  $X(t)$  биржевую цену в конце  $t$  биржевых сессий. На рис. 9.11 построены нормализованная гистограмма для приращений (дневных флюктуаций)  $\Delta X(t) = X(t + 1) - X(t)$  и гауссовская кривая с таким же среднеквадратичным отклонением. Этот график в некоторой степени подтверждает, что  $X(t)$  удовлетворяет свойству гауссности приращений (свойство 2) в определении ФБД. Строго говоря, для проверки гауссности приращений следует применить  $\chi^2$ -критерий согласованности [10]. Найдем значение параметра  $H$  с помощью алгоритма 9.4.2. На рис. 9.12 построена зависимость  $\log \sigma_{rms}(\Delta X)$  от  $\log |\Delta t|$ . Значение  $H$ , полученное по этой прямой, равно  $H \approx 0,5023$ , а значит фрактальная размерность  $d \approx 1,4977$ . Это довольно интересный результат, так как  $H \approx 1/2$ , то есть ФБД

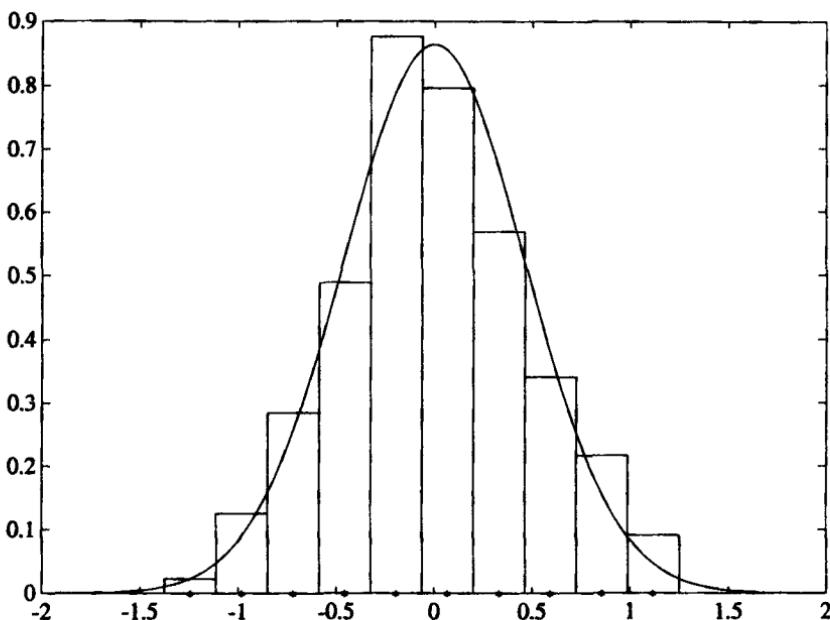


Рис. 9.11. Гистограмма и гауссовская кривая для приращений

близко к классическому броуновскому движению. Таким образом, можно сделать вывод, что заключительная цена в нашем примере совершает гауссовское случайное блуждание.

**Фрактальные броуновские поверхности.** Рассмотрим теперь двумерное фрактальное броуновское движение.

**Определение.** Гауссовский процесс  $X(x, y)$  называется *двумерным фрактальным броуновским движением* с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ , если он обладает следующими свойствами.

1.  $X(0, 0) = 0$  и функция  $X(x, y)$  почти всегда непрерывна.
2. Свойство гауссности приращений: случайная величина

$$\Delta X = X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y)$$

имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})^{2H}$ , где  $t_2 > t_1$ ,  $\sigma$  — положитель-

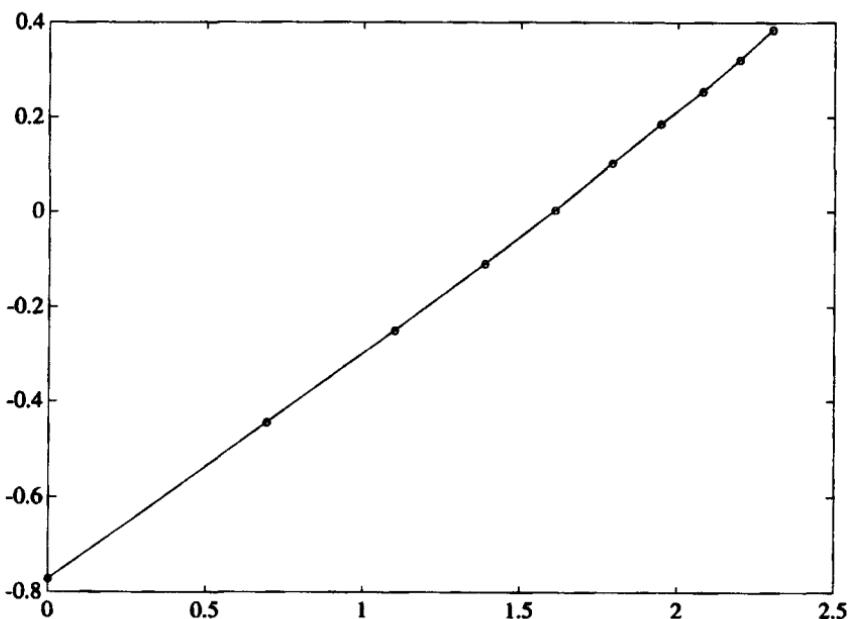


Рис. 9.12. Зависимость  $\log \text{std}(\Delta X)$  от  $\log |\Delta t|$

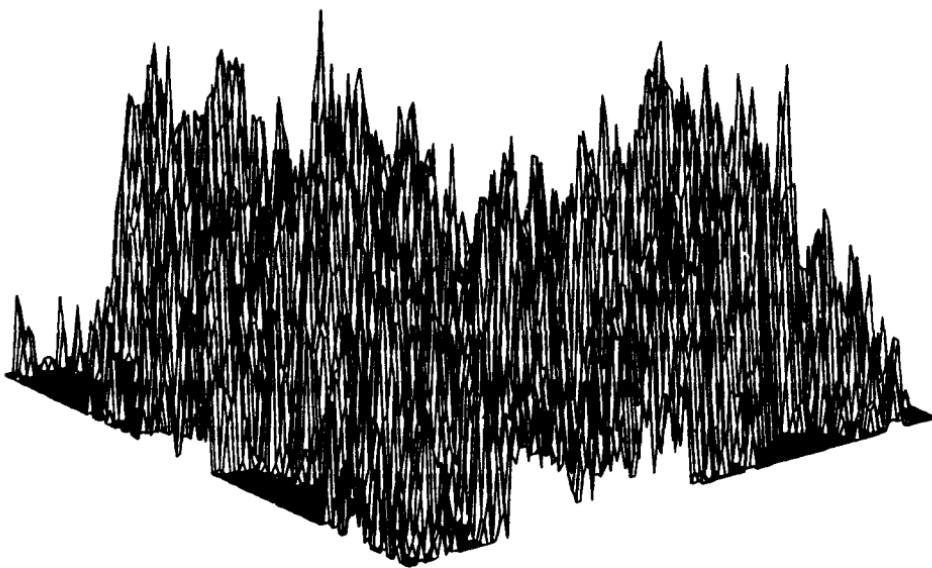
ная константа, то есть

$$P(\Delta X < s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{2H}}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{2H}}\right) du.$$

График двумерной броуновской поверхности имеет размерность  $d = 3 - H$ . Это доказывается аналогично одномерному случаю и оставлено в качестве упражнения (упр. 2 в конце параграфа). Как показано в [1], линии уровня имеют размерность  $d = 2 - H$ .

Пример броуновской поверхности, соответствующей ФБД с параметром  $H = 1/2$ , изображен на рис. 9.6.

Изображения поверхностей, приведенные на рис. 9.13 и 9.14, иллюстрируют влияние параметра  $H$  на ФБД. Меньшие значения  $H$  соответствуют поверхностям, имеющим большую размерность, и поэтому они выглядят более изрезанными. Соответственно, при больших  $H$  поверхности выглядят менее изрезанными. Поверхность ФБД с параметром  $H \approx 0,8$  обычно используется для моделирования горных массивов.

Рис. 9.13. Поверхность ФБД;  $H = 0,2$ **Упражнения 9.4.**

1. Докажите следующее утверждение, используемое при доказательстве теоремы 9.4.4. Выражение
 
$$\frac{1}{2}\sigma^2[(t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H}]$$
 отрицательно при  $H < 1/2$ , равно нулю для  $H = 1/2$  и положительно при  $H > 1/2$ , если  $\Delta t > 0$ .
2. а) Восстановите недостающие детали в доказательстве, что для одномерного ФБД с параметром  $H$  размерность реализации равна  $d = 2 - H$ .
   
б) Докажите, что для двумерного ФБД с параметром  $H$  размерность поверхности равна  $d = 3 - H$ .
3. Убедитесь в справедливости формулы (9.10), выражающей свойство статистического самоподобия.
4. Пусть  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  — независимые ФБД с параметрами  $H_1$  и  $H_2$ , причем  $1/2 \leq H_1 \leq H_2 \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Докажите, что путь на плоскости, заданный как  $f(t) = (X_1(t), X_2(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , имеет фрактальную размерность  $(1 + H_2 - H_1)/H_2$  (почти наверное).

5. Докажите, что если  $X(t)$  — одномерное ФБД с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$  и если  $0 < \lambda < H$ , то  $X(t)$  удовлетворяет (почти наверное) условию равномерности Гельдера:

$$|X(t + \Delta t) - X(t)| \leq c|\Delta t|^\lambda.$$

6. Пусть  $X(t)$  — ФБД с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Определим *усредненную константу Гельдера* для данного приращения  $\Delta t$  как

$$\bar{\alpha} = E \left[ \frac{\log |\Delta X|}{\log \Delta t} \right].$$

Покажите, что существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta t$ , что:

$$\bar{\alpha} = H + \frac{C}{\log \Delta t}.$$

*Указание.* Используйте формулу:

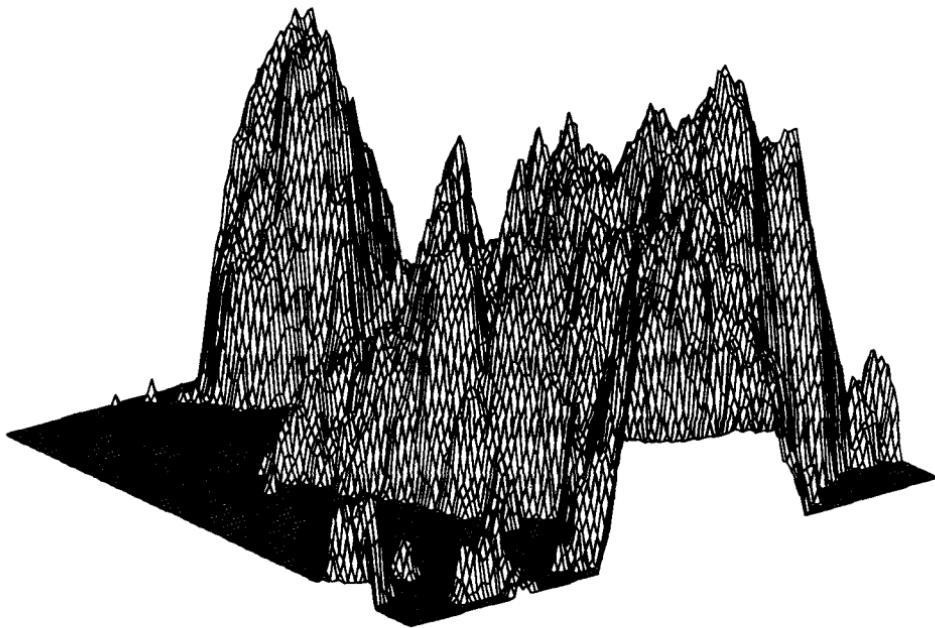
$$E[\log |\Delta X|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Delta t^H} \int_{-\infty}^{\infty} \log(|z|) \exp(-1/2(z/\sigma\Delta t)^2) dz.$$

Сделайте подстановку  $s = z/c\Delta t^H$ .

*Комментарий:* отметим, что для очень малых значений  $\Delta t$  параметр  $H$  может быть приближенно заменен на  $\bar{\alpha}$ , и поэтому размерность реализации в этом случае равна  $d \approx 2 - \bar{\alpha}$ .

## 9.5. Срединное смещение и ФБД

Алгоритмы случайного срединного смещения из п. 9.3 хорошо моделируют классическое броуновское движение. Попытки модифицировать их таким образом, чтобы можно было моделировать фрактальное броуновское движение с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ ,  $H \neq 1/2$ , уже предпринимались. Как оказалось, полученные фракталы не обладают основными свойствами фрактального броуновского движения, то есть не удовлетворяют закону дисперсии и не обладают стационарными приращениями. Тем не менее, эти алгоритмы широко используются для аппроксимации ФБД при моделирования естественных ландшафтов, таких, например, как горные массивы [16]. Фурье, Фассел и Карпентер [16] использовали эти алгоритмы для



**Рис. 9.14.** Поверхность ФБД;  $H = 0,8$

создания фрактальных сцен для фильма «Звездное переселение II: гнев хана». Однако, из-за отсутствия указанных выше статистических свойств результаты такого моделирования подвергались критике со стороны других исследователей, включая Мандельброта [32].

Алгоритм одномерного броуновского движения (9.3.1) легко изменяется для учета параметра  $H$  фрактального броуновского движения. Надо просто заменить величину смещения на уровне  $k$

$$\frac{1}{2^{(k+1)/2}} \sigma g$$

на

$$\frac{1}{2^{kH}} \sigma \rho g,$$

где

$$\rho = \sqrt{1 - 2^{2H-2}}.$$

Вместо того чтобы повторять алгоритм 9.3.1 с этими изменениями, приведем равносильный алгоритм, записанный в виде рекурсии.

**Алгоритм 9.5.3. (СРЕДИННАЯ КРИВАЯ)**

Назначение: программа-драйвер для аппроксимации кривой ФБД с помощью срединного смещения. Вызывает рекурсивную программу DIVIDE1 (алгоритм 9.5.4).

Замечание: аппроксимация ФБД точна только при  $H = 1/2$ .

Вход:

$H$  (параметр ФБД; размерность графика  $d = 2 - H$ )

$maxlevel$  (максимальное число рекурсий)

$scale$  (параметр вертикального масштаба)

Выход:

$X$  ( $N+1$  значений ФБД, где  $N = 2^{maxlevel}$ )

Инициализация:

$N = 2^{maxlevel}$

$level = 1$

$i_0 = 1$

$i_2 = N + 1$

$X(i) = 0, i = 0, 1, \dots, N + 1$

Комментарий: каждое обращение к *gauss* в последующих шагах означает вычисление независимой нормальной случайной величины.

Шаги:

$ratio = 1/2^H$

$std = scale * ratio$

$X(1) = scale * gauss$

$X(N + 1) = scale * gauss$

$X = \text{DIVIDE1}(X, ratio, std, i_0, i_2, level, maxlevel)$

**Алгоритм 9.5.4. (DIVIDE1)**

Назначение: рекурсивная процедура, которую вызывает алгоритм СРЕДИННАЯ КРИВАЯ.

Вход: (параметры, передаваемые с предыдущего уровня):

$X$

$ratio$

$std$

$i_0, i_2$

$level, maxlevel$

Существует модифицированная версия двумерного алгоритма срединного смещения, описанного в п. 9.3 для классического броуновского движения. Как и следовало ожидать, этот алгоритм не дает настоящую поверхность ФБД, но широко применяется в компьютерных экспериментах. Выходные массивы имеют вид, как на рис. 9.13 или 9.14. Алгоритм 9.5.5 соответствует описанию в [38, с. 90].

#### **Алгоритм 9.5.5. (Срединная поверхность)**

Назначение: аппроксимирует поверхность ФБД с помощью срединного смещения.

Вход:

$H$  (параметр ФБД: размерность поверхности  $d = 3 - H$ )  
 $maxlevel$  (максимальное число рекурсий)  
 $scale$  (параметр вертикального масштаба)

Выход:

$X$  (матрица  $(N+1) \times (N+1)$  аппроксимированных значений ФБД,  $N = 2^{maxlevel}$ )

Инициализация:

$N = 2^{maxlevel}$

$r = scale$

$X(0, 0) = 0$

$X(0, N) = 0$

$X(N, 0) = 0$

$X(N, N) = 0$

$D = N$

$d = N/2$

Комментарий: каждое обращение к  $g$  означает разыгрывание независимой нормальной случайной величины.

Шаги:

for  $L = 1$  to  $L = maxlevel$

$r = r/2^{(h/2)}$

    for  $i = d$  to  $i = N - d$  by D

        for  $j = d$  to  $j = N - d$  by D

$X(i, j) = (X(i + d, j + d) + X(i + d, j - d)$

$+ X(i - d, j + d) + X(i - d, j - d))/4 + r \cdot g$

        end

    end

$$r = r/2^{(H/2)}$$

for  $i = d$  to  $i = N - d$  by  $D$

$$X(i, 0) = (X(i + d, 0) + X(i - d, 0) + X(i, d))/3 + r \cdot g$$

$$X(i, N) = (X(i + d, N) + X(i - d, N) + X(i, N - d))/3 + r \cdot g$$

$$X(0, i) = (X(0, i + d) + X(0, i - d) + X(d, i))/3 + r \cdot g$$

$$X(N, i) = (X(N, i + d) + X(N, i - d) + X(N - d, i))/3 + r \cdot g$$

end

for  $i = d$  to  $i = N - d$  by  $D$

for  $j = d$  to  $j = N - d$  by  $D$

$$X(i, j) = (X(i, j + d) + X(i, j - d) + X(i + d, j))$$

$$+ (X(i - d, j))/4 + r \cdot g$$

end

end

for  $i = D$  to  $i = N - d$  by  $D$

for  $j = d$  to  $j = N - d$  by  $D$

$$X(i, j) = (X(i, j + d) + X(i, j - d) + X(i + d, j))$$

$$+ (X(i - d, j))/4 + r \cdot g$$

end

end

$$D = D/2$$

$$d = d/2$$

end

### Упражнения 9.5.

- Докажите, что результат работы алгоритма 9.5.3 удовлетворяет закону дисперсии (9.8) в случае приращений вида  $X((k+1)/2^n) - X(k/2^n)$ . Обратитесь к доказательству теоремы 9.3.3.

## 9.6. Фурье-анализ ФБД

**Преобразование Фурье.** В 1807 году Жозеф Фурье сформулировал круг идей, вошедших в современную математику под названием ряды Фурье. Фурье-анализ стимулировал исследования в области основ математического анализа. Например, создание строгих теорий интегрирования было результатом стремления понять Фурье-анализ. Еще более важным для современной математики было создание теории множеств. Ранние работы Кантора по этой теме были

инициированы его исследованием множества точек, для которых ряды Фурье имеют нулевую сумму. Иногда говорят, что Кантор является создателем современной математики.

Строгое изложение методов Фурье-анализа является предметом отдельного курса. Здесь мы можем лишь сконцентрировать внимание на основных идеях и ключевых теоремах, которые имеют отношение к созданию алгоритма моделирования фрактального броуновского движения. Хорошим учебным пособием по Фурье-анализу может служить книга [40].

Пусть функция  $X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)| dt < \infty. \quad (9.12)$$

Строго говоря, мы предполагаем, что функция  $X(t)$  измерима в смысле Лебега и что интеграл существует в смысле Лебега. Мы не будем излагать здесь теорию Лебега, но отметим, что класс рассматриваемых функций включает кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условию роста:

$$|X(t)| = O\left(\frac{1}{|t|^p}\right), \quad p > 1, \quad \text{при } t \rightarrow \pm\infty.$$

К этому классу, в частности, относятся ФБД, заданные на конечном интервале и равны нулю вне его.

Хотя независимая переменная  $t$  может означать что угодно, мы все-таки часто интерпретируем ее как время и называем  $X(t)$  представлением функции во временной области. Существует также частотная область, в которой функция представляется в виде суммы составляющих, имеющих определенную частоту  $f$ . Иными словами, функция  $X(t)$  может быть разложена на компоненты вида:

$$e^{2\pi i ft} = \cos(2\pi ft) + i \sin(2\pi ft).$$

Частота этих функций —  $f$  периодов в единицу времени, соответственно, их период —  $1/f$ . Комплексная форма записи  $e^{2\pi i ft}$  упрощает анализ, но поскольку эквивалентная запись выражается через функции  $\cos(2\pi ft)$  и  $\sin(2\pi ft)$ , то вычисления можно производить и с помощью вещественной арифметики.

Составляющая  $X(t)$  с частотой  $f$  имеет вид:

$$\hat{X}(f)e^{2\pi i ft},$$

где

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-2\pi f t} dt. \quad (9.13)$$

Функция  $\hat{X}(f)$  в (9.13) называется *преобразованием Фурье* функции  $X(t)$ . При определенных условиях имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}(f) e^{2\pi f t} df, \quad (9.14)$$

которая описывает синтез сигнала  $X(t)$  из отдельных частотных составляющих.

Возможно, большинство читателей знакомы скорее с рядами Фурье для периодических функций, чем с преобразованиями Фурье для интегрируемых функций. Пусть функция  $X(t)$  — периодическая с периодом  $p = 1$ . Тогда частоты кратны целым величинам  $n$ , и «преобразование» Фурье в этом случае имеет вид:

$$\hat{X}(n) = \int_0^1 X(t) e^{-2\pi i n t} dt, \quad -\infty < n < \infty.$$

Величины  $\hat{X}(n)$  обычно называются *коэффициентами Фурье*. Формула обращения в этом случае есть не что иное как ряд Фурье:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{X}(n) e^{2\pi i n t}.$$

Конечно, если  $X(t)$  имеет период  $p \neq 1$ , то всегда можно отмасштабировать независимую переменную так, чтобы получить  $p = 1$ .

*Полная энергия* сигнала  $X(t)$  равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt$$

и в дальнейшем предполагается конечной. По известной теореме Планшереля [40]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}(f)|^2 df,$$

то есть полная энергия может быть вычислена как во временной, так и в частотной области.

Если функция  $X(t)$  вещественнозначная, то

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-2\pi ift} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{+2\pi ift} dt} = \overline{\hat{X}(-f)},$$

где  $\overline{a + ib} = a - ib$ . Обратно, если

$$\hat{X}(f) = \overline{\hat{X}(-f)}, \quad (9.15)$$

то  $X(t)$  вещественная.

**Спектральная плотность.** Пусть  $X(t)$  описывает ФБД. Рассмотрим функцию  $X(t, T)$ :

$$X(t, T) = \begin{cases} X(t), & \text{если } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

*Преобразование Фурье* функции  $X(t, T)$  равно

$$\hat{X}(f, T) = \int_0^T X(t)e^{-2\pi ift} dt.$$

*Средняя мощность* функции  $X(t)$  на отрезке  $[0, T]$  определяется как

$$\frac{1}{T} \int_0^T |X(t, T)|^2 dt$$

и по теореме Планшереля равна

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{X}(f, T)|^2 df.$$

*Спектральная плотность мощности* функции  $X(t, T)$  равна

$$S_X(f, T) = \frac{1}{T} |\hat{X}(f, T)|^2.$$

Спектральная плотность функции  $X(t)$  тогда получается в виде предела при  $T \rightarrow \infty$ :

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\hat{X}(f, T)|^2.$$

Одна из основных теорем говорит о степенном росте спектральной плотности как функции частоты.

**Теорема 9.6.7.** *Пусть функция  $X(t)$  описывает ФБД с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ . Тогда для спектральной плотности имеем:*

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 2H + 1. \quad (9.16)$$

\* **Доказательство.** Полное доказательство использует достаточно глубокие результаты Фурье-анализа. Вместо этого мы проведем доказательство скорее на интуитивном уровне, как это проделано в работе Сопа [38].

Если предположить (без потери общности), что  $X(0) = 0$ , то свойство статистического самоподобия (9.10) дает

$$X(t) = \frac{1}{r^H}(X(rt))$$

для любого  $r > 0$ . Зафиксируем  $r > 0$  и положим

$$Y(t, T) = \begin{cases} X(rt)/r^H, & \text{если } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Сделав замену переменной  $t = s/r$  в преобразовании Фурье функции  $Y(t, T)$ , получим

$$\begin{aligned} \hat{Y}(f, T) &= \int_0^T Y(t) e^{-2\pi ift} dt \\ &= \frac{1}{r^H} \int_0^{rT} X(s) e^{-2\pi i \frac{f}{r}s} \frac{ds}{r}, \end{aligned}$$

что приводит к

$$\hat{Y}(f, T) = \frac{1}{r^{H+1}} \hat{X}\left(\frac{f}{r}, rT\right),$$

и поэтому спектральная плотность  $Y(t, T)$  равна

$$S_Y(f, T) = \frac{1}{r^{2H+1}} \frac{1}{rT} |\hat{X}\left(\frac{f}{r}, rT\right)|^2.$$

Переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получаем

$$S_Y(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_X\left(\frac{f}{r}\right).$$

Вследствие статистического самоподобия  $X$  и  $Y$  спектральные плотности  $S_X(f)$  и  $S_Y(f)$  должны совпадать, и следовательно:

$$S_X(f) = \frac{1}{r^{2H+1}} S_X\left(\frac{f}{r}\right).$$

Если формально положить  $r = f$ , то

$$S_X(f) = \frac{1}{f^{2H+1}} S_X(1),$$

что и требовалось доказать. ■

## 9.7. Фильтрация Фурье

Практически, процесс моделирования ФБД можно упростить, аппроксимировав преобразование Фурье с помощью рядов Фурье, при условии, что требуемые свойства спектральной плотности сохраняются. После этого мы можем использовать обратное преобразование Фурье для получения требуемого ФБД. Рассмотрим подробнее дискретное преобразование Фурье.

**Дискретное преобразование Фурье.** Предположим, что нам известны значения сигнала  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , в  $n$  точках:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \quad \Delta t = T/N.$$

Пусть  $X_n = X(t_n)$ . Интервал  $\Delta t$  называется *шагом дискретизации*, а число отсчетов в единицу времени  $1/\Delta t$  называется *частотой дискретизации*. Для удобства считаем  $N$  четным.

Мы хотим использовать  $N$  отсчетов сигнала  $X(t)$  для аппроксимации такого же числа значений функции  $\hat{X}(f)$ :

$$f_n = \frac{n}{N\Delta t}, \quad n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2.$$

Хотя всего имеется  $N+1$  точек, но, так как при  $-N/2$  и  $N/2$  отсчеты равны, число различных величин равно  $N$ . Мы аппроксимируем преобразование Фурье в точках  $f_n$  суммой:

$$\begin{aligned}\hat{X}(f_n) &= \int_0^T X(t) e^{-2\pi i f_n t} dt \\ &\approx \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i f_n t_k} (\Delta t) \\ &= (\Delta t) \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i k n / N}.\end{aligned}$$

Последняя сумма в этом выражении называется *дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)* отсчетов  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  и обозначается  $\hat{X}_n$ , то есть:

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i k n / N}$$

и

$$\hat{X}(f_n) = (\Delta t) \hat{X}_n.$$

Введем  $\zeta$ , или  $\zeta_N$ , если требуется отметить зависимость от  $N$ :

$$\zeta = \zeta_N = e^{-2\pi i / N}. \quad (9.17)$$

Тогда ДПФ можно записать так:

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \zeta^{kn}. \quad (9.18)$$

Из (9.18) следует, что ДПФ периодично с периодом  $N$ . Вследствие этого  $\hat{X}_n$  обычно вычисляются для  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , а значения

$$\hat{X}_{-1}, \hat{X}_{-2}, \dots, \hat{X}_{-N/2}$$

нумеруют следующим образом:

$$\hat{X}_{N-1}, \hat{X}_{N-2}, \dots, \hat{X}_{N-N/2}.$$

ДПФ можно трактовать как преобразование из  $\mathbf{R}^N$  в  $\mathbf{R}^N$ . А именно, ДПФ отображает вектор

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Это линейное отображение, которое в матрично-векторной форме записывается как

$$\hat{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (9.19)$$

где

$$A \text{ (или } A_N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{(N-1)} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \zeta^{(N-1)} & \zeta^{2(N-1)} & \dots & \zeta^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Легко доказывается, что (упр. 1 в конце параграфа):

$$A\bar{A} = NI,$$

где  $I$  — единичная матрица  $N \times N$ . Отсюда следует:

$$A^{-1} = \frac{1}{N}\bar{A}.$$

Это приводит нас к формуле обратного ДПФ:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_k e^{+2\pi i kn/N}. \quad (9.20)$$

Вычислять ДПФ (или ОДПФ) умножением на матрицу  $A$  (или  $A^{-1}$ ) не эффективно, так как умножение матрицы на вектор в (9.19) требует порядка  $N^2$  скалярных умножений. Обычно используется алгоритм *быстрого преобразования Фурье* (БПФ), который приведен в прил. А.6. В случае, если  $N$  равно степени 2, число умножений можно сократить до примерно  $\frac{1}{2}N \log_2 N$ .

**Фильтрация.** Применим метод Фурье-фильтрации для моделирования ФБД с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ . Идея состоит в следующем. Построим сначала преобразование Фурье предлагаемого ФБД в частотной области, задавая случайные фазы и подбирая амплитуды, удовлетворяющие свойству спектральной плотности теоремы 9.6.7. Затем получим требуемое ФБД во временной области с помощью обратного преобразования Фурье.

На самом деле мы моделируем не непрерывное ФБД, а его дискретный аналог. Моделирование начинается с создания вектора, который является ДПФ предлагаемого ФБД. После этого осуществляется ОДПФ этого вектора, что и дает требуемое ФБД, которое обозначается как  $\{X_n\}_{n=0}^{N-1}$ . Для того чтобы величины  $X_n$  были вещественными, необходимо, чтобы удовлетворялся дискретный аналог формулы (9.15). То есть в дискретном случае должно быть (упр. 2 в конце параграфа):

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= \overline{\hat{X}_{N-n}}, & n = 1, 2, \dots, N/2 \\ \hat{X}_0 &= \overline{\hat{X}_0}.\end{aligned}\tag{9.21}$$

Фильтрация относится к той части моделирования, когда мы заставляем коэффициенты преобразования удовлетворять степенному закону (9.16), или в дискретном виде:

$$|\hat{X}_n|^2 \propto \frac{1}{n^{2H+1}}, \quad n = 1, 2, \dots, N/2.$$

Алгоритм 9.7.6 осуществляет эту процедуру для  $n = 1, 2, \dots, N/2$ , а затем использует условие сопряженной симметрии для вычисления остальных коэффициентов.

### Алгоритм 9.7.6. (КРИВАЯ ФБД)

Назначение: строит кривую ФБД с помощью Фурье-фильтрации.

Вход:

$H$  (параметр ФБД: размерность кривой равна  $d = 2 - H$ )  
 $level$  (определяет длину выхода)

Выход:

$X$  ( $N = 2^{level}$  значений ФБД)

**Инициализация:**

$$N = 2^{level}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

**Комментарий:** каждое обращение к  $g$  означает разыгрывание независимой нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

**Комментарий:** каждое обращение к  $u$  означает разыгрывание равномерно распределенной на отрезке  $[0, 1]$  случайной величины.

**Шаги:**

$$\hat{X}(0) = g$$

for  $j=1$  to  $N/2-1$

$$\hat{X}(j) = g \exp(2\pi i u) / j^{(H+0,5)}$$

end for

$$\hat{X}(N/2) = g \exp(2\pi i u) / (N/2)^{(H+0,5)}$$

for  $j = N/2 + 1$  to  $N - 1$

$$\hat{X}(j) = \hat{X}(N - j)$$

end for

$$X = \text{ОДПФ}(\hat{X})$$

Для построения поверхности ФБД с помощью Фурье-фильтрации мы используем ту же процедуру, что и в одномерном случае, заменив  $\hat{X}_n$  на  $\hat{X}_{n,k}$ . Условие степенной зависимости спектральной плотности в этом случае принимает вид [38]:

$$|\hat{X}_{n,k}|^2 \propto \frac{1}{(n^2 + k^2)^{H+1}}, \quad n, k = 1, 2, \dots, N/2.$$

Условия симметрии по сопряженности принимают вид (упр. 3):

$$\begin{aligned} \hat{X}_{N-n, N-k} &= \overline{\hat{X}_{n,k}}, & n, k &= 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{0, N-k} &= \overline{\hat{X}_{0,k}}, & k &= 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{N-n, 0} &= \overline{\hat{X}_{n,0}}, & n &= 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{0,0} &= \overline{\hat{X}_{0,0}}, & n &= 1, \dots, N/2. \end{aligned}$$

**Алгоритм 9.7.7. (ПОВЕРХНОСТЬ ФБД)**

Назначение: строит поверхность ФБД с помощью Фурье-фильтрации.

Вход:

$H$  (параметр ФБД: размерность поверхности равна  $d = 3 - H$ )  
 $level$  (определяет размер выходного массива)

Выход:

$X$  (массив  $2^{level} \times 2^{level}$ )

Инициализация:

$$N = 2^{level}$$

$$i = \sqrt{(-1)}$$

Комментарий: каждое обращение к  $g$  означает разыгрывание независимой нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Комментарий: каждое обращение к  $u$  означает разыгрывание равномерно распределенной на отрезке  $[0, 1]$  случайной величины.

Комментарий: по определению  $\overline{(a + ib)} = a - ib$ .

Шаги:

```

for j = 0 to j = N/2
for k = 0 to k = N/2
    if(j + 1)(k + 1) > 1
        r = g(j2 + k2)-H/2-1/2
    else
        r = 0
    end if
    Y(j, k) = r exp(2πiu)
end for
end for

for j = 1 to j = N/2
for k = 1 to k = N/2
    Y(N - j, N - k) =  $\overline{(Y(j, k))}$ 
end for
end for

```

```

for k = 1 to k = N/2
  Y(N - k, 0) = (Y(k, 1))
  Y(0, N - k) = (Y(1, k))
end for

for j = 1 to j = N/2 - 1
for k = 1 to k = N/2 - 1
  r = g(j2 + k2)-H/2-1/2
  Y(j, N - k) = r exp(2πiu)
  Y(N - j) = r exp(-2πiu)
end for
end for

Y(0, 0) = 0
Im(Y(N/2, 0)) = 0
Im(Y(0, N/2)) = 0
Im(Y(N/2, N/2)) = 0
X = двумерное ОДПФ(Y)

```

### Упражнения 9.7.

1. Докажите, что матрица  $A$  в выражении (9.19) удовлетворяет равенству

$$A\bar{A} = NI,$$

где  $I$  есть единичная матрица  $N \times N$ , и поэтому

$$A^{-1} = \frac{1}{N}\bar{A}.$$

Убедитесь в справедливости формулы (9.20):

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_k e^{+2\pi ikn/N}.$$

*Указание.* Сначала докажите, что

$$1 + \zeta^j + \zeta^{2j} + \cdots + \zeta^{(N-1)j} = (1 - \zeta^{Nj})/(1 - \zeta^j) = 0.$$

2. Докажите, что если

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= \overline{\hat{X}_{N-n}}, & n &= 1, 2, \dots, N/2, \\ \hat{X}_0 &= \overline{\hat{X}_0},\end{aligned}$$

то величины  $X_n$  вещественны при  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

3. Докажите, что если выполняются условия сопряженной симметрии

$$\begin{aligned}\hat{X}_{N-n, N-k} &= \overline{\hat{X}_{n,k}}, & n, k = 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{0, N-k} &= \overline{\hat{X}_{0,k}}, & k = 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{N-n, 0} &= \overline{\hat{X}_{n,0}}, & n = 1, \dots, N/2, \\ \hat{X}_{0,0} &= \overline{\hat{X}_{0,0}}, & n = 1, \dots, N/2.\end{aligned}$$

то величины  $X_{n,k}$  вещественны при  $n, k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

# Приложение А.

## Дополнительные сведения из анализа

### A.1. Полнота и компактность

**Критерий Коши и полнота.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство (см. п. 3.2). Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $X$  сходится к  $x \in X$  в  $d$ -метрике, если последовательность чисел  $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к нулю в обычном смысле, то есть:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Сходимость последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  можно установить, не вычисляя предел  $x$ , при помощи *критерия Коши*. Именно, последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится в том и только в том случае,

если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N > 0$ , что из  $n, m > N$  следует  $d(x_n, x_m) < 0$ .

Такая последовательность называется *последовательностью Коши*. Например, если  $X$  — открытый интервал  $(0, 1)$  в  $\mathbf{R}$  и

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

то последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяет критерию Коши (см. упр. 1 в конце параграфа). Ее предел  $x = 1$  содержится в  $\mathbf{R}$ , но не принадлежит  $X$ . Таким образом, критерий Коши указывает на существование предела даже в том случае, когда он не принадлежит исходному множеству.

Метрическое пространство  $(X, d)$  называется *полным*, если любая последовательность Коши из  $X$  сходится к некоторой точке из  $X$ . Можно показать, что пространство  $\mathbf{R}^n$  с евклидовой метрикой является полным. Кроме того, подмножество  $X$  пространства  $\mathbf{R}^n$  с евклидовой метрикой полно тогда и только тогда, когда  $X$  замкнуто. Более подробно полнота рассматривается в [5] и [42].

**Равномерная сходимость.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность функций, определенная на подмножестве  $A$  пространства  $\mathbf{R}^n$ . Будем говорить, что последовательность сходится *поточечно* к  $f$ , если для каждого  $x \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Поточечная сходимость не гарантирует непрерывность функции  $f$ , даже если функции  $f_n$  непрерывны на  $A$ . Например, если  $A = [0, 1]$ ,

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

то есть предельная функция разрывна.

Предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией в том случае, если последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $f$  *равномерно*, то есть

если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N > 0$ , не зависящий от  $x \in A$ , что из  $n > N$  для всех  $x \in A$  следует

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Такому определению сходимости соответствует разновидность критерия Коши, называемая *критерием Коши равномерной сходимости*. Именно, последовательность функций  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , определенных на множестве  $A$ , равномерно сходится на множестве  $A$  в том и только в том случае,

если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N > 0$ , не зависящий от  $x \in A$ , что из  $n, m > N$  для всех  $x \in A$  следует

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости можно сравнить с критерием Коши для последовательностей в метрическом пространстве. Пусть  $X$  — множество всех ограниченных непрерывных функций на  $A$ . Зададим *норму* на  $X$ :

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

и расстояние между элементами  $f$  и  $g$ :

$$d(f, g) = \|f - g\|_{\infty}.$$

Можно показать, что  $d(f, g)$  является метрикой в  $X$  и что  $(X, d)$  представляет собой полное метрическое пространство. Более того, последовательность функций  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $X$  сходится к  $f$  в  $d$ -метрике в том и только в том случае, если сходимость равномерная. Как мы видим, критерий Коши равномерной сходимости есть в точности переформулировка критерия Коши для последовательностей в  $(X, d)$ . Основное утверждение, заключающееся в том, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций сам есть непрерывная функция, эквивалентно полноте пространства  $(X, d)$ . Доказательства приведенных выше утверждений и дальнейшую информацию о равномерной сходимости читатель может найти в [5] или [42].

**Компактные метрические пространства.** Подмножество пространства  $\mathbf{R}^n$  с евклидовой метрикой компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто и ограничено. В случае произвольного метрического пространства множество называется *компактным*, если

из каждой последовательности точек  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $X$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящуюся к некоторой точке  $x \in X$ .

Это определение эквивалентно данному выше, если  $X \subset \mathbf{R}^n$ .

Достаточно легко показать, что если  $(X, d)$  компактно, то оно является полным и ограниченным. В общем случае для доказательства обратного утверждения необходимо условие полной ограниченности. Метрическое пространство  $(X, d)$  называется *вполне ограниченным*, если для любого  $r > 0$  множество  $X$  содержится в объединении конечного числа шаров радиуса  $r$ . Напомним, что множество  $X$  называется *ограниченным*, если  $X$  содержится в одном шаре некоторого радиуса  $r$ . Теорема A.1.1 суммирует все высказанные (см. [21, 44]).

---

**Теорема A.1.1.** *Метрическое пространство  $(X, d)$  является компактным в том и только в том случае, если оно полное и вполне ограниченное.*

### Упражнения 1.1.

- Покажите, что последовательность  $\{n/(n + 1)\}_{n=1}^{\infty}$  в  $\mathbf{R}$  является последовательностью Коши.

2. Пусть  $d(x, y)$  и  $\rho(x, y)$  — эквивалентные метрики в  $X$ . Покажите, что если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  есть последовательность Коши в  $d$ -метрике, то она является последовательностью Коши в метрике  $\rho$  и наоборот.
3. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность Коши в метрическом пространстве  $(X, d)$ . Покажите, что существует константа  $M > 0$  такая, что

$$d(x_1, x_n) < M, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## A.2. Непрерывные отображения

Пусть функция  $f$  определена на подмножестве  $A$  пространства  $\mathbf{R}^n$  и принимает значения в  $\mathbf{R}^m$ . Говорят, что  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in A$ , если

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0),$$

то есть

для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что из  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 < \delta$ ,  $\mathbf{x} \in A$ , следует  $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_2 < \varepsilon$ .

Другими словами, функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0 \in A$ , если для каждой последовательности  $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ , сходящейся к  $x_0$ , существует предел (см. упр. 8 в п. 3.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0). \quad (\text{A.2})$$

Отображение  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  называется *непрерывным на A*, или просто *непрерывным*, если  $f$  непрерывно во всех точках  $A$ .

В общем случае функция  $f$  ставит в соответствие элементам одного метрического пространства  $(X, d_1)$  элементы другого метрического пространства  $(Y, d_2)$ . Определения и теоремы данного раздела остаются практически без изменений, за исключением того, что следует использовать более общее определение компактности, приведенное в прил. А.1.

Раздел математики, изучающий непрерывные отображения, называется *топологией*.

**Инварианты непрерывности.** Нас интересуют свойства исходного множества  $A$ , которые при непрерывном отображении  $f$  сохраняются без изменений у множества  $f(A) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$ . Такие свойства будем называть *инвариантами непрерывности*.

Множество  $E$  в  $A \subset \mathbf{R}^n$  называется *относительно открытым* в  $A$ , если можно указать такое открытое множество  $G$  в  $\mathbf{R}^n$ , что  $E = A \cap G$ . Соответственно,  $E$  называется *относительно замкнутым* в  $A$ , если можно указать такое замкнутое множество  $F$  в  $\mathbf{R}^n$ , что  $E = A \cap F$ . Аналогичные определения применимы и в случае общих метрических пространств. Например, полуоткрытый интервал  $[0, 1/2)$  является относительно открытым в множестве  $A = [0, 1]$ . Относительно замкнутым множеством в  $A = (0, 1)$  является полуоткрытый интервал  $(0, 1/2]$ .

Пусть  $E$  — подмножество области значений  $f$ . Прообразом  $E$  при отображении  $f$  называется множество

$$f^{(-1)}(E) = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \in E\}.$$

Например, если  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , то  $f^{(-1)}([0, 1]) = [-1, 1]$ .

**Теорема A.2.2.** *Отображение  $f$  из  $A \subset \mathbf{R}^n$  на  $B \subset \mathbf{R}^m$  непрерывно в том и только в том случае, если прообраз  $f^{(-1)}(E)$  каждого множества  $E$ , относительно открытого (относительно замкнутого) в  $B$ , относительно открыт (относительно замкнут) в  $A$ .*

**Доказательство.** (Случай относительно открытых множеств.)

$\Leftarrow$ : Пусть  $\mathbf{x}_0 \in A$  и  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ . Множество  $E = B_\varepsilon(\mathbf{y}_0) \cap B$ ,  $\varepsilon > 0$ , относительно открыто в  $B$ . Так как  $f^{(-1)}(E)$  по условию относительно открыто в  $A$ , то существует такое открытое множество  $G$  в  $\mathbf{R}^n$ , что  $f^{(-1)}(E) = A \cap G$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы  $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subset G$ . Тогда  $f(B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(\mathbf{y}_0)$ . Следовательно, отображение  $f$  непрерывно.

$\Rightarrow$ : Пусть  $\mathbf{x}_0 \in f^{(-1)}(E)$  и  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ . Так как множество  $E$  относительно открыто в  $B$ , то существует такое открытое множество  $H$  в  $\mathbf{R}^m$ , что  $E = B \cap H$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $B_\varepsilon(\mathbf{y}_0) \subset H$ . Тогда  $f(B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(\mathbf{y}_0)$  для некоторого  $\delta > 0$ , вследствие непрерывности  $f$  в точке  $\mathbf{x}_0$ . Определим открытое множество  $G$  в  $\mathbf{R}^n$  как объединение шаров  $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in f^{(-1)}(E)$ . Тогда  $f(G \cap A) \subset E$ , и поэтому  $f^{(-1)}(E) = A \cap G$ . Следовательно,  $f^{(-1)}(E)$  относительно открыто в  $A$ . ■

Два специальных случая теоремы A.2.2 вполне достаточны для наших целей. Они приводятся ниже в виде двух следствий.

**Следствие А.2.1.** Пусть  $A$  и  $B$  — открытые множества. Отображение  $f : A \rightarrow B$  непрерывно в том и только в том случае, если прообраз  $f^{(-1)}(E)$  каждого открытого множества  $E$  открыт.

**Доказательство.** Так как  $B$  открыто, а  $E$  относительно открыто в  $B$ , то  $E$  открыто в  $\mathbf{R}^n$ . По теореме А.2.2 для непрерывности  $f$  необходимо, чтобы прообраз  $f^{(-1)}(E)$  каждого множества  $E$  был относительно открыт в  $A$ . Так как  $A$  само открыто, достаточно потребовать открытости  $f^{(-1)}(E)$  в  $\mathbf{R}^n$ . ■

**Следствие А.2.2.** Пусть  $A$  и  $B$  — замкнутые множества. Отображение  $f : A \rightarrow B$  непрерывно в том и только в том случае, если прообраз  $f^{(-1)}(E)$  каждого замкнутого множества  $E$  замкнут.

**Доказательство.** Доказательство точно такое же, как и в случае следствия А.2.1, но каждое слово *открытый* заменяется словом *замкнутый*. ■

**Теорема А.2.3.** Пусть  $A$  — компактное подмножество  $\mathbf{R}^n$ . Если отображение  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  непрерывно, то множество  $f(A)$  компактно.

**Доказательство.** В общем случае, множество является компактным, если из каждой последовательности точек этого множества можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке данного множества. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность из  $f(A)$ , а  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность из  $A$ , причем

$$y_n = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Так как  $A$  компактно, то из последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящуюся к некоторой точке  $x \in A$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . Из условия (А.2) следует:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x). \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  из  $f(A)$  сходится к точке  $y = f(x)$  из  $f(A)$ . ■

**Теорема A.2.4.** Пусть  $A$  — связное подмножество  $\mathbf{R}^n$ . Если отображение  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^m$  непрерывно, то множество  $f(A)$  связно.

**Доказательство.** Во-первых, заметим, что множество  $E$  связно в том и только в том случае, если оно не является объединением двух непустых непересекающихся относительно открытых в  $E$  множеств (упр. 2 в конце параграфа).

Предположим, что множество  $f(A)$  несвязно. Тогда  $f(A) = C \cup D$ , где  $C$  и  $D$  — непустые непересекающиеся относительно открытые в  $f(A)$  множества. По следствию A.2.1, множества  $f^{(-1)}(C)$  и  $f^{(-1)}(D)$  относительно открыты в  $A$  и не пересекаются, а значит множество  $A = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$  не является связным, что противоречит условию. ■

**Топологические инварианты.** Если функция  $f$  отображает  $A$  на  $B$  взаимно однозначно, то существует обратная функция  $f^{(-1)}$ :

$$f^{(-1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

Например, функция  $f(x) = e^x$  отображает вещественную прямую  $\mathbf{R}$  на  $\mathbf{R}^+$  взаимно однозначно. Обратной функцией для нее является  $f^{(-1)}(x) = \log x$ . В общем случае обратная функция может быть и разрывной, даже если функция  $f$  непрерывна (упр. 3 в конце параграфа). Однако, если  $A$  компактно, то функция  $f^{(-1)}$  непрерывна (теорема A.2.5 ниже). Взаимно однозначная непрерывная функция, обладающая непрерывной обратной, называется *гомеоморфизмом* или *топологическим отображением*. В этом случае множества  $A$  и  $B$  называются *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*. Свойства множеств, которые сохраняются при гомеоморфизме, называются *топологическими инвариантами*. Двумя такими свойствами являются компактность и связность. Упомянем также полную несвязность и совершенность множеств.

**Теорема A.2.5.** Если  $f : A \rightarrow B$  есть взаимно однозначное непрерывное отображение компакта  $A$  на  $B$ , то обратная функция  $f^{(-1)} : B \rightarrow A$  также непрерывна, то есть  $f$  является гомеоморфизмом.

**Доказательство.** По следствию A.2.2, достаточно показать, что образ  $f(F)$  каждого замкнутого множества  $F \subset A$  замкнут. Пусть  $\mathbf{y}_n = f(\mathbf{x}_n) \in F$  и  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Докажем, что  $\mathbf{y} \in f(F)$ .

Так как  $A$  компактно, то существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  и такая точка  $x \in A$ , что  $x_{n_k} \rightarrow x$ . Так как  $F$  замкнуто, то получаем  $x \in F$ , и вследствие непрерывности  $f$ ,  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ . Из этого следует, что  $y = f(x)$ , и поэтому  $y \in f(F)$ . ■

**Теорема А.2.6.** *Свойство быть канторовым множеством является топологическим инвариантом. Это означает, что если  $A$  гомеоморфно  $B$ , причем  $A$  компактно, совершенно и вполне несвязно, то  $B$  также компактно, совершенно и вполне несвязно.*

**Доказательство.** Пусть  $f$  — гомеоморфизм из  $A$  на  $B$ . Так как множество  $A$  компактно, а отображение  $f$  непрерывно, то по теореме А.2.3 множество  $B = f(A)$  также компактно.

По теореме А.2.4, связность является топологическим инвариантом. Если  $C$  — компонента  $f(B)$ , то  $f^{(-1)}(C)$  есть связное множество в  $A$ . Так как  $A$  вполне несвязно, то его составляющими являются отдельные точки. Таким образом,  $C$  должно быть отдельной точкой. Отсюда следует, что  $B$  также вполне несвязно.

Так как  $A$  совершенно, то  $A$  замкнуто и не имеет изолированных точек. Мы уже знаем, что  $B$  компактно, поэтому оно также замкнуто. Предположим, что  $y = f(x)$  — изолированная точка  $B$ . Тогда существует множество  $U$ , относительно открытое в  $B$ , которое не содержит никаких других точек из  $B$ , кроме  $y$ . Но тогда  $f^{(-1)}(U)$  будет относительно открытым множеством в  $A$ , не содержащим никаких других точек из  $A$ , кроме  $x$ , что противоречит условию (множество  $A$  совершенно). Следовательно, множество  $B$  не имеет изолированных точек, а значит совершенно. ■

**Топология и фрактальный анализ.** Топологические отображения (гомеоморфизмы) не сохраняют метрические свойства множеств. Наглядной иллюстрацией этого обстоятельства может служить фрактал, нарисованный на резиновой пленке, которая затем неравномерно растягивается по разным направлениям. Получаемая в результате конфигурация гомеоморфна оригиналу, но такие свойства, как самоподобие и фрактальная размерность, не сохраняются. В теории фракталов соображения, связанные с непрерывностью, несмотря на их важность, ограничиваются анализом свойств, которые могут быть описаны в терминах открытых и замкнутых множеств. И

хотя содержание теоремы A.2.6 относится к фрактальному анализу, но по сути она чисто топологическая. Такие метрические свойства, как фрактальная размерность, оказываются утерянными. Еще меньше можно сказать о метрических свойствах множеств, которые представляют собой просто непрерывные образы классического множества Кантора. Можно показать, что каждое компактное метрическое пространство является таким множеством [21].

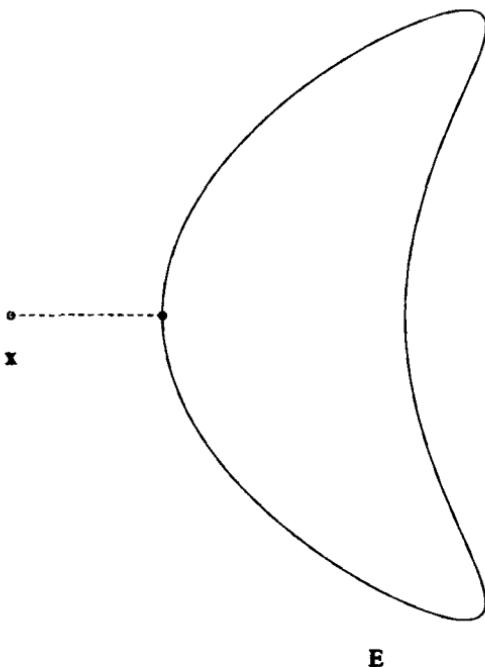
Условия, более сильные, чем непрерывность, например, условие Липшица (п. 3.3), часто используются в фрактальном анализе. В главе 5 было доказано, что если  $A$  отображается на  $B$  с помощью взаимно однозначного преобразования, удовлетворяющего условию Липшица, причем обратное отображение также удовлетворяет этому условию, то  $A$  и  $B$  имеют одну и ту же фрактальную размерность.

### Упражнения 1.2.

1. Докажите следствия A.2.1 и A.2.2.
2. Докажите, что множество  $A$  связно в том и только в том случае, если оно не является объединением двух непустых непересекающихся множеств, которые относительно открыты в  $A$ .
3. Покажите, что функция  $f(x) = e^{ix}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , взаимно однозначна и непрерывна, но обратная к ней функция не является непрерывной.
4. Пусть  $T_1, \dots, T_m$  — сжимающие отображения на  $\mathbf{R}^n$ ,  $K$  — компактное множество в  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{T}(K) = T_1(K) \cup \dots \cup T_m(K)$  (как в п. 4.1). Докажите, что  $\mathbf{T}(K)$  компактно.

## A.3. Метрика Хаусдорфа II

Мы продолжим обсуждение расстояния Хаусдорфа между двумя множествами в  $\mathbf{R}^n$ , начатое в п. 3.5. Через  $\mathcal{K}$  обозначим совокупность всех непустых компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ . Несмотря на то, что в качестве основной метрики на  $\mathbf{R}^n$  мы принимаем евклидову метрику, определения и теоремы настоящего раздела применимы и к произвольной полной метрике, включая и  $p$ -метрики на  $\mathbf{R}^n$ . Иначе говоря, каждой полной метрике соответствует некоторая метрика Хаусдорфа на  $\mathcal{K}$ . Упражнения содержат примеры использования так называемой манхэттенской метрики.

Рис. А.1.  $d(x, E)$ 

Определим расстояние между точкой  $x \in \mathbf{R}^n$  и множеством  $E \subset \mathbf{R}^n$  следующим образом (рис. А.1):

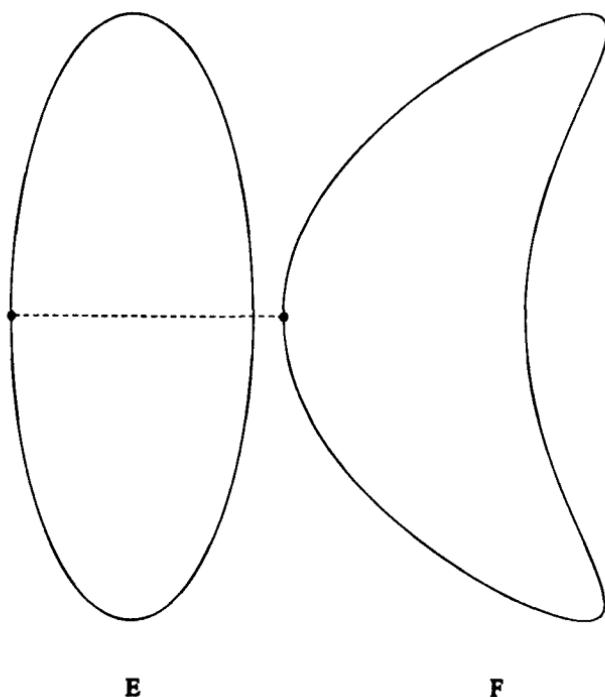
$$d(x, E) = \min\{\|x - y\|_2 : y \in E\}. \quad (\text{A.4})$$

*Предостережение:* расстояние здесь и далее в этом приложении не должно автоматически интерпретироваться как метрика в соответствии с определением из п. 3.2. Некоторые расстояния, которые мы рассмотрим, не удовлетворяют аксиомам метрики.

Строго говоря, следует использовать  $\inf$  вместо  $\min$  в определении  $d(x, E)$ . Однако, так как множество  $E$  предполагается компактным, то  $\inf\{\|x - y\|_2 : y \in E\}$  фактически означает то же самое, что и  $\min\{\|x - y\|_2 : y \in E\}$  (упр. 5 в конце параграфа).

Обобщим понятие расстояния от точки  $x$  до компактного множества  $E$ . Определим расстояние между двумя компактными множествами  $E$  и  $F$  следующим образом (рис. А.2):

$$d(E, f) = \max\{d(x, F) : x \in E\}. \quad (\text{A.5})$$



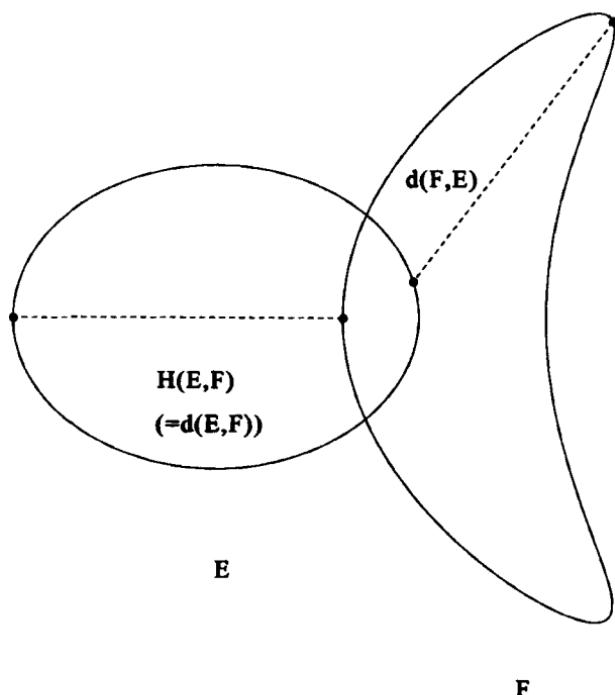
**Рис. A.2.  $d(E, F)$**

Строго говоря, следует использовать  $\sup$  вместо  $\max$ , но вследствие того, что оба множества компактны, корректно и использование  $\max$ . Более того, всегда существуют такие точки  $x_0 \in E$  и  $y_0 \in F$ , что  $d(E, F) = \|x_0 - y_0\|_2$  (упр. 6 в конце параграфа).

Естественно задать вопрос: является ли расстояние  $d(E, F)$  метрикой? Очевидно, нет. В частности, если  $E \subset F$ , причем  $E \neq F$ , то  $d(E, F) = 0$  (упр. 8 в конце параграфа), что нарушает одно из свойств метрики.

Так что же, поиск метрики для  $\mathcal{K}$  обречен на неудачу? К счастью, нет. Фактически, мы остановились слишком рано. Нам потребуется еще несколько новых понятий. Для вещественных чисел  $a$  и  $b$  введем:

$$\begin{aligned} a \vee b &= \max\{a, b\}, \\ a \wedge b &= \min\{a, b\}. \end{aligned}$$

Рис. А.3. Метрика Хаусдорфа  $H(E, F)$ 

Определение *метрики Хаусдорфа* на  $\mathcal{K}$  таково (рис. А.3):

$$H(E, F) = d(E, F) \vee d(F, E), \quad E, F \in \mathcal{K}. \quad (\text{A.6})$$

Мы докажем, что  $H(E, F)$  является метрикой, в несколько этапов. Некоторые из них оставлены в качестве упражнений, включая:

- Если  $E \subset F$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ , то  $d(x, F) \leq d(x, E)$  (упр. 9 в конце параграфа).
- Если  $E \neq F$ , то  $d(E, F) \neq 0$  или  $d(F, E) \neq 0$  (упр. 10 в конце параграфа).
- Если  $E, F, G \in \mathcal{K}$ , то  $d(E \cup F, G) = d(E, G) \vee d(F, G)$  (упр. 11 в конце параграфа).

**Теорема А.3.7.** Если  $H(E, F)$  задано формулой (А.6), то  $H(E, F)$  является метрикой на пространстве  $\mathcal{K}$  всех непустых компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ .

**Доказательство.**

1.  $H(E, F) \geq 0$ . Это немедленно следует из определения (A.6), так как величины  $d(E, F)$  и  $d(F, E)$  неотрицательны.
2.  $H(E, F) = 0$  тогда и только тогда, когда  $E = F$ . Если  $E = F$ , то, очевидно,  $H(E, F) = 0$ . С другой стороны, если  $H(E, F) = 0$ , то  $d(E, F) = 0 = d(F, E)$ . В соответствии с пунктом 2, предшествовавшим теореме, мы должны получить  $E = F$ .
3.  $H(E, F) = H(F, E)$ . Это утверждение следует непосредственно из определения (A.6).
4.  $H(E, G) \leq H(E, F) + H(F, G)$  для любых  $F, G, H \in \mathcal{K}$  (неравенство треугольника). Во-первых, покажем, что для любых  $E, F, G \in \mathcal{K}$ :

$$d(E, G) \leq d(E, F) + d(F, G), \quad (\text{A.7})$$

и

$$d(G, E) \leq d(G, F) + d(F, E). \quad (\text{A.8})$$

Для этого нам потребуется следующая элементарная формула (упр. 7 в конце параграфа):

$$(a + b) \vee (c + d) \leq (a \vee c) + (b \vee d).$$

Тогда

$$\begin{aligned} H(E, G) &= d(E, G) \vee d(G, E) \\ &\leq (d(E, F) + d(F, G)) \vee (d(G, F) + d(F, E)) \\ &\leq d(E, F) \vee d(F, E) + d(F, G) \vee d(G, F) \\ &= H(E, F) + H(F, G). \end{aligned}$$

Докажем неравенство (A.7). Неравенство (A.8) доказывается аналогично. Пусть  $e \in E$ . Тогда

$$d(e, G) = \min\{d(e, g), g \in G\}.$$

Для каждого  $f \in F$ :

$$\begin{aligned} d(e, G) &\leq \min\{d(e, f) + d(f, g), g \in G\} \\ &\leq d(e, f) + \min\{d(f, g), g \in G\} \\ &\leq d(e, F) + \max\{d(f, G), f \in F\} \\ &\leq d(e, F) + d(F, G). \end{aligned}$$

Так как это неравенство верно при любом  $e \in E$ , то

$$d(E, G) \leq d(E, F) + d(F, G). \blacksquare$$

Рассмотрим, как можно использовать метрику Хаусдорфа. Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство. Напомним, что последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $X$  сходится к точке  $x \in X$  в  $d$ -метрике, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Если «точки» — непустые компактные множества  $E_n$  и  $E$ , причем используется метрика Хаусдорфа, то утверждение о сходимости принимает вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E \iff \lim_{n \rightarrow \infty} H(E_n, E) = 0.$$

На практике определить расстояние Хаусдорфа между двумя множествами бывает непросто. К счастью, имеется альтернативный подход, позволяющий глубже понять метрику Хаусдорфа. Он связан с понятием расширения (дилатации), введенным в п. 3.5.

Для заданного множества  $E$  в  $\mathbf{R}^n$  и радиуса  $r > 0$  *расширение*  $E$  радиуса  $r$ , обозначаемое как  $E + r$ , определяется как векторная сумма  $E + \bar{B}_r(\mathbf{0})$ , где  $\bar{B}_r(\mathbf{0})$  — замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в начале координат (рис. 3.2). Это можно записать и в следующем эквивалентном виде:

$$E + r = \bigcup \{\bar{B}_r(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in E\}.$$

*Предостережение:* в некоторых книгах расширения определяются с помощью открытых шаров, в то время как мы используем замкнутые шары. Наше предпочтение связано с незначительным упрощением доказательства следующей теоремы.

---

**Теорема А.3.8.** Пусть  $E$  и  $F$  — компактные подмножества  $\mathbf{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Расстояние Хаусдорфа  $H(E, F)$  удовлетворяет соотношению:

$$H(E, F) \leq \varepsilon \iff E \subset F + \varepsilon \quad \text{и} \quad F \subset E + \varepsilon.$$

**Доказательство.** Мы покажем, что  $d(E, F) \leq \varepsilon$  в том и только в том случае, если  $E \subset F + \varepsilon$ . Из соображений симметрии такое же

рассуждение приводит к тому, что  $d(F, E) \leq \varepsilon$  в том и только в том случае, если  $F \subset E + \varepsilon$ . Предположим, что  $d(E, F) \leq \varepsilon$ . Тогда для любой точки  $x \in E$  имеем  $d(x, F) \leq \varepsilon$ , откуда следует, что  $x \in F + \varepsilon$ . Поэтому  $E \subset F + \varepsilon$ .

Обратно, если  $E \subset F + \varepsilon$ , тогда для каждой точки  $x \in E$  существует точка  $y \in F$  такая, что  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Из этого следует, что  $d(x, F) \leq \varepsilon$  для всех  $x \in E$  и поэтому  $d(E, F) \leq \varepsilon$ . ■

---

**Следствие A.3.3.** Пусть  $E$  и  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — компактные множества. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$  в метрике Хаусдорфа в том и только в том случае, если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что из  $n > N$  следует

$$E_n \subset E + \varepsilon \quad \text{и} \quad E \subset E_n + \varepsilon.$$

---

**Следствие A.3.4.** Пусть  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — непустые компактные множества, упорядоченные по убыванию:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$$

Пусть

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда  $E$  непусто и компактно, и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$$

в метрике Хаусдорфа.

**Доказательство.** Множество  $E$  непусто и компактно вследствие стандартной теоремы о компактных множествах [42]. В соответствии со следствием A.3.3 надо показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует целое  $N$  такое, что из  $n > N$  следует

$$E_n \subset E + \varepsilon \quad \text{и} \quad E \subset E_n + \varepsilon.$$

Так как множества упорядочены по убыванию, то  $E \subset E_n$ , а значит нам необходимо рассмотреть только первый случай. Множество

$E + B_\varepsilon(\mathbf{0})$ , будучи объединением шаров, открыто и содержится в  $E + \varepsilon$ . В соответствии с упр. 12 в конце параграфа, если пересечение последовательности упорядоченных по убыванию компактных множеств содержится в открытом множестве, то компактные множества сами содержатся в открытом множестве. Таким образом, компактные множества  $E_n$  содержатся в  $E + \varepsilon$ . ■

Данное следствие имеет непосредственное отношение к фракталам, которые образуются последовательным устранием открытых множеств. Например, это классическое множество Кантора, получаемое последовательным выбрасыванием открытых срединных третей интервалов. Используя это следствие, получаем, что аппроксиманты (рис. 2.20) сходятся к множеству Кантора в метрике Хаусдорфа. В качестве другого примера можно привести построение ковра Серпинского (рис. 2.5).

**Теорема А.3.9.** Пусть  $\mathcal{K}$  есть совокупность всех непустых компактных подмножеств  $\mathbf{R}^n$ , а  $H$  — метрика Хаусдорфа. Тогда метрическое пространство  $(\mathcal{K}, H)$  полное.

**Доказательство.** Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность множеств в  $\mathcal{K}$ , которая удовлетворяет критерию Коши для метрики Хаусдорфа. По упр. 3 из прил. А.1, существует такая константа  $M$ , что  $H(A_1, A_n) < M$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и поэтому

$$A_n \subset A_1 + M.$$

Зададим

$$E_n = \overline{(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots)}.$$

Тогда  $E_n$  являются замкнутыми и ограниченными, а следовательно, компактными подмножествами  $\mathbf{R}^n$ . Пусть

$$E = \cap_{n=1}^\infty E_n.$$

Так как множества  $E_n$  упорядочены по убыванию, то из следствия А.3.4 вытекает, что  $E_n \rightarrow E$  в метрике Хаусдорфа при  $n \rightarrow \infty$ . Мы покажем, что  $E$  также является пределом исходной последовательности в метрике Хаусдорфа, то есть

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (\text{A.9})$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Существует целое  $N_1$  такое, что из  $n > N_1$  следует

$$E \subset E_n + \varepsilon \quad \text{и} \quad E_n \subset E + \varepsilon.$$

В частности, из второго условия при  $n > N_1$  следует

$$(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \dots) \subset E + \varepsilon,$$

то есть  $A_n \subset A_m + \varepsilon$ . Так как  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяет критерию Коши в метрике Хаусдорфа, то существует такое целое  $N_2$ , что из  $n, m > N_2$  следует

$$A_n \subset A_m + \varepsilon \quad \text{и} \quad A_m \subset A_n + \varepsilon.$$

Зафиксируем  $n > N_2$ . При любом  $m > N_2$  получим

$$(A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \dots) \subset A_n + \varepsilon$$

$$E_m = \overline{(A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \cup \dots)} \subset A_n + \varepsilon$$

$$E = \cap_{m=1}^{\infty} E_m \subset A_n + \varepsilon.$$

Таким образом, если  $n > \max\{N_1, N_2\}$ , то  $A_n \subset E + \varepsilon$  и  $E \subset A_n + \varepsilon$ , и формула (A.9) доказана. ■

---

**Теорема А.3.10.** *Если  $A$  — компактное подмножество  $\mathbf{R}^n$ , а  $\mathcal{K}$  — совокупность всех непустых компактных подмножеств  $A$ , то метрическое пространство  $(\mathcal{K}, H)$ , где  $H$  — метрика Хаусдорфа, компактно.*

### Упражнения 1.3.

1. Пусть  $S$  — периметр квадрата с вершинами  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  и  $(0, 1)$ . Нарисуйте расширение  $S + 0, 25$ , используя манхэттенскую метрику на  $\mathbf{R}^2$ . Сравните результат с ответом к упр. 3.5.1.
2. Найдите расстояние Хаусдорфа  $H(A, B)$  в пространстве, оснащенным манхэттенской метрикой:

$$A = \{(x, x) : -1 \leq x \leq 1\},$$

$$B = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Сравните результат с ответом к упр. 3.5.2.

3. Пусть  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — манхэттенская метрика на  $\mathbf{R}^2$ . Вычислите  $d(\mathbf{x}, B)$ , где  $\mathbf{x}$  — точка  $(1, 1)$ ,

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 1/2)^2 + y^2 \leq 1/4\}.$$

4. Рассмотрим диск  $D: \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Положим, что решетка с размером ячеек  $1/2^k$  накрывает  $D$ , а начало координат решетки совпадает с центром диска. Пусть  $A_k$  есть наименьшее множество, представляющее собой объединение квадратов решетки, накрывающих  $D$ .

- а) Покажите, что расстояние Хаусдорфа  $H$ , использующее евклидову метрику, обладает свойством:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(A_k, D) = 0.$$

- б) Покажите, что периметр  $\Lambda(A_k)$  множества  $A_k$  удовлетворяет неравенству  $\Lambda(A_k) \geq 8, k = 1, 2, 3, \dots$ . Как это связано с длиной окружности  $D$  в махэттенской метрике?

5. Покажите, что если  $E$  компактно в  $\mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , то

$$\inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 : \mathbf{y} \in E\} = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 : \mathbf{y} \in E\}.$$

6. Покажите, что если  $E$  и  $F$  компактны в  $\mathbf{R}^n$ , то всегда существуют такие точки  $\mathbf{x}_0 \in E$  и  $\mathbf{y}_0 \in F$ , что  $d(E, F) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|_2$ .

7. Покажите, что  $(a + b) \vee (c + d) \leq (a \vee c) + (b \vee d)$ .

8. Покажите, что если  $E \subset F$ , то  $d(E, F) = 0$ . Более того, если  $E \subset F$  и  $E \neq F$ , то  $d(F, E) > 0$ .

9. Покажите, что если  $E \subset F$  и  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , то  $d(\mathbf{x}, F) \leq d(\mathbf{x}, E)$ .

10. Покажите, что если  $E \neq F$ , то  $d(E, F) \neq 0$  или  $d(F, E) \neq 0$ .

11. Предположим, что  $E$ ,  $F$  и  $G$  суть компактные множества в  $\mathbf{R}^n$  с евклидовой метрикой. Покажите, что

$$d(E \cup F, G) = d(E, G) \vee d(F, G).$$

12. Убедитесь в верности следствия А.3.4. Если множество  $E$  является пересечением компактных множеств  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  и содержится в открытом множестве  $G$ , то  $E_n \subset G$  при всех достаточно больших  $n$ .

13. Покажите, что для  $A, B, C, D \in X$

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq H(A, C) \vee H(B, D).$$

## A.4. Топологическая размерность.

Теория топологической размерности — развитая область математики. Мы, однако, ограничимся только определением и несколькими основными свойствами топологической размерности. Превосходной книгой, содержащей сведения о топологической размерности и размерности Хаусдорфа, является книга Гуревича и Вольмана [22]. Более современное изложение принадлежит Эдгару [13].

Топологическая размерность определяется индуктивным способом и поэтому иногда называется *индуктивной размерностью*. Более точно, рассматриваются *малая* и *большая* индуктивные размерности. Но они обе совпадают для подмножеств  $\mathbf{R}^n$ , рассмотрением которых мы ограничимся. До конца этого приложения термин «размерность  $E$ » будет означать топологическую размерность  $\dim_T(E)$ .

Для пустого множества  $\emptyset$  положим:

$$\dim_T(\emptyset) = -1.$$

Размерность любого непустого множества отлична от  $-1$ .

Множество  $E$  имеет размерность  $\dim_T(E) = 0$  в том случае, если для каждого  $x \in E$  и для каждого относительно открытого множества  $U$ , содержащего  $x$ , существует такое относительно открытое множество  $V$ , что  $x \in V \subset U$  и  $\partial V \cap E = \emptyset$ . (Напомним, что  $\partial V$  обозначает границу  $V$ .) Примером множества размерности 0 является множество рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  на вещественной оси  $\mathbf{R}$ . При данном относительно открытом множестве  $U$ , содержащем  $x$ ,  $V$  есть пересечение  $\mathbf{Q}$  с открытым интервалом, имеющим иррациональные конечные точки и содержащемся в  $U$ . Граница  $V$  состоит из двух иррациональных граничных точек, которые не принадлежат  $\mathbf{Q}$ .

Размерность произвольного счетного подмножества пространства  $\mathbf{R}^n$  равна нулю (упр. 1 в конце параграфа). Более важный с точки зрения фрактальной теории результат формулируется в виде следующей теоремы.

---

**Теорема A.4.11.** *Топологическая размерность классического множества Кантора равна нулю.*

**Доказательство.** Классическое множество Кантора  $C$  является пересечением вложенных множеств  $C_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , причем каждое

$C_k$  представляет собой объединение  $2^k$  замкнутых непересекающихся интервалов длины  $3^{-k}$  (см. рис. 2.20).

Пусть  $x \in C$ , а  $U$  — относительно открытое множество, содержащее  $x$ . Выберем  $k$  так, чтобы интервал  $I \subset C_k$ , в который попадает точка  $x$ , также принадлежал  $U$ . Пусть  $V$  — открытый интервал, который содержит  $I$ , но не имеет пересечения с любым из других интервалов, образующих  $C_k$ . Тогда  $\partial V \cap C = \emptyset$ . ■

В основе определения *индуктивной размерности* лежит тот факт, что размерность границы шара в  $\mathbf{R}^n$  равна  $n - 1$ . Требуется известная осторожность при преобразовании этой общей идеи в осмыслившее определение, так как мы имеем дело как с относительно открытыми, так и с произвольными множествами.

Будем считать, что  $\dim_T(E) \leq n$  в том и только в том случае, если для любого  $x \in E$  и относительно открытого множества  $U$ , содержащего  $x$ , существует такое относительно открытое множество  $V$ , что  $x \in V \subset U$  и

$$\dim_T(\partial V \cap E) \leq n - 1.$$

Другими словами,

$$\dim_T(E) = n \iff \dim_T(E) \leq n \text{ и } \dim_T(E) > n - 1.$$

**Теорема А.4.12.** *Топологическая размерность вещественной прямой  $\mathbf{R}$  равна*

$$\dim_T(\mathbf{R}) = 1.$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что  $\dim_T(\mathbf{R}) \leq 1$ . Пусть  $x \in \mathbf{R}$ ,  $U$  — относительно открытое (и поэтому открытое) множество, содержащее  $x$ . Найдется окрестность  $B_\delta(x)$  точки  $x$ , которая содержится в  $U$ . Границей  $B_\delta(x)$  является двухточечное множество  $\{x - \delta, x + \delta\}$  размерности  $\dim_T(B_\delta(x)) = 0$ . Следовательно,  $\dim_T(\mathbf{R}) \leq 1$ .

Чтобы исключить возможность  $\dim_T(\mathbf{R}) = -1$ , покажем, что для каждого открытого множества  $V$  в  $\mathbf{R}$ , отличного от  $\emptyset$  и  $\mathbf{R}$ , имеет место  $\partial V \neq \emptyset$ . Пусть  $V$  — такое множество. Выберем  $y \in \mathbf{R} \setminus V$ . По крайней мере одно из множеств  $L = \{t : t \in V \text{ и } t < y\}$  или  $R = \{t : t \in V \text{ и } t > y\}$  непусто. Если  $L$  непусто, то положим  $x = \sup(L)$ . Если же  $R$  непусто, то положим  $x = \inf(R)$ . Каждая окрестность точки  $x$  содержит как в  $V$ , так и в его дополнении. Следовательно,  $x \in \partial V$ . ■

**Теорема A.4.13.** Топологическая размерность компактного множества  $A \in \mathbf{R}^n$  равна нулю в том и только в том случае, если  $A$  вполне несвязно.

**Теорема A.4.14.** Топологическая размерность пространства  $\mathbf{R}^n$  равна

$$\dim_T(\mathbf{R}^n) = n.$$

**Теорема A.4.15.** Топологическая размерность является топологическим инвариантом.

Теорема A.4.15 имеет своим следствием то, что кривая, которая является гомеоморфным образом интервала, имеет топологическую размерность  $\dim_T = 1$ , а поверхность, которая является гомеоморфным образом плоской области, имеет топологическую размерность  $\dim_T = 2$ . Конечно, эти объекты могут быть и фракталами, но фрактальные свойства теряются при анализе топологической размерности.

#### Упражнения 1.4.

- Покажите, что топологическая размерность счетного множества  $E \subset \mathbf{R}^n$  равна нулю.

## A.5. Размерность Хаусдорфа

Построение размерности Хаусдорфа имеет некоторое сходство с конструкцией размерности Минковского (п. 5.1). Начнем с формулы для  $d$ -меры шара в  $\mathbf{R}^n$  (см. (5.1)), а затем аппроксимируем  $d$ -меру произвольного множества  $A$  суммой  $d$ -мер шаров, которые покрывают  $A$  (рис. 5.1). В отличие от п. 5.1, теперь мы будем рассматривать покрытия множества  $A$   $r$ -шарами, где  $r \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Множество  $A$  в теореме 5.1.2 имеет положительную  $d$ -меру Минковского при  $d = 1/2$ , но обладает нулевой  $d$ -мерой Хаусдорфа при любом  $d > 0$ .

Рассмотрим последовательность шаров с радиусами  $r_i < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , которые покрывают  $A$ . Мы аппроксимируем  $d$ -меру Хаусдорфа множества  $A$  суммой  $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d) r_i^d$ . Введем

$$S_{d,\varepsilon}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d) r_i^d,$$

где точная нижняя грань ищется по всем таким покрытиям множества  $A$ . Определим  $d$ -мерную внешнюю меру множества  $A$  как

$$S_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{d,\varepsilon}(A).$$

Предел в данном определении всегда существует, так как  $S_{d,\varepsilon}(A)$  убывает при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Вот некоторые свойства  $S_d(A)$ . Доказательства первых двух мы оставляем читателю в качестве упражнений.

1. Если  $A \subset B$ , то  $S_d(A) \leq S_d(B)$ .
2.  $S_d(a)$  субаддитивна, то есть:

$$S_d(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} S_d(A_n).$$

3. Если  $A \subset \mathbf{R}$ , то  $S_1(A)$  совпадает с внешней мерой в смысле Лебега. Это утверждение не справедливо, если  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $n > 1$ . Тем не менее,  $d$ -мера множества равна нулю в том и только в том случае, если внешняя мера Лебега равна нулю [22].

---

**Теорема А.5.16.** Любому множеству  $A \subset \mathbf{R}^n$  соответствует единственное число  $d$ , называемое размерностью Хаусдорфа множества  $A$ , для которого

$$\begin{aligned} e < d &\Rightarrow S_e(A) = \infty, \\ e > d &\Rightarrow S_e(A) = 0. \end{aligned}$$

Это число, обозначаемое  $\dim_H(A)$ , удовлетворяет соотношению

$$\dim_H(A) = \sup\{e: S_e(A) = \infty\} = \inf\{e: S_e(A) = 0\}.$$

**Доказательство.** Покажем, что

$$S_{e_0}(A) < \infty \Rightarrow S_e(A) = 0 \quad \text{для} \quad e > e_0. \quad (\text{A.10})$$

Если это доказано, то можно определить

$$d = \inf\{e: S_e(A) = 0\}.$$

Как следует из (A.10), если  $e < d$ , мы должны получить  $S_e = \infty$ , а если  $e > d$ , то  $S_e(A) = 0$ .

Докажем справедливость (A.10). Так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{e_0, \varepsilon}(A) = S_{e_0}(A)$ , то существует  $\varepsilon > 0$ , для которого  $S_{e_0, \varepsilon}(A) < S_{e_0}(A) + 1 < \infty$ . Мы знаем, что существует последовательность шаров радиусов  $r_i < \varepsilon$ , покрывающая  $A$ , для которой

$$\sum \gamma(e_0)r^{e_0} \leq S_{e_0}(A) + 1.$$

Введем  $\rho = \gamma(e)/\gamma(e_0)$ . Для  $e > e_0$

$$\begin{aligned} S_{e, \varepsilon}(A) &\leq \sum \gamma(e)r_i^e \\ &= \varepsilon^e \sum \gamma(e)\left(\frac{r_i}{\varepsilon}\right)^e \\ &\leq \rho\varepsilon^e \sum \gamma(e_0)\left(\frac{r_i}{\varepsilon}\right)^{e_0} \\ &= \rho\varepsilon^{e-e_0} \sum \gamma(e_0)r_i^{e_0} \leq \rho\varepsilon^{e-e_0}(S_{e_0}(A) + 1). \end{aligned}$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $S_e(A) = 0$ . ■

Как и предполагалось, аналоги основных теорем и следствий п. 5.1 остаются справедливыми и для размерности Хаусдорфа. В частности, график гладкой функции одной или двух независимых переменных имеет размерность Хаусдорфа  $\dim_H = 1$  или  $\dim_H = 2$ , соответственно. Размерность Хаусдорфа самоподобного множества с коэффициентами подобия  $r_1, r_2, \dots, r_N$  удовлетворяет соотношению:

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_N^d = 1,$$

причем

$$Nr^d = 1,$$

если  $r_1 = r_2 = \dots = r_N = r$ . Размерность Хаусдорфа остается неизменной при переходе к эквивалентной метрике.

Основное отличие размерности Минковского от размерности Хаусдорфа состоит в следующем. Мы доказали в теореме 5.1.2, что размерность Минковского множества

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

равна  $\dim_M(A) = 1/2$ . Это множество счетное и может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с положительными целыми числами. Мы уже говорили в п. 5.1, что размерность Хаусдорфа любого счетного множества равна  $\dim_H = 0$ , что мы сейчас и докажем.

**Теорема А.5.17.** Пусть  $A$  — компактное счетное множество в  $\mathbf{R}^n$ , скажем,

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Тогда  $\dim_H(A) = 0$ .

**Доказательство.** Из упр. 5.1.3 следует, что  $S_e(A)$ ,  $d$ -мера Хаусдорфа множества  $A$ , равна нулю при любом  $d > 0$ . Таким образом, размерность Хаусдорфа множества  $A$ ,

$$\dim_H(A) = \inf\{e : S_e(A) = 0\},$$

равна нулю. ■

### Упражнения 1.5.

1. Рассмотрим треугольник Серпинского  $S$ . Пусть  $d = \log 3 / \log 2$  — фрактальная размерность  $S$ . Оцените  $d$ -меру Хаусдорфа множества  $S$ . Для этого найдите предел суммы  $d$ -мер шаров, покрывающих  $n$ -ую итерацию СИФ, соответствующей  $S$ .
2. Пусть  $E$  — компактное подмножество плоскости, обладающее размерностью Хаусдорфа  $d$ .  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{a}$  — взаимно однозначное аффинное преобразование, причем  $\tilde{E} = T(E)$ . Докажите, что  $\tilde{E}$  также имеет размерность Хаусдорфа  $d$ .
3. Пусть  $F$  — любое фрактальное множество в  $\mathbf{R}^+$ ,  $f(x) = x^2$  и  $G = \{f(x) : x \in F\}$ . Докажите, что  $\dim_H(G) = \dim_H(F)$ .
4. Докажите, что если  $f$  — взаимно однозначное непрерывное отображение из компактного множества  $E_1$  на компактное множество  $E_2$ , причем как  $f$ , так и  $f^{-1}$  удовлетворяют условию Липшица, то размерности Хаусдорфа множеств  $E_1$  и  $E_2$  совпадают.

## А.6. Быстрое преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) рассматривалось в п. 9.7 как линейное преобразование из  $\mathbf{R}^N$  в  $\mathbf{R}^N$ :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{в} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_{N-1} \end{bmatrix},$$

а именно

$$\hat{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (\text{A.11})$$

Введем обозначение:

$$\zeta \text{ (или } \zeta_N) = e^{-2\pi i/N}. \quad (\text{A.12})$$

Тогда

$$A \text{ (или } A_N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{(N-1)} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \zeta^{(N-1)} & \zeta^{2(N-1)} & \dots & \zeta^{(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Так как матрица  $A$  содержит  $N \times N$  элементов, то вычисление ДПФ по формуле (A.11) требует  $N^2$  умножений. В линейной алгебре большинство вычислений можно представить в виде скалярных произведений, как в случае вычисления  $A\mathbf{x}$  в выражении (A.11). Поэтому число необходимых умножений всегда приблизительно такое же, что и число сложений (включая вычитания). Для того чтобы получить представление о вычислительной сложности задачи, достаточно подсчитать число умножений. Поэтому говорят, что вычислительная сложность ДПФ равна  $\mu = N^2$ .

Такая сложность вполне приемлема, пока  $N$  не велико. В противном случае, а также когда вычислять ДПФ нужно многократно, как это приходится делать при решении уравнений в частных производных, обработке изображений и в некоторых других областях, сложность порядка  $N^2$  слишком велика. Одним из действительно важных достижений вычислительной математики было создание алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). Современный подход основан на алгоритме Кули–Тьюки, хотя основная идея была известна еще Гауссу.

Для работы алгоритма БПФ необходимо, чтобы число  $N$  раскладывалось на возможно большее число сомножителей. Это число максимально, когда  $N$  равно степени 2, то есть  $N = 2^p$  для некоторого  $p$ . Ниже рассматривается именно этот случай.

В основе алгоритма БПФ лежит следующее наблюдение. Величины  $\zeta_N$  и  $\zeta_{N/2}$  связаны соотношением (см. (A.12)):

$$(\zeta_N)^2 = (e^{-2\pi i/N})^2 = e^{-2\pi i/(N/2)} = \zeta_{N/2}. \quad (\text{A.13})$$

Это позволяет расщепить задачу  $N \times N$  на две подзадачи  $N/2 \times N/2$ , что приводит к уменьшению сложности с  $N^2$  до  $2(N/2)^2 = (1/2)N^2$ . Но можно продолжить процесс и далее. Каждая из подзадач  $N/2 \times N/2$  расщепляется на две подзадачи  $N/4 \times N/4$ , а значит число умножений уменьшается еще вдвое, и так далее. Таким образом, число умножений можно сократить с  $\mu = N^2$  до  $\mu = (1/2)Np$ , или  $(1/2)N \log_2 N$ . Это значительная экономия машинного времени. Например, если  $p = 12$  ( $N = 4096$ ), то сложность уменьшается с 16 777 216 умножений до 24 576. В общем случае, число умножений уменьшается в  $(N/2)/p$  раз.

Механизм расщепления  $N \times N$ -задачи заключается в группировании вместе составляющих с четными индексами и составляющих с нечетными индексами:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}.$$

**Теорема А.6.18.** Вычисление ДПФ  $\hat{\mathbf{x}} = A_N \mathbf{x}$  порядка  $N \times N$  можно свести к вычислению двух ДПФ порядка  $N/2 \times N/2$ :

$$\hat{\mathbf{y}} = A_{N/2} \mathbf{y},$$

$$\hat{\mathbf{z}} = A_{N/2} \mathbf{z},$$

причем

$$\hat{x}_j = \hat{y}_j + (\zeta_N)^j \hat{z}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N/2, \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{x}_{j+N/2} = \hat{y}_j - (\zeta_N)^j \hat{z}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N/2. \quad (\text{A.15})$$

**Доказательство.** По формуле (9.18),

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k (\zeta_N)^{kn}.$$

Сгруппируем слагаемые с четными (нечетными) индексами:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= \sum_{k \text{ четно}} X_k (\zeta_N)^{kn} + \sum_{k \text{ нечетно}} X_k (\zeta_N)^{kn} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} X_{2k} (\zeta_N)^{2kn} + \sum_{k=0}^{N/2-1} X_{2k+1} (\zeta_N)^{(2k+1)n}. \end{aligned}$$

По формуле (A.13):

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} y_k (\zeta_{N/2})^{kn} + (\zeta_N)^n \sum_{k=0}^{N/2-1} z_k (\zeta_{N/2})^{kn}. \quad (\text{A.16})$$

При  $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$  это немедленно приводит к формуле (A.14).

Если  $n \in \{N/2, \dots, N - 1\}$ , запишем  $n = N/2 + j$ ,  $j \in \{0, \dots, N/2 - 1\}$ . Тогда

$$(\zeta_{N/2})^{kn} = (\zeta_{N/2})^{kN/2} (\zeta_{N/2})^{kj} = e^{-2\pi i k} (\zeta_{N/2})^{kj} = (\zeta_{N/2})^{kj}$$

и

$$(\zeta_N)^n = (\zeta_N)^{N/2} (\zeta_N)^j = e^{-\pi i} (\zeta_N)^j = -(\zeta_N)^j.$$

Подставляя эти выражения в (A.16), получаем (A.15). ■

**Теорема A.6.19.** Вычислительная сложность алгоритма БПФ в случае  $N = 2^p$  равна

$$\mu = \frac{1}{2} N \log_2 N.$$

**Доказательство.** Если  $\mu(k)$  обозначает вычислительную сложность БПФ порядка  $k \times k$  ( $k$  четное), то по теореме A.6.18:

$$\mu(k) = 2\mu(k/2) + k/2,$$

так как задача расщепляется на две подзадачи порядка  $k/2 \times k/2$ , каждая из которых имеет вычислительную сложность  $\mu(k/2)$ , а дополнительные вычисления по формулам (A.14) и (A.15) требуют  $k/2$  умножений. В алгоритме БПФ удается свести исходную задачу для  $N = 2^p$  к вычислению БПФ для  $N = 1$ . При  $N = 1$  необходимо вычислить  $\hat{x}_1 = 1 \cdot x_1$ , что не требует умножений вовсе, поэтому  $\mu(1) = 0$ . Формула, удовлетворяющая приведенному выше рекуррентному соотношению, имеет вид

$$\mu(N) = \frac{1}{2} N \log_2 N.$$

Она безусловно верна при  $N = 1$ , и если она верна при  $N = k/2$ , что означает  $\mu(k/2) = (1/2)(k/2) \log_2(k/2)$ , то при  $N = k$  имеем

$$\mu(k) = 2\mu(k/2) + k/2 = 2[(1/2)(k/2) \log_2(k/2)] + k/2 = (1/2)k \log_2 k.$$

Таким образом, эта формула верна при всех  $N$  вида  $2^p$ . ■

Так как для вычисления БПФ существует хорошее программное обеспечение, то у читателя вряд ли возникнет необходимость самостоятельно программировать алгоритм БПФ. Нашей целью было пояснить математические аспекты алгоритма.

# Приложение Б.

## Теория ренормализации и фракталы Пуанкаре<sup>1</sup>

### Б.1. Теория ренормализации

Не затрагивая общую теорию бифуркаций, рассмотрим бифуркации удвоения периода. Необходимость такого рассмотрения основывается на том, что: во-первых, аттрактор Фейгенбаума положил начало новому направлению в динамике малых размерностей, называемому ренормализацией и, во-вторых, сама процедура ренормализации или универсального масштабирования (*universal scaling*), возникшая в физике (перенормируемые теории) и обработке сигналов (теория уэйвлетов), позволяет выяснить, когда и при каких условиях рассматриваемая теория обладает свойством универсальности, то есть когда самоподобие (основное свойство фракталов) и бифуркации удвоения периода, появляющиеся бесконечными каскадами в простых семействах отображений [60] (например, в квадратичном семействе), имеют нетривиальное пересечение.

Данное учебное пособие является первой попыткой совместного изложения теории фракталов и хаотической динамики. За двадцатилетие, прошедшее после открытия универсальности Фейгенбаума, теория ренормализации пополнилась новыми красивыми и нетривиальными результатами, которые и рассматриваются ниже.

Переход от циклического поведения к хаотическому называется *сценарием Фейгенбаума*. Как уже говорилось в п. 6.3, в логистическом отображении

$$x_{n+1} = f(x_n) = cx_n(1 - x_n),$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $c \in [0, 4]$ , представляющем собой квадратичное семейство, это связано с тем, что устойчивая неподвижная точка

---

<sup>1</sup>Обзор составлен редактором перевода при участии Э. Т. Кренкеля.

теряет устойчивость и порождает устойчивую орбиту периода два, которая в свою очередь теряет устойчивость и порождает устойчивую орбиту периода четыре и т. д. М. В. Якобсон [70] первый доказал существование таких каскадов в простом аналитическом семействе. Фейгенбаум в своей работе 1978 г. с помощью численных методов (на микрокалькуляторе!) независимо определил асимптотическую скорость сходимости бифуркационных значений для квадратичного семейства и обнаружил (совместно с П. Цвитановичем) явление подобия с изменением масштаба, связанное с этим процессом. Наблюдения Фейгенбаума были доказаны в работах О. Лэнфорда и М. Кампанино, А. Эпштейна с помощью ЭВМ. Состояние теории ренормализации, опирающейся на доказательства, полученные с помощью вычислений на ЭВМ, подробно описано в обзоре [71]. Очень хорошее описание сценария Фейгенбаума для квадратичного семейства содержится в статье Каданова [72], а мини-исследование по логистическому отображению с помощью математического пакета Maple [59] можно рекомендовать в качестве упражнения для получения бифуркационной диаграммы на ЭВМ.

Собственно математическая теория ренормализации со своей проблематикой и строгими доказательствами оформилась после появления статей А. Дуади и Дж. Хаббарда и Д. Сулливана [73] в середине 80-х, когда идеи голоморфной динамики, теории Тейхмюллера и гиперболической геометрии проникли в эту область. Современное состояние этой теории отражено в книгах Кертиса МакМюллена [76] и [77].

Ренормализация представляет собой поиск локальной полиномиальной модели динамики. Рассмотрим эту ситуацию подробнее в контексте квадратичных полиномов.

Пусть  $f(z) = z^2 + c$ , где  $c$  принадлежит множеству Мандельброта. Итерации  $f^{(n)}$  ренормализуемы, если существуют диски  $U$  и  $V$ , содержащие начало координат, причем  $\bar{U}$  является компактным подмножеством  $V$ , такие, что (а)  $f^{(n)} : U \rightarrow V$  есть отображение второй степени и (б)  $f^{(nk)}(0) \in U$  для всех  $k > 0$ . Это означает, что, хотя  $f^{(n)}$  является полиномом степени  $2^n$ , но в подходящей окрестности критической точки  $z = 0$  оно ведет себя как полином второй степени. Отображение  $f^{(n)} : U \rightarrow V$  называется *подобным квадратичному*. Фундаментальная теорема Дуади и Хаббарда (1985 г.) утверждает, что отображение, подобное квадратичному,

топологически сопряжено с квадратичным полиномом  $g(z) = z^2 + c'$ ; условие (б) означает, что  $c'$  принадлежит множеству Мандельброта  $\mathcal{M}$  и при подходящих нормализациях единственно.

Концепция ренормализации говорит многое о самоподобии множества Мандельброта и бифуркационной диаграммы (рис. 6.9 в основном тексте) для вещественных квадратичных полиномов. Например, при увеличении белой полосы в окрестности  $c = -1,75487\dots$  (так называемого окна периода 3) бифуркационной диаграммы мы наблюдаем ровно три малые копии полной бифуркационной диаграммы. Это объясняется тем, что  $f_c^{(3)}$  ренормализуемо для всех значений  $c$  в этом окне. По мере того как  $c$  пересекает это окно, отображение  $f_c^{(3)} : U_c \rightarrow V_c$  воспроизводит полное семейство бифуркаций квадратичного полинома. В множестве Мандельброта также можно наблюдать малую гомеоморфную копию  $\mathcal{M}$  в обрамлении при  $c$ , принимающем значения в этом окне на вещественной оси.

Сказанное выше наглядно поясняет название статьи Ли и Йорка «Период три означает хаос» [29] и связывает универсальность Фейгенбаума с периодичностью Шарковского. Каскады с удвоением периода обнаруживаются и в других вещественных динамических системах (например, в экспоненциальном семействе, рассмотренном впервые М. В. Якобсоном). Собственно, в работах Фейгенбаума и Колле и Трессе [75] было предложено объяснение *универсального закона масштабирования* в однопараметрических семействах унимодальных отображений в терминах существования гиперболической неподвижной точки  $F$  оператора ренормализации  $\mathcal{R}$  с одномерным неустойчивым многообразием.

Следующий важный шаг был сделан в работе Йоккоза в начале 90-х. Эта работа установила комбинаторную жесткость всех квадратичных отображений, которые являются «по крайней мере конечно ренормализуемыми». Доказательство основывается на мощном техническом приеме, который носит название *головоломка-мозаика* (*puzzle*). Подробнее об этой технике можно прочитать в первой книге МакМюллена [77].

**Бесконечная ренормализуемость.** Квадратичный полином  $f$  является *бесконечно ренормализуемым*, если  $f^{(n)}$  ренормализуемо для бесконечно многих  $n > 1$ .

Основным примером бесконечной ренормализуемости отображения служит полином Фейгенбаума  $f(x) = x^2 - 1,401155\dots$ . В этом

случае отображение  $f^{(2)}$  является подобным квадратичному. Из этого следует, что  $f^{(2^n)}$  ренормализуемо при любом  $n \geq 1$ . Аттрактор этого отображения (аттрактор Фейгенбаума):

$$A_c = \{\text{предельные точки } f^{(n)}(0) \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Аттрактор Фейгенбаума обладает универсальным свойством масштабирования, которое физики ассоциируют с фазовыми переходами, исследуемыми уже не первое десятилетие [73].

Теорема Йоккоза формулируется следующим образом [83].

---

**Теорема Б.1.1.** Пусть  $f(z) = z^2 + c$ ,  $c \in M$  ( $M$  — множество Мандельброта). Тогда возможны два варианта:

- a)  $f$  бесконечно ренормализуемо;
- б)  $J(f)$  не допускает инвариантного поля направлений (по invariant line field), а  $M$  локально связно в точке  $c$ .

Доказательство теоремы приведено в [77]. Обычно при доказательстве теоремы Йоккоза используется техника головоломки-мозаики для  $f(z) = z^2 + i$ .

**Оператор ренормализации.** Рассмотрим вещественно-аналитическое унимодальное отображение отрезка в себя  $f : I \rightarrow I$ . Непрерывное отображение отрезка в себя называется *унимодальным*, если внутри отрезка имеется точка экстремума  $c_0$  и по обе стороны от нее отображение является строго монотонным. Д. Зингер [61] показал, что у отображений  $f$  отрезка в себя, удовлетворяющих условию отрицательности производной Шварца  $Sf < 0$ , каждая устойчивая периодическая траектория притягивает либо траекторию одного из концов отрезка, либо траекторию некоторой критической точки  $c$ , то есть такой точки, в которой  $f'(c) = 0$ . (Производной Шварца функции  $f \in C^3$  называется  $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2$ ). Отображение  $f$  является *подобным квадратичному*, если  $f(\partial I) \subset \partial I$  и  $f$  имеет единственную квадратичную критическую точку  $c_0 \in \text{int}(I)$ . Основным примером служит  $f(x) = x^2 + c$  на  $[-a, a]$  с  $f(a) = a$ . Мы неявно отождествляем линейно сопряженные отображения.

Если итерация  $f^{(p)}|L$  также является квадратичноподобной для некоторого интервала  $L$  и  $c \in L \subset I$ , то в этом случае мы можем определить *ренормализацию*  $f$  как

$$\mathcal{R}(f) = f^p|L.$$

Порядок интервалов  $L, f(L), \dots, f^{(p)}(L) = L \subset I$  определяет перестановку  $\sigma(f)$  на  $p$  символах.

Как уже говорилось выше, отображение  $f$  бесконечно ренормализуемо, если последовательность  $\mathcal{R}^n(f)$  определена для всех  $n > 0$ . Комбинаторика отображения  $f$  в этом случае отображается последовательностью перестановок  $\tau(f) = \langle \sigma(\mathcal{R}^n(f)) \rangle$ . Говорят, что  $f$  обладает *ограниченной комбинаторикой*, если имеет место только конечное число перестановок и *периодической комбинаторикой*, если  $\tau(\mathcal{R}^q(f)) = \tau(f)$  для некоторого  $q \geq 1$ .

---

**Теорема Б.1.2.** Пусть  $f : I \rightarrow I$  бесконечно ренормализуемо и обладает комбинаторикой периода  $q$ . Тогда  $\mathcal{R}^q(f) \rightarrow F$  экспоненциально при  $n \rightarrow \infty$ , где  $F$  — единственная неподвижная точка оператора ренормализации  $\mathcal{R}^q$ , обладающего такой же комбинаторикой, что и  $f$ .

Например, полином Фейгенбаума  $f(x) = x^2 - 1,4101155\dots$ , получающийся в конце каскада удвоений периода в квадратичном семействе, имеет  $\tau(f) = \langle (12), (12), (12), \dots \rangle$ . При ренормализации  $\mathcal{R}^n(f)$  сходится экспоненциально к решению функционального уравнения Цвитановича–Фейгенбаума (уравнение удвоения)

$$F \circ F(x) = \alpha^{-1} F(\alpha x).$$

Константа Фейгенбаума  $d = 4,669201609\dots$  является единственным собственным значением в разложении  $\mathcal{R}$  в  $F$ .

Для того чтобы определить скорость сходимости более полно, расширим  $f : I \rightarrow I$  до комплексно-аналитического отображения на окрестности  $I \subset \mathbf{C}$  и положим, что  $F : W \rightarrow \mathbf{C}$  обозначает максимальное аналитическое продолжение неподвижной точки ренормализации. Тогда мы обнаруживаем, что существует  $A > 1$  такое, что для любого компакта  $K \subset W$  справедливо следующее

$$\sup_{z \in K} |\mathcal{R}^n(f)(z) - F(z)| = O(A^{-n}),$$

где  $\mathcal{R}^n(f)$  соответствующим образом перенормирован.

Теперь предположим, что  $f$  имеет ограниченную комбинаторику. При итерации  $f$  все точки из  $I$ , за исключением счетного числа, притягиваются к *посткритическому множеству Кантора*

$$P(f) = \overline{\bigcup_{n>0, f'(c)=0} f^{(n)}(c)} \subset I.$$

**Теорема Б.1.3.** Пусть  $f$  и  $g$  — бесконечно ренормализуемые отображения с одной и той же ограниченной комбинаторикой. Тогда  $f|P(f)$  и  $g|P(g)$  сопряжены с гладкостью  $C^{1+\alpha}$ .

Таким образом, количественные характеристики аттрактора  $P(f)$  (такие, например, как его размерность Хаусдорфа) определяются его комбинаторикой  $\tau(f)$ .

Суллиган [74] установил сходимость  $\mathcal{R}^{nq}(f) \rightarrow F$ . Другой подход к теории ренормализации, основанный на таких понятиях как *негибкость* и *башни*, рассматривается во второй книге МакМюллена [76] и его статьях. В частности, в статье [78] приведены операторы ренормализации для гиперболических многообразий, критических отображений окружности и для диска Зигеля с золотым сечением.

## Б.2. Фракталы Пуанкаре

Рассмотрим раздел фрактальной геометрии, который имеет дело с голоморфными динамическими системами специального вида, а именно с рациональными отображениями. *Рациональное отображение*  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  является голоморфной динамической системой на сфере Римана  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ . Каждое такое отображение может быть записано в виде отношения

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_m z^m + \dots + a_0}{b_n z^n + \dots + b_0}$$

двух взаимно простых полиномов  $P$  и  $Q$ . Степень отображения  $f$  может определяться топологически или алгебраически; это число прообразов типичной точки  $z$ , или же максимальная степень  $d = \max(\deg P, \deg Q)$ . Основной задачей в динамике рациональных отображений является изучение поведения итераций

$$f^{(n)}(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(z)}_{n \text{ раз}}.$$

Любое рациональное отображение степени  $d > 1$  (именно такие отображения рассматривали Фату и Жюлиа) обладает свойствами как растяжения, так и сжатия. Например,  $f$  должно быть растягивающим в среднем, так как оно отображает сферу Римана на себя  $d$

раз. Разумеется, по отношению к сферической метрике (нормализованной так, чтобы общая площадь равнялась единице),

$$\int_{\bar{\mathbb{C}}} \|(f^{(n)})'\|^2 = d^n \rightarrow \infty,$$

так что производная от  $f^{(n)}$  имеет в среднем очень большую величину. С другой стороны,  $f$  обладает  $2d - 2$  критическими точками  $c$ , в которых  $f'(c) = 0$ . В окрестности  $c$  поведение  $f$  подобно  $z \mapsto z^n$  в окрестности нуля при некотором  $n > 1$ , то есть  $f$  — сильно сжимающее около  $c$ . Эти два обстоятельства и отвечают за сложность динамики рациональных отображений.

Чтобы описать эти свойства  $f$ , используется множество Жюлиа — область хаотической динамики и посткритическое множество  $P(f)$ , которое содержит «аттракторы»  $f$ . Множество Жюлиа может быть определено как замыкание множества *отталкивающих периодических точек*  $f$ . Точка  $z$  является *периодической*, если  $f^{(p)}(z) = z$  при некотором  $p > 0$ ; она является:

отталкивающей, если  $|(f^{(p)})'(z)| > 1$ ;  
нейтральной, если  $|(f^{(p)})'(z)| = 1$ ;  
притягивающей, если  $|(f^{(p)})'(z)| < 1$ .

Прямая орбита (то есть траектория точки  $z$  при итерациях в прямом направлении)  $O^+(z)$  периодической точки называется *циклом*, так как  $f|O^+(z)$  является циклической перестановкой.

Множество Жюлиа, кроме того, является наименьшим замкнутым подмножеством сферы таким, что  $|J(f)| > 2$  и  $f^{-1}(J) = J$ . Его дополнение  $F(f) = \bar{\mathbb{C}} - J(f)$  называется *множеством Фату* и является наибольшим открытым множеством таким, что итерации  $\langle f^{(n)}|F(f)\rangle$  образуют *нормальное семейство* [79]. Посткритическое множество  $P(f)$  является замыканием прямых орбит критических точек  $f$  (см. п. 1).

Посткритическое множество играет решающую роль по отношению к аттракторам  $f$ , что видно из следующей теоремы.

---

**Теорема Б.2.4.** *Каждый притягивающий цикл  $A$  притягивает критическую точку  $c$ .*

**Доказательство.** Пусть  $U = \{z : d(f^{(n)}(z), A) \rightarrow 0\}$  в сферической метрике;  $U$  открыта и  $f^{-1}(U) = U$ . Если  $U$  не содержит ни одной

критической точки, то  $f|U$  есть отображение накрытия, но тогда по лемме Шварца  $f$  будет изометрией для гиперболической метрики, что невозможно, так как  $A$  — притягивающий цикл. ■

Таким образом,  $A \subset P(f)$  и число притягивающих циклов ограничено числом критических точек, которое в свою очередь не пре-  
восходит  $2d - 2$ .

Эта теорема имеет как практическое, так и теоретическое значение. Например, если  $f(z) = z^2 + c$  имеет притягивающий цикл периода 100, то этот цикл легко можно представить в виде  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0)$  — несколько миллионов итераций дадут достаточную точность. (Сравните этот объем вычислений с перспективой вычисления  $1,27 \times 10^{30}$  корней уравнения  $f^{100}(z) = z$ .)

Существует несколько хороших обзоров по рациональным отображениям сферы Римана, написанных в середине 80-х [80, 81], и ряд более современных обзоров [82, 83]. Так же, как и в случае ренормализации, современная теория фрактальной геометрии оформилась после публикации Денниса Сулливана [81], в которой было установлено соответствие между *гиперболическими рациональными отображениями* и *клейновыми группами*.

Отображение  $f$  является *гиперболическим*, если выполняются условия следующей теоремы.

#### **Теорема Б.2.5.** Следующие условия эквивалентны.

- (1) Все критические точки  $f$  при итерациях стремятся к притягивающим циклам.
- (2) Отображение  $f$  является растягивающим на своем множестве Жюлиа. Это означает, что на сфере существует конформная метрика  $\rho$  такая, что  $|f'(z)|_\rho > 1$  для всех  $z \in J(f)$ .
- (3) Посткритическое множество и множество Жюлиа имеют нульевое пересечение ( $P(f) \cap J(f) = \emptyset$ ).

Что касается интересующих нас фракталов Пуанкаре, то они являются *полугиперболическими*, то есть нарушается условие (3) вышеупомянутой теоремы, и соответствуют они фуксовым группам.

До 1998 года фракталы Пуанкаре не встречались в математической литературе как самостоятельные объекты, заслуживающие тщательного рассмотрения. Они появлялись в неявном виде под названием NILF-гипотезы в следующем виде.

**Гипотеза.** Рациональное отображение  $f$  не допускает существования инвариантного линейного поля (*No Invariant Linear Field*) на своем множестве Жюлиа, за исключением того случая, когда  $f$  накрывается интегральным эндоморфизмом тора. Эта гипотеза была необходима для доказательства следующей теоремы Мане–Сада–Сулливана.

---

**Теорема Б.2.6.**  $\text{NILF} \implies \text{HD}$  (*гиперболическая плотность рациональных отображений*).

Привлекательность NILF-гипотезы заключается в том, что она смещает акцент исследования семейства *всех* рациональных отображений на эргодическую теорию *единственного* рационального отображения. Следует, однако, заметить, что эта гипотеза ничего не говорит о полуциклических рациональных отображениях, то есть о фракталах Пуанкаре.

*Инвариантное линейное поле для  $f$* , определенное на измеримом множестве  $E \subset \bar{\mathbb{C}}$ , представляет собой одномерное вещественное подпространство  $L_z$  в касательном пространстве  $T_z \bar{\mathbb{C}}$  для всех  $z \in E$  таких, что:

- (1)  $E$  обладает положительной площадью;
- (2)  $f^{-1}(E) = E$ ;
- (3) наклон  $L_z$  изменяется измеримо по отношению к  $z$ ;
- (4) производная  $f'$  отображает  $L_z$  в  $L_{f(z)}$  для всех  $z$ , принадлежащих  $E$ .

Напомним, что линейное поле (или поле линейных элементов) — это локальный неориентированный вариант векторного поля, нигде не обращающегося в нуль. Если  $E \subset J(f)$ , то говорят, что отображение  $f$  допускает инвариантное линейное поле на его множестве Жюлиа. Таким образом, множество Жюлиа должно обладать положительной мерой для того, чтобы служить носителем инвариантного линейного поля.

Совсем недавно МакМюллен [85] дал определение *геометрически конечного* рационального отображения.

Рациональное отображение  $f$  является геометрически конечным, если  $|P(f) \cap J(f)| < \infty$  или, что равносильно, если каждая критическая точка в множестве Жюлиа является предпериодической. Это условие исключает из рассмотрения диски Зигеля и кольца Эрмана,

но допускает параболические циклы. Если  $f$  геометрически конечно, то  $J(f) = \bar{C}$  или размерность Хаусдорфа множества Жюлиа меньше 2. Из сказанного следует, что фракталы Пуанкаре в широком смысле слова могут быть определены как множества Пуанкаре–Жюлиа, получаемые в результате итерирования геометрически конечных  $f$ .

Фракталы Пуанкаре в узком смысле представляют собой множества Пуанкаре–Жюлиа, получаемые в результате итерирования рациональной функции Пуанкаре  $f$ :

$$f_{(g_2, g_3)}(z) = \frac{z^4 + \frac{1}{2}g_2 z^2 + 2g_3 z + \frac{1}{16}g_2^2}{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

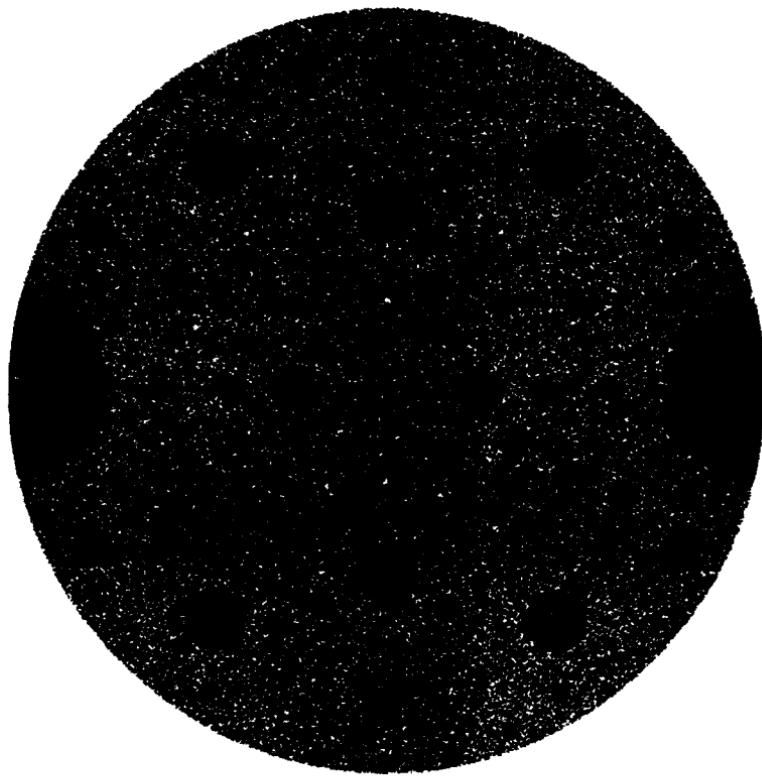
Эта функция легко может быть получена из теоремы сложения для  $\varphi$ -функций Вейерштрасса [86]. Именно итерации этой функции при  $g_2 = 4$ ,  $g_3 = 0$  впервые рассматривались Латте [87]. На рис. Б.1 приведен фрактал Пуанкаре–Жюлиа, полученный итерацией по  $z$  функции  $f$ , при указанных значениях параметров  $g_2$ ,  $g_3$  (пример Латте). На рис. Б.2, Б.3 и Б.4 приведены изображения фракталов Пуанкаре для значений параметров:  $g_2 = 1$ ,  $g_3 = 0$  (лемнискатный случай),  $g_2 = -1$ ,  $g_3 = 0$  (квазилемнискатный случай) и  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = -1$  (квазиэвиангмонический случай).

Хотя пример Латте был известен уже давно и часто приводился в формулировке NILF-гипотезы, исследование функции Пуанкаре в современном понимании фрактальной геометрии началось с работы Эрмана [84]. Очевидно, что функция Пуанкаре геометрически конечна (полугиперболична), то есть:

- пересечение множества Жюлиа с посткритическим множеством непусто;
- множество Жюлиа равно всей сфере Римана;
- размерность Хаусдорфа множества Жюлиа меньше 2.

Фракталы Пуанкаре–Мандельброта получаются в результате итерирования функции Пуанкаре по параметрам  $g_2$ ,  $g_3$  при постоянном значении  $z$ . На рис. Б.5 изображен фрактал Пуанкаре–Мандельброта при  $z = 1$ .

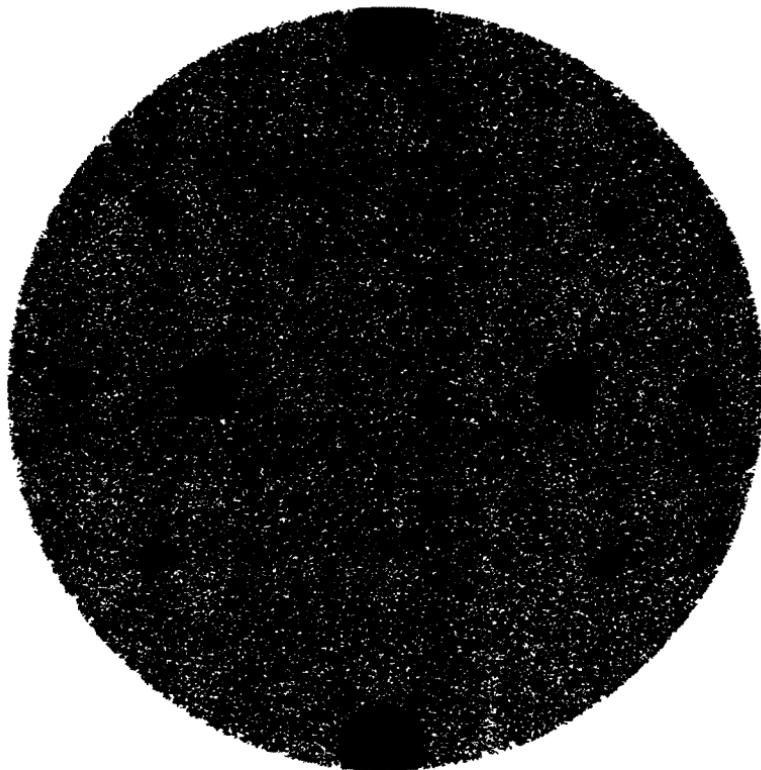
Характерным свойством фракталов Пуанкаре является то, что множество критических точек  $C$  содержит 6 точек, из которых три отталкивающие и три притягивающие, причем при каждой итерации они меняют свой характер на противоположный. Исследование фракталов Пуанкаре представляется заслуживающим внимания по



**Рис. Б.1.** Пример Латте.  $g_2 = 4, g_3 = 0$

двум причинам. Во-первых, функция Пуанкаре описывает двухпараметрическое аналитическое семейство и, следовательно, позволяет исследовать  $\vartheta$ -универсальность в отличие от 1-универсальности Фейгенбаума. Сценарий удвоения периодов  $\wp$ -функции Вейерштраса позволяет поставить вопрос о нахождении оператора ренормализации в этом случае, а также в более широком контексте для конечногеометрических рациональных отображений.

Во-вторых, итерации функции Пуанкаре описывают динамику инволютивных псевдоаносовских диффеоморфизмов поверхностей Клейна–Пуанкаре. Неклассические поверхности Клейна — это поверхности с краем и со сменой ориентации [88]. Поэтому интересно связать топологическое описание поверхностей Клейна–Пуанкаре со свойствами симметрии функции Пуанкаре. Если в первом направлении можно пока сделать только общие утверждения, что



**Рис. Б.2.** Лемнискатный случай

в случае 2-универсальности основными инструментами исследования служат однолистные функции (вместо унимодальных в случае 1-универсальности), квадратичные дифференциалы и пространства Тейхмюллера поверхностей Клейна–Пуанкаре (отрицательность шварциана и в случае 2-универсальности по-прежнему играет важную роль), то по второму направлению можно сказать много больше.

Исследование свойств симметрии функции Пуанкаре было начато в [89]. На рис. Б.6 приведен начальный этап построения односторонней поверхности, основанный на принципе симметрии Шварца. Этот рисунок очень напоминает рисунки Морица Эшера, но на самом деле представляет собой компактное (точнее компактифицированное) многообразие неотрицательной кривизны, соответствующее поверхностям Клейна–Пуанкаре. Естественно задать вопрос: какой вид

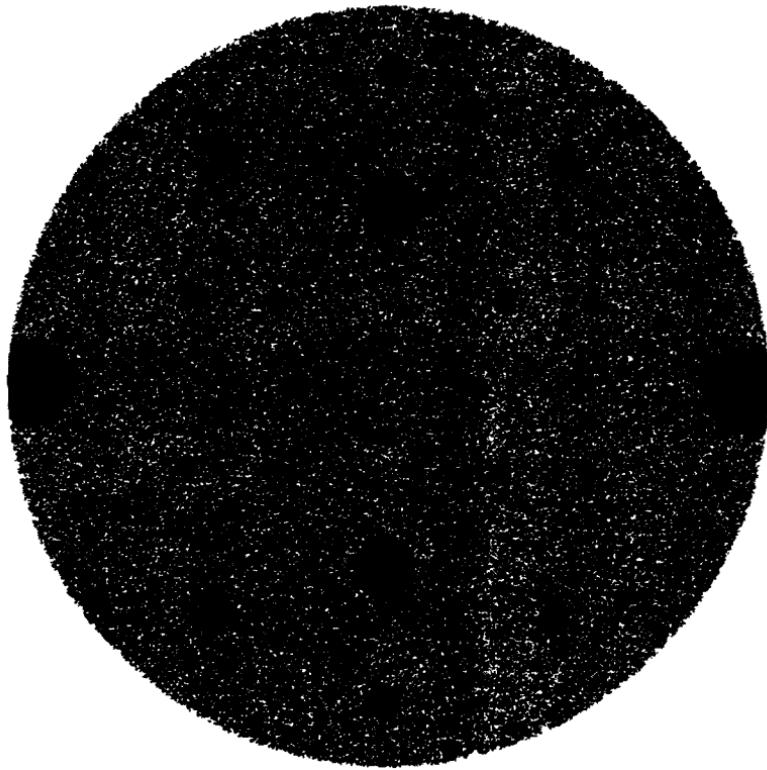


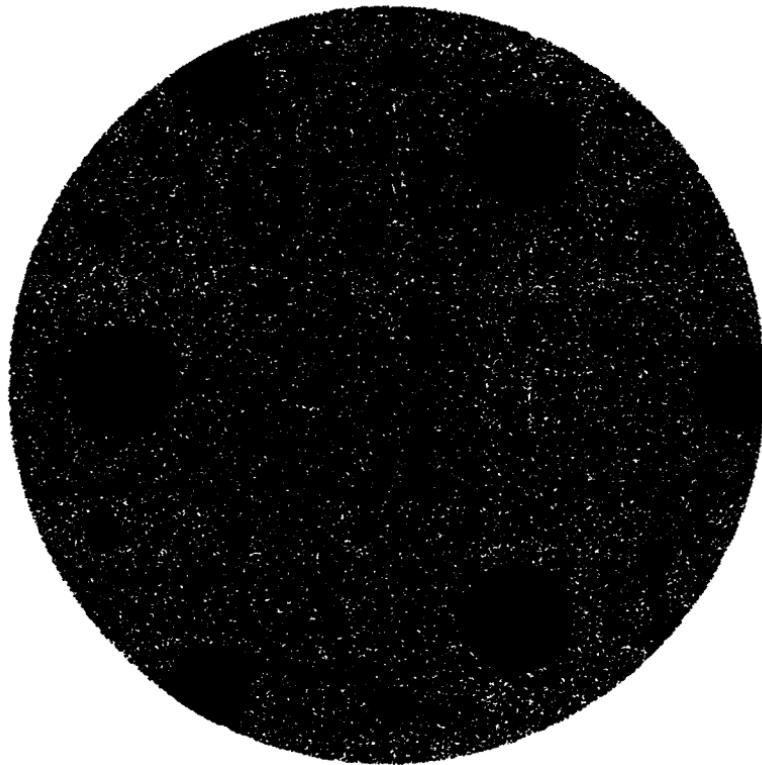
Рис. Б.3. Квазилемнискатный случай

имеет фундаментальная группа этого многообразия? Оказывается, что это группа классов отображений с антиголоморфной инволюцией или модулярная группа поверхности  $S$  Клейна–Пуанкаре, которую будем обозначать в дальнейшем  $M(0, 4|4)$ . Хотя изучение подобных групп ведется уже давно, но новый всплеск интереса к ним связан с появлением работ Хэтчера–Терстона и Харера [90]. С этими же группами связаны недавние исследования Маскита и Мин Чена [91].

Группа  $M(0, 4|4)$  является бесконечной конечнопредставимой группой фуксова типа. Вот как выглядит ее представление:

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 | c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_4^2, c_5^2, c_6^2, c_7^2, c_8^2, (c_1c_2)^2, (c_2c_3)^3, (c_3c_4)^2, (c_4c_5)^2, (c_5c_6)^2, (c_6c_7)^6, (c_7c_8)^2, (c_8c_1)^3).$$

Эсуществляя стандартную процедуру подъема с учетом антиголоморфной инволюции, получаем следующее представление нетриви-



**Рис. Б.4.** Квазиэквиангмонический случай

альных пар образующих этой группы в виде дробно-линейных подстановок:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - z, & C_2 &= 1 - \bar{z} \\ C_3 &= \frac{1}{\bar{z}}, & C_4 &= -\frac{1}{\bar{z}} \\ C_5 &= -\frac{1}{z}, & C_6 &= \frac{1}{z} \\ C_7 &= \frac{\bar{z}}{z-1}, & C_8 &= \frac{z}{z-1}. \end{aligned}$$

Существует еще топологически тривиальная пара  $z$  и  $-\bar{z}$ . Под антиголоморфной инволюцией в данном случае понимается переход от  $z$  к  $-\bar{z}$ . В результате компьютерной проверки на системе Maple было подтверждено, что при дробно-линейных подстановках аргумента  $z$  в указанных выше степенях функция Пуанкаре оставалась неизменной. Таким образом, функция Пуанкаре является *инволютивно-модулярной автоморфной функцией* относительно действия группы  $M(0, 4|4)$ . Группа  $M(0, 4|4)$  является полугиперболической и «непри-

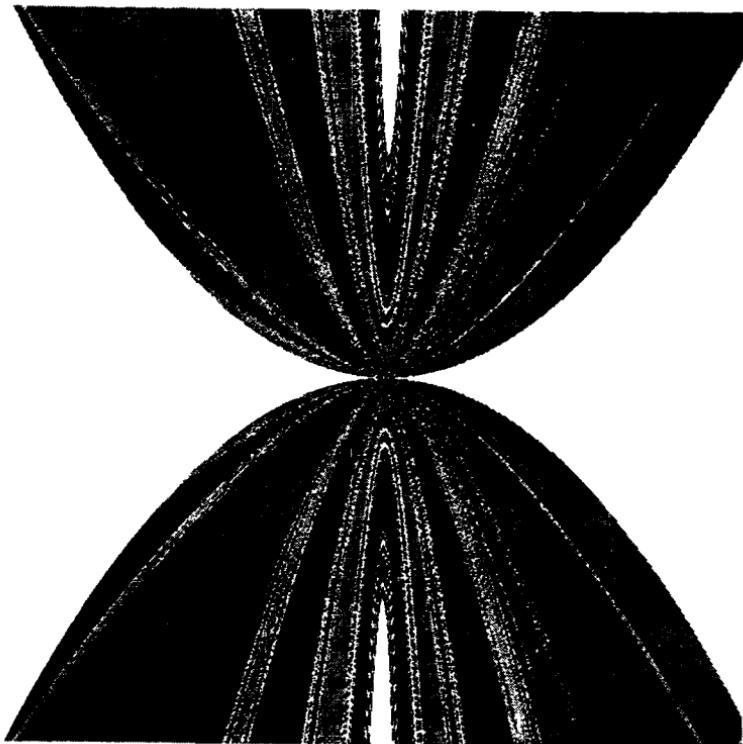


Рис. Б.5. Фрактал Пуанкаре–Мандельброта,  $z = 1$

чесываемой» (по выражению Уильяма Терстона). Группе  $M(0, 4|4)$  соответствует так называемый  $BR(S)$  комплекс.

Пространство деформаций группы  $M(0, 4|4)$  собственно и представляет собой пространство Тейхмюлера поверхностей Клейна–Пуанкаре  $T_S$ . Оно накрывает пространство Клейна–Пуанкаре. В таком виде мы сталкиваемся с так называемой проблемой модулей, исследование которой начал Бернгард Риман в 1857 г.

Пространство модулей для группы  $M(0, 4|4)$  и пространство Тейхмюлера представляют собой некомпактные полугиперболические многообразия, которые допускают компактификацию и сводятся к компактным полугиперболическим многообразиям и в итоге к  $BR(S)$  комплексу, который назовем *комплексом типа Хэтчера–Терстона–Харера*. С чисто математической точки зрения надо указать явную формулу для кэлеровой формы Вейля–Петерсона [90] на

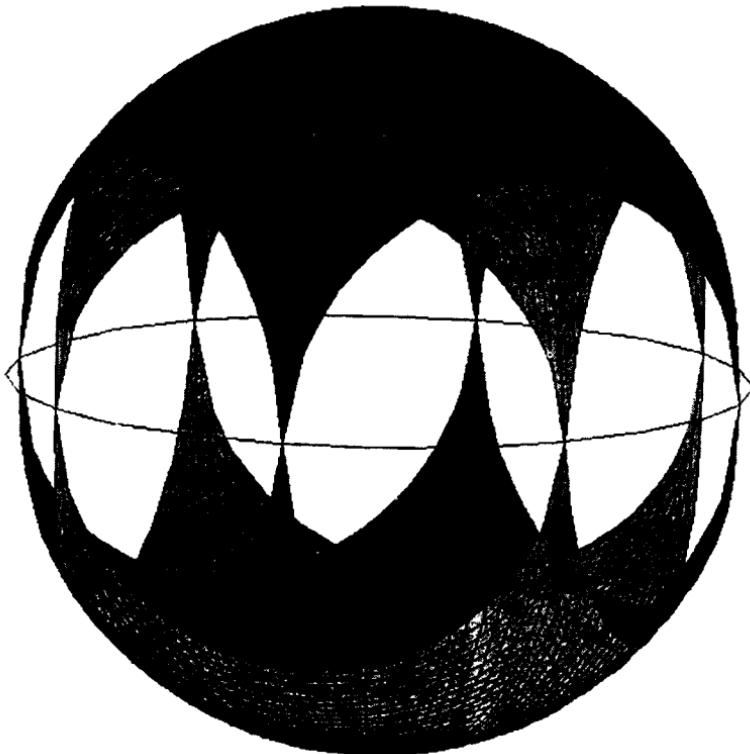


Рис. Б.6. «Рисунок Морица Эшера»

$T_S$  и доказать теорему о конечности объема Вейля–Петерсона про странства модулей проколотых инволютивных симметризованных бутылок Клейна.

С топологической точки зрения фракталы Пуанкаре являются вещественно–аналитическими уэйвлетами. Это следует из совместного использования системы образующих  $C_1 – C_8$  в качестве составляющих СИФ и теоремы Хатчинсона [92].

# Список литературы

1. R. J. Adier, *The Geometry of Random Fields*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
2. David Assaf, IV, & Steve Gadbois, *Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 9, 1992, p. 865.
3. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, & P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4, 1992, pp. 332–334.
4. Michael Bamsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
5. R. G. Bartle & D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Sec. Ed., John Wiley & Sons, New York, 1992.  
*См. также:* Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: Изд-во МФТИ, 1997.
6. Arthur Cayley, *The Newton-Fourier Imaginary Problem*, American Journal of Mathematics, Vol. 2, 1879, p. 97.
7. Pierre Collet & Jean-Pierre Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston, 1980.
8. John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Sec. Ed., Springer-Verlag, New York, 1978.  
*См. также:* Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1985.
9. C. Davis & D. E. Knuth, *Number Representations and Dragon Curves*, Journal of Recreational Mathematics, Vol. 3, 1970, pp. 66–81 and 133–149.
10. Morris H. DeGroot, *Probability and Statistics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1975.
11. Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Sec. Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
12. Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1993.
13. G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.

14. Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
15. Pierre Fatou, *Sur les Equations Fonctionnelles*, Bulletin Société. Math. France, Vol. 47, 1919, pp. 161–271.
16. A. Fournier, D. Fussell, & L. Carpenter, Computer Rendering of Stochastic Models, *Communications of the ACM*, Vol. 25, No. 6, 1982, pp. 371–384.
17. James Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Viking, New York, 1987.
18. Ary Goldberger, Fractal Mechanisms in the Electrophysiology of the Heart, *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, Vol. 11, No. 2, 1992, pp. 47–52.
19. Denny Gulick, *Encounters with Chaos*, McGraw-Hill, New York, 1992.
20. Felix Hausdorff, Dimension und Ausseres Mass, *Mathematische Annalen*, Vol. 79, 1919, pp. 157–179.
21. John G. Hocking & Gail S. Young, *Topology*, Dover, New York, 1988.
22. Witold Hurewicz & Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941. (*Имеется перевод*: Гуревич В., Волмэн Г. *Теория размерности*. — М.: ИЛ, 1948.)
23. John E. Hutchinson, Fractals and Self Similarity, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol. 30, No. 5, 1981, pp. 713–747.
24. E. Atlee Jackson, *Perspectives in Nonlinear Dynamics*, Vols. 1–2, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
25. Gaston Julia, Memoire sur l’Itération des Fonctions Rationnelles, *Journal des Mathematiques Pures et Appliquées*, Vol. 4, 1918, pp. 47–245.
26. S. Karlin & H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Sec. Ed., Academic Press, New York, 1975.  
*См. также*: Вентцель А. Д. *Курс теории случайных процессов*. — М.: Наука, 1996.
27. A. N. Kolmogorov, Wienersche Spiralen und Einige Interessante Kurven im Hilbertschen Raum, *C. R. (Doklady) Acad. URSS (N.S.)*, Vol. 26, 1940, pp. 115–118.
28. C. Knudsen, Chaos Without Periodicity, *American Mathematical Monthly*, Vol. 101, 1994, pp. 563–565.

29. Tien-Yien Li & James A. Yorke, Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, Vol. 82, 1975, pp. 985–992.
30. Benoit B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.
31. Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
32. Benoit B. Mandelbrot, Comment on Computer Rendering of Fractal Stochastic Models, *Communications of the ACM*, Vol. 25, No. 8, 1982, pp. 581–583.
33. Benoit B. Mandelbrot & J. W. Van Ness, Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM Review*, Vol. 10, No. 4, 1968, pp. 422–437.
34. P. C. Matthews & S. H. Strogatz, Chaotic Mappings and Probability Distributions, *The College Math. Journal*, Vol. 22, No. 1, 1991, pp. 45–47.
35. H.-O. Peitgen & P. H. Richter, *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1986. (*Имеется перевод*: Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.)
36. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, & D. Saupe, *Fractals for the Classroom*, Parts 1–2, *Introduction to Fractals and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1992.
37. Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, & Dietmar Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York, 1992.
38. Heinz-Otto Peitgen & Dietmar Saupe, Editors, *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York, 1988.
39. P. Prusinkiewicz & J. Hanan, *Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants*, *Lecture Notes in Biomathematics*, No. 79, Springer-Verlag, New York, 1989.
40. C. S. Rees, S. M. Shah, & Č. V. Stanojević, *Theory and Applications of Fourier Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1981.
41. H. L. Royden, *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan, New York, 1988.
42. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Sec. Ed., McGraw-Hill, New York, 1964. (*Имеется перевод*: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966.)

43. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя. УМЖ, 1964, т. 16, № 1, с. 61–71.
44. Allan J. Sieradski, An Introduction to Topology and Homotopy, PWS-Kent, Boston, 1992.
45. R. F. Voss, Random Fractals: Characterization and Measurement, Scaling Phenomena in Disordered Systems, Plenum Press, New York, 1985.

## Литература, добавленная при переводе

46. Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. — М.: Мир, 1993.
47. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. — М.: Мир, 1986.
48. Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. — М.: Мир, 1994.
49. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. — М.: Мир, 1990.
50. G. Nicolis, Introduction to Nonlinear Science, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
51. G. L. Baker, J. P. Gollub, Chaotic Dynamics, an Introduction, Sec. Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
52. Мун Ф. Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990.
53. F. C. Moon, Chaotic and Fractal Dynamics, an Introduction for Applied Scientists and Engineers, John Wiley & Sons, New York, 1992.
54. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
55. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.
56. Странные аттракторы. Серия «Математика: новое в зарубежной науке», № 22. — М.: Мир, 1981.
57. Морозов А. Д., Драгунов Т. Н., Бойкова С. А., Малышева О. В. Инвариантные множества динамических систем в Windows. — М.: УРСС, 1998.

58. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2000.
59. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. — М.: Мир, 1997.
60. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
61. D. Singer, Stable orbits and bifurcations of maps of the interval, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 35, No. 2, 1978, pp. 260–267.
62. Боуэн Р. Методы символической динамики. Серия «Математика: новое в зарубежной науке». — М.: Мир, 1979.
63. Системы фазовой синхронизации. Под ред. Шахгильдяна В. В. и Белюстиной Л. Н. — М.: Изд-во «Радио и связь», 1982.
64. S. M. Ulam, J. von Neumann, On the combinations of stochastic and deterministic processes, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 53, No. 11, p. 1120.
65. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.
66. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
67. Хайтун С. Д. Механика и необратимость. — М.: Изд-во «Янус», 1996.
68. Циллис К. Об измерении фрактальных размерностей по физическим свойствам. // В сб. статей «Фракталы в физике». — М.: Мир, 1988.
69. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. — М.: Наука, 1984.
70. Якобсон М. В. О свойствах динамических систем, порождаемых отображениями вида  $x \rightarrow Axe^{-\beta x}$ . // В кн.: Моделирование биологических сообществ. — Владивосток: ДВНЦ, 1975.
71. Вул Е. Б., Синай Я. Г., Ханин К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм. УМН, 1984, т. 39, вып. 3, с. 3–37.
72. Каданов Л. П. Пути к хаосу. // В кн.: Физика за рубежом. — М.: Мир, 1985, с. 9–32.
73. D. Sullivan, Bounded structure of infinitely renormalizable mappings, in P. Cvitanovic (ed.), Universality in Chaos, Sec. Ed., Adam Hilger, Bristol, 1989.

74. D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms in dynamics, topology and geometry, Proc. ICM–86, Berkley, v. II, Amer. Math. Soc., 1987, pp. 1216–1228.
75. C. Tresser & P. Coullet, Iteration d'endomorphismes et groupe de renormalisation, C. R. Acad. Sc. Paris 287A, 1978, pp. 577–580.
76. C. T. McMullen, Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle, Princeton University Press, 1996.
77. C. T. McMullen, Complex dynamics and renormalisation, Princeton University Press, 1994.
78. C. T. McMullen, Rigidity and inflexibility in conformal dynamics, Documenta Mathematica, Extra Volume, 1998, pp. 1–100.
79. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. — М.: НКТП СССР, 1936.
80. Paul Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bulletin Am. Math. Soc., Vol. 11, No. 1, July 1984, pp. 85–141.
81. Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина. УМН, 1986, т. 41, вып. 4, с. 35–95.
82. Walter Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, Bulletin Am. Math. Soc., Vol. 29, No. 2, October 1993, pp. 151–188.
83. C. T. McMullen, Frontiers in complex dynamics, Bulletin Am. Math. Soc., Vol. 31, No. 2, October 1994, pp. 155–171.
84. M. R. Herman, Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann, Bull. Soc. Math. France, Vol. 112, 1984, pp. 93–142.
85. C. T. McMullen, Geometrically finite rational maps, Preprint, 1998, pp. 1–63.
86. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968.
87. S. Lattes, Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. 166, 1918, p. 26–28.
88. M. Seppala, T. Sorvali, Geometry of Riemann surfaces & Teichmuller spaces, North-Holland, 1992.
89. Кренкель Э. Т. Сжатие сигналов с применением теории фракталов. МТУСИ, 1996.
90. Иванов Н. В. Комплексы кривых и модулярные группы Тейхмюлера. УМН, 1987, т. 42, вып. 3, с. 49–91.

91. Min Chen, A fundamental domain for the modular group of **Riemann** surfaces of type  $(0, n)$ , Ann. Acad. Sci. Fenn., Mathematica, Vol. 23, 1998, pp. 275–281.
92. P. Jorgensen, S. Pedersen, Harmonic analysis of fractal measures induced by representation of a certain  $C^*$ -algebra, Bulletin Am. Math. Soc., Vol. 29, No. 2, October 1993, pp. 228–234.

# Предметный указатель

- адрес 179  
алгоритм  
  HCALC 274  
L-система 25  
WOR2SCR 87  
ветвь 118  
времени убегания 221  
ДСИФ 105  
заполняющее множество  
  Жюлиа 220  
кривая ФБД 292  
МНК-прямая 139  
множество Мандельброта 235  
обратной итерации 229  
паутинная диаграмма 71, 152  
поверхность ФБД 294  
размерность Минковского 140  
размерность Минковского II 143  
РСИФ 106  
срединная кривая 281  
срединная поверхность 283  
срединное смещение 266  
тертл-графика 32  
аттрактор 12, 96
- бассейн (область) притяжения 226  
бифуркация 155, 160  
бронновское движение 256  
  бронновская поверхность 263  
  величина приращений 261  
  закон дисперсии 260  
  марковское свойство 260  
  недифференцируемость 262  
  независимые приращения 260  
  размерность реализации 262  
  самоподобие 262  
  срединное смещение 266  
  стационарность 260
- гауссовская кривая 258  
гауссовская случайная величина 258  
гауссовское случайное блуждание 257
- диаграмма орбит 160  
область хаоса 161  
периода 3 окно 164
- Жюлиа множество 14, 218  
орбиты 226  
характеристические свойства 227
- Кантора множество (пыль) 12, 38  
мощность 40, 42  
размерности  $d \approx 0,9542\dots$  43  
размерности единица 44  
свойства 39  
троичное представление 42  
коммутативная диаграмма 192  
Коши-Шварца неравенство 55
- Мандельброта множество 14, 232  
кардиоида 241  
критическая орбита 241  
обрамления 244
- мера  
  d-мера 110, 317  
  внешняя 317  
  Лебега 38
- метрика 63  
  р-метрика 64  
  Евклида 63  
  манхэттенская 63  
  полная 73, 297  
  Хаусдорфа 92  
  эквивалентная 65, 133

- метрическое пространство  
 компактное 299  
 полное 73, 297
- мировые координаты 85
- множество  
 векторная сумма 58  
 внутренность 60, 64  
 вполне несвязное 42, 61, 64, 317  
 вполне ограниченное 299
- граница 60  
 диаметр 59, 64  
 замкнутое 60, 65  
 замыкание 60, 65  
 изолированная точка 61  
 компактное 42, 61, 65, 299
- компоненты 61, 64  
 ограниченное 59, 65  
 открытое 57, 64  
 относительно замкнутое 301  
 относительно открытое 301  
 прямое произведение 58  
 прямое произведение 58  
 самоподобное 11, 15, 132  
 связное 61, 64  
 совершенное 42, 61, 64  
 точная верхняя грань 58  
 точная нижняя грань 58
- де Моргана формулы 56
- неподвижная точка 69, 151  
 отталкивающая 151  
 притягивающая 151
- непрерывности инварианты 300
- Ньютона метод 69, 75, 163, 248
- орбита 150  
 в конечном итоге  
 периодическая 151  
 в множестве Жюлиа 226
- множество захвата 194  
 периодическая 151  
 противоположная 200
- отображение  
 полуопрятченное 193
- сжимающее 68  
 сопряженное 192  
 тентообразное 173
- топологическое  
 (гомеоморфизм) 192, 303
- периодическая точка 226  
 нейтральная 226  
 отталкивающая 226  
 притягивающая 226  
 сверхпритягивающая 226
- преобразование  
 изометрическое 79  
 Липшица 68  
 подобия 82, 132  
 Фурье дискретное 289  
 Хатчинсона 99
- размерность 11, 15, 127, 315, 317  
 клеточный метод 139  
 Минковского 127, 129, 133  
 подобия 15, 127  
 топологическая 315  
 точечный метод 142  
 точность вычисления 144  
 фрактальная 15, 127  
 Хаусдорфа 127, 317
- сдвиг 176  
 на символном  
 пространстве 190  
 обратный 176
- Серпинского ковер 19, 21, 96
- система счисления  
 по основанию  $N$  40
- СИФ  
 вполне несвязная 204  
 детерминированная 96, 103  
 подъем 207  
 рандомизированная 96, 106, 215  
 случай наложения 207  
 случай чистого касания 207  
 со сгущением 112  
 сходимость 216  
 таблица коэффициентов 111

- сходимость 297  
 Коши критерий 297  
 равномерная 298
- топологические инварианты 300
- удвоение периода 155, 159
- Фейгенбаума константа 162  
 Фейгенбаума точка 161  
 фрактал 10
  - детерминированный 96, 253
  - определение 127
  - самоподобный 15, 132
  - случайный 253
 фрактальное броуновское
  - движение 12, 254, 269
  - величина приращений 273
  - зависимость приращений 272
  - закон дисперсии 271
  - недифференцируемость 273
  - немарковское свойство 272
  - размерность реализации 273
  - самоподобие 273
  - срединное смещение 279
  - стационарность 271
  - усредненная константа
    - Гельдера 279
  - фрактальная броуновская
    - поверхность 276
- хаос 10, 147, 169
  - детерминированный 169
  - и аттракторы 200
  - и множества Жюлиа 246
  - и фракталы 200
  - игра «Хаос» 98, 102, 215
  - плотность периодических
    - точек 170
  - строгий 170
  - существенная зависимость
    - от начальных условий 170
  - транзитивность 170
- Хаусдорфа  $d$ -мера 131, 317  
 Хаусдорфа метрика 92, 94, 305
  - и дилатации 93, 310
 полнота 312
- шар
  - $d$ -мера 128
  - в  $(X, d)$  64
  - в  $\mathbb{R}^n$  57
- Шварца производная 160
- экранные координаты 85
- L-система 23
  - ветвление 30, 31
  - детерминированная 24
  - порождающие правила 34
  - снежинка Коха 25

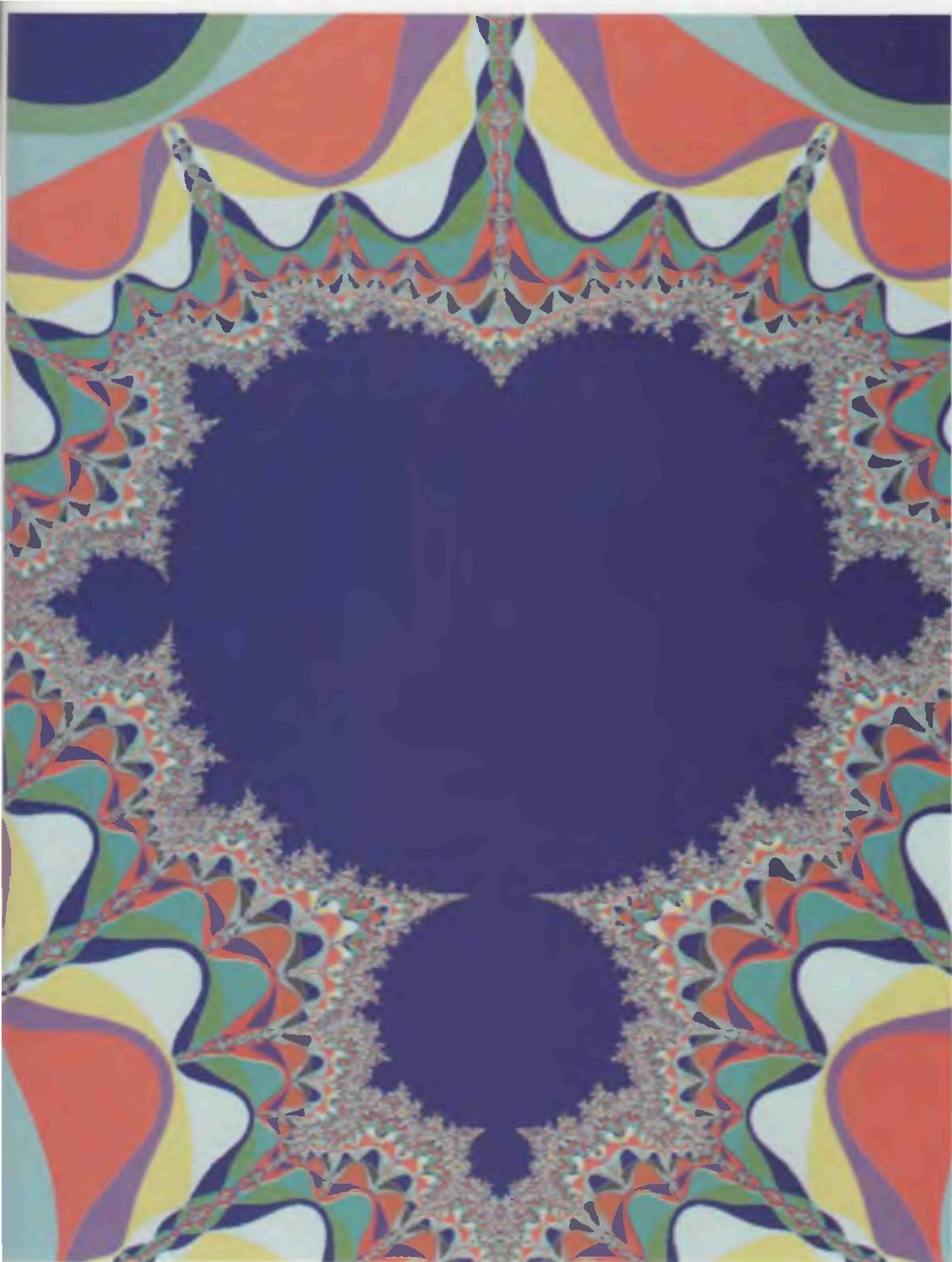


Рис.1 Область 3-периодичности множества Мандельброта (см.рис 8.12 и 8.13)

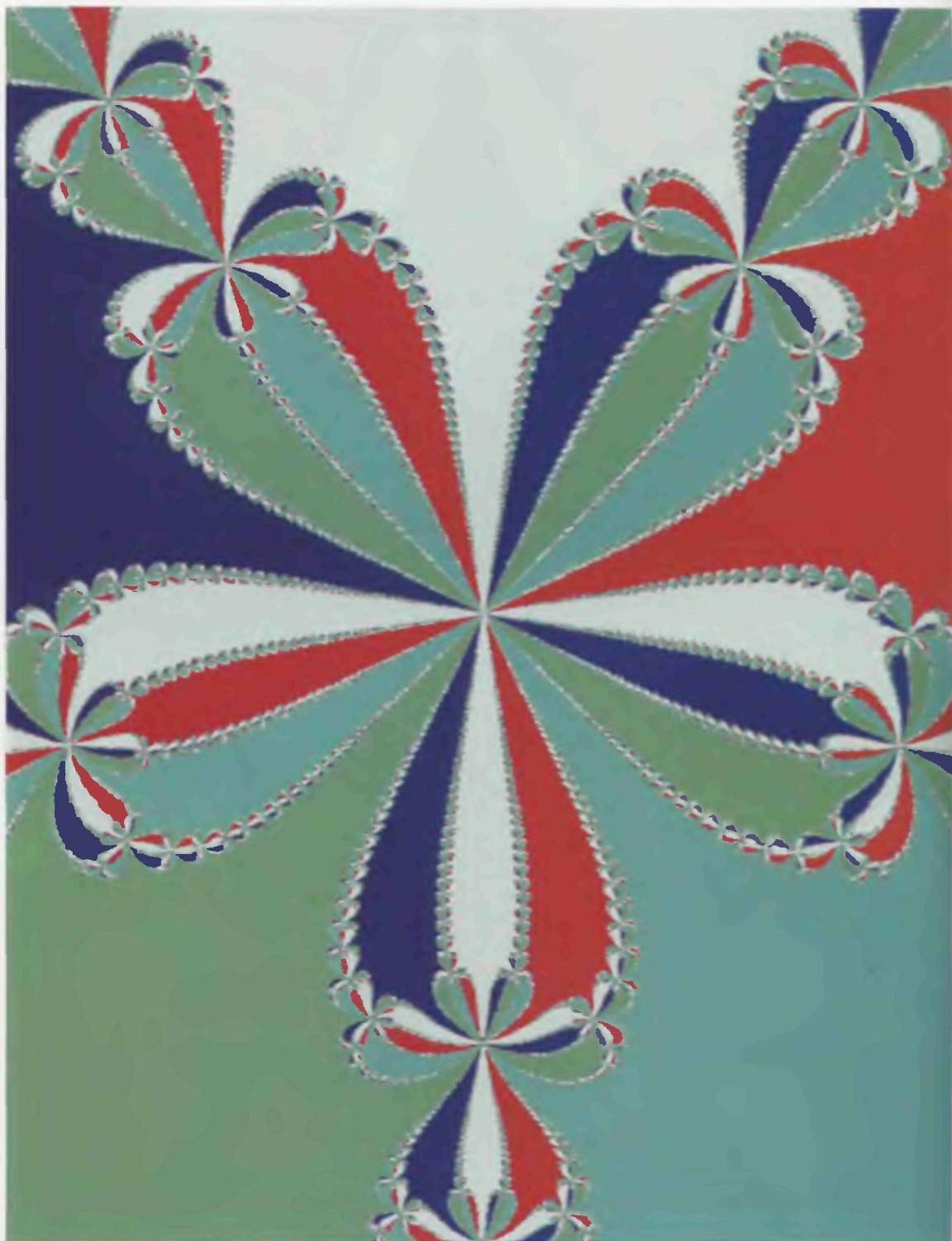


Рис.2 Бассейны притяжения для корней пятой степени из единицы (ср.рис.8.20)



Рис.3 Фрагмент множества Жюлия для  $z^2 - 1$  (ср.рис.8.1)

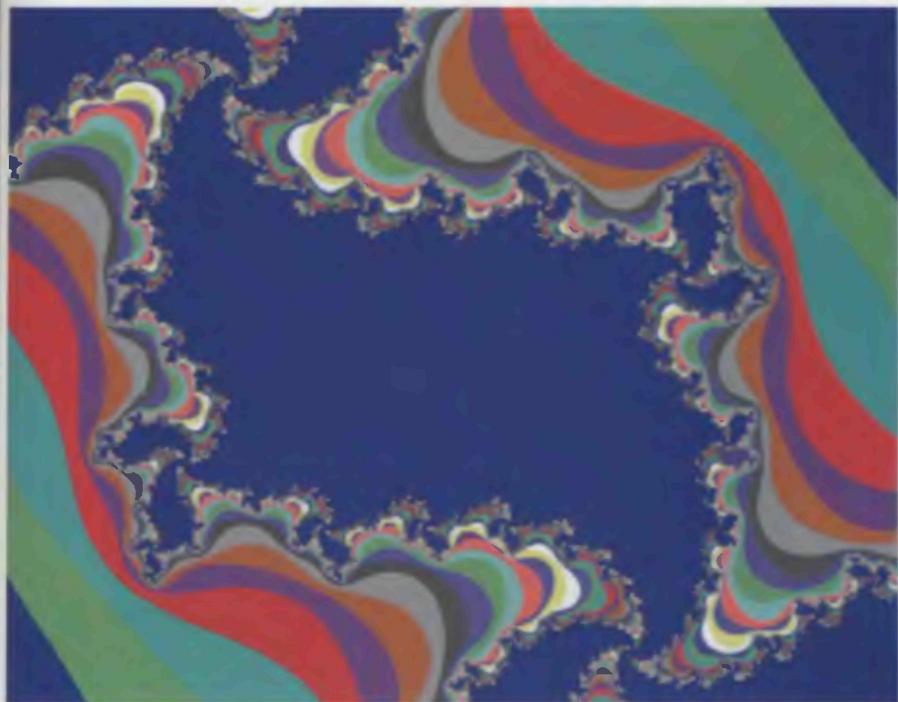


Рис.4 Фрагмент множества Жюлия для  $z^2 - 0,2 + 0,75i$  (ср.рис.8.2)



Рис.5 Спирали, полученные с помощью СИФ

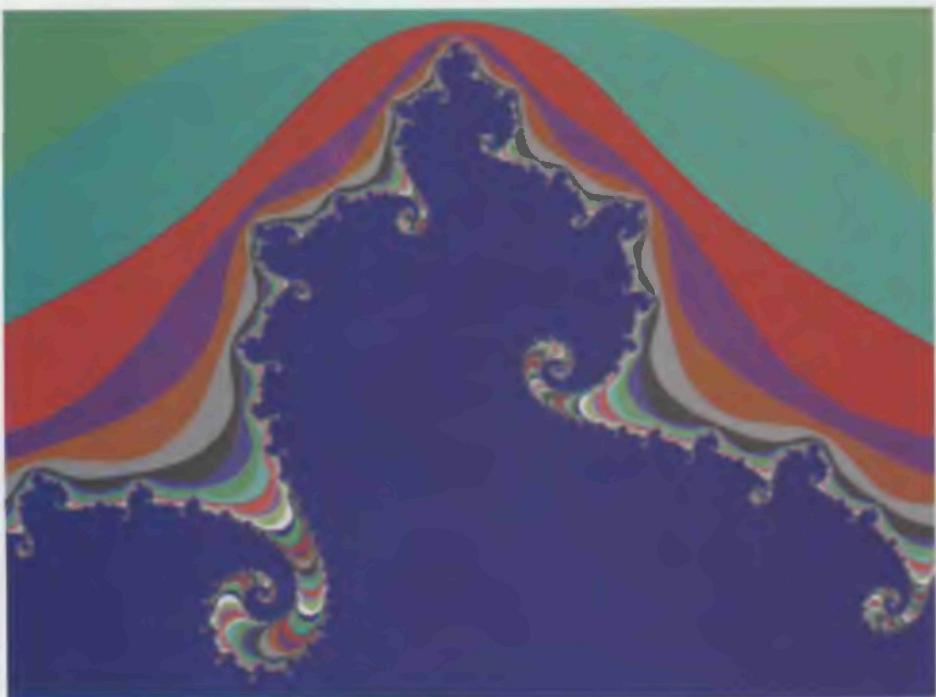


Рис.6 Фрагмент множества Жюлия для  $z^2 - 0,7382 + 0,0827i$  (ср.рис.8.8)