GUSTAVO SERGIO BIONDO

CÁLCULO EN EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Colección **Ciencias y Tecnología**

Editorial de la Universidad Nacional del Sur
Santiago del Estero 639 |B8000HZK Bahía Blanca | Argentina
www.ediuns.com.ar | ediuns@uns.edu.ar
Facebook: Ediuns | Twitter: EditorialUNS

L U A Libro
Universitario
Argentino

Queda hecho el depósito que establece la ley n° 11723
Bahía Blanca, Argentina, abril de 2020.

No se puede conocer el todo sin conocer las partes y
no se pueden conocer las partes sin conocer el todo
Blas Pascal

ÍNDICE

PRÓLOGO

En este libro, a diferencia de los anteriores, parto de la premisa de que *el estudio del valor del dinero en el tiempo* tiene cuatro etapas bien definidas: se parte de una revisión de conocimientos, aplicaciones y vocabulario relacionados con la matemática y el cálculo financiero, prosigue con el análisis pormenorizado de las medios con que cuenta el analista financiero, continúa, tercera parte, con la aplicación de esas herramientas en los modelos a aplicar y finaliza con el enunciado y resolución de trabajos prácticos o ejercicios.

Así, entonces, esta obra se inicia, *cuatro primeros capítulos,* con una revisión de conceptos específicos de la matemática, de las propiedades y operatoria de las funciones exponenciales y continuas, del costo de oportunidad del dinero y de los factores intervinientes en su operatoria.

En la *segunda parte*, que toma a los *capítulos quinto a décimo primero*, se tratan conceptos y operatoria de los instrumentos a utilizar en el desarrollo de los modelos que, en su conjunto, conforman la tercera parte, a saber: generación de interés, tasas de interés, quita por descuentos, tasa de descuento, factores de capitalización y actualización, equivalencia financiera y finaliza con un tratamiento pormenorizado de la valorización de más de un capital en el tiempo, o sea “rentas”.

Este tercer tramo, comprendido en los *capítulos décimo segundo a décimo quinto*, está conformado por el desarrollo de modelos a aplicar en el Cálculo Financiero. Se inicia con la explicación de los sistemas de amortización, incluyendo en ellos la operatoria de eventuales cambios en las condiciones pactadas de financiación, luego el tratamiento de la operatoria denominada “interés directo” para culminar con un tema para el cual es necesario tener un claro conocimiento y práctica de la totalidad de los conceptos, de las herramientas y de la operatoria de las rentas: *es el análisis de* “Bonos” *o* “Títulos Valores” *que no es otra cosa más que el estudio de los flujos de fondos*.

Trabajos prácticos, ejercicios o ejemplos que hacen a la *cuarta y final etapa* se exponen en el *capítulo décimo noveno*.

Previo al inicio del tramo final, trabajos prácticos, se tratan dos temas en particular, a saber: en el *capítulo décimo sexto* el caso de “Interés sin capitalización”, comúnmente denominado “Interés Simple”, operatoria que no representa de manera alguna la realidad financiera pero se agrega a consecuencia de su uso y práctica en el comercio. Luego, en el *capítulo décimo octavo* se tratan *particulares aplicaciones del cálculo financiero a la valorización y depreciación de bienes amortizables*, haciendo en forma previa una ligera revisión de los conceptos de “gasto”, “costo” e “inversión”, en el *capítulo décimo séptimo*.

Así, entonces, los *cuatro tramos que constituyen este texto* se suceden entre dos extremos: *comienza* con el estudio de la mecánica operativa, luego de las variaciones relativas, y *finaliza* con la aplicación de los conocimientos adquiridos en la evaluación y valorización de alternativas de endeudamiento y/o inversión bajo la forma de “títulos valores” o “bonos”.

Todo el desarrollo, de este libro, está diseñado y ordenado de manera tal que luego de su lectura, estudio e interpretación el estudiante o, en general, interesado en el tema pueda aseverar que ha sorteado eficientemente la dificultad a la cual se hace reseña al inicio de este libro: “*no se puede conocer el todo sin conocer las partes y no se pueden conocer las partes si no se conoce el todo*.”

La intención ***es enseñar a pensar*** en términos de análisis financiero de manera tal que el operador pueda interpretar la realidad y, consecuentemente, plantear correctamente el problema a resolver.

Gustavo Sergio Biondo
Profesor Asociado de Matemática Financiera
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca, 30 de abril de 2020

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN Y VOCABULARIO

No es posible resolver un problema que no se comprende.

En el correcto planteo de un problema subyace el germen de su respuesta.

Anónimos

A efectos de contribuir a la claridad conceptual en el desarrollo de los temas que conforman el contenido de este libro, revisaremos, previamente, algunos conceptos, terminología o vocabulario, que hacen al estudio del *Valor del Dinero en el Tiempo*.

No es posible de manera alguna comprender una teoría o circunstancia si previo a ello no se conoce el vocabulario, la terminología, y/o la nomenclatura en la que se expresa.

El estudio, es decir la capacitación, contribuye de manera sustancial y directa a la aptitud de entender la realidad.

Matemática

La matemática es una ciencia que, como tal, tiene una directa incidencia en el desarrollo del intelecto, progreso y bienestar humano.

Se aplica al estudio de las características y relaciones cuantificables en los elementos sujetos a su análisis y, consecuentemente, permite obtener resultados que aportan conocimientos y soluciones respecto a la situación de la cual se parte.

Se puede afirmar con total certeza que no existe realidad o situación alguna a la cual su aplicación le sea extraña, desde, por ejemplo: el estudio y desarrollo de planes o proyectos espaciales hasta el simple y sencillo conteo de cosas, por ejemplo: frutas, hacienda, dinero, etc.

Por supuesto que a mayor detalle o precisión en la búsqueda de resultados más profundo debe ser el conocimiento del operador.

En todos los planos en que se desenvuelven las personas está la matemática y, por supuesto, no escapa a su aplicación al estudio de la operatoria financiera, en general, y del dinero en particular.

Se considera a la *matemática* junto con la *lógica* como "ciencias madres".

Aritmética

La Aritmética, o teoría de los números reales, es un área de las Matemáticas que estudia las operaciones básicas. Las que se pueden realizar con los números: suma, resta, multiplicación y división. Se incluye también en esta área del conocimiento a las potencias y raíces.

Algebra elemental

El "algebra" es una disciplina, rama, de la matemática, que tal como la aritmética se ocupa del estudio y desarrollo de operaciones que se pueden realizar con números pero es mucho más abarcativa que ella pues en su expresión amén de utilizar números también se vale de elementos abstractos "símbolos" generalmente representados con "letras" para expresar fórmulas.

Funciones

> Una función es una relación, un esquema de correspondencia, un desplazamiento de atención desde un número hacia otro, una regla, una regularidad o un plan. (Berlinsky, 2007).

El "esquema de correspondencia" es la forma en que se expresa y expone la relación entre un número y otro y se lo representa matemáticamente como "la fórmula" a utilizar en la búsqueda de la respuesta al problema planteado.

Dicho de otro modo es un "modelo de transformación" que expresa la "relación" existente entre un número y otro al cual, genéricamente, se lo define como "algoritmo"

Cálculo

> En general el término **cálculo** (del latín *calculus* = piedrecita, usado para contar o como ayuda al calcular) hace referencia al resultado correspondiente a la acción de calcular.

Calcular, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

No obstante, el uso más común del término "cálculo" es el lógico-matemático.

Desde esta perspectiva, el cálculo consiste en un procedimiento mecánico, o algoritmo, mediante el cual podemos conocer las consecuencias que se derivan de unos datos previamente conocidos debidamenteformalizadosy simbolizados (Wikipedia).

El Cálculo es una teoría sobre el cambio continuo, sobre procesos que se mueven con suavidad y que no se detienen, no se sacuden ni se interrumpen, o que no se arrojan sobre huecos del tiempo o del espacio. (Berlinsky, 2007).

El Cálculo es la rama de las matemáticas que estudia el cambio que se sucede en las variables utilizadas en la aplicación de un modelo de transformación al que se lo define como "función".

Es, en última instancia, el estudio de las funciones.

Cálculo financiero

Luego el Cálculo Financiero *es la rama del saber que utilizando una metodología desarrollada al efecto aplica conceptos, conocimientos y herramientas matemáticas para el estudio del "valor del dinero en el tiempo".*

Ahorro o atesoramiento

Dada la tenencia de un capital dinerario siempre existen dos opciones: se invierte o se atesora.

Si bien ambos conceptos tienen como denominador común "el diferimiento de un consumo" el primero implica asumir un riesgo a cambio de obtener una compensación por la entrega de un dinero, en tanto que en el segundo caso no se asume riesgo financiero alguno pero se resigna a todo tipo de incremento numerario a consecuencia de la tenencia de una suma de dinero fuera del circuito financiero.

Renta versus costo de oportunidad

El ejercicio de una de esas dos opciones supone, respectivamente:

a. una renta (mínima si se corresponde con una inversión que toma el mínimo riesgo posible) o
b. un costo de oportunidad: la renta mínima dejada de ganar por su atesoramiento inerte.

La toma de la decisión de ahorrar o atesorar está correlacionada con la propensión/aversión al riesgo y con la rentabilidad esperada. Inversamente con la primera —a mayor aversión al riesgo menor ahorro— y en forma directa con la segunda: a mayor tasa de interés aumenta la propensión al ahorro.

La ganancia mínima y el costo mínimo de tener dinero inmovilizado son, siempre y necesariamente, de una misma cuantía *pues para ambos casos se puede considerar como tal la renta (interés) que pagan las inversiones de mínimo riesgo*, por ejemplo un plazo fijo en el Banco de la Nación Argentina o los bonos a 30 años del tesoro de los Estados Unidos de Norteamérica.

Luego: *la tenencia estéril del dinero es dejar de ganar. El atesoramiento tiene un costo de oportunidad que es igual a la renta mínima dejada de ganar*.

La diferencia entre ambos conceptos es que la ganancia es una realidad tangible en tanto que la pérdida por la tenencia inerte es un costo de oportunidad.

Y es en esa relación —renta/costo de oportunidad— donde subyace la causa origen del valor del dinero en el tiempo.

Crecimiento exponencial y contínuo

Técnica de trabajo

Se puede aseverar que el dinero —que es una creación humana— tiene, tal como los seres vivos de la naturaleza, la propiedad de desarrollarse, en este caso crecer numéricamente, en forma endógena, exponencial y contínua y, por lo tanto, para su análisis se deben utilizar técnicas que se correspondan con esa realidad.

Consecuencias en la economía real

Como consecuencia de ese modo de variación: *exponencial y contínua* se suceden, en el corto plazo, cambios en las relaciones existentes entre el precio de los bienes respecto al costo/renta del dinero.

Situación que origina una brecha entre ambos valores y considerando que, como en todos los órdenes de la economía, *toda variable que se retrasa tiende a recuperar su valor y volver al equilibrio inicial de precios relativos* da lugar a que, en ese lapso, se generen oportunidades de inversión como consecuencia directa de realidad que la generó.

Cabe destacar que no necesariamente esas situación tendrá una solución armónica y acompasada a los intereses de los actores sino que puede darse, y de hecho sucede, en forma brusca generando situaciones de crisis que en el supuesto caso que los actores no se encuentren, de algún modo, cubiertos para el ese tipo de contingencias corren el riesgo de pagar un alto precio por su error.

Es, precisamente, esa realidad la que ha dado nacimiento al mercado de futuros y opciones y éste, a su vez, al mercado de derivados financieros.

Conclusiones

De todo lo antes dicho se obtienen varias conclusiones las que, a su vez, son premisas para el desarrollo del análisis del "Valor del Dinero en el Tiempo", siendo las principales:

- Una conducta es "ahorrar" y otra, muy distinta, "atesorar" dinero.
- Dada la tenencia de un capital dinerario existen dos opciones: se invierte o se atesora.
- El ejercicio de una de esas dos opciones supone, respectivamente:
    a) una renta, por lo menos igual a la generada en una inversión que se formaliza al menor riesgo posible o
    b) un costo de oportunidad: la renta mínima dejada de ganar por su atesoramiento inerte.
- En la realidad dada por la concurrencia de tener una renta o bien el costo de no tenerla —renta vs. costo de oportunidad— subyace o radica la causa origen del valor del dinero en el tiempo.
- La ganancia mínima y el costo mínimo de tener inmovilizada una suma de dinero son, siempre y necesariamente, de una misma cuantía pero de signos opuestos:
    a) positivo: ganancia o
    b) negativo: pérdida.
- La diferencia entre ambos conceptos es que la ganancia es una realidad tangible en tanto que la pérdida por la tenencia inerte es un costo de oportunidad.
- Luego se puede concluir que siendo el dinero una creación humana en el subyace, desde su origen y en su propia naturaleza esta condición de variación —continua y creciente— pues la cantidad que se genera se va incrementando en forma instantánea sobre la que se parte produciéndose así un círculo virtuoso que se define como "anatocismo".
- Es conveniente y, por lo tanto necesario, tomar posiciones de coberturas para tratar de neutralizar efectos negativos a consecuencia de los cambios de precios que se suceden en el mercado.

Anatocismo o Capitalización de intereses

En términos financieros: *se trata de sumar los intereses generados al capital del cual se parte*, capitalización, de manera tal que, sumados al mismo, pasan a generar nuevos intereses.

Función exponencial

Por lo tanto, para el estudio del valor del dinero en el tiempo se han de utilizar técnicas de cálculo que se correspondan con el análisis de una función de forma: $\mathbf{f(x) = b^x}$.

Para este caso, en particular, y como más adelante se veré en detalle, será **$(1 + i)^n$** , donde "i" es la tasa o variación relativa expresada en forma sincrónica a la unidad de tiempo de sus "n" términos.

Es decir: **$(1 + \text{tasa})^{\text{tiempo}}$** donde:

- la "tasa" por definición es positiva
- el "tiempo" puede ser un número entero o fraccionario, positivo o negativo.

Pero siempre y necesariamente la tasa de interés debe estar expresada en forma sincrónica a la unidad en que esté expresado el tiempo.

Crecimiento contínuo[1]

En el caso particular de que en la potencia **$(1 + i/m)^m$** la cantidad de capitalizaciones "m" tendiese a crecer, sin límites de continuidad, se sucede un doble efecto respecto al resultado:

- **Aumenta** como consecuencia del crecimiento del exponente "m".
- **Decrece** pues esa misma magnitud "m" también participa como denominador en un sumando que integra la base.

Luego, a consecuencia de esa doble incidencia, a medida que el valor de "m" aumenta el resultado tenderá a crecer pero no hasta el infinito sino que tendrá un límite máximo.

Número "e"

Ese valor máximo es un número irracional comprendido entre 2,718 y 2,72 y se los ha definido como número "**e**". Más adelante, en el "Capítulo 4. Capitalizaciones", se tratará el tema en forma específica en lo que respecta a su origen y aplicaciones en el cálculo financiero.

Interés continúo

Aplicada esta realidad a un proceso financiero *es posible efectuar el cálculo de intereses bajo el parámetro de crecimiento contínuo* y —según resulta del procedimiento, que más adelante se verá en detalle— resulta que:

Monto es igual al **Capital** por el número "e" elevado al **tiempo** por la **tasa**: $M = C\,e^{in}$

[1] Para mayor detalle ver "Capítulo 4. Capitalizaciones"

Liquidación

Es el momento en que el compromiso se torna exigible y, por lo tanto, se lo ha de cancelar mediante el pago o renovación.

Variaciones

Concepto

Previo a la definición del concepto “tasas” se ha de tener presente el concepto de “variación” y las formas en que esta se puede presentar.

Una variación es la diferencia sucedida en una variable definida en dos momentos del tiempo, uno “inicial” o “cero” y otro “final” o “n”:

```
        0                                                        n
        / ------------------------------------------------------ /
        a                                                        b
Cantidad inicial                                          Cantidad final
```

Clasificación o tipología

Pueden expresar dos tipos de magnitudes:

Absolutas

Es la diferencia existente entre el valor de una misma variable en dos momentos del tiempo.
En este caso será: la cantidad final menos la cantidad inicial: “b - a”.
En el caso que se trate de dinero será: *Monto - Capital = Interés*

Relativas

Se trata del cociente, número, que expresa la diferencia existente entre el valor final y el valor inicial respecto a una de las dos magnitudes al que se lo denomina “tasa de variación”.

Las alternativas son dos pues la variación puede estar referida a la cantidad:

1. Inicial: (b - a)/a
2. Final: (b - a)/b

Cuando está referenciada a la cantidad:

- *Inicial* es un número que *expresa el crecimiento* de la unidad de cuenta
- *Final indica la quita* por unidad de cuenta que se le realiza al valor final.

Luego podemos afirmar que: “una tasa es un número que expresa la variación de la unidad de cuenta en la unidad de tiempo”.

En el caso de que se trate de dinero son dos las formas en que usualmente se expresa la diferencia, para:

1. *la unidad* o “tanto por uno” y se la representa con la letra “i”
2. *cada cien unidades* o “tanto por ciento” y se la representa con la letra “r” o bien con el símbolo “%”

Para el caso de que la unidad de cuenta fuese dinero y dentro del siguiente esquema temporal:

```
        0                                                          n
        / -------------------------------------------------------- /
   Capital = C                                               Monto = M
```

- En el primer caso el resultado expresa el incremento que la unidad de cuenta “Capital” ha tenido en la unidad de tiempo y se la llama “tasa de interés” y se la representa con la letra “i”[2].

$$i = (M - C) / C = I/C$$

- En tanto que en el segundo caso expresa la “quita” o descuento que la unidad de cuenta “Monto” ha tenido en la unidad de tiempo y se la define como “tasa de descuento” que se expresa como “d”[3].

$$d = (M - C) / M = I/M$$

Las utilizaremos para indicar o medir la variación de la unidad de capital.

Ejemplo:

- Capital: $ 2.750,00
- Monto: $ 3.300,00

$$\text{Interés} = 3.300{,}00 - 2.750{,}00 = 550{,}00$$

$$\text{Tasa de interés} = \frac{3.300{,}00 - 2.750{,}00}{2.750{,}00} = 0{,}20$$

Es el 20,00 por ciento (%) o 0,20 por uno ($^{o}/_{1}$)

Descuento = 3 300,00 - 2.750,00 = 550,00

[2] El tema se desarrolla en forma específica en el “Capitulo 5. Tasa de interés”.
[3] El tema se desarrolla en forma específica en el “Capítulo 8. Tasa de descuento”.

$$\text{Tasa de descuento} = \frac{3\ 300{,}00 - 2.750{,}00}{3.300{,}00} = 0{,}1667$$

Es el 16,67 por ciento (%) o 0,1667 por uno $(^{o}/_{1})$

Comprobación:

$$C * i = I$$

$$2.750{,}00 * 0{,}20 = 550{,}00$$

$$M * d = D$$

$$3.000{,}00 * 0{,}16667 = 550{,}00$$

Equivalencia financiera[4]

La equivalencia financiera es la igualdad del valor que en un determinado momento tienen dos o más flujos de fondos con diferentes estructuras temporales y/o sumas de dinero operando a una misma tasa de interés.

Modelo

Un modelo es la representación simplificada de una realidad esperada.

Por lo tanto para que ese planteo sea válido y representativo deberá contener, en sí mismo, la forma de responder ante los eventuales cambios que se sucedan a consecuencia de la incidencia de los futuros eventos, tanto internos como externos, durante toda la vigencia de su proyección o análisis.

Evidente es, entonces, que la validez de un modelo se verifica en sus límites.

Estado Presupuestario de Flujo de Fondos

El "Estado Presupuestario de Flujo de Fondos" es un modelo que pretende exponer, para un lapso determinado, el movimiento del dinero de una actividad, proyecto o empresa

Bases de desarrollo

Se toman como base de su desarrollo dos tipos de información la primera *es un dato cierto* pues se trata de la situación financiera del momento en que se parte y la segunda no es así pues se trata de *supuestos* que operador considera como válidos y a sucederse, en su totalidad, en el futuro.

[4] El tema se trata y desarrolla en forma específica en el "Capítulo 10. Equivalencia Financiera".

Si bien es cierto que es imposible tener certeza respecto a lo que va a suceder y que solo se cuenta con información histórica es, precisamente en la intersección resultante de la calidad de esos datos, el lapso presupuestado y la capacidad del operador en la interpretación e incidencia de los acontecimientos que estima se sucederán donde subyace la confiabilidad del resultado obtenido.

Cabe destacar que la información histórica indica una suerte de tendencia o conducta empresaria a considerar pero no, de manera alguna, es un condicionante de los acontecimientos futuros pues no necesariamente el futuro resulta ser una mera proyección de los acontecimientos sucedidos.

Respecto al lapso, tiempo o vigencia, que se considera en el “flujo de fondos” está inversamente correlacionado con la información que éste brinda: *a mayor tiempo menor certeza y viceversa*.

Prestaciones

Esta forma de ordenar y exponer el movimiento del dinero es de suma utilidad y tiene más de una aplicación.

Por una parte es útil para la estimación de la cuantía del estado de las disponibilidades o “movimientos de caja” en el desarrollo de una actividad cualquiera que fuere indicando, en el tiempo, sus déficits y/o superávits.

Amén de ello al cuantificar y ordenar cronológicamente el movimiento del dinero permite analizar la rentabilidad de las diferentes alternativas de inversión que ofrece el mercado financiero.

Para ello se han desarrollado diversas técnicas de estudio siendo las más utilizadas el “valor actual neto”, “la tasa interna de retorno” y “la *duration*” de todos y cada uno de los flujos de fondos alternativos.

Conclusiones

Luego a medida que se sucedan los acontecimientos y comparar éstos con los valores presupuestados en su desarrollo y conformación final no necesariamente resultará una igualdad pues tal se ha previsto la totalidad de los acontecimientos se sucederán en el futuro, el cual, por propia definición, es incierto.

Así, entonces, al tratarse de acontecimientos que se sucederán en el futuro *la información que el Estado Presupuestario de Flujo de Fondos proporciona no es estática sino que resulta ser extremadamente dinámica* pues muta y varía en forma contínua sin razón de variabilidad.

CAPÍTULO 2
FACTORES QUE INTERVIENEN EN EL CÁLCULO FINANCIERO

Variables

Son tres las variables o factores que intervienen en el análisis financiero:

1. Dinero
2. Tiempo
3. Tasa.

En caso de tener que resolver algún problema financiero_*se ha de tener presente que el mismo tiene solución si y solo si de las tres variables —dinero, tiempo y tasa— solo una es una incógnita,* en caso de que así no lo fuere deja de ser tal —problema— pues no tiene solución.

Dinero

Capital, valor actual y/o valor presente

Son sinónimos y se los utiliza para expresar el valor en el momento que se lo valúa.

Se los simboliza como "**C**", "**VA**" y **VP**", respectivamente y, en el caso particular que lo sea en el momento inicial su nomenclatura es: "$\mathbf{V_0}$".

Monto, valor final y/o valor futuro

También son sinónimos y expresan el valor que un capital tiene en un momento posterior al presente, que puede o no coincidir con el valor que tiene la operación al momento de su finalización.

Se los simboliza como “**M**”, “**VF**” y “$\mathbf{V_n}$”, indistintamente.

Interés

El **interés**, más allá de las diversas definiciones que en función de su aplicación o uso se pueda expresar, *es la diferencia existente en el valor de un mismo capital en dos momentos del tiempo.*

Se trata de una cantidad física, tangible, *dinero* en este caso.

Se lo expresa simbólicamente con “I”.

En función de la normativa vigente y el objetivo a alcanzar se puede operar de dos maneras posibles, a saber:

- **Interés compuesto:** se utiliza en el comercio y mercado financiero.

  Su aplicación y modo responde a una normativa de orden nacional impuesta por el organismo rector de la política monetaria.

- **Interés contínuo**: se aplica, generalmente, en el análisis comparativo de variaciones de índices o precios con la tasa de interés.

  Se trata de un procedimiento que tiende a tener subperíodos de capitalización infinitamente pequeños, luego y por la esa misma razón, el número de capitalizaciones crecerá infinitamente.

  En al caso de valores absolutos se lo define como “*interés contínuo*” y si se tratase de variaciones relativas se lo define como “*tasa instantánea de interés*”[5].

Tiempo

Es el lapso en el que se sucede la generación (o quita) de intereses.

Dimensiones

Al tiempo se lo divide en dos grandes dimensiones:

[5] Este tema se desarrolla minuciosamente en el “Capítulo 4. Capitalizaciones”.

Período:

Es el lapso durante el cual se generan intereses y que transcurre desde el momento (época) inicial hasta el momento (época) final de la operación y lo representaremos con la letra “n”.

Subperíodo:

Es la fracción de tiempo en las que ha ido dividido el periodo y su representación será con la letra “m”.

En un periodo de tiempo “n” pueden caber tantos subperíodos “m” como sea necesario o posible dividirlos.

En términos económicos y/o financieros el lapso menor es un día en tanto que si se tratase del estudio y/o análisis comparativo de la tasa de interés con el precio o valor de bienes se considera que la variación se sucede en forma instantánea por lo tanto el lapso o subperíodo tiende a ser infinitamente pequeño.

En el primer caso se trata de un “interés compuesto” y en el segundo de “interés contínuo”[6].

Por lo tanto el pago que se realiza en una transacción comercial o financiera que se toma y se cierra en el día no es para abonar intereses sino que se aplica solamente para cancelar los gastos que correspondan a esa operatoria.

Eje del tiempo

Definimos al **eje del tiempo** como el segmento de recta con el cual representamos el transcurso del mismo.

Dentro de ese lapso se sucederán todas las alternativas planteadas o que pudiéramos llegar a plantear.

Sus extremos o límites son dos: el momento inicial o sea "cero" y el otro es cuando finaliza, que se representa con una letra “n”. A su vez, ese lapso puede estar segmentado en partes que se denominan “subperíodos” e indican los momentos en que se capitalizan intereses.

Dentro de ese lapso es posible posicionarse en cualquier momento dentro de los siguientes valores mínimos:

- **Días:** si se trata de una operación comercial o financiera a “interés compuesto” o
- **Instantes:** si se trata de un análisis comparativo de la variación de precios o valores de bienes respecto a la tasa de interés.

En el primer caso se trata de un “interés compuesto” y en el segundo de “interés contínuo”.

Nomenclatura:

- 0: momento inicial
- n: momento final

[6] El tratamiento del interés compuesto y contínuo se desarrollará específicamente en el “Capítulo 4. Capitalizaciones”.

- m: subperíodos de capitalización
- VA: Valor actual = C: Capital
- VF: Valor final = M: Monto

Momento inicial Momento final
0 n
/ ------------------------------- periodo ------------------------------- /
0 m_1 m_2 m_n
/ ---- subperíodo ---- / ---- subperíodo ---- / ---- subperíodo ---- /

De izquierda a derecha recorremos el tiempo en sentido "positivo", o sea vamos de un momento cualquiera a un momento posterior o futuro, y de derecha a izquierda recorremos el eje en sentido "negativo", o sea venimos de un momento futuro a uno que lo precede, en general podemos decir que es más cercano al presente o a un momento más cercano a "cero".

En el sentido positivo se "cargan" o ganan intereses y en el sentido negativo se "quitan" o descuentan intereses.

/ ------------------ /------------------ / --------------------------------- /
VA_1 VA_2 VA_3 VF
Capital "C" Monto "M"
Valor Actual "VA" Valor Final "VF"

Sentido positivo

Sentido negativo

Luego podemos afirmar que: $VA_1 < VA_2 < VA_3 < VF$ y la diferencia existente es el interés.

Llamaremos "interés" o "descuento" a la diferencia existente entre el valor actual de una misma obligación en distintos momentos del tiempo según nos desplacemos, en el eje del tiempo, en sentido positivo o negativo, respectivamente.

Tasa de interés[7]

Una tasa, ratio, razón o fracción es un número que relaciona dos magnitudes de una misma especie.

En nuestra disciplina, dado que relaciona dinero, será una "tasa de interés" o una "*tasa de descuento*" según el caso y tal como más adelante, "Capítulo 6. Tasa de Interés" y "Capítulo 8. Tasa de Descuento", respectivamente, se desarrollarán.

[7] En el "Capitulo 5. Tasas de interés" el tema se desarrolla y trata en forma específica.

Planteo del problema

Por lo tanto al intervenir solo tres variables donde, necesariamente, dos de ellas son “datos” el problema a resolver *no puede ser una cuestión compleja lo que no quiere decir que sea fácil de resolver.*

Aquí el problema se desdobla y abren dos etapas: primera la del analista en modelar correctamente el planteo de solución del problema financiero y, logrado que fuere, se inicia la segunda que es la correcta aplicación o desarrollo del modelo matemático para obtener su solución.

CAPÍTULO 3
SINCRONISMO

Conceptos generales

Partiremos de la base que para poder cumplir con una obligación de dar una cantidad de dinero se deben tener como datos esenciales: **una fecha cierta y una suma determinada**.

Es decir que para hacer efectivo el pago se debe conocer la suma a pagar y la fecha en que debe realizarse.

El estudio y análisis del valor del dinero en el tiempo parte de la premisa del crecimiento contínuo y costo de oportunidad de su tenencia.

Luego: no es lo mismo tener una suma de dinero hoy que dentro de un año (prescindiendo de las nefastas consecuencias de la inflación) pues su tenencia permite analizar las alternativas de su inversión o bien el costo de no hacerla.

Por ejemplo: en el supuesto caso de que se trate de una obligación de pago y contar con esa suma antes de su vencimiento permite evaluar la alternativa de conformar una inversión por una suma menor a la obligación de manera tal que al vencimiento o liquidación de la deuda podamos contar con el dinero invertido más un plus o ganancia.

En tal caso *sólo en el momento de su liquidación o vencimiento el Valor Actual de la operación será igual al Valor Nominal.*

Por lo tanto: el *Valor Nominal es una suma de dinero estática* en tanto que *el Valor Actual no pues se incrementa a medida que transcurre el tiempo, iguala al Valor Nominal el día de vencimiento de la operación y luego lo supera.*

En esta realidad se funda el principio de la “equivalencia financiera”, base de todo el desarrollo del valor del dinero en el tiempo y sobre el que, más adelante, volveremos en detalle[8].

Generación de intereses

Luego: los intereses se calculan sobre el valor que la obligación tiene en cada uno de sus momentos de vigencia.

Así entonces, los intereses generados en el lapso en el que se encuentran expuestos se adicionan al Capital del cual parten y esa cantidad pasa a ser el Capital inicial del siguiente lapso.

A esta operatoria se la denomina “Capitalización de Intereses”.

Seguidamente se desarrolla un “Cuadro de marcha de una inversión” de $1.000.000,00 a 12 meses, con capitalización mensual a la tasa del 10% mensual el cual genera, bajo esas condiciones, un monto de $3.138.428,38

El tiempo de la operación, período, es de un año y doce son los subperíodos de capitalización.

	Capital inicial	**Interés = 10%**	**Capital Final**
1	$ 1.000.000,00	$ 100.000,00	$ 1.100.000,00
2	$ 1.100.000,00	$ 110.000,00	$ 1.210.000,00
3	$ 1.210.000,00	$ 121.000,00	$ 1.331.000,00
4	$ 1.331.000,00	$ 133.100,00	$ 1.464.100,00
5	$ 1.464.100,00	$ 146.410,00	$ 1.610.510,00
6	$ 1.610.510,00	$ 161.051,00	$ 1.771.561,00
7	$ 1.771.561,00	$ 177.156,10	$ 1.948.717,10
8	$ 1.948.717,10	$ 194.871,71	$ 2.143.588,81
9	$ 2.143.588,81	$ 214.358,88	$ 2.357.947,69
10	$ 2.357.947,69	$ 235.794,77	$ 2.593.742,46
11	$ 2.593.742,46	$ 259.374,25	$ 2.853.116,71
12	$ 2.853.116,71	$ 285.311,67	$ 3.138.428,38

En la primera columna se indica el mes, en la segunda el valor del capital al inicio del mismo, luego los intereses generados para concluir, en la cuarta, con el monto del período; el cual pasa a ser el capital inicial del siguiente.

[8] El tema se desarrolla en detalle en el “Capítulo 10. Equivalencia Financiera”.

Condiciones de factibilidad para las operaciones

Sincronismo

Para poder operar (cálculo de intereses o de tasas) es condición necesaria que el tiempo y la tasa estén expresados en la misma magnitud, medida o unidad de cuenta.

Por ejemplo: si el plazo de la obligación se mide en años la tasa debe estar expresada en años.

Luego: el sincronismo es la necesaria compatibilidad que debe existir entre la tasa y el tiempo.

Por lo tanto en los casos que así no estuvieren expresados será necesario, previo al inicio de cualquier tipo de operaciones, ajustar esas magnitudes —mediante un procedimiento que más adelante veremos en detalle— donde de resultas de ello el tiempo y la tasa queden expresados en la misma medida o unidad de cuenta.

Este proceso de ajuste se llama: “compatibilización”.

Ejemplo: si el tiempo “n” es un año, la tasa está expresada en una magnitud anual, pero la capitalización es cada 30 días, o sea “m = 365/30” corresponde proporcionalizar la tasa a ese régimen de capitalización.

Relación entre tasa, tiempo y capitalización[9]

Las operaciones se pueden pactar de cualquier manera respecto al tiempo, tasa y condiciones de capitalización.

Motivo por el cual se puede hacer necesaria no solo la sincronización entre el tiempo y la tasa sino también compatibilizarlo con las condiciones de capitalización.

Respecto al sincronismo y compatibilización entre el tiempo y la tasa

Es posible acordar una operación donde el período de vigencia o tiempo sea mayor, menor o igual a la magnitud de tiempo en que está expresada la tasa.

Ordenando la frase de otra manera se puede decir que: *la tasa de interés que se pacta en una operación no necesariamente debe estar expresada en la misma magnitud de tiempo que el plazo por el cual se ha acordado para esa operación.*

Ejemplo: operaciones a 323 días con una tasa nominal de interés del 15% para 200 días o del 15% para 365 días o 15% para 400 días.

---

9 Este tema se desarrolla en forma específica en el “Capítulo 5. Tasas de Interés”.

Respecto a la compatibilización de la capitalización

Es obvio que la capitalización de intereses se sucederá dentro de un lapso menor o igual que el período por el cual se ha pactado la operación, o sea que sucede dentro del período, por ello le llamamos “subperíodo/s de capitalización”.

Dicho de otra manera: los subperíodos de capitalización tienen, necesariamente, una duración menor o igual al período de vigencia total de la operación.

Ejemplo: operaciones a 180 días con capitalización cada 30 días, operaciones a 180 días con capitalización cada 45 días, etc.

En el caso que el subperíodo de capitalización fuere igual al período total de la operación (o sea que capitaliza al final del período) se está ante un caso particular de interés donde en realidad no existe capitalización alguna.

Resumen

De todo lo antes visto se puede concluir en los siguientes casos:

1. Que la tasa de interés esté expresada en la misma, mayor o menor magnitud de tiempo que el período de vigencia de la operación,
2. Que el lapso del período de vigencia solo puede, necesariamente, ser mayor o igual al lapso del/los subperíodo/s.

Dentro de las siguientes posibilidades, a saber:

1. Que existan subperíodos de capitalización,
2. Que no existan subperíodos de capitalización.

Luego de combinar las primeras posibilidades con las dos segundas se concluye que las alternativas son seis.

A los efectos de *ejemplificar* los casos:

Si dentro del período *no existen subperíodos de capitalización.*

1. Que la tasa esté expresada en la *misma* magnitud de tiempo que el período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dado un capital que se coloca a un tasa del 12% para 365 días, por un lapso de 365 días y que capitaliza intereses al vencimiento del plazo.

2. Que la tasa esté expresada en una magnitud de tiempo *menor* que el período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dado un capital que se coloca a un tasa del 12% para 365 días, por un lapso de 730 días y que capitaliza intereses a los 730 días.

3. Que la tasa esté expresada en una magnitud de tiempo *mayor* que el período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dado un capital que se coloca a un tasa del 12% para 730 días, por un lapso de 365 días y que capitaliza intereses a los 365 días.

Que dentro del período *existan subperíodos de capitalización.*

1. Que la tasa esté expresada en la *misma* magnitud de tiempo que el período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dado un capital que se coloca a un tasa del 12% para 365 días, por un lapso de 365 días y que capitaliza intereses cada 180 días.

2. Que la tasa esté expresada en una magnitud de tiempo *mayor* al del período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dado un capital que se coloca a un tasa del 12% para 365 días, por un lapso de 180 días y que capitaliza intereses cada 90 días.

3. Que la tasa esté expresada en una magnitud de tiempo *menor* que el período de vigencia de la operación.

   Ejemplo: Dada un capital que se coloca a un tasa del 12% para 365 días, por un lapso de 730 días y que capitaliza intereses a los 180 días.

Es por ello que el desarrollo teórico, el análisis y trabajos prácticos lo haremos, por defecto, con **tasas nominales periódicas**.

En su caso se harán las aclaraciones pertinentes como notas al pie o bien para remitirse a los títulos/capítulos correspondientes.

CAPÍTULO 4
CAPITALIZACIONES

Determinación del valor de un capital luego de transcurrido un tiempo

A efectos de iniciar de una manera simple y conocida el camino para comprender la real importancia del concepto y uso de los “factores de capitalización” y “factores de actualización” procederemos a determinar el valor de una suma de dinero luego de transcurrido un tiempo.

Esa suma será igual al *capital inicial* más los *intereses* que gane en el transcurso de ese tiempo y le llamaremos *monto*.

Capitalización

Capitalizar es sumar al capital inicial los intereses ganados durante el subperíodo, para: conformar un nuevo capital inicial que ganará intereses en el subperíodo siguiente.

Así sucesivamente hasta el fin del periodo y se sucederá tantas veces como subperíodos existan dentro del periodo.

Pero a consecuencia de sumar los intereses ganados en los subperíodos se sucede un efecto donde el interés total (variación absoluta) resultante en el periodo es mayor que el resultado de aplicar directamente la tasa nominal periódica para todo el periodo.

Esa diferencia es igual a la suma que se ha ganado por efecto de la capitalización de intereses: son los intereses de los intereses.

Monto

Factores que intervienen en el cálculo[10]

Dinero

Partiremos de una suma inicial "Capital" que es el valor de la operación en el momento inicial.

Luego se irán generando intereses en cada uno de los subperíodos que se adicionarán al capital del cual se parte en el subperíodo.

Este proceso se define como: "capitalización".

Así se formará una suma al final de cada subperíodo que llamaremos "Monto del subperíodo", el cual pasará a ser el "Capital inicial" del subperíodo siguiente. Así sucesivamente hasta finalizar el período y cuyo importe resultante será el Valor Final de la operación o *Monto* es decir *el capital más los intereses generados durante todo el período*.

Tiempo

Ya se ha definido al *tiempo* como el lapso que transcurre entre dos extremos: el "momento inicial" y el "momento final", "cero" y "ene", respectivamente.

Luego: llamaremos "período" al lapso comprendido entre los momentos "cero" y "ene" y lo representaremos simbólicamente con la letra "n".

A los segmentos "m" de tiempo en que dividamos al período le llamaremos "subperíodos".

Dentro de un período de tiempo habrá tantos subperíodos "m" como convengamos.

```
0            1            2                     n -1         n
/ ---------- / ---------- / ---------- ............... / ----------- /
```

Tasa de interés[11]

Para el desarrollo del caso suponemos una tasa proporcional al lapso de capitalizaciones que, para este desarrollo, llamaremos "i".

Nomenclatura

n: Tiempo.

m: Subperíodos en que se divide el período.

[10] El tema se desarrolló en forma específica en el "Capítulo 2. Factores que intervienen en el cálculo financiero".
[11] El tema se desarrolla en forma específica en el "Capítulo 2. Factores que intervienen en el cálculo financiero".

i: Tasa de interés a utilizar.

C: Capital inicial.

I: Intereses

M: Monto (Capital más intereses).

Cálculo del monto

Por lo antes visto mediante este procedimiento determinaremos el valor resultante de sumar los intereses al capital inicial y le llamaremos "Monto".

Partiendo de un capital "**C**" que es colocado a interés a la tasa proporcional "i", por un lapso de tiempo "n", con "m" subperíodos de capitalización: sucederá que al fin del primer subperíodo de habrán generado intereses "C i", que sumados al capital inicial "C" pasará a ser el Monto "M" de ese primer subperíodo.

Luego ese monto pasa a ser el capital inicial del segundo subperíodo y al fin del mismo habrá ganado un interés igual a "M x i", que sumaremos al capital inicial del segundo subperíodo y pasará a ser el Monto "M" de ese segundo subperíodo y así sucesivamente durante los "m" subperíodos o sea durante todo el período.

Gráficamente:

```
 0           1           2                      m-1          m
 / ---------- / ---------- / ---------- .............. / ----------- /
 C           M1          M2                     M m-1        Mm
```

Bajo el supuesto que la tasa de interés está sincronizada con el subperíodo de capitalización se puede desarrollar del siguiente modo:

En el primer subperíodo:

Capital inicial del primer subperíodo:	C
Interés del primer subperíodo:	$C\ i$
Monto del primer subperíodo:	$C + C\ i = M_1$
	$\mathbf{M_1 = C\ (1 + i)}$

En el segundo subperíodo:

Capital inicial del segundo subperíodo:	M_1
Interés del segundo subperíodo:	$M_1\ i$
Monto del segundo subperíodo:	$M_1 + M_1\ i = M_2$
	$M_1\ (1 + i) = M_2$
	$C\ (1 + i)\ (1 + i) = M_2$
	$\mathbf{M_2 = C\ (1 + i)^2}$

En el tercer subperíodo:

Capital inicial del tercer subperíodo: M_2

Interés del tercer subperíodo: M_2 i

Monto del tercer subperíodo: $M_2 + M_2 \, i = M_3$

$M_2 (1 + i) = M_3$

$C (1 + i)^2 (1 + i) = M_3$

$\mathbf{M_3 = C (1 + i)^3}$

Así sucesivamente hasta el período "n" donde:

Capital inicial del "n" subperíodo: M_{m-1}

Interés del "n" subperíodo: M_{m-1} i

Monto del "n" subperíodo: $M_{m-1} + M_{m-1} \, i = M_m$

$M_{m-1} (1 + i) = M_m$

$C (1 + i)^{m-1} (1 + i) = M_m$

$\mathbf{M_m = C (1 + i)^m}$

Luego: *el Monto "M", para un período "n", es igual al Capital "C" multiplicado por un factor igual al resultado de sumar a la unidad de capital (uno) la tasa de interés "i" y a ese resultado elevarlo a la cantidad de subperíodos "m".*

Se ha partido del supuesto que la tasa de interés "i" es una tasa subperiódica sincronizada con el subperíodo "m" pero puede suceder que la tasa de interés esté expresada en una magnitud distinta a la del tiempo.

En tal caso previo al cálculo se ha de sincronizar la tasa de interés con el tiempo, es decir expresar ambas magnitudes en la misma unidad de cuenta.

Por ejemplo si la tasa "i" fuese periódica y existiesen "m" subperíodos de capitalización el "Monto" para un periodo será igual a:

$$M = C (1 + i/m)^m$$

Puede suceder también que, independientemente de la proporcionalidad o no de la tasa, exista más de un período "n" de vigencia.

En tales casos y según corresponda se deberá proporcionalizar la tasa y multiplicar "m" por "n".

Consecuentemente:

$$M = C (1 + i/m)^{m\,n}$$

La fórmula precedente indica que el total obtenido al finalizar un lapso de **"n"** períodos de duración es igual al producto resultante de multiplicar al capital inicial por un factor.

Este procedimiento de multiplicar un Capital o Valor Inicial por un factor es la base de todo el desarrollo posterior.

Luego determinaremos el interés.

Para ello y considerando que el Monto es igual al Capital más el Interés podemos decir que si al Monto le restamos el Capital obtendremos el Interés ganado, luego:

$$M - C = C\,(1 + i/_{m})^{m\,n} - C$$

$$I = C\,(1 + i/_{m})^{m\,n} - C$$

$$\mathbf{I = C\,[(1 + i/m)^{m\,n} - 1]}$$

Fórmulas derivadas a partir de la fórmula del monto

Determinación de la fórmula del capital:

$$M = C\,(1 + i)^{m\,n}$$

$$C = M / (1 + i)^{m\,n}$$

Determinación de las fórmulas del tiempo:

$$M = C\,(1 + i)^{m\,n}$$

$$M/C = (1 + i)^{m\,n}$$

$$\log M/C = m\,n \log (1 + i)$$

$$m\,n = (\log M/C) / \log (1 + i)$$

$$m = \frac{(\log M/C) / \log (1 + i)}{n}$$

$$n = \frac{(\log M/C) / \log (1 + i)}{m}$$

Determinación de la fórmula de la tasa de interés:

$$M = C\,(1 + i)^{m\,n}$$

$$M/C = (1 + i)^{m\,n}$$

$$\mathbf{i = (M/C)^{1/m\,n} - 1}$$

Fórmulas derivadas a partir de la fórmula del interés

Determinación de la fórmula del capital:

$$I = C\,[(1 + i)^{m\,n} - 1]$$

$$\mathbf{C = I / [(1 + i)^{m\,n} - 1]}$$

Determinación de las fórmulas del tiempo:

$$I = C\,[(1 + i\,)^{m\,n} - 1]$$

$$I/C = (1 + i)^{m\,n\,-}\,1$$

$$I/C + 1 = (1 + i)^{m\,n}$$

Desarrollando el primer miembro:

$$I/C + 1 = \frac{I + C}{C} = M/C$$

$$M/C = (1 + i)^{m\,n}$$

Luego:

$$\log(M/C) = m\,n\,\log(1+i)$$

$$m\,n = \log(M/C) / \log(1 + i)$$

$$m = \frac{\log(M/C) / \log(1 + i)}{n}$$

$$\mathbf{n = \frac{\log(M/C) / \log(1 + i)}{m}}$$

Determinación de la fórmula de la tasa de interés:

$$I = C\,[(1 + i)^{m\,n} - 1]$$

$$I/C + 1 = (1 + i)^{m\,n}$$

$$M/C = (1 + i)^{m\,n}$$

$$\mathbf{i = (M/C)^{1/m\,n} - 1}$$

Ejemplo

Dado un capital de $ 10.000,00 colocado a interés a una tasa nominal anual del 24% calcular el interés producido en los siguientes lapsos:

a. 180 días
b. 180 días con capitalización cada 90 días.

Desarrollo:

a) El lapso de capitalización es cada 180 días luego m = 365/180

La tasa de interés está expresada para un lapso anual en tanto que no existen subperíodos de capitalización y el período es inferior a un año, por lo tanto debe sincronizarse el tiempo con la tasa, luego n = 180/365

$$M = C\,(1 + i/m)^{mn}$$

$$M = 10.000{,}00\,(1 + 0{,}24/365/180)^{365/180\,*\,180/365}$$

$$M = 10.000{,}00\,(1 + 0{,}24/365/180) = 11.183{,}56$$

b) El lapso de capitalización es cada 90 días luego m = 365/90

Respecto a la tasa de interés caben las mismas consideraciones que en el caso anterior, por lo tanto: n = 180/365

$$M = C\,(1 + i/m)^{mn}$$

$$M = 10.000{,}00\,(1 + 0{,}24\,/\,365/90)^{365/90\,*\,180/365}$$

$$M = 10.000{,}00\,(1 + 0{,}24/365/90)^{2} = 11.218{,}58$$

Monto a Interés Continuo

El interés continuo es el resultado de considerar que el lapso que se sucede entre los períodos de capitalización “m” es cada vez menor, tienden a ser cero; por lo tanto la cantidad de veces que se sucede la capitalización dentro de cada período será cada vez mayor, crecerá tendiendo a infinito a medida que “m” tienda a cero.

Si definimos:

- ♣ x = m/i (a)
- ♣ i/m = 1/x (b)

Al estar “x” correlacionada en forma positiva con “m” cuando “m” tienda a crecer “x” también lo hará.

Partiendo de la fórmula de Monto:

$$M = C\,(1 + i/m)^{m}$$

De (b) reemplazando “**i/m**” por “**1/x**” resulta:

$$M = C\,(1 + 1/x)^{m}$$

Multiplicando y dividiendo el exponente “m” por “i”, resulta:

$$M = C\,[(1 + 1/x)^{m/i}]^{i}$$

De (a) reemplazando el exponente "m/i" por "x", resulta:

$$M = C\,[(1 + 1/x)^x]^i$$

Si los subperíodos *"m"* son cada vez de menor duración, "m" tenderá a ser cada vez mayor y, por lo tanto, aumentará la cantidad de capitalizaciones

Si *"m"* creciese sin límites, inclusive tendiese e infinito, podría llegar a ser el caso de una capitalización que se sucede en forma ininterrumpida o instantánea, es decir en forma continua.

Por lo tanto conforme *"x"* tome mayores valores y tienda a crecer hasta un infinito el resultado de la ecuación "$(1 + 1/x)^x$" será cada vez mayor pero aumentando a una tasa de crecimiento decreciente pues "m" también tiene su incidencia en la base de la potencia y allí lo hace en forma inversa en el sentido que a medida que aumenta su valor hace que se reduzca la cuantía de la base.

El resultado es un número irracional (de infinitas cifras decimales, no periódicas) que, en Cálculo, se lo expresa como el número "e".

$$e = (1 + 1/x)^x$$

Este es un número irracional y su valor, expresado con nueve decimales, es 2,718281828.

Puede así afirmarse que:

"e" es el valor máximo o límite superior para una cantidad que, en las precitadas condiciones, crece en forma continua y que el resultado de una función con ese tipo de crecimiento será de una cuantía aproximada a ese valor.

En nuestro caso en la siguiente igualdad, "m" tienda a infinito:

$$M = C\,(1 + i/m)^m$$

El valor máximo que tomará será $M = C\,e^i$

En este caso a la tasa "i" se la denomina "tasa instantánea (f)", luego:

$$M = C\,e^f$$

Crecimiento exponencial y continuo utilizando el binomio de Newton

Puede también determinarse la fórmula del monto con capitalización instantánea de otra forma, partiendo del monto a capitalización subperiódica.

$$M = C\,(1 + i/m)^{m\,n}$$

Suponiendo que el capital "C" y el tiempo "n" se expresen valores en unitarios, es decir igual a 1, el monto queda del siguiente modo:

$$M = (1 + i/m)\ m$$

Si:

$$m/i = x$$

$$i/m = 1/x$$

Luego:

$$M = (1 + 1/x)^{m}$$

$$M = [(1 + 1/x)^{m/i}]^{i}$$

$$M = [(1 + 1/x)^{x}]^{i}$$

Si llamamos “A” a la base del exponente “i”:

$$A = (1 + 1/x)^{x}$$

$$M = A^{i} \text{ (II)}$$

Podemos desarrollar “A” por el binomio de Newton:

$\mathbf{A} = (+ 1/x)^{x} = 1^{x}/0 ! + x\ 1^{x-1}/1!\ (1/x)^{1} + x\ (x - 1)\ 1^{x-2}/2!\ (1/x)^{2} + x\ (x - 1)\ (x - 2)\ 1^{x-3}/3!\ (1/x)^{3} + \ldots =$

$= 1 + x/x + x\ (x - 1)\ 1^{x-2}/2!\ (1/x)^{2} + x\ (x - 1)\ (x - 2)\ 1^{x-3}\ /3!\ (1/x)^{3} + ... =$

$= 1 + 1 + x\ (x - 1)\ 1^{x-2}\ /2!\ (1/x\ x) + x\ (x - 1)\ (x - 2)\ 1^{x-3}/3!\ (1/x\ x\ x) + ... =$

$= 2 + [x\ (x - 1)/x\ x)]\ 2! + [x\ (x - 1)\ (x - 2)/\ xxx]/3! + \ldots =$

$= 2 + [x/x * (x- 1)/\ x)]\ 2! + [x/x * (x - 1)\ /x\ (x - 2)/x\ ]/3! + ... =$

$= 2 + [(1 - 1/x)]/2! + [(1 - 1/x)\ (1 - 2/x)]\ /3! + \ldots =$

Si “m” crece en forma constante y tiende a infinito “m/i” también tenderá a infinito y por lo tanto “1/x” tenderá a cero.

Luego:

$$A = (1 + 1/x)\ x = 2 + 1/2! + 1/3! + \ldots$$

$$A = (1 + 1/x)\ x = 2 + \text{una serie decreciente}$$

Determinación del valor de la serie decreciente:

Sumando	Denominador	Factorial	Inverso
Primero	2	2	0,500000000
Segundo	3	6	0,166666667
Tercero	4	24	0,041666667
Cuarto	5	120	0,008333333
Quinto	6	720	0,001388889
Sexto	7	5040	0,000198413
Séptimo	8	40.320	0,000024802
Octavo	9	362.880	0,000002756
Noveno	10	3.628.800	0,000000276
Décimo	11	39.916.800	0,000000025
Undécimo	12	479.001.600	0,000000002
Suma:			**0,718281828**

$$\mathbf{A = (1 + 1/x)^{x} = 2,718281828}$$

El resultado obtenido es igual a un número que se denomina “e” cuya cuantía expresada con nueve decimales, es 2,71821828.

El número “e” es un número irracional, es decir que no puede ser expresado por la razón de dos números enteros o como un número finito de cifras decimales o decimales periódicos.

La utilización del número “e” como base para el cálculo de logaritmos se llama “logaritmo natural o neperiano”; por lo tanto el logaritmo natural de “e” es igual a uno (ln e = 1)

$$A = (1 + 1/x)^{x} = e$$

Por lo antes visto en (II):

$$M = A^{i}$$

$$\mathbf{M = e^{i}}$$

En tanto que para C>1 y n>1

$$\mathbf{M = C\ e^{in}}$$

CAPÍTULO 5
TASAS DE INTERÉS

Introducción

Una “tasa” es un número que expresa la relación existente entre dos magnitudes de una misma especie.

En el caso que se trate de dinero ese número resulta del cociente de la cantidad de dinero generado (interés) respecto al valor que tenía al momento del inicio de la inversión.

Por ejemplo si en un período:

- ♣ el interés obtenido es de $ 450,00
- ♣ sobre un capital de $ 10.000,00

La tasa de interés será: $ 450,00 / $ 10.000,00 = 0,045

Tanto el numerador como el denominador están expresados en una misma especie, luego se simplifica y el resultado es un número.

En este caso indica que por cada unidad de dinero, un peso, se han producido $ 0,045.

Conformación de la tasa de interés

Existen tres componentes básicos en la conformación de una tasa de interés:

1. compensación por la cesión del uso del dinero (tasa mínima de rentabilidad pura),
2. incidencia de la inflación y
3. el riesgo

Compensación por el uso del dinero

> ¿Por qué Pedro le exige a Juan que le devuelva más pescado que el que le prestó? ¿Por qué Juan está dispuesto a hacerlo? En otros términos: ¿por qué existe la tasa de interés?
>
> Porque a nadie le da lo mismo consumir hoy que en el futuro (preferencia en el tiempo) y porque el capital es productivo. Desde el primer punto de vista, la tasa de interés es la remuneración por el sacrificio de diferir el consumo.
> Juan Carlos de Pablo, "El Banco Central no sirve para hacer política social", Diario *La Nación*, 3 de julio de 2011.

La tasa de interés es punto de indiferencia entre la compensación mínima que exige un inversionista por la cesión del uso de su dinero y la mayor retribución que el tomador (deudor) está dispuesto a abonar en función de la rentabilidad esperada de la inversión a realizar.

Inflación

La inflación es *el incremento sostenido del nivel general de precios*.

Luego la tasa de inflación es la expresión en términos relativos de la variación del nivel general de precios.

El interés está expuesto a los nocivos efectos de la inflación, por lo tanto es lógico que se trate de neutralizar ese riesgo.

Esta neutralización o compensación recibe nombre de "prima por inflación".

Luego si la tasa de interés se ajusta por los efectos de la inflación se transforma en una "tasa real de interés"[12].

Riesgo

> La realidad es mucho más viciosa que la ruleta rusa. Primero, disparará la bala fatal con muy poca frecuencia, como un revólver que tuviera cientos, incluso miles de cámaras en vez de seis. Tras unas cuantas docenas de veces, uno se olvida de la existencia de la bala bajo un falso sentido de la seguridad. (Nassim Nicholas Taleb, 2006).

El riesgo es la alternativa de error o fracaso que se asume como posible al momento de tomar una decisión habiendo, previamente, evaluado y analizado las variables concurrentes en ese momento y vinculadas con la decisión.

[12] El tema se desarrollará en detalle en el "Capítulo 6. Tasa real de interés".

En el caso de una inversión financiera se trata de la alternativa de no recuperar el Capital invertido y/o la renta generada.

Este tema excede con holgura el objetivo de este trabajo pero no puede dejar de mencionarse a consecuencia de su fundamental participación en la determinación de la cuantía de la tasa de interés.

El tiempo y el riesgo tienen una correlación directa pues a medida que aumenta el plazo de recupero de la inversión y/o sus rentas aumenta el riesgo y viceversa.

Luego la tasa de interés tiene una correlación directa con el tiempo.

A ese incremento en la cuantía de la tasa de interés se lo llama: "prima de riesgo".

Los inversionistas transforman y trasladan este aumento del riesgo en una mayor cuantía de la tasa interés.

Estructura temporal de la tasa de interés

La tasa de interés al estar directamente correlacionada con el riesgo, a mayor riesgo mayor tasa, y siendo el tiempo un factor de alta y, también, directa correlación en lo que a riesgo respecta, a medida que aumenta el tiempo de recupero del capital y sus frutos el riesgo, por su propia esencia, tiende a aumentar.

De esta realidad deviene que en una inversión a largo plazo las tasas de interés a utilizar serán mayores que las utilizadas para el corto plazo.

La relación que existe se define como "estructura temporal de la tasa de interés".

Así es que, libres de riesgo de incumplimiento, se indica cuáles son las tasas de interés nominales para todo vencimiento e implican, obviamente, el pago futuro de una suma acumulada.

En otras palabras, la conformación o estructura en los plazos, indican el valor de dinero del tiempo para diferentes plazos.

Cuando las tasas a largo plazo son más altas que las tasas a corto plazo, se expresa como que "la estructura a plazo tiene una pendiente ascendente", y por otra parte, cuando las tasas a corto plazo son más altas "tienen una pendiente descendente".

La forma más común de la estructura, habida cuenta de la correlación positiva entre riesgo y tiempo (a mayor plazo mayor tasa y viceversa) es una pendiente ascendente.

Tasas de interés periódicas y subperiódicas

Las tasas de interés pueden expresarse para un período o bien para lapsos de tiempo menores contenidos dentro del período a los que se les llama: "subperíodos".

Luego habrá tasas periódicas y tasas subperiódicas.

Hay dos tipos de tasas periódicas:

- "tasa nominal periódica": la que se nomina para todo el lapso, su símbolo es "i"
- "tasa efectiva" que, tal como seguidamente se demostrará es el rendimiento o costo real del dinero, su símbolo es: "i´"

A partir de esas dos tasas deviene que hay dos tipos de tasas subperiódicas:

- "tasa proporcional" si se parte de una tasa nominal, se la representa de la siguiente forma: "i/m"
- "tasa equivalente" si se origina en una tasa efectiva y se expresa como: "i_m"

Tasa nominal y tasa proporcional

Tasa nominal

Por *tasa nominal se entiende a la tasa de interés convenida o pactada* (nominada, de allí su nombre) para una operación que corresponde a un periodo.

Es una tasa periódica

Lo es pues su magnitud o cuantía se corresponde con un período independientemente de los subperíodos en que pudiere estar dividido el mismo.

No necesariamente la tasa de interés a aplicar está expresada en la unidad de cuenta del tiempo en que se sucede la generación de intereses.

Tasa proporcional

Por uso y práctica la magnitud en que se expresa la tasa de interés es, generalmente, anual o sea una "tasa nominal anual", independientemente del lapso por el cual se pacta la operación.

Por ejemplo:

- El 18% nominal anual para aplicar a una inversión a 90 días.
- El 12% nominal anual para un préstamo hipotecario a devolver en 120 meses.

Luego se debe ajustar al lapso por el que se realiza la operación.

O sea que para operar válidamente a la tasa periódica debe dividírsela por la cantidad de subperíodos posibles dentro del periodo, es decir que se la debe *sincronizar* con el tiempo.

Es decir que "*se la proporciona*".

Por lo visto cuando las magnitudes en que están expresadas tasas y tiempo son distintas debe ajustarse de manera tal que esa relación se torne posible de operar.

Luego: *La tasa proporcional es el cociente resultante de dividir a la tasa periódica por la cantidad de subperíodos contenidos dentro del periodo*.

Tasa efectiva y tasa equivalente

En general una cosa es equivalente a otra cuando el uso indistinto de una de ellas produce el mismo resultado.

Por lo tanto, en términos económicos, una u otra alternativa serán equivalentes cuando el indistinto uso de ellas tenga el mismo costo o beneficio.

Financieramente: *una tasa es equivalente a otra cuando en el mismo periodo de tiempo ambas generan el mismo interés pero con distintos subperíodos de capitalización*.

Luego el desarrollo debe partir del concepto de rendimiento, donde:

- I = es el interés generado en el período “n” con “m” subperíodos de capitalización.
- i = es una tasa nominal periódica
- n = la cantidad de períodos a los que está expuesto el capital
- m = es la cantidad de subperíodos en que se encuentra dividido el período “n”
- m_1 = es otra cantidad de subperíodos en que se encuentra dividido el mismo período “n”

Tasa Efectiva

Dado un capital “C” invertido a la tasa nominal “i” a “n” períodos bajo un régimen de capitalización “m” el interés “I” producido será:

$$I = C\,[(1 + i/m)^{m.n} - 1]$$

Es el l interés efectivamente generado por *la unidad de capital en la unidad de tiempo*.

Si: C = n = 1

$$\mathbf{i' = (1 + i/m)^{m} - 1}$$

Es el interés generado por la unidad de capital en la unidad de tiempo, o sea *una tasa.*

La cual expresa el rendimiento efectivo por la unidad de capital en la unidad de tiempo, a la que se le llama o define como: “tasa efectiva”.

A partir de la tasa efectiva periódica es posible determinar una tasa subperiódica que exprese, asimismo, el rendimiento efectivo para ese lapso menor y se la llama “tasa equivalente”.

Tasa Equivalente

Para el desarrollo de la fórmula de la tasa equivalente existe, como en el caso de la tasa efectiva, más de una forma de razonar, en este caso lo haremos de dos maneras diferentes.

Desarrollo a)

Luego, según la definición de equivalencia:

$$(1 + i/m)^{m} - 1 = (1 + i_{m})^{m_1} - 1$$

$$(1 + i/m)^{m} = (1 + i_{m})^{m_1}$$

$$\mathbf{i_m = (1 + i/m)^{m/m_1} - 1}$$

Otra forma de expresar la misma igualdad es:

$$\left[\sqrt[m_1]{(1 + i/m)} \right]^{m} - 1 = i_m$$

Desarrollo b)

Partiendo de la igualdad:

$$\mathbf{i_m = (1 + i/m)^{m/m_1} - 1}$$

Y considerando que por definición de tasa equivalente tanto "m " como "m1" son fracciones que indican subperíodos de capitalización dentro de un mismo periodo, por lo tanto ambas deben estar expresadas con idéntico numerador y sus denominadores en las mismas unidades de cuenta.

Luego si:

- ♣ $m = y/x$
- ♣ $m_1 = y/z$

Entonces:

$$m/m_1 = (y/x) / (y/z) = (y\ z) / (x\ y) = z/x$$

Luego:

$$(1 + i/m)^{m/m_1} - 1 = (1 + i/m)^{z/x} - 1 = i_m$$

o sea que:

$$\left[\sqrt[x]{(1 + i/m)} \right]^{z} - 1 = i_m$$

Esta fórmula dice que el monto producido por la unidad de cuenta a una tasa proporcional en la unidad de tiempo (1 + i/m) *es reducido, en términos exponenciales, a la mínima expresión posible y luego se lo capitaliza a la cantidad de subperíodos que indica la tasa buscada.*

Por lo antes visto podemos expresarla como:

$$\mathbf{(1 + i/m)^{z/x} - 1 = i_m}$$

Luego esta fórmula se interpreta como que la tasa "i" va a tener en el caso de "y/x" subperíodos de capitalización, el mismo rendimiento que la tasa "i_m" en "y/z" subperíodos de capitalización.

Ejemplo:

Dada una tasa del 3,50% para un período de 70 días calcular la tasa equivalente para operaciones a 210 días; verificar:

$$(1 + i)^m - 1 = (1 + i_m)^{m}{}_1 - 1$$

Donde:

- $m = y/x = 365/70$
- $m_1 = y/z = 365/210$

Luego:

$$(1 + i)^{y/x} - 1 = (1 + i_m)^{y/z} - 1$$

$$(1 + 0{,}035)^{365/70} - 1 = (1 + i_m)^{365/210} - 1$$

$$(1 + 0{,}035)^{(365/70) * (210/365)} - 1 = i_m$$

$$(1 + 0{,}035)^{210/70} - 1 = 0{,}10872$$

Verificación:

Una manera de hacerlo es determinar la tasa efectiva anual para ambas tasas, si es correcto el resultado obtenido los resultados para ambas alternativas deben ser iguales.

$$(1 + 0{,}035)^{365/70} - 1 = 0{,}19647$$

$$(1 + 0{,}10872)^{365/210} - 1 = 0{,}19647$$

Interpretación de la fórmula

$$\mathbf{i_m = (1 + i/m)^{m/m}{}_1 - 1}$$

La interpretación literal de esa fórmula es:

Dada una tasa nominal periódica "i":

- En primer lugar se la debe proporcionalizar al lapso *subperiódico de capitalización "*m*" y, de este modo, se obtiene* la **tasa, subperiódica, proporcional** "i/m".

  Nota importante*: esa tasa "i/m" que deviene de una tasa nominal periódica tienen una doble interpretación según el destino o uso al que se la aplique, a saber:*

  a) es una tasas proporcional respecto a la tasa nominal de la cual procede,

  b) es una tasa equivalente respecto al rendimiento efectivo del período.

- Luego, a partir de esa tasa subperiódica es posible calcular la tasa equivalente para la unidad de cuenta en que está expresado el subperíodo "m_1", para ello se calcula la raíz "m_1".
- Calculada la tasa equivalente para el lapso en que se expresa "m_1" es posible calcular la tasa equivalente para el lapso en que se expresa el subperíodo "m" para ello se la "eleva" a "m".
- Así también, en general, se puede afirmar que obtenida la tasa equivalente para la unidad de cuenta es posible calcular la tasa equivalente para el lapso que se la quiera calcular, o sea que el procedimiento es el mismo más allá del valor que pueda tener "m".

*Matemáticamente **se trata de una potencia fraccionaria** donde el denominador es una raíz que la reduce a la mínima expresión subperiódica y el numerador es una potencia.*

Tasa de interés instantánea

Partiendo de las siguientes igualdades se puede obtener la fórmula de la tasa instantánea

$$M_1 = C\,(1 + i/m)^m$$

$$M_2 = C\,e^{i\,m}$$

Al solo efecto de diferenciar las tasas a la tasa continua la simbolizaremos con la letra "f"

Si:

$$M_1 = M_2$$

$$C\,(1 + i/m)^m = C\,e^{fm}$$

Luego si:

$$C = 1 \text{ y } m = 1$$

$$1 + i = e^f$$

$$\ln(1 + i) = f\, l_n\, e$$

$$\mathbf{f = l_n\,(1 + i)}$$

Tasa de interés que se pacta

> **Tasa nominal o cotizada**. Esta es la tasa que cotizan los prestamistas y prestatarios. Los profesionales del mercado de acciones, bonos, hipotecas, préstamos comerciales, préstamos al consumidor, banca y otros sectores más expresan todos los contratos financieros en términos de tasas nominales. Por lo tanto si se habla acerca de las tasas con que un banquero, un corredor, un prestamista de hipotecas, una compañía de financiamiento de automóviles o

> un funcionario de préstamos para estudiantes, por lo general se referirán a las tasas nominales. Sin embargo para que tenga significado, la cotización de la tasa nominal también debe incluir el número de periodos de composición por año (J. Fred Weston y Eugene F. Brigham, 1994).

Al solo efecto de expresar en este punto el modo en el que, generalmente por uso y práctica, se pacta una operación financiera *la tasa de interés a utilizar se expresa en términos de "*tasa nominal periódica".

Luego, si así fuere, previo al cálculo corresponderá proporcionalizarla según la magnitud del tiempo.

CAPÍTULO 6
TASA REAL DE INTERÉS

Introducción

Dada una suma de dinero "C" colocada a interés tiene, a su vencimiento, un valor mayor "M" que si bien es nominalmente mayor es equivalente en términos financieros.

Otro cuestión es saber si la primera cantidad, en el momento inicial, tiene una capacidad de compra mayor, igual o menor que la segunda, en el momento final.

Para ello debe, necesariamente, analizarse el efecto que sobre esas cantidades, en ese lapso, ha tenido un eventual proceso inflacionario.

El objetivo es *determinar la incidencia de la inflación sobre la capacidad de compra del dinero colocado a interés*.

Si consideramos dos momentos del tiempo con determinados supuestos respecto a tasas de interés e inflación podremos cuantificar los efectos de la misma sobre la inversión realizada.

Supongamos que en el momento inicial disponemos de $ 1.000,00 y que lo colocamos a interés a un año a la tasa del 30% anual y que en ese mismo momento el precio promedio de la canasta de comestibles era de $ 2,00 y que en el mismo lapso, o sea un año, se incrementó en un 10%.

En el momento inicial: el precio promedio de la canasta de comestibles era de $ 2,00; luego con $ 1.000,00 podíamos comprar 500 unidades.

En el momento final tendremos $ 1.300,00 a consecuencia del interés ganado y por otra parte el precio promedio de los comestibles será de $ 2,20

Si los efectos de la inflación fueran lineales podríamos afirmar que al fin del lapso podríamos comprar un total de 600 unidades de comestibles, o sea un 20% más pues nuestra inversión creció un 30% y el precio promedio de comestibles un 10%; pero no es así.

Podemos comprar: $ 1.300,00/$ 2,20 unidades = 590,91 unidades.

Luego el resultado real será la mayor o menor capacidad de compra que tiene el dinero disponible en cada uno de los momentos.

Desarrollo analítico

Supuestos y nomenclatura

Consideraremos dos momentos: el primer momento es hoy y el otro es al vencimiento de la operación.

```
       0                                             n
-------/---------------------------------------------/-------
     Hoy                                       vencimiento
```

Nomenclatura:

- ♣ n : el tiempo que transcurre desde el día de hoy hasta el vencimiento de la operación.
- ♣ r : tasa de rendimiento real de la operatoria en el lapso “n”.
- ♣ i : tasa de interés para el período “n”.
- ♣ f : tasa de inflación.

Variables

El caso tiene dos variables —precio de la nafta (o bienes en general) y dinero— que a su vez se cotizan en dos momentos diferentes, luego resultan cuatro importes, a saber:

Variables	Valores presentes	Valores futuros
Precios	De los bienes hoy “ Po”	De los bienes en el futuro “Pf”
Dinero	Hoy “C”	Al final “M”
Relación de los precios		Pf = Po (1 + f)
Relación del dinero		M = C (1 + i)

Representadas en un eje del tiempo quedarían:

```
   Hoy                                     vencimiento
   0                                                n
---/-----------------------------------------------/----
   Po                                              Pf
   C                                               M
```

Capacidad de compra

La capacidad de compra es la relación existente —cantidad de bienes posibles de compra— entre la suma de dinero disponible y el precio de esos bienes.

Nomenclatura	Capacidad de compra	Relación
Ko	Inicial	C / Po
Kf	Final	M / Pf

Tasa real

Es la variación relativa existente entre la diferencia de las capacidades de compra final e inicial respecto a la capacidad de compra inicial.

$$r = \frac{Kf - Ko}{Ko}$$

$$r = \left(\frac{M}{Pf} - \frac{C}{Po}\right)\frac{Po}{C}$$

$$r = \left[\frac{C\,(1+i)}{Po\,(1+f)} - \frac{C}{Po}\right]\frac{Po}{C}$$

$$r = \frac{C\,(1+i) - C\,(1+f)}{Po\,(1+f)}\;\frac{Po}{C}$$

$$r = \frac{C\,[(1+I) - (1+f)]}{Po\,(1+f)}\;\frac{Po}{C}$$

$$r = \frac{C\,(i - f)}{Po\,(1+f)}\;\frac{Po}{C}$$

$$\mathbf{r = \frac{i - f}{1 + f}}$$

Comprobación

En base a los datos dados al inicio:

- ♣ Tasa de inversión: 30%.
- ♣ Tasa de inflación: 10%.

$$r = (0{,}30 - 0{,}10) / (1+ 0{,}10) = 0{,}20/1{,}10 = 0{,}181818$$

Cantidad inicial = 500 unidades

Aumento de la capacidad de compra = 500 * 1,181818 = 90,91

Total a comprar = 590,91

Conclusión

El rendimiento real, de la unidad de capital en la unidad de tiempo, de una operación realizada a una tasa de interés “i” que ha sido afectada por una diferencia de precios “f” es igual a la diferencia entre las tasas de interés e inflación ajustada, esa diferencia, por un factor de actualización igual a la unidad más la tasa de inflación.

Efecto Fisher

Otra manera de determinar o calcular la tasa real de interés es a partir del desarrollo realizado por el Sr. Irwing Fisher.

El Sr. Irwing Fisher (1867-1947) fue un economista estadounidense que dedicó buena parte de su tiempo al estudio de las relaciones entre las divisas, la inflación y el efecto de esta sobre las inversiones y formuló, al respecto, una ecuación que se utiliza para calcular las tasas de interés reales y nominales, considerando la inflación.

Introducción

El denominado “efecto Fisher” es una teoría que relaciona, para un mismo lapso, a la tasa de interés periódica con la tasa de inflación y determina una tasa real de interés.

Esa tasa real de interés es el resultado de descontar los efectos de las variaciones de precios sobre la tasa de interés para un período dado.

Se puede expresar como que: “la tasa de interés real es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de inflación menos la incidencia de la inflación respecto a la tasa real de interés”.

Nomenclatura

- ♣ “i” tasa periódica,
- ♣ “f” tasa de inflación
- ♣ “r” tasa real

Deducciones

Luego la precitada definición puede ser expresada como:

$$r = i - f - r\,f$$

Y a partir de allí deducir la tasa real de interés:

$$r = i - f - r f$$

$$r + r f = i - f$$

$$r (1 + f) = i - f$$

$$r = (i - f) / (1 + f)$$

Desde otro punto de vista, para obtener un rendimiento igual a la tasa de interés periódica “i” se debe tener presente que si

$$r = i - f - r f$$

Entonces:

$$i = r + f + r f$$

Donde:

1. “r” es la tasa real esperada
2. “f” es la compensación por el decremento en el valor de dinero invertido a consecuencia de la inflación
3. “rf” la compensación por el hecho de que el dinero ganado sobre inversión también vale menos a consecuencia de la misma inflación.

Y a partir de allí también se puede obtener la “tasa real”:

$$i = r + f + r f$$

$$i = f + r + r f$$

$$i = f + r (1 + f)$$

$$i - f = r (1 + f)$$

$$r = (i - f) / (1 + f)$$

Ejemplos

Determinar la tasa real

Dada una tasa de interés “i” del 15,00 y una la tasa de inflación “f” del 7,50%, para un mismo período, determinar la tasa real de interés.

$$r = (0{,}15 - 0{,}075) / (1 + 0{,}075) = 0{,}06977$$

Determinar la tasa de interés periódica

Si se espera que una inversión financiera tenga un rendimiento real del 15,00% en un marco de inflación, para el mismo período, del 6,00%, determinar la tasa de interés a la que ha de colocarse el dinero.

$$r = (i - f) / (1 + f)$$

$$r (1+ f) = i - f$$

$$i = r (1+ f) + f$$

Reemplazando:

$$i = 0,15 (1 + 0,06) + 0,06 = 0,219$$

Comprobación:

$$r = (0,219 – 0,06) / 1,06 = 0,159/1,06 = 0,15$$

CAPÍTULO 7
ACTUALIZACIONES

El proceso que consiste en determinar el valor actual del dinero futuro se suele llamar “descuento”. Es importante porque una vez fijado el tipo de interés, permite comparar las cantidades de dinero recibidas en diferentes momentos. (John Allen Paulos, 2009)

Conceptos previos

En los capítulos precedentes hemos visto que es posible desplazarnos en el tiempo sea en sentido positivo o negativo y, hasta ahora, nos hemos detenido a analizar la forma “positiva”.

Ahora trataremos el modo de proceder de manera tal que podamos determinar el valor de una obligación en un momento cualquiera del tiempo desde su generación y hasta el día de su vencimiento.

Utilizando los conceptos y herramientas que conforman el “Cálculo Financiero” es posible movernos en el tiempo, posicionarnos en algún momento cualquiera del lapso de la vida de la obligación y determinar el valor que esa transacción tiene ese día.

Obviamente que el valor pactado o nominal será igual a su valor real el día de su vencimiento no antes ni después. Será menor o superior, respectivamente.

Devengamiento y exigibilidad

Esto tiene una directa correlación con los conceptos económicos contables del “devengamiento” y la “exigibilidad”.

Ambos son dos momentos diferentes en el lapso de una misma obligación y conforman los extremos de su vida.

El primero es el momento en que nace y el segundo es la fecha en que se ha de efectivizar o cumplir.

Desde otro punto de vista es el reconocimiento de las pérdidas y ganancias en función del tiempo, independientemente de haberlas pagado o cobrado.

A su vez esta realidad es la que da origen a dos situaciones que si bien tienen en común un mismo origen son sustancialmente diferentes entre sí: lo económico y lo financiero.

Lo “económico” está relacionado con el patrimonio de un ente: tenencias, derechos y compromisos, en tanto que lo “financiero” relaciona a los flujos de dinero sin considerar aspectos o situaciones patrimoniales de los actores, sea el deudor o el acreedor.

Desde un punto de vista contable resulta obligatoria la registración en base al principio de lo “devengado” o sea la fecha de nacimiento del compromiso pues al operar bajo esta modalidad la compilación de estos registros “asientos contables” base de los Estados Contables reflejan la realidad y así no sería si se hiciera por el método de lo “percibido” o “de caja”.

Esta modalidad es uno de los “Principios de Contabilidad Generalmente Aceptados” a nivel internacional y constituye, por sí mismo, uno de los pilares en que se funda la conformación de los Estados Contables.

Es por ello que al momento de practicar el balance correspondiente al cierre del ejercicio comercial de un ente, sea una persona física o jurídica, se ha de proceder a determinar el valor que todos y cada uno de sus derechos y obligaciones financieras tienen ese día, difiriendo los resultados, sean positivos o negativos a la fecha de su exigibilidad. Esto sin duda alguna altera el resultado del ejercicio que se está “cerrando” y tendrá consecuencias en la cuantía de su resultado.

Se puede aseverar que es, financieramente, posible calcular el valor de un flujo de fondos en todos y cada uno de los momentos de su vida.

Descuento

Definiremos como “Descuento” a la quita que se le hace a una operación financiera no vencida.

Es común ver que, en el comercio o finanzas, la “quita” se realiza sobre el valor nominal de la obligación lo que es financieramente incorrecto pues antes de su vencimiento, por definición, el valor de la obligación es menor que el del día de su vencimiento.

Concretamente: *se está haciendo una quita sobre un valor que aún no se ha generado.*

Financieramente corresponde que el descuento se practique sobre el valor que tiene la obligación el día que se realiza la quita.

Interés y Descuento son, en términos de dinero o valores absolutos, esencialmente lo mismo pero en direcciones opuestas.

Es Descuento es una quita, el Interés es un cargo.

Nomenclatura

- D = Descuento
- Valor presente o valor actual: $C = VA = V = V_o$
- Valor nominal o valor final: $M = VF = N = VN = V_n$

Desarrollo aritmético

Definido el Descuento como: el interés del valor actual, cabe distinguir que la tasa de interés periódica a utilizar puede ser expresada como: una tasa nominal o bien una tasa efectiva.

Luego:

$$D = \frac{N}{(1 + i)^n} \left[(1 + i)^n - 1\right]$$

Con tasa nominal

Si la tasa es nominal y existen subperíodos de capitalización se debe, en primer lugar, proporcionarla al tiempo.

Como: m > 1 y la tasa es nominal periódica, queda:

$$\mathbf{D = \frac{N}{(1 + i/_m)^{m\,n}} \left[(1 + i/_m)^{m\,n} - 1\right]}$$

Es la forma de calcular el D cuando la tasa de interés está expresada en forma nominal periódica y existen subperíodos de capitalización.

Es posible reducir esta fórmula.

Luego:

$$D = \frac{N}{(1 + i/_m)^{m\,n}} \left[(1 + i/_m)^{m\,n} - 1\right]$$

$$D = \frac{N\,(1 + i/_m)^{m\,n}}{(1 + i/_m)^{m\,n}} - \frac{N}{(1 + i/_m)^{m\,n}}.$$

$$D_3 = N - \frac{N}{(1 + i/_m)^{m\,n}}.$$

$$\mathbf{D = N\ [1 - \frac{1}{(1 + i/_m)^{m\,n}}\ ]}$$

De ese modo se llega al mismo resultado pero de una forma diferente.

Aquí queda visto y expresado en forma clara e inequívoca que el descuento para la unidad de capital es igual a la diferencia entre esa unidad de capital y el valor actual de la misma. Si a esa quita para la unidad de capital se la multiplica por el valor nominal "N" se obtiene el descuento para esa cantidad.

Con tasa equivalente/efectiva

Si la tasa está expresada en términos exponenciales, equivalente para el subperíodo o efectiva para el período, estamos diciendo que debemos mantener el costo/rendimiento efectivo al valor que indica la tasa.

El resultado obtenido es el pactado y la tasa efectiva resultante deberá ser igual a la pactada.

Por lo tanto aquí lo que importa es que vencido el plazo (total del período) el rendimiento o costo real resultante sea el que efectivamente se ha pactado.

Partiremos del análisis del caso de una capitalización de intereses en subperíodos donde puede ser que la tasa dada esté expresada en igual o no en la misma magnitud que el período pero si, necesariamente, que existan subperíodos de capitalización.

Por lo tanto lo primero es determinar la tasa equivalente a ese segmento de tiempo que está contenido dentro del tiempo correspondiente a la magnitud en que está expresada la tasa.

Luego de determinada esa tasa deberá ser aplicada como tasa de interés en la fórmula de monto y que sea sometida al régimen de capitalización correspondiente.

Luego y partiendo de la fórmula de Descuento Compuesto y considerando que el rendimiento o costo debe ser el efectivamente pactado para el período utilizaremos para actualizar y para el cálculo del interés una tasa equivalente o sea $\mathbf{i_m}$.

$$D = \frac{N}{(1 + i_m)^m} * [(1 + i_m)^m - 1]$$

$$D = N\ [1 - \frac{1}{(1 + i_m)^m}\ ]$$

Luego al tener que aplicar una tasa equivalente debemos obtener la misma a partir del dato de tasa efectiva dada:

$$i' = (1 + i_m)^m - 1$$

$$i_m = (1 + i')^{1/m} - 1$$

$$D = N\ [1 - \frac{1}{(1 + i_m)}\ ]$$

Luego corresponde reemplazar i m por su igual:

$$D = N \left\{1 - \frac{1}{1 + [(1 + i')^{1/m} - 1]}\right\}$$

$$\mathbf{D = N \left[1 - \frac{1}{(1 + i')^{1/m}}\right]}$$

Fórmula de D cuando la tasa de interés está expresada en términos de tasa equivalente/efectiva y existen períodos de capitalización.

CAPÍTULO 8
TASA DE DESCUENTO

Conceptos

Nota preliminar

Visto que una obligación tiene tantos valores como momentos en los que nos posicionemos a lo largo de su vida y que la quita de una suma sobre su valor nominal, constituye el "descuento" se puede inferir que la quita para la unidad de capital en la unidad de tiempo será la "tasa de descuento".

Tasa de descuento

Así entonces ese ratio o fracción resulta ser un número que surge de relacionar al descuento con el valor nominal.

Es la "quita" que se realiza a cada unidad del valor nominal en la unidad de tiempo.

Por lo tanto:

$$d = \frac{N - V}{N} = \frac{D}{N}$$

Al ser el Valor Nominal mayor que el Valor Actual el Descuento no tendrá el mismo valor relativo si se lo relaciona con el primero o con el segundo.

Vimos que resulta ser la "tasa de interés" si se lo relaciona con el Valor Actual y la "tasa de descuento" si se lo hace con el Valor Nominal.

Pero en ambos casos es la misma cantidad en términos absolutos.

Evidentemente será numerariamente menor si se la relaciona con el Valor Nominal que si fuera hecho con el Valor Actual.

Por lo tanto para poder analizar el rendimiento/costo tendremos que buscar la forma o manera que permita expresar esa tasa de descuento en términos de una tasa de interés.

Tasa de descuento - Tasa de interés: Relaciones entre ellas

Tasa de descuento en función de la tasa de interés

Por lo ante visto si a un Capital se le suma el Interés se obtiene un Monto:

$$M = C + I$$

Luego si se parte de un Monto para obtener el Capital hay que restar el Interés:

$$C = M - I$$

Vimos ya que:

- Conceptualmente es indistinto llamar al valor presente "Capital" o "Valor Actual" y al valor final "Monto" o "Valor Nominal"
- Para la generación de intereses es condición necesaria el transcurso del tiempo, de hecho si "n = 0" todo el producto se anula pues toda potencia elevada a cero es igual a uno y, por lo tanto, el Monto será igual al Capital.
- Es posible restar o quitar una cantidad a un valor futuro y, de ese modo, determinar el valor presente para determinar el valor actual y en tal caso a la cantidad que resta se la denomina "Descuento".

La diferencia entre Capital y Monto es una cantidad que se le llama de diferente forma según se adicione al Capital o se reste al Monto, "Interés" o "Descuento", respectivamente; por lo tanto esa cantidad expresada en términos relativos o de "tasas" tendrá un resultado diferente según se la relacione con el "Capital" o el "Monto" pues estos no son cantidades idénticas.

/ --- /
C M

$$M = C\ (1 + i/m)^{n\ m}$$

Al operar con tasas se analiza la variación para la unidad de capital en la unidad de tiempo, por lo tanto si:

- $C = 1$
- $m = 1$
- $n = 1$

Luego, analíticamente:

$$M = 1 + i$$

Es decir que el Interés generado para la unidad de capital en la unidad de tiempo es "i".

Luego para que el Descuento sea una suma igual que el Interés se debe aplicar, necesariamente, una tasa de menor cuantía pues el Monto es de un valor superior al Capital.

Le llamaremos "tasa de descuento" y la representaremos como "d"

Por lo tanto y según lo antes dicho:

$$D = I$$

$$M\, d = C\, i \qquad \textbf{(1)}$$

Como:

$$C = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$M = 1 + i \qquad \textbf{(3)}$$

Reemplazando en **(1)** las magnitudes expresadas en **(2)** y **(3)**

$$(1 + i)\, d = i$$

Luego:

$$\mathbf{d = \frac{i}{1 + i}}$$

Tasa de descuento en función del Descuento

$$D = N - V$$

$$D = N - \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$D = N \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$D = N \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$D = N \left[\frac{(1 + i)^n}{(1 + i)^n} - \frac{1}{(1 + i)^n}\right]$$

$$D = N \left(1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right)$$

Si:

- ♣ N = $ 1,00.
- ♣ n = 1

Entonces: D pasa a ser el descuento para la unidad de capital o sea una tasa que hemos llamado “d”.

Luego, reemplazando:

$$d = 1 - \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{1+i-1}{1+i}$$

$$\mathbf{d = \frac{i}{1+i}}$$

Proporcionalización de las tasas

Para los casos en que hubiere distintas magnitudes de tiempo hay que sincronizar la operación o sea proporcionalizar las tasas:

$$\mathbf{d/m = (i/m) / (1 + i/m)}$$

$$\mathbf{i/m = (d/m) / (1 - d/m)}$$

Valor actual en función de la tasa de descuento

Determinación de la tasa de descuento en función de la tasa de interés

El Valor Actual para la unidad de capital, en la unidad de tiempo, será:

$$V = 1 - d$$

Para el caso que N > 1, y en el caso que n = 1, será:

$$V_1 = N - N * d$$

$$V_1 = N (1 - d)$$

A medida que va transcurriendo el tiempo, o sea que “n” va aumentando se irá incrementando el descuento, por lo tanto:

$$V_1 = N (1 - d)$$

$$V_2 = V_1 - V_1 d = V_1 (1 - d) = N (1 - d) (1 - d) = N (1 - d)^2$$

$$V_3 = V_2 - V_2\, d = V_2 (1 - d) = N (1 - d)^2 (1 - d) = N (1 - d)^3$$

Así sucesivamente hasta llegar al "n" período, allí será:

$$V_n = V_{(n-1)} - V_{(n-1)}\, d = V_{(n-1)} (1 - d) = N (1 - d)^{(n-1)} (1 - d) = N (1 - d)^n$$

$$\mathbf{V_n = N (1 - d)^n}$$

Formulas derivadas

- ♣ Valor Nominal:

$$V_n = N (1 - d)^n$$

$$\mathbf{N = V_n/(1 - d)^n}$$

- ♣ Descuento:

$$D = N - V$$

$$D = \frac{V}{(1 - d)^n} - N (1 - d)^n$$

$$D = \frac{V}{(1 - d)^n} - V$$

$$D = V \left[\frac{1}{(1 - d)^n} - 1\right]$$

$$\mathbf{D = V\, \frac{1 - (1 - d)^n}{(1 - d)^n}}$$

CAPÍTULO 9
FACTORES DE ACTUALIZACIÓN Y DE CAPITALIZACIÓN

Introducción

Por lo visto en los capítulos anteriores podemos partir de la base que *un factor de capitalización o de actualización es un multiplicador* que transforma, en el tiempo, una suma de dinero en otra.

Factor de Capitalización

Dicho en otros términos *el factor de capitalización es el resultado de:*

Sumar a la unidad de capital una tasa de interés y a ese total elevarlo a una potencia igual a: el producto obtenido de la multiplicación de la cantidad de subperíodos "m" que existen dentro de cada período "n" por la cantidad de esos "n" períodos:

$$(1 + i)^{m\,n}$$

Ese multiplicador es el factor que se aplica a una cantidad de dinero inicial "Capital" de cuyo producto resulta una suma de mayor cuantía "Monto".

Es desplazarnos en sentido positivo en el tiempo: *es ir del presente al futuro o de un punto del futuro a otro más lejano.*

Factor de Actualización

Para determinar el valor previo de una obligación con fecha de vencimiento en el futuro debemos operar en forma inversa.

Es decir: debemos quitar intereses[13].

Para su análisis partiremos del valor que esa obligación tiene a la fecha de su vencimiento y que aún no ha vencido.

A esa cantidad o suma (que es el Valor Actual de esa obligación en el momento "n") le llamaremos indistintamente *Monto, Valor Final o Valor Nominal* y el objetivo es obtener el *Valor Actual* o sea lo que vale en una fecha cualquiera antes de su vencimiento.

Para quitar intereses deberemos multiplicar el valor que la obligación tiene a la fecha de su vencimiento por un multiplicador que quite intereses, es decir un factor inverso al que genera intereses, a saber:

$$(1 + i/m)^{-m\,n}$$

A ese multiplicador le llamaremos: *factor de actualización*.

Es desplazarnos en sentido negativo en el tiempo, es traer del futuro a hoy o bien de un punto del futuro a otro punto que no sea hoy pero más cercano.

Simplemente: un factor de actualización es la inversa de un factor de capitalización: es un factor de capitalización elevado a menos uno.

Gráficamente:

Desplazamiento en sentido positivo: *capitalización*

$\longrightarrow$

0 n

/ -- /

$\longleftarrow$

Desplazamiento en sentido negativo: *actualización*

Valor Actual — Valor Final

Capital — Monto

Expresión y desarrollo analítico

Dado que en los factores vistos interviene una tasa de interés puede suceder que esa tasa sea nominal o efectiva para el período y que existan o no subperíodos de capitalización.

Con tasa nominal

Iniciaremos este análisis a partir de la fórmula de Monto y utilizando una tasa nominal periódica.

[13] Para mayor detalle ver el capítulo "Actualizaciones".

En primer lugar se debe proporcionalizar la tasa de interés, de lo que resulta:

$$\text{Monto} = C\,(1+ i/m)^{m\,n}$$

No se altera el resultado si lo queremos expresar en función de la variación para la unidad, o sea que C = \$ 1,00 y en tal caso, la fórmula quedara:

$$M = (1 + i/m)^{m\,n}$$

En el segundo miembro de la igualdad queda un multiplicador de un capital cualquiera y da como resultado el Monto al cabo de "n" períodos.

En este caso es la unidad de capital más los intereses ganados por ese capital.

Es el segundo miembro de la igualdad un "Factor de Capitalización".

Generalmente el período es la unidad de tiempo, luego "n" es igual a 1 y, por lo tanto no figura en la fórmula.

$$\text{Factor de capitalización} = (1 + i/m)^{m}$$

Con este factor nos desplazamos en forma positiva en el tiempo.

Pero, como ya vimos, también es posible movernos en forma negativa, o sea "volver" en el tiempo será necesario aplicar un factor inverso al mismo al que llamamos "Factor de Actualización" o sea:

$$\text{Factor de actualización} = (1 + i/m)^{-m}$$

Con tasa efectiva

Pero si partimos de que la tasa dada como dato es efectiva para ese período corresponderá determinar la tasa equivalente para ese subperíodo, de manera tal que de su aplicación resulte el costo/rendimiento efectivamente pactado.

Luego al tener que aplicar una tasa equivalente partiendo de una tasa efectiva, lo primero que hay que hacer es determinar la misma a partir de la tasa efectiva dada:

$$i' = (1 + i_m)^{m} - 1$$

$$i_m = (1 + i')^{1/m} - 1$$

Obtenida la tasa equivalente a partir del dato de la tasa efectiva la aplicamos en la fórmula del factor de Capitalización:

$$\text{Factor de capitalización: } (1+ i_m)$$

Reemplazando:

$$(1 + i_m) = 1 + (1 + i')^{1/m} - 1 = (1 + i')^{1/m}$$

Por lo tanto queda:

- ♣ Factor de capitalización: $(1 + i')^{1/m}$
- ♣ Factor de actualización: $(1 + i')^{-1/m}$

Conclusión

Son los factores de actualización y de capitalización los medios idóneos y necesarios para desplazarnos en el tiempo y determinar el valor de una obligación en cualquier punto del eje del tiempo.

Es de suma utilidad tener clara la importancia de este concepto, lo que nos permitirá comprender los restantes capítulos a desarrollar.

Ejemplos:

A partir de una tasa nominal periódica:

- ♣ Determinar el monto producido por un capital de \$ 1, que, a una tasa nominal para 365 días del 12%, se coloca por un lapso de 365 días con capitalización cada 45 días.

$$M = C\ (1+ i/_{m})^{m\ n}$$

$$M = (1+ 0{,}12/_{365/45})^{365/45\ *\ 1} = 1{,}12651$$

- ♣ Determinar el monto producido por un capital de \$ 1,00 que, a una tasa nominal para 365 días del 12 %, se coloca por un lapso de 450 días con capitalización cada 45 días.

$$M = C\ (1+ i/m)^{m\ n}$$

$$M = (1+ 0{,}12/365/45)^{365/45\ *\ 450/365} = 1{,}15819$$

- ♣ Determinar el Interés producido por un capital de \$ 1,00 que, a una tasa nominal para 450 días del 12 %, se coloca por un lapso de 450 días con capitalización cada 45 días.

$$M = C\ (1+ i/m)^{i\ n}$$

$$M = (1+ 0{,}12/450/45)^{450/45\ *\ 1} = 1{,}12669$$

De tasa efectiva periódica:

- ♣ Determinar el Monto producido por un capital de \$ 1,00 que, a una tasa efectiva para 365 días del 12%, se coloca por un lapso de 365 días con capitalización cada 45 días.

$$M = C\ (1+ i_{m})^{m\ n}$$

$$M = (1+ 0{,}12)^{365/45\ *\ 45/365} = 1{,}12$$

- ♣ Determinar el Monto producido por un capital de \$ 1,00 que, a una tasa efectiva para 365 días del 12%, se coloca por un lapso de 450 días con capitalización cada 45 días.

$$M = C\ (1+ i_m)^{m\ n}$$

$$M = (1+ 0,12)^{45/365\ *\ 450/45} = 1,14995$$

- Determinar el Monto producido por un capital de \$ 1,00 que, a una tasa efectiva para 450 días del 12 %, se coloca por un lapso de 450 días con capitalización cada 45 días -

$$M = C\ (1 + i_{\ m})^{m\ n}$$

$$M = (1+ 0,12)^{45/450\ *\ 450/45} = 1,12$$

CAPÍTULO 10
EQUIVALENCIA FINANCIERA

Introducción

Hasta aquí hemos visto y concluido que todo "capital financiero" tiene más de un valor y el mismo depende del momento en que nos posicionemos en el tiempo.

Instrumentación

Valorizaciones

Así, entonces, habrá, en extremo dos valores previamente acordados: el de la fecha en que se pacta el acuerdo y el que tendrá ese al momento de su exigibilidad o vencimiento.

La diferencia entre ambos es el "Interés".

En síntesis:

- ♣ Un valor es el que figura escrito en el instrumento.

  Es la cantidad de dinero que el "deudor" se obliga a pagar o a reintegrar al tomador del crédito o "acreedor" el día de vencimiento de esa operación o préstamo.

  Se trata de una cantidad cierta y determinada a la que se define como "Valor Nominal".

  Indistintamente se la denomina como: "Valor final" o "Monto".

- ♣ El otro valor es la cantidad de dinero que esa operación tiene en un momento previo o posterior al de la fecha de su vencimiento.

En este caso puede suceder que se calcule su valor “corriente” es decir al día de la fecha y en tal caso se la denomina “Valor Presente” o “Valor Actual”.

Esta no es una cantidad fija sino que a medida que transcurra el tiempo se irá incrementando.

Conclusión

Luego dos o más operaciones financieras, en general: flujos de fondos, que tienen una diferente composición en la cronología de sus movimientos y/o cuantías dinerarias son equivalentes entre sí cuando —valorizados a un mismo momento del tiempo y a una misma tasa de interés— tienen el mismo valor actual.

Así, entonces, existirá una relación entre las diferentes magnitudes o valores que en el transcurso de su vida financiera vaya tomando el valor de ese Capital.

Ejemplos:

Para el caso de flujos de fondos

Dados dos flujos de fondos que difieren en la sumatoria de sus valores nominales y en las fechas de vencimiento de cada obligación y operando, en ambos casos, a una tasa efectiva anual del 25 % resulta que sendos valores actuales son de una misma magnitud. Luego son equivalentes.

Flujos de Fondos							
Primero				**Segundo**			
Vto.	**Importe**	**Descuento**	**Valor Actual**	**Vto.**	**Importe**	**Descuento**	**Valor Actual**
30	$ 51.530,00	$ 936,48	$ 50.593,52	30	$ 75.580,00	$ 1.373,55	$ 74.206,45
60	$ 59.350,00	$ 2.137,58	$ 57.212,42	45	$ 94.285,00	$ 2.558,51	$ 91.726,49
90	$ 124.950,00	$ 6.689,25	$ 118.260,75	100	$ 110.500,00	$ 6.553,09	$ 103.946,91
120	$ 145.650,00	$ 10.302,68	$ 135.347,32	100	$ 185.420,00	$ 10.996,14	$ 174.423,86
150	$ 257.580,00	$ 22.570,13	$ 235.009,87	250	$ 177.240,73	$ 25.120,56	$ 152.120,17
	$ 639.060,00	**$ 42.636,11**	**$ 596.423,89**		**$ 643.025,73**	**$ 46.601,84**	**$ 596.423,89**

En el caso de un capital:

Dado un compromiso de pago de $ 100.000,00 cuyo vencimiento es a un año del día de la fecha.

Considerando una tasa del 10% efectivo anual, con capitalización mensual, bien podría conformase hoy una inversión a plazo fijo de manera tal que el día del vencimiento, es decir a un año, contase con la suma a pagar.

En tal caso necesitaría una cantidad de dinero nominalmente menor pues en el transcurso del tiempo se generaría un interés.

Si el deudor se presentase a pagar hoy esa deuda y abonase la suma de \$ 100.000,00, más allá de que legalmente es posible, desde un punto de vista financiero no estaría haciendo lo correcto pues esa obligación tendrá ese valor el día de su vencimiento no antes.

Cálculo del valor actual

Valor al inicio de la operación: $100.000,00 / (1 + 0,10)^{12/12} = 90.909,09$

Tasa equivalente mensual: $(1 + 0,10\ )^{(1/12)} - 1 = 0,007974$

Numéricamente se necesitan \$ 90.909,09 pues, es de \$ 9.090,91 que sumado al capital inicial da un monto de \$ 100.000,00

Evidentemente \$ 90.909,90 y \$ 100.000,00 no son numerariamente iguales pero, posicionados en el tiempo, se puede afirmar que ambas cantidades, calculados a una tasa de interés, tienen la misma capacidad de pago y, por lo tanto, son equivalentes.

Es precisamente en esa simple y sencilla realidad en la que se funda el principio de “Equivalencia Financiera”.

En el “cuadro de marcha” que a continuación se agrega se cuantifican esas cantidades considerando, dentro del lapso anual, subperíodos mensuales de capitalización.

Cuadro de marcha

	Capital	Interés	Total
0	\$ 90.909,09		\$ 90.909,09
1	\$ 90.909,09	\$ 724,92	\$ 91.634,01
2	\$ 91.634,01	\$ 730,70	\$ 92.364,71
3	\$ 92.364,71	\$ 736,53	\$ 93.101,24
4	\$ 93.101,24	\$ 742,40	\$ 93.843,65
5	\$ 93.843,65	\$ 748,32	\$ 94.591,97
6	\$ 94.591,97	\$ 754,29	\$ 95.346,26
7	\$ 95.346,26	\$ 760,30	\$ 96.106,56
8	\$ 96.106,56	\$ 766,37	\$ 96.872,93
9	\$ 96.872,93	\$ 772,48	\$ 97.645,41
10	\$ 97.645,41	\$ 778,64	\$ 98.424,05
11	\$ 98.424,05	\$ 784,85	\$ 99.208,89
12	\$ 99.208,89	\$ 791,11	\$ 100.000,00

CAPÍTULO 11
RENTAS

Conceptos

Una renta es una serie de pagos que se suceden en el transcurso del tiempo.

Esas serie tendrá una vida o duración de "**n**" términos, a cada uno de ellos lo llamaremos "cuota" y se simbolizará con la letra griega "alfa (**α**)"

Para una mejor comprensión la representaremos, materialmente, mediante el uso de un segmento de recta —eje del tiempo— en el cual vamos a graficar la cronología o desarrollo de los pagos.

```
 /------------------------------------------------------------/
0                                                             n
```

Por lo tanto ese período, vida de la renta, se va a dividir en otros menores, subperíodos, en los cuales se efectivizará cada pago.

```
 /-----/-----/--  ........................ ..................  --/-----/-----/
0                                                                n
```

Será posible movilizarnos dentro del eje y posicionarnos en el punto que queramos para luego determinar el valor de la renta en ese momento.

A esa cantidad la llamaremos "valor de la renta".

Es decir que a esa serie de pagos se la puede analizar y determinar su valor (valorizar) acorde a las condiciones en que se hubiere pactado.

Definiremos al Valor de una renta como *la sumatoria del valor actual de todos y cada uno de los de los pagos en un momento determinado*.

En el caso particular que lo sea en alguno de los dos extremos de su vida será el "Valor Actual" si es al momento del inicio de su vida y será el "Valor Final" si lo es cuando finaliza la misma.

```
  α          α          α                                  α          α          α
  /----------/----------/----  ............................  ------/----------/----------/
  0          1          2                                 n-2        n-1         n
(Vo)                                                                           (Vn)
```

Clasificación

Por el destino de los pagos

- *Rentas propiamente dichas*: cuando la serie de pagos está destinada a cancelar una deuda.
- *Imposiciones*: cuando esa serie está destinada a conformar un capital.

Por el importe de las cuotas

Las cuotas pueden ser iguales o no.

A su vez el importe de cada cuota puede diferir con o sin razón de variabilidad, sea en forma creciente, decreciente o de valores alternados.

En el supuesto caso que se trate de cuotas variables la diferencia puede ser:

- Sin razón de variabilidad:

  Es una cuota que varía en función del precio de un bien o cosa.

  Es el típico caso de fijar la cuantía de la cuota en función del precio de una cantidad de cosas, por ejemplo: una cuota cuyo valor sea la suma de dinero necesaria para la compra de un quintal de trigo.

- Con razón de variabilidad:

  Se presentan, de hecho, dos alternativas:

  1. en progresión aritmética
  2. en progresión geométrica.

Por el momento en que se pagan en cada período

Adelantadas y Vencidas:

El pago se puede hacer al inicio o al final de cada subperíodo, en tal caso las rentas pueden ser de pago "adelantado" o "vencido" según se realice al inicio o al final de cada subperíodo.

Adelantadas:

Pago al inicio del subperíodo

```
 α          α         α                                      α          α
 /----------/----------/----  ............................     ------/----------/----------/
0           1          2                                   n-2       n-1         n
```

Vencidas:

Pago el final del subperíodo

```
            α         α                                      α          α          α
 /----------/----------/----  ............................     ------/----------/----------/
0           1          2                                  n-2       n-1         n
```

Por ejemplo: el caso de una renta de pago anual, de cinco años de duración, que se inicia el día primero de abril de 2016 y finaliza el 31 de marzo del año 2020.

Aquí, tal lo dicho, puede ser uno de dos el momento en que se realice el pago: 1) el día primero de abril o bien 2) el día 31 de marzo de todos y cada uno de los años.

Esta alternativa no es menor respecto a su valor pues según se trate de pagos “adelantados” o “vencidos” será su cuantía.

Las alternativas posibles son cuatro y es el resultado de la combinación de:

Rentas de pago:

- ♣ Vencido
- ♣ Adelantado

Valorización:

- ♣ Al momento del inicio **(V_o)**: Valor Actual
- ♣ al momento en que finaliza **(V_n)**: Valor Final

Si lo que se trata es calcular:

- ♣ El “valor final”: una renta de pago vencido tendrá, respecto a una renta de pago adelantado, un subperíodo menos de capitalización y viceversa
- ♣ El “valor inicial” una renta de pago vencido tendrá un subperíodo más de actualización que una renta de pago adelantado.

Para ello utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- ♣ Valor actual de una renta de pago adelantado: $\mathbf{a_o}$
- ♣ Valor actual de una renta de pago vencido: $\mathbf{a_o}$

- ♣ Valor final de una renta de pago adelantado: $\boldsymbol{S}_n$
- ♣ Valor final de una renta de pago vencido: $\mathbf{S_n}$

Por el régimen al que están sujetas respecto al interés

Los regímenes posibles son dos: Interés Simple o Interés Compuesto.

Vamos a descartar el análisis de las rentas bajo el régimen de Interés Simple pues se trata de un caso factible como resultado de un razonamiento aritméticamente válido pero carente de sustento financiero.

Desarrollaremos las "rentas a interés compuesto".

Por el momento en que se valorizan

La determinación del valor se llama: *valorización de rentas* y atento a las posibilidades de esa valorización se presentan tres alternativas: *inmediatas, anticipadas o diferidas.*

Para iniciar su análisis definiremos tres momentos en la vida de una renta a los que llamaremos **"épocas"**. A saber:

- ♣ *Época Inicial (EI):* el inicio de los pagos.
- ♣ *Época Final (EF):* cuando finaliza.
- ♣ *Época de Valuación (EV):* cuando se la valoriza.

Para esta clasificación tomaremos como punto de referencia a la Época de Valuación.

Luego las alternativas que se presentan son tres según la Época de Valuación coincida sea anterior o posterior a la Época Inicial.

- ♣ *Rentas diferidas:* cuando la época inicial es posterior a la época de valuación -
- ♣ *Rentas inmediatas:* cuando la época inicial coincide con la época de valuación
- ♣ *Rentas anticipadas:* cuando la época inicial es anterior a la época de valuación

A manera de representar en un eje del tiempo lo antes dicho y fijando la Época de Valuación al medio del mismo y considerando la Época Inicial alternativamente antes, coincidente y posterior a la misma se puede graficar como:

```
         EV                    EV                    EV
                               EI
         / --------------------- / --------------------- /
     Diferidas             Inmediatas           Anticipadas
```

Por su duración o vida

- ♣ *Temporarias*: son rentas que tienen un principio y un final determinado.

- *Perpetuas*: son rentas que tienen un principio pero no un final.
- *Vitalicias*: son rentas que están vinculadas con la vida de una persona, tienen vigencia en tanto la persona a la que está relacionada esté con vida.

Valorización de rentas

Introducción

Según lo expuesto precedentemente una renta se puede valorizar en cualquier momento de su vida operando con las tres variables: dinero, tiempo y tasa.

Ya se ha visto que los momentos de una renta pueden ser tres:

1. el inicial o “época inicial”,
2. el final “época final”
3. cuando se la valoriza, que puede o no coincidir con los anteriores y que se llama: “época de valuación”.

Y que los momentos más usuales para la valorización de una renta son dos:

1. al inicio de su vida: el “valor actual”
2. cuando finaliza: el “valor final”

A estos momentos se los asocia con la extinción de una deuda o con el total ahorrado, respectivamente.

Desarrollo analítico

Una manera de desarrollar, algebraicamente, la valorización de una renta es:

- Primero determinar el valor de una *renta perpetua vencida*,
- Obtenido éste primero determinar el valor actual de una *renta temporaria vencida* y luego su valor final
- Seguidamente, para ambas alternativas, el caso de una renta de pagos adelantados

Rentas Inmediatas

Rentas perpetuas

Hemos definido a una renta perpetua como a una serie de pagos/cobros que tiene un inicio pero no un final.

Rentas perpetuas vencidas

Conceptualmente se puede definir al valor actual de una renta perpetua como una suma de dinero tal que colocada a una determinada tasa de interés da como rendimiento periódico la cuantía de la cuota de esa renta.

Luego la "*cuota"* es igual al valor actual de la renta multiplicado por una tasa de interés "i":

$$\alpha = V_o\, i$$

Por lo tanto el "*valor actual de la renta*" será igual a la cuantía de la cuota dividida por la tasa de interés "i":

$$V_o = \alpha/i$$

Ejemplo:

Dada una renta perpetua de $ 1.000,00 y considerando una tasa periódica del 10%, se pregunta ¿cuál es el valor actual de esa renta?

Según lo visto se puede afirmar que es la cantidad de dinero necesaria, que colocada a la tasa indicada, tenga un rendimiento periódico de $ 1.000,00.

$$V_o = 1.000{,}00/0{,}10 = 10.000{,}00$$

Rentas perpetuas adelantadas

En el supuesto caso que la renta fuese de pago adelantado el procedimiento para la determinación del valor actual es el mismo que el antes visto.

Pero, por ser de pago adelantado, todos y cada uno de los pagos serán por un período menos.

Una manera de hacerlo es multiplicar cada sumando por un factor de capitalización de exponente unitario: (1 + i).

Como se multiplican todos y cada uno de los sumandos es posible considerarlo como factor común por lo tanto el valor actual de una renta perpetua adelantada es:

$$V_o = \frac{\alpha}{i}(1+i)$$

Para el caso del ejemplo anterior, considerando los pagos adelantados es:

$$V_o = \frac{1.000{,}00}{0{,}10}(1+0{,}10) = 11.000{,}00$$

Rentas temporarias

Una renta es temporaria cuando tiene una vigencia o vida acotada entre dos extremos: una época inicial y una época final.

Una renta temporaria puede, también, definirse como la diferencia entre dos rentas perpetuas.

Por lo tanto se puede definir al "valor actual de una renta temporaria" como la diferencia existente en el valor actual de dos rentas perpetuas.

La primera se inicia en "cero" y tiene vigencia hasta el infinito, la segunda se inicia en "n" y no tiene finalización; ambas son perpetuas.

Pero el lapso dado entre "cero" y "ene" puede ser definido como una renta temporaria.

Por lo tanto el valor de esa renta temporaria iniciada en "cero" y que finaliza en "n" será igual a la diferencia del valor actual de las rentas perpetuas que se inician en "cero" y en "ene" respectivamente.

/………………………………..../……………………………………∞

0 n ∞

El valor de la renta perpetua, vencida, que se inicia en "n" será:

$$V_1 = \alpha / i$$

Luego el valor de la renta que se inicia en 0 puede ser expresado como el valor de la renta que se inicia en "n" actualizado hasta "0":

$$V_2 = \frac{\alpha}{i} (1 + i)^{-n}$$

Por lo tanto el valor actual de esa renta temporaria puede ser expresado como:

$$VA = V_1 - V_2$$

$$VA = \frac{\alpha}{i} - \frac{\alpha}{i} (1 + i)^{-n}$$

$$VA = \alpha \left(\frac{1}{i} - \frac{(1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

$$\mathbf{VA = \alpha \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}}$$

Renta temporaria vencida

Valor actual

El valor actual de una renta temporaria es igual a la sumatoria del valor actual de todos y cada uno de los valores actuales de sus cuotas.

También puede expresarse diciendo que el valor actual de una renta temporaria vencida iniciada en 0 y que finaliza en "n" es igual a la diferencia entre los valores actuales de dos rentas perpetuas; una iniciada en "0" y otra en "n".

Luego si:

V_1 es el valor actual de la renta iniciada en "0" y V_2 el valor actual de la renta iniciada en "n" y al valor actual de la renta temporaria lo llamamos V_0 analíticamente se puede expresar como que:

$$V_o = V_1 - V_2 \tag{1}$$

$$V_1 = \alpha/I \tag{2}$$

$$V_2 = \alpha/i\,(1+i)^{-n} \tag{3}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) queda:

$$V_o = \alpha/i - \alpha/i\,(1+i)^{-n}$$

$$V_o = \alpha/i - \alpha/i\,(1+i)^{-n}$$

$$V_o = \alpha/i\,[1-(1+i)^{-n}]$$

$$V_o = \alpha\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Si:

$$a_o = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Entonces:

$$\mathbf{V_o = \alpha\, \mathit{a}_o}$$

$$\mathbf{V_o = \alpha\, \mathit{a}_o = \alpha\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Importe de la cuota

Conocido el importe del Valor Actual de una renta, la tasa de interés y la cantidad de cuotas para la determinación del importe de la cuota se debe despejar su valor partiendo de la fórmula del Valor

Actual:

$$V_o = \alpha\, a_o = \alpha\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\mathbf{\alpha = \frac{V_o\, i}{1-(1+i)^{-n}} =}$$

$$\mathbf{\alpha = V_o\, a_o^{-1}}$$

Valor final

El valor final de una renta temporaria vencida será igual a su valor actual capitalizado hasta la época de vencimiento.

$$V_n = V_o * (1 + i)^n \qquad \textbf{(1)}$$

$$V_o = \alpha\, a_o \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$V_n = \alpha\, a_o * (1 + i)^n \qquad \textbf{(3)}$$

$$a_o = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad \textbf{(4)}$$

Reemplazando (4) en (3):

$$V_n = \alpha \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)^n$$

$$V_n = \alpha \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$S_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$\mathbf{V_n = \alpha\, S_n}$$

$$\mathbf{V_n = \alpha \frac{(1 + i)^n - 1}{i}}$$

Importe de la Cuota

Conocido el importe del Valor Final de una renta temporaria vencida, la tasa de interés y la cantidad de cuotas para la obtener el importe de la cuota se debe despejar su valor partiendo de la fórmula del Valor Final:

$$V_n = \alpha \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$\mathbf{\alpha = V_n\, S_n^{-1}}$$

Renta temporaria adelantada

Valor Actual

Una renta adelantada tiene la misma estructura operativa que una renta vencida con la sola diferencia que los pagos se realizan al inicio de cada subperíodo.

Por lo tanto a los efectos de determinar el valor en la época inicial se debe considerar que el valor nominal del primer pago es igual a su valor actual; dicho de otro modo "tiene un período menos de actualización".

Lo mismo sucede con los pagos en los restantes términos: todos tienen un período menos de actualización que en el caso de una renta vencida y teniendo presente que el valor actual de la renta al momento de su inicio va a ser igual a la sumatoria del valor actual de cada una de sus cuota se puede concluir diciendo que: el valor actual de todas y cada una de las cuotas de una renta adelantada va a ser igual al valor actual de todos y cada uno de los pagos de una renta vencida actualizados por un período.

Actualizar por un período es lo mismo que multiplicar por (1 + i) al valor actual de todos y cada uno de los sumandos de una renta; siendo así se puede considerar a ese multiplicador como un factor común.

Al operar como un factor común resulta que el valor actual de una renta temporaria adelantada es igual al valor actual de una renta temporaria vencida con un período menos de actualización.

Por lo tanto si para la unidad de capital el valor actual de una renta vencida es:

$$V_o = a_o \qquad \textbf{(1)}$$

El valor final será igual a:

$$V_n = a_o \ (1 + i)^n \qquad \textbf{(2)}$$

Y dado que:

$$a_o = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \qquad \textbf{(3)}$$

Entonces reemplazando (3) en (2):

$$V_n = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)^n$$

Y como:

$$a_o = a_o \ (1 + i)^n \qquad \textbf{(4)}$$

Luego reemplazando (3) en (4):

$$a_o = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)$$

Para α pesos

$$\mathbf{V_o = \alpha \ a_o}$$

$$\mathbf{V_o = \alpha \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} (1 + i)}$$

Importe de la cuota

Conocido el importe del Valor Actual de una renta, la tasa de interés y la cantidad de cuotas para la determinación del importe de la cuota se debe despejar su valor partiendo de la fórmula del Valor Actual:

$$V_o = \alpha\, a_o\ (1 + i)$$

$$V_o = \alpha\ a_o$$

$$\boldsymbol{\alpha = V_o\ a_o^{-1}}$$

Valor Final

El valor final de una renta temporaria adelantada será igual al valor actual de una renta temporaria adelantada capitalizado hasta la época de vencimiento.

El valor final será:

$$V_n = V_o\ (1 + i)^n \qquad \textbf{(1)}$$

$$V_o = \alpha\ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\ (1 + i)$$

Reemplazando en (1):

$$V_n = \alpha\ \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}\ (1 + i)\ (1 + i)^n$$

$$V_n = \alpha\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i}\ (1 + i) \qquad \textbf{(2)}$$

Si:

$$S_n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}\ (1 + i)$$

Reemplazando en (2)

$$\boldsymbol{V_n = \alpha\ \frac{(1 + i)^n - 1}{i}\ (1 + i)}$$

$$\boldsymbol{V_n = \alpha\ S_n}$$

Importe de la Cuota

Conocido el importe del Valor Final de una renta temporaria adelantada, la tasa de interés y la cantidad de cuotas para la obtener el importe de la cuota se debe despejar su valor partiendo de la fórmula del Valor Final:

$$V_n = \alpha \frac{(1 + i)^n - 1}{i} (1 + i)$$

$$\boldsymbol{\alpha = V_n S_n^{-1}}$$

Síntesis

Los cuatro valores antes determinados, y obviamente las cuotas que los conforman también, están interrelacionados entre sí.

Puede, de alguna manera, expresarse esa relación en el siguiente cuadro vinculando las cantidades en sentido horizontal, de izquierda a derecha y viceversa o bien en sentido vertical de arriba hacia abajo y viceversa rotando entre ellas.

	Pagos Vencidos	**Pagos Adelantados**
Valor Actual	a_o	a_o
Valor final	S_n	S_n

- ♣ Para obtener el valor final partiendo de un valor actual o para obtener el valor actual partiendo de un valor final —entre filas— se multiplica por $(1 + i)^n$ o $(1 + i)^{-n}$ respectivamente.
- ♣ Para calcular el valor actual de una renta de pagos adelantados partiendo del valor actual que tiene una renta de pagos vencidos se debe multiplicar al primer valor por $(1 + i)^{-1}$ y para calcular el valor actual de una renta de pagos vencidos partiendo del valor actual de una renta de pagos adelantados se ha de multiplicar por $(1 + i)$.

Rentas anticipadas y diferidas

Introducción

Tal lo antes visto, en este mismo capítulo, para la determinación del valor de una renta, anticipada o diferida, consideraremos dos momentos de su vida, a saber:

- ♣ *El inicio de los pagos*, momento que se denomina Época Inicial (EI).
- ♣ *La valuación de los pagos*, oportunidad en que se denomina Época de Valuación (EV).

Y tomando como punto referencial a la Época de Valuación respecto a la Inicial puede suceder una de las siguientes tres alternativas:

1. Rentas Diferidas: cuando la Época de Valuación es anterior a la Época de Inicial.
2. Rentas Inmediatas: cuando la Época de Valuación es coincidente con la Época Inicial.
3. Rentas Anticipadas: cuando Época de Valuación es posterior a la Época Inicial.

A su vez sabemos que las rentas pueden ser de dos clases:

- ♣ Adelantadas
- ♣ Vencidas

Para iniciar el tratamiento de la valorización de rentas partiremos del caso de una renta vencida.

Rentas vencidas

Renta anticipada

```
             α1        α2                         α n-2             α n-1          α n
  /-----------/---------/----  .....  --------------/-----------------/--------------/
 0           1         2             k           n-2              n-1            n
 EI                                  EV                                          EF
```

El esquema planteado en el eje del tiempo es el caso de una renta de pagos vencidos anticipada, donde:

- ♣ La realización de los pagos transcurre desde “cero” o época inicial (EI) hasta el momento “n” (EF) y
- ♣ El lapso del anticipo de pagos “k” es el tiempo que transcurre desde la Época Inicial (EI) hasta la Época de Valuación (EV).

Fórmula del valor actual de una renta anticipada de pago vencido:

$$V_o = \alpha\ a_o\ (1+i)^k$$

Renta diferida

```
                                              α1        α2            αn-2     αn-1       αn
/----------/----------/............/---------/ --------/-----......----/---------/-----------/
0          1          2            0         1         2              n-2      n-1        n
                                   k
EV                                 EI                                                     EF
```

Este es el caso de una renta de pagos vencidos diferida, donde:

- ♣ La realización de los pagos transcurre desde “cero” época inicial (EI) hasta el momento “n” (EF) y
- ♣ El lapso de diferimiento de pagos “k” es el tiempo que transcurre desde la época de valuación (EV) hasta la Época Inicial (EI).

Fórmula del valor actual de una renta diferida de pago vencido:

$$V_o = \alpha\, a_o\, (1+i)^{-k}$$

Nótese que hay dos lapsos que para su expresión y cuantificación se inician en un momento “cero”, el primero es el de diferimiento que va desde la “Época de Valuación” y llega hasta el momento “k” y el segundo es el de duración de la renta y va desde la “Época Inicial” hasta el momento “n”.

Rentas adelantadas

En todos los casos, sea una renta anticipada o diferida, el razonamiento es el mismo, lo único que va a cambiar es el “Valor Actual” a consecuencia de ser el pago adelantado.

Renta anticipada

En el caso de una **renta anticipada** o sea cuando la época inicial (EI) es anterior a época de valuación (EV) al valor hallado mediante a_o y que corresponde al momento cero deberemos capitalizarlo hasta la época de valuación (EV), gráficamente será:

```
α1        α2                                         αn-1   αn
 /--------/----- ---/----  ........./   ----/-- .........-----/--------/-------/
0       1        2            k                 n-2    n-1     n
EI                            EV                                EF
```

Fórmula del valor actual de una renta anticipada de pago adelantado:

$$V_o = \alpha\, a_o\, (1+i)^{k}$$

Renta diferida

En el caso de una **renta diferida**, vencida, o sea cuando la época inicial (EI) es posterior a la época de valuación (EV) al valor hallado mediante a_o y que corresponde al momento cero deberemos actualizarlo hasta la época de valuación (EV) “k”

Luego gráficamente será:

```
                                α1     α2                     α n-1   α n
/ ----- / -----/----  ........  / ------/------/-...........  -----/------/---------/
0      1      2                 0      1      2                n-2   n -1      n
EV                               EI                                             EF
```

Fórmula del valor actual de una renta diferida de pago adelantado:

$$\mathbf{V_o\ (adelantado) = \alpha\, a_o\, (1+i)^{-k}}$$

Conclusión

Independientemente que en una renta se presente alguna combinación de pago (adelantado o vencido) con su época de valorización (inmediata, diferida o anticipada), **en todos los casos** lo que hay que hacer es:

- *Primero:* determinar su valor al momento de inicio de sus pagos "Época Inicial".
- *Segundo:* conocido ese importe se debe llevar, según corresponda, mediante un factor de capitalización o actualización hasta su "Época de Valuación".

Obviamente ese factor será $\mathbf{(1+i)^k}$, donde el exponente "k" será positivo o negativo según se capitalice o actualice.

Rentas con cuotas variables

Existen tantas formas en las que puedan variar las cuotas como acuerdos se puedan pactar entre las partes.

Así entonces, es por propia definición, imposible analizar y plasmar en un texto a la totalidad de las formas en que pueden llegar a variar las cuotas de una renta, independientemente de la cantidad de términos que la misma tenga.

Luego, a la luz de esa realidad, en este caso se desarrollará una sola forma —que en la práctica es la más usual al momento de considerar y evaluar alternativas de pago— y son las "rentas temporarias con cuotas variables, crecientes, en progresión geométrica".

A su vez se desarrollará el caso de la valorización al inicio (valor actual) y al final (valor final) tanto para el caso de pagos adelantados como vencidos.

Rentas con cuotas variables en progresión geométrica

La cuota en este tipo de rentas varía, pago a pago, en una cantidad que resulta igual al producto de la cuota inmediata anterior por un factor constante que llamaremos "q", por lo tanto la diferencia entre cuota y cuota no es una cantidad constante sino variable.

Gráficamente y puesto en un eje del tiempo el desarrollo de una renta en progresión geométrica de pago vencido es:

EI							EF
0	1	2	3		n-2	n-1	n
EV	p	pq	pq^2		pq^{n-3}	pq^{n-2}	pq^{n-1}

El importe de la cuota "p" va variando a razón de "q" por pago.

El primer pago es "p", el segundo es igual al primero multiplicado por razón "q", la tercera aumenta a partir del valor de la segunda y por lo tanto resulta: "pqq" que es igual a "pq^2" y así sucesivamente hasta la última cuota que variará en "q^{n-1}".

Si se tratase de determinar su "Valor Final" estaríamos frente al caso de una: "Imposición, de pago vencido con cuotas variables en progresión geométrica" por lo tanto corresponde capitalizar hasta la "Época Final" a todos y cada uno de los pagos; luego: el primero va a generar intereses por todo el lapso menos uno pues es, precisamente, de pago vencido; por la misma razón el tercero menos dos y así sucesivamente todos y cada uno, estando el anteúltimo pago expuesto por "un período" y el último que no va a generar intereses pues se paga al momento final, luego: el tiempo es nulo.

$$V_n = p\,(1+i)^{n-1} + pq\,(1+i)^{n-2} + pq\,(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + pq\,(1+i)^1 + pq\,(1+i)^0$$

Si se saca como factor común a "p" resulta:

$$V_n = p\,[(1+i)^{n-1} + q\,(1+i)^{n-2} + q\,(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + q\,(1+i)^1 + q\,(1+i)^0\,]$$

Luego resulta un producto de "p" por la sumatoria que se encuentra dentro de los corchetes.

Esta sumatoria es una progresión geométrica donde:

- Su primer término es $\mathbf{(1 + i)^{n-1}}$ y
- La razón es = $\mathbf{q\,(1 + i)^{-1}}$

Si $(1 + i)^{-1} = v$

La razón puede expresarse como: **q v**

Siendo, por otra parte, que el resultado de una sumatoria en progresión geométrica, temporaria, *es igual a al producto que resulta de multiplicar su primer término por un cociente que tiene como numerador "a una resta que es igual a la razón elevada a los "n" términos, menos 1" y como divisor otra resta que es igual a "la razón menos uno",* es decir:

$$\text{Sumatoria} = \text{primer término} * \frac{\text{razón}^n - 1}{\text{razón} - 1}$$

Reemplazando:

Primer término: $(1+i)^{n-1}$

Razón: $(q\,v)$

La sumatoria es igual a:

$$S = (1+i)^{n-1}\,\frac{(q\,v)^n - 1}{q\,v - 1}$$

Desarrollando el numerador:

$$(q\,v)^n - 1 = \frac{q^n}{(1+i)^n} - 1 = \frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}$$

Ahora desarrollando el denominador:

$$q\,v - 1 = \frac{q}{1+i} - 1 = \frac{q - (1+i)}{1+i}$$

Luego el valor final de una renta temporaria de pago vencido cuya cuota varíe en progresión geométrica es igual a:

$$S = (1+i)^{n-1}\,\frac{(1+i)}{(1+i)^n}\,\frac{[q^n - (1+i)^n]}{[q - (1+i)]}$$

Simplificando resulta que *el valor de la sumatoria de la totalidad de los términos de una renta cuya cuota varíe en progresión geométrica, temporaria, de pago vencido es igual a*:

Valor Final, pago vencido

$$S = p\,\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}$$

A su vez si a ese valor se le multiplica por (1 + i) se obtendrá el:

Valor Final, pago adelantado

$$S = p\,\frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}\,(1+i)$$

Luego, si se actualizan por todo el lapso “n” de duración se tendrán sendos Valores Actuales, a saber:

Valor Actual, pago vencido

$$S = p\,\frac{q^n - (1+i)^n}{[q - (1+i)]\,(1+i)^n}$$

A su vez si a ese valor se le multiplica por (1 + i) se obtendrá el:

Valor Actual, pago adelantado

$$S = p\,\frac{q^n - (1+i)^n}{[q - (1+i)]\,(1+i)^{n-1}}$$

CAPÍTULO 12
SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

Introducción

En el presente capítulo se consideran las posibles alternativas para cancelar una deuda y las consecuencias derivadas de esa decisión.

Su alcance no comprende el análisis de costo/beneficio entre la tasa de interés y la rentabilidad de la aplicación de los fondos.

Así como no existe una nómina de problemas tampoco existe una serie taxativa de soluciones posibles a cada problema en particular. Si bien, es importante destacar, que tratándose de problemas financieros todas las alternativas de solución se fundan en los mismos principios.

Sistemas de pagos

Dada una deuda cualquiera existe más de una forma para su pago, tantas como las partes puedan imaginar. Todas están encuadradas en el espectro comprendido desde la cancelación en un solo pago o sea "al contado" hasta el pago en más de una oportunidad.

Si la opción es abonar en más de una oportunidad se trata de una forma de pago "en cuotas" y al pago de una deuda "en cuotas" se lo denomina "sistema de amortización".

No se trata de una cuestión compleja pues más allá de su diversidad todas las alternativas de pago se fundan en el concepto de "equivalencia financiera", en lo que varían es en la forma.

Cabe destacar que en un programa de estudios solo se desarrollan los que en su estructura reúnen características generales en las cuales, luego, se basan otras alternativas o sistemas de pago.

Generación y pago de intereses

El interés siempre se genera sobre el saldo adeudado independientemente que su pago pueda hacerse al inicio o al fin del período.

En esa disyuntiva subyace la primera división o clasificación.

Imputación del pago

Toda erogación para el pago de una deuda se debe imputar en primer lugar al pago de intereses y luego, de existir un remanente, a la deuda que, precisamente, origina los intereses, o sea el capital.

Luego una cuota puede ser solo para el pago de intereses o bien para el pago de capital e intereses.

Momento del pago

Todo pago se puede realizar en cualquier momento de la vida del sistema, más allá de su imputación: capital y/o intereses.

Existen dos formas de pago de los intereses: al inicio del periodo o bien al final.

Si es al inicio se tratará de un “pago de intereses adelantados” y si es al final será un “pago de intereses vencidos”.

Tomando el caso de pago de intereses vencidos se ven fundamentalmente dos variantes:

- ♣ En cuotas que extinguen capital e intereses en forma concomitante.
- ♣ En el pago de una cuota que cancele el interés del subperíodo y permita la conformación de un ahorro de manera tal que al vencimiento del plazo se haya obtenido una suma igual a lo adeudado.

Sistemas de amortización

Con pago de intereses adelantados

Sistema Alemán

El sistema de cancelación de deudas con pago de intereses, sobre saldos, adelantados se lo conoce como “Sistema Alemán”.

El primer pago, al inicio de la vida del sistema, es solo intereses y el último pago es, necesariamente, solo capital.

Las restantes cuotas contienen parte de interés y parte de capital, al ser el interés sobre saldos la composición interna de la cuota va variando, la participación del interés en la composición de la cuota tiende a decrecer en el tiempo, y, consecuentemente, aumentar la del capital.

Nomenclatura:

- V_o= Valor del préstamo
- A = Cuota
- i = Tasa de interés que se paga por el préstamo.
- n = Cantidad de cuotas del préstamo.

Formulas

$$V_o = \alpha \frac{1 - (1 - i)^n}{i}$$

Y el importe de la cuota que cancela el préstamo será:

$$\alpha = V_o \frac{i}{1 - (1 - i)^n}$$

Con pago de interés vencido

En este caso existe más de un modo de cancelación de deudas.

Al ser de pago de interés vencido y sobre saldos todas las cuotas contienen en si una parte de capital y otra de interés.

En este, como en todo el espectro del cálculo financiero, las variables o alternativas que se combinan son solo tres: dinero, tiempo y tasa. Luego las variantes —formas o sistemas de pago— resultan de las diferentes formas y/o participaciones de cada una de ellas, a saber:

1. La tasa de interés: puede ser fija o variable.
2. El tiempo: las cuotas pueden ser sincrónicas o no.
3. El dinero: debe considerarse en una doble situación pues tiene incidencia tanto en la cuota que se abona como en el saldo adeudado.

Respecto a la cuota: puede ser fija o variable. Dentro de esta última alternativa puede variar en forma creciente o decreciente y, a su vez, hacerlo de algún modo predecible (sea en progresión aritmética o geométrica) o sin razón de variabilidad.

Sobre el saldo adeudado: puede ser una suma de dinero preestablecida o variable, este es el caso en que el saldo adeudado sea cantidades de cosas, por ejemplo: kilos de determinado producto, moneda extranjera, etc.

Sistema francés

Es una forma de pago donde la cuota es constante y el interés es sobre saldos, donde el destino —composición interna— de todas y cada una de las cuotas es el pago de interés y capital.

A medida que transcurre el tiempo y, consecuentemente realizando pagos, el saldo de capital adeudado será cada vez menor y al ser la cuota de una cuantía constante se alterará la participación del capital e interés en cada una de ellas.

Al principio la participación relativa y absoluta del interés es mayor que la del capital, situación que —por lo antes dicho— tiende, en forma permanente, a invertirse en el tiempo.

Es un sistema de pago cuyas cuotas incluyen capital (amortización real) e intereses.

El pago de los intereses es vencido y sobre saldos, su cuota puede ser fija (constante) o variable y el lapso que transcurre entre pago y pago puede o no ser igual.

Si el pago de intereses es sobre saldo y su cuota es fija o constante se puede concluir que el importe del préstamo será igual a la sumatoria de los valores actuales de todos y cada uno de sus futuros pagos.

Es en este caso, el Sistema Francés, coincidente con el concepto de una renta propiamente dicha de pago vencido.

Gráficamente:

0	1	2	....	k		n-1	n
V_o	α_1	α_2		α_k		α_{n-1}	α_n

Desarrollo de las fórmulas

Nomenclatura:

- V_o = Valor del préstamo.
- a = Cuota.
- k = Momento en que vence el período “k”.
- C_k = Amortización real que contiene la cuota que se abona en el período “k”.
- I_k = Interés que contiene la cuota que se abona en el período “k”.
- E_k = Total amortizado en el período “k”.

- ♣ α_k = Cuota que se pagó en el período “k”.
- ♣ $\alpha_k = C_k + I_k$
- ♣ R_k = Resto o saldo a pagar en el período “k”.
- ♣ n = Cantidad de cuotas del préstamo.

Importe del préstamo

Por lo tanto el importe del préstamo será:

$$V_o = \alpha\, a_o = \alpha\, \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Importe de la cuota

El importe de la cuota que cancela el préstamo será:

$$\alpha = V_o \frac{i}{1 - (1 + i)^{n}}$$

Alternativas de fórmulas a utilizar para los distintos conceptos

Resto en el período “k”

$$V_0 = E_k + R_k$$

El importe del préstamo es siempre igual al total amortizado más el resto que a ese momento se adeuda.

$$R_k = V_0 - E_k$$

Luego el resto será igual al importe del préstamo, capitalizado, hasta el momento “k” menos el total abonado, capitalizado, hasta el momento “k”.

$$R_k = V_0\ (1 + i)^k - \alpha\, S_k$$

Por otra parte también es válido afirmar que el resto que se adeuda en el período “k” será igual al valor actual de las cuotas futuras:

$$R_k = \alpha\, \mathbf{a}_{n-k}$$

Intereses en el período “k”

El interés en el período “k” es igual a la tasa de interés por el resto en el período inmediato anterior o sea en “k -1”, luego:

$$I_k = i\ R_{k-1}$$

$$I_k = i\ \alpha\ \mathbf{a}_{n-(k-1)}$$

Capital contenido en la cuota del período “k”

El capital contenido en la cuota es igual al total de la misma menos el interés, luego:

$$C_k = \alpha - \alpha\ I_k$$

$$C_k = \alpha - i\ \alpha\ \mathbf{a}_{n-(k-1)}$$

Total amortizado en el momento “k”

El total amortizado en el momento “k” es igual al importe del préstamo menos el resto en ese mismo momento.

$$E_k = V_0 - R_k$$

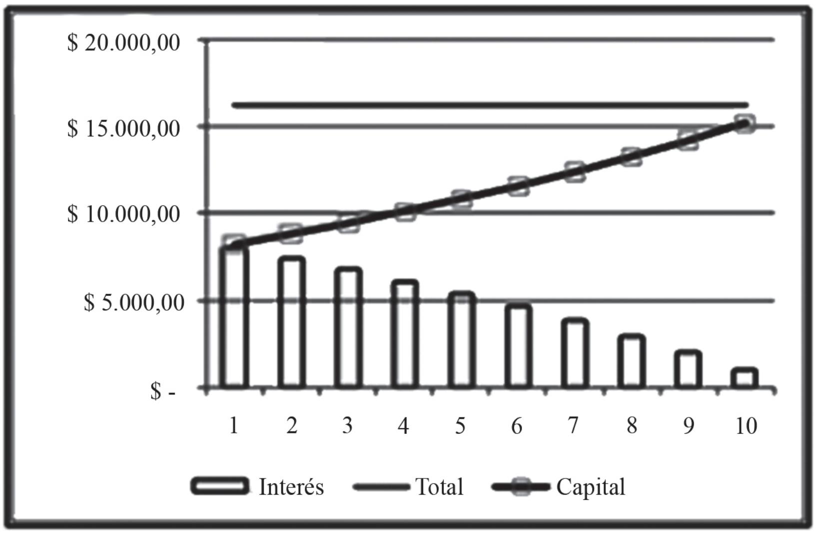
$$E_k = V_0 - \alpha\ \mathbf{a}_{n-k}$$

La deuda o crédito es de $ 10000,00; se debe abonar en 10 cuotas consecutivas a la tasa nominal periódica del 20%.

Concretamente: en el primer pago se paga más interés y menos capital que en la última cuota.

A manera de ejemplo se agrega el desarrollo de un préstamo de $ 114.000,00 a pagar en 10 cuotas al 14% nominal anual.

Cuota	Total	Interés	Capital	Saldo
				$ 114.000,00
1	$ 16.231,04	$ 7.980,00	$ 8.251,04	$ 105.748,96
2	$ 16.231,04	$ 7.402,43	$ 8.828,61	$ 96.920,36
3	$ 16.231,04	$ 6.784,42	$ 9.446,61	$ 87.473,75
4	$ 16.231,04	$ 6.123,16	$ 10.107,87	$ 77.365,87
5	$ 16.231,04	$ 5.415,61	$ 10.815,42	$ 66.550,45
6	$ 16.231,04	$ 4.658,53	$ 11.572,50	$ 54.977,95
7	$ 16.231,04	$ 3.848,46	$ 12.382,58	$ 42.595,37
8	$ 16.231,04	$ 2.981,68	$ 13.249,36	$ 29.346,01
9	$ 16.231,04	$ 2.054,22	$ 14.176,81	$ 15.169,19
10	$ 16.231,04	$ 1.061,84	$ 15.169,19	$ 0,00



En este gráfico se puede ver claramente que la cuota se mantiene constante y que es la suma del capital más el interés. Así también se ve cómo se va reduciendo la participación del interés en cada cuota y en la misma manera va aumentando la participación del capital.

Sistema alemán II

Se da el caso que en la práctica, comercial y financiera, es de muy frecuente uso una forma de pago cuya cuota está conformada por capital e interés, el capital se obtiene de dividir el total adeudado por la cantidad de cuotas, es decir es una suma constante, y los intereses son sobre saldos. Resulta así un sistema de cuotas decrecientes y se lo denomina "Sistema Alemán" que nada tiene que ver con el precitado de pago de intereses adelantados pero se los llama de la misma manera.

Nomenclatura

- ♣ V_0 = Importe del préstamo.
- ♣ a = Cuota.
- ♣ k = Momento en que vence el período "k".
- ♣ C_k = Amortización real que contiene la cuota que se abona en el período "k".
- ♣ I_k = Interés que contiene la cuota que se abona en el período "k".
- ♣ E_k = Total amortizado en el período "k".
- ♣ α_k = Cuota que se pagó en el período "k".
- ♣ $\alpha_k = C_k + I_k$
- ♣ R_k = Resto o saldo a pagar en el período "k".

- ♣ n = Cantidad de cuotas del préstamo.

Desarrollo de las fórmulas

Capital contenido en la cuota del período "k"

Luego el capital que se cancela en cada cuota será:

$$C_k = V_0/n$$

Interés contenido en la cuota del período "k"

El interés incluido en cada cuota será:

$$I_k = R_{k-1}\, i$$

Cuota de pago

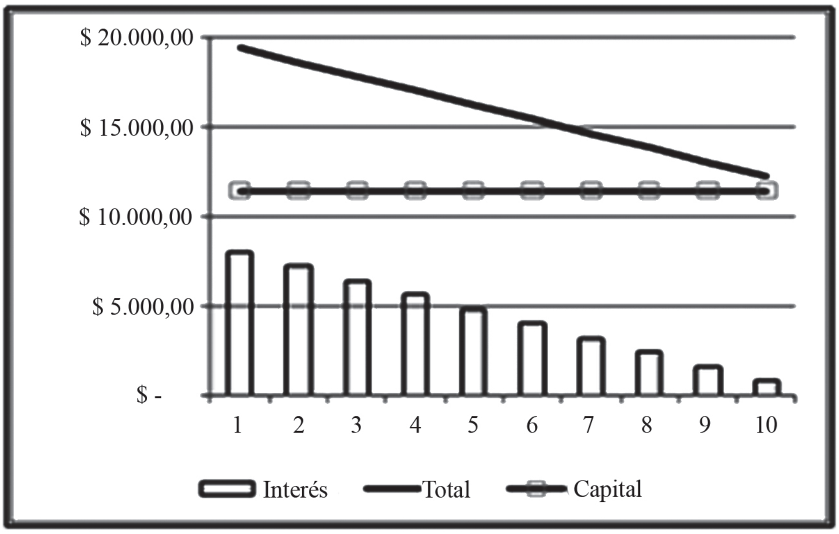
Por lo tanto la cuota que cancela el préstamo será:

$$\alpha_k = C_k + I_k$$

$$\alpha_k = V_0/n + R_{k-1}\, i$$

A manera de ejemplo se desarrolla un caso de iguales datos iniciales que el visto en el "Sistema Francés":

Cuota	Total	Interés	Capital	Saldo
0	Saldo inicial			$ 114.000,00
1	$ 19.380,00	$ 7.980,00	$ 11.400,00	$ 102.600,00
2	$ 18.582,00	$ 7.182,00	$ 11.400,00	$ 91.200,00
3	$ 17.784,00	$ 6.384,00	$ 11.400,00	$ 79.800,00
4	$ 16.986,00	$ 5.586,00	$ 11.400,00	$ 68.400,00
5	$ 16.188,00	$ 4.788,00	$ 11.400,00	$ 57.000,00
6	$ 15.390,00	$ 3.990,00	$ 11.400,00	$ 45.600,00
7	$ 14.592,00	$ 3.192,00	$ 11.400,00	$ 34.200,00
8	$ 13.794,00	$ 2.394,00	$ 11.400,00	$ 22.800,00
9	$ 12.996,00	$ 1.596,00	$ 11.400,00	$ 11.400,00
10	$ 12.198,00	$ 798,00	$ 11.400,00	$ 0,00



En este gráfico se puede ver claramente que el capital es constante, que el interés es decreciente y que la cuota total, suma del capital más el interés, es decreciente.

Sistema americano

Este sistema se basa en el concepto de que se pagan intereses a la tasa "**i**" (V_0 i) al fin de cada subperíodo y al finalizar el plazo del préstamo se cancela totalmente el capital (V_0) más los intereses de ese subperíodo y que a efectos de cancelar el crédito en cada momento en que se pagan intereses se destina una suma ($V_0\ S_{ni'}^{-1}$) de dinero, que se coloca a la tasa "**i'**" para ir formando un capital igual a la deuda.

Nomenclatura

- V_0 = Valor del préstamo.
- α = Cuota.
- i = Tasa de interés que se paga por el préstamo.
- i' = Tasa de interés que se cobra por el dinero que se deposita.
- n = Cantidad de cuotas del préstamo.

Desarrollo de las fórmulas

Luego la cuota **"α"** a pagar en cada vencimiento será: $V\,i + V\ S_{ni'}^{-1}$

Luego:

$$\alpha = V\,i + V\,S_{ni'}^{-1}$$

$$\alpha = V\,(i + S_{ni'}^{-1})$$

Gráficamente

0 1 n-1 n

/ ------------------------ / --------------------........... ------- / ----------------------------/

V_0 α_1 α_{n-1} α_n

Consiste en el pago de una suma subperiódica en concepto de intereses y a su vencimiento el pago del total de la deuda, si se da el caso de que a medida que se pagan los intereses se destina una suma a manera de ahorro periódico para la conformación de un capital de manera tal que al vencimiento del plazo ese capital sea igual al total adeudado. A esta forma de pago y ahorro se la conoce como “Sistema Americano” y en general se lo estudia con tasa y capital fijo.

A manera de ejemplo se desarrolla el caso de un crédito otorgado bajo este sistema de amortización por la suma de $ 114.000,00 a pagar en 10 cuotas, a una tasa de interés pasiva del 7,00% y la tasa activa es el 3,50%.

Se agrega el cuadro de marcha de la deuda al solo efecto de una mejor comprensión:

n.°	Cuota	Interés pasivo	Capital	Interés activo	Total ahorrado
1	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52		$ 9.717,52
2	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 340,11	$ 19.775,14
3	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 692,13	$ 30.184,79
4	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 1.056,47	$ 40.958,77
5	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 1.433,56	$ 52.109,85
6	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 1.823,84	$ 63.651,21
7	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 2.227,79	$ 75.596,52
8	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 2.645,88	$ 87.959,91
9	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 3.078,60	$ 100.756,02
10	$ 17.697,52	$ 7.980,00	$ 9.717,52	$ 3.526,46	$ 114.000,00

Análisis de alternativas u opciones

Sistema Francés o Sistema Alemán

Antecedentes

Ante la disyuntiva de optar por el sistema más conveniente en el supuesto que las alternativas estuviesen dadas entre el “Sistema Francés” (cuota constante) y el “Sistema Alemán” (pago de capital constante) la respuesta no necesariamente va a ser la misma si son dos o más las personas que la responden.

En principio es de destacar que la respuesta que, en su gran mayoría, se obtiene es que la alternativa más conveniente es el Sistema Alemán y se argumenta que:

1. El interés total pagado es menor
2. Si en las primeras cuotas, se quisiera cancelar el saldo de deuda la suma a abonar es menor que si se hubiere optado por el Sistema Francés.

Teniendo presente que siendo tres las variables operativas en todo cálculo financiero, que en este caso las tasas de interés pactadas son iguales y el tiempo en que se suceden los pagos también lo es, puede concluirse, por defecto, que el análisis de la causa origen de la diferencia debe, necesariamente, residir en el capital.

La respuesta está en la cuantía de las cuotas.

En el Sistema Alemán, a consecuencia que la participación del capital es constante en cada cuota y que el interés es sobre saldos, las cuotas iniciales son de una mayor cuantía que en el Sistema Francés.

A medida que transcurre el tiempo la diferencia tiende a ser cada vez menor, en un momento las cuotas son iguales o casi idénticas y luego la cuota en el Sistema Francés pasa a ser mayor.

Conclusión

Al ser la participación del capital una constante en las cuotas del Sistema Alemán y comparativamente mayor que la participación del capital en las primeras cuotas del Sistema Francés, el saldo adeudado se reduce en forma más rápida por aplicación del primer sistema, luego al deber menos, a idéntica tasa, se paga una cuantía menor de interés.

Luego la decisión de optar por uno u otro sistema, a iguales tasas y tiempos de pago, pasa por el análisis del flujo de fondos.

Ejemplos

A manera de ejemplo se agregan dos cuadros de la siguiente alternativa:

Cuadro anexo I				
Sistema francés				
Sistema francés – cuota constante				
I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Cuota	**Interés**	**Capital**	**Saldo**	**V_0 de la cuota**
Saldo inicial:			$ 1000,00	
$ 238,52	$ 200,00	$ 38,52	$ 961,48	$ 198,77
$ 238,52	$ 192,30	$ 46,23	$ 915,25	$ 165,64
$ 238,52	$ 183,05	$ 55,47	$ 859,78	$ 138,03
$ 238,52	$ 171,96	$ 66,57	$ 793,21	$ 115,03
$ 238,52	$ 158,64	$ 79,88	$ 713,33	$ 95,86
$ 238,52	$ 142,67	$ 95,86	$ 617,47	$ 79,88
$ 238,52	$ 123,49	$ 115,03	$ 502,44	$ 66,57
$ 238,52	$ 100,49	$ 138,03	$ 364,41	$ 55,47
$ 238,52	$ 72,88	$ 165,64	$ 198,77	$ 46,23
$ 238,52	$ 39,75	$ 198,77	$ 0,00	$ 38,52

En el precedente “Cuadro Anexo I” se detalla la marcha del préstamo bajo las condiciones del “Sistema Francés”.

Al tradicional cuadro de marcha se ha agregado una columna denominada “**V - Valor Actual (V_o) de la Cuota**”. En esta columna se indica el valor actual al momento inicial de todos y cada uno de los pagos, obviamente que su sumatoria es igual al valor del préstamo. En la columna “**II - Intereses**” se indican en el último renglón la suma total de intereses pagados, que en este caso es de $ 1.385,23.

Sistema Alemán

En el siguiente cuadro Anexo II se detalla la marcha del préstamo bajo las condiciones del “Sistema Alemán”; como en el caso anterior al tradicional cuadro de marcha se ha agregado una columna denominada “**V - Valor Actual (V_0) de la Cuota**”. En esta columna se indica el valor actual al momento inicial de todos y cada uno de los pagos, obviamente que su sumatoria es, también, igual al valor del préstamo. En la columna “**II - Intereses**” se indican en el último renglón la suma total de intereses pagados, que en este caso es de $ 1.100,00.

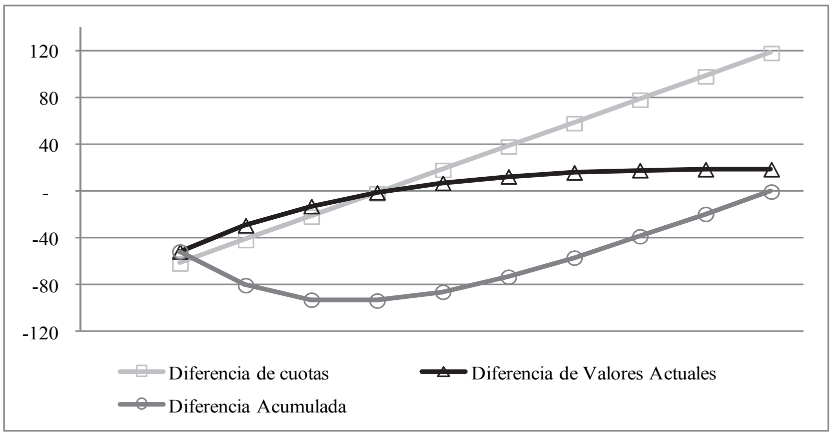
Cuadro anexo II					
Sistema alemán					
Pagos en cuotas decrecientes o Sistema alemán					
	I	II	III	IV	V
	Cuota	Interés	Capital	Saldo	V_0 de la cuota
0	Saldo inicial:			$ 1000,00	
1	$ 300,00	$ 200,00	$ 100,00	$ 900,00	$ 250,00
2	$ 280,00	$ 180,00	$ 100,00	$ 800,00	$ 194,44
3	$ 260,00	$ 160,00	$ 100,00	$ 700,00	$ 150,46
4	$ 240,00	$ 140,00	$ 100,00	$ 600,00	$ 115,74
5	$ 220,00	$ 120,00	$ 100,00	$ 500,00	$ 88,41
6	$ 200,00	$ 100,00	$ 100,00	$ 400,00	$ 66,98
7	$ 180,00	$ 80,00	$ 100,00	$ 300,00	$ 50,23
8	$ 160,00	$ 60,00	$ 100,00	$ 200,00	$ 37,21
9	$ 140,00	$ 40,00	$ 100,00	$ 100,00	$ 27,13
10	$ 120,00	$ 20,00	$ 100,00	$ 0,00	$ 19,38

En el “**Cuadro Anexo III**” se analizan las diferencias, en la columna “**I - Cuotas**” se indica el número de la cuota, en la siguiente “**II - Diferencia de cuotas**” se registra la diferencia de los valores nominales de las cuotas, el signo menos indica que la cuota del “Sistema Alemán” es mayor, en la columna “**III - Diferencia de valores actuales**” tal como su nombre lo indican se registra las diferencias de los valores actuales y en la columna “**IV - Diferencia Acumulada**” se indica la sumatoria de las diferencias de los valores actuales.

Diferencias

Cuadro anexo III			
Diferencias			
I	II	III	IV
Cuotas	Diferencia de cuotas	Diferencia de valores actuales	Diferencia acumulada
1	$ -61,48	$ -51,23	$ -51,23
2	$ -41,48	$ -28,80	$ 80,03
3	$ -21,48	$ -12,43	$ -92,46
4	$ -1,48	$ -0,71	$ -93,18
5	$ 18,52	$ 7,44	$ -85,73
6	$ 38,52	$ 12,90	$ -72,83
7	$ 58,52	$ 16,33	$ -56,50
8	$ 78,52	$ 18,26	$ -38,24
9	$ 98,52	$ 19,09	$ -19,14
10	$ 118,52	$ 19,14	$ 0,00
Suma	**$ 285,23**	**$ 0,00**	

Caben las siguientes conclusiones: el total de la columna “**II - Diferencia de cuotas**” es la diferencia de intereses, el signo positivo indica que el total pagado por este concepto en el Sistema Francés es mayor que en el Sistema Alemán, la suma de la columna "**III - Diferencia de Valores Actuales**" es cero, lo que quiere decir que en términos relativos no existe diferencia alguna y ello es así pues las tasas de interés son iguales y la diferencia acumulada (Columna III) es, al final, igual a cero por la misma razón.



El precedente cuadro muestra en forma gráfica el desarrollo de las diferencias en el tiempo.

Se ve claramente que la "Diferencia de las cuotas" es una constante, resulta así una recta que crece a manera de una progresión aritmética, la "Diferencia de Valores Actuales" crece a una razón decreciente en tanto que la "Diferencia Acumulada" nunca es positiva, su último valor es cero.

Por lo tanto, dado que el costo en términos relativos es el mismo, la opción por uno u otro sistema dependerá de los flujos de fondos del tomador pues pagará menos intereses en la medida que cancele más rápido su deuda.

Sistema Americano

Este sistema se basa en el concepto de que se pagan intereses a la tasa "i" (V i) al fin de cada subperíodo y al finalizar el plazo del préstamo se cancela totalmente el capital (V) más los intereses de ese subperíodo y que a efectos de cancelar el crédito en cada momento en que se pagan intereses se destina una suma ($V\ S_{ni'}^{-1}$) de dinero, que se coloca a la tasa "i'" para ir formando un capital igual a la deuda.

La aplicación del Sistema Americano, como ya está visto, consiste en el pago periódico de intereses, la cancelación de la deuda en la última cuota y que al momento del pago de cada cuota se destine una suma de dinero para la conformación de un fondo igual a la suma adeudada de manera tal que con esa suma se pague el total de la deuda.

Este sistema opera con dos tasas de interés:

- ♣ la que paga el deudor: tasa activa.
- ♣ la que cobra el deudor: tasa pasiva.

En general, si se trata de una operación realizada en una misma institución, la tasa pasiva va a ser menor que la tasa activa; pero si la formación del fondo se hace en otra institución o modo puede suceder que la tasa pasiva sea igual o mayor que la tasa activa.

En una primera y ligera apreciación puede decirse que este sistema es más conveniente que el Sistema Francés pues en este caso se cobran intereses y en el Sistema Francés no; pero tal aseveración puede o no ser cierta.

La primera reflexión es que si la tasa de interés que paga el deudor es mayor que la tasa de interés que cobra está aplicando dinero a un rendimiento menor que su costo, luego el costo en términos relativos va a ser mayor que en el Sistema Francés. Si la tasa es igual será indistinto y si la tasa es mayor está obteniendo una renta por la diferencia de tasas.

Para determinar cuál es la tasa de interés que esta efectivamente pagando se debe analizar la serie de pagos que realiza por el procedimiento de Baylli[14]: la deuda total y la cantidad de cuotas son datos, la cuota total resulta de la suma de los intereses que paga más el dinero que destina a la conformación del fondo.

Esa tasa, así obtenida, es el costo del endeudamiento.

Luego puede suceder que sea menor, igual o mayor que la tasa de interés que está pagando, consecuentemente el resultado será un costo mayor, igual o un beneficio, respectivamente, tal como se dijo previamente. Si, por ejemplo se toma un préstamo bajo las siguientes condiciones:

Concepto	
Capital del préstamo:	$ 100.000,00
Interés Activo:	4,00%
Interés Pasivo:	2,00%
Cuotas de interés:	4
Pago del interés:	Periódico
Reintegro del capital:	Al fin del plazo total

Calcular: la cuota que es necesaria y luego analizar si el costo efectivo del préstamo es el 4 % que se paga.

El interés es: $ 100.000,00 * 0,04 =	$ 4.000,00
La cuota para la conformación del monto es:	$ 24.262,38
El total a pagar por mes es:	$ 28.262,38

N.º	**Cuota total**	**Interés**	**Cuota neta**	**Interés**	**Total**
1	$ 28.262,38	$ 4.000,00	$ 28.262,38	$ 0,00	$ 24.262,38
2	$ 28.262,38	$ 4.000,00	$ 28.262,38	$ 485,25	$ 49.010,00
3	$ 28.262,38	$ 4.000,00	$ 28.262,38	$ 980,20	$ 74.252,57
4	$ 28.262,38	$ 4.000,00	$ 28.262,38	$ 1.485,05	$ 100.000,00

[14] En el capítulo XI se desarrolla en detalle el “procedimiento” de determinación de la tasa de interés sobre saldos.

Luego para determinar la tasa de interés sobre saldos se aplica el razonamiento de Baylli:

h= 0,050287
i= 0,0509342

N.º	Cuota total	Interés	Capital	Acumulado	Total
					$ 100.000,00
1	$ 28.262,38	$ 5.093,42	$ 23.168,96	$ 23.168,96	$ 76.831,04
2	$ 28.262,38	$ 3.913,33	$ 24.349,05	$ 47.518,01	$ 52.481,99
3	$ 28.262,38	$ 2.673,13	$ 25.589,25	$ 73.107,25	$ 26.892,75
4	$ 28.262,38	$ 1.369,76	$ 26.892,62	$ 99.999,87	$ 0,13

Así resulta que el costo, en términos relativos, es mayor que lo que realmente está planteado, la diferencia, tal lo antes dicho, está determinada por la aplicación de dinero a una cuota de ahorro por el que cobra una tasa de interés menor al del costo del préstamo. Un claro ejemplo de costo de oportunidad, luego si la tasa activa fuera igual a la tasa pasiva, no debiera haber diferencia alguna.

Calcular: la cuota que es necesaria y luego si el costo efectivo del préstamo si es el 4% la tasa de interés que se paga y el 4% la tasa que se cobra:

El interés es: $ 100.000,00 * 0,04 = $ 4.000,00
La cuota para la conformación del monto es: $ 23.549,00
El total a pagar por mes es: $ 27.549,00

n	Cuota total	Interés pasivo	Cuota neta	Interés activo	Total
1	$ 27.549,00	$ 4.000,00	$ 23.549,00	$ 0,00	$ 23.549,00
2	$ 27.549,00	$ 4.000,00	$ 23.549,00	$ 941,96	$ 48.039,97
3	$ 27.549,00	$ 4.000,00	$ 23.549,00	$ 1.921,60	$ 73.510,57
4	$ 27.549,00	$ 4.000,00	$ 23.549,00	$ 2.940,42	$ 100.000,00

h= 0,0396002
i= 0,0400002

n	Cuota total	Interés	Capital	Acumulado	Total
					$ 100.000,00
1	$ 27.549,00	$ 4.000,00	$ 23.548,99	$ 23.548,99	$ 76.451,01
2	$ 27.549,00	$ 3.058,05	$ 24.490,95	$ 48.039,94	$ 51.960,06
3	$ 27.549,00	$ 2.078,41	$ 25.470,59	$ 73.510,53	$ 26.489,47
4	$ 27.549,00	$ 1.059,58	$ 26.489,42	$ 99.999,95	$ 0,05

La tasa resultante, según Baylli, es el 4%, coincidente con él la tasa Activa, luego la cuota calculada, según el Sistema Francés es igual a la del Sistema Americano.

Y así si la tasa pasiva fuera mayor que la tasa activa el costo del préstamo será menor que la tasa activa pagada.

Por ejemplo: calcular: la cuota que es necesaria y luego analizar si el costo efectivo del préstamo es el 4 % que se paga y el 5 % lo que se cobra:

El interés es: $ 100.000,00 * 0,04 = $ 4.000,00
La cuota para la conformación del monto es: $ 22.859,15
El total a pagar por mes es: $ 26.859,15

n	Cuota total	Interés pasivo	Cuota neta	Interés activo	Total
1	$ 26.859,15	$ 4.000,00	$ 22.859,15	$ 0,00	$ 22.859,15
2	$ 26.859,15	$ 4.000,00	$ 22.859,15	$ 1.371,55	$ 47.089,85
3	$ 26.859,15	$ 4.000,00	$ 22.859,15	$ 2.825,39	$ 72.774,39
4	$ 26.859,15	$ 4.000,00	$ 22.859,15	$ 4.366,46	$ 100.000,00

h= 0,0291079

i= 0,0293228

n	Cuota total	Interés	Capital	Acumulado	Total
					$ 100.000,00
1	$ 26.859,15	$ 2.932,28	$ 23.926,87	$ 23.926,87	$ 76.073,13
2	$ 26.859,15	$ 2.230,68	$ 24.628,47	$ 48.555,34	$ 51.444,66
3	$ 26.859,15	$ 1.508,50	$ 25.350,65	$ 73.905,99	$ 26.094,01
4	$ 26.859,15	$ 765,15	$ 26.094,00	$ 99.999,99	$ 0,01

La tasa resultante, según Baylli, es el 2,93 %, o sea que el costo, en términos relativos, es menor que la tasa activa pagado, luego: según el Sistema Francés la cuota necesaria para la cancelación del préstamo es menor que la anterior.

Conclusión general

No existe un sistema o modo mejor que otro.

Para cada caso en particular habrá uno que se ajusta de mejor modo al destino o aplicación del dinero y es por ello que la decisión de la forma de pago de un préstamo deuda está en función de dos variables:

1. **Relativas:** la tasa de interés
2. **Absolutas:** el flujo de fondos resultante de la forma del pago del interés y reintegro del capital

La **tasa**, al ser una variación relativa, **debe ser comparada con la rentabilidad del destino** de los fondos en tanto que **el reintegro del capital y pago de intereses debe ser analizado en función del flujo de fondos** que se sucederán a consecuencia de la aplicación de los fondos del préstamo.

CAPÍTULO 13
CAMBIO EN LAS CONDICIONES PACTADAS DE FINANCIACIÓN

Alternativas de cambio

Ante la eventual situación de cambio de las condiciones pactadas o de obligaciones preexistentes pueden suceder diversas alternativas que alteren:

- ♣ La cantidad de cuotas o vencimientos
- ♣ Los valores nominales
- ♣ Las fechas de vencimiento
- ♣ Cualquiera de las precitadas combinadas entre ellas

Condición necesaria para operar

Para que pueda hacerse el cambio de un conjunto de obligaciones preexistentes por otro distinto, sin condiciones que beneficien o perjudiquen a las partes, debe tenerse en cuenta que:

> La sumatoria de los valores actuales de las obligaciones preexistentes debe ser igual a la sumatoria de los valores actuales de las obligaciones futuras operando en ambos casos con la misma tasa de interés.

Dicho de otro modo: que ambas alternativas sean “equivalentes” en términos financieros.

Alternativas de estudio comunes

Se dan en casi todos los programas de estudio y consecuente bibliografía dos casos que pretenden cubrir la totalidad del espectro de estas situaciones, y ellos son:

- Vencimiento medio

  Parte del supuesto que dada una serie de obligaciones futuras se van a canjear por otra que cuyo valor nominal sea igual a la suma de los valores nominales de las obligaciones preexistentes, siendo la incógnita la fecha de vencimiento.

- Vencimiento común

  Es el mismo planteo pero, dado como dato la fecha de vencimiento hay que determinar el valor nominal de la nueva obligación.

Posibilidades de cambio

Por supuesto que los precitados casos de canje de obligaciones resultan ser dos puntos particulares de casi infinitas alternativas que dependen solamente de la capacidad de negociación o ingenio de las partes que intervienen dentro del marco de sus posibilidades.

Limitar la enseñanza de un tema tan importante como es el cambio de condiciones preestablecidas a solo dos alternativas es un extremo de simplificación.

Resolución

Análisis del problema

El análisis del problema se divide en dos partes

- La primera es determinar el valor actual de las obligaciones preexistentes.
- La segunda es a partir de allí ver como se cancela esa suma.

  Alternativa de amplio espectro pues comprende desde el mismo pago al contado de esa suma a cualquiera otra forma que se pueda acordar y establecer.

Procedimiento

Puede suceder que la nueva forma de pago tenga o no alguna condición: sea una fecha, una suma predeterminada o la combinación de ambas.

En primer lugar se ha de calcular el valor presente de las obligaciones preexistentes, es decir: "cuánto se debe hoy".

Luego de acordadas las fechas y/o cantidades a abonar en el futuro hay que determinar el valor nominal y/o fechas, respectivamente, del nuevo acuerdo de pago.

Y es aquí donde debe se operar a la luz del criterio de equidad financiera ya visto.

Para nuestro razonamiento para los movimientos en el tiempo podremos utilizar tasas de interés nominales periódicas o bien tasas equivalentes/efectivas[15].

Por lo tanto el factor a utilizar será:

$$\mathbf{(1 + i)^n}$$

Luego:

- ♣ El tiempo "n" podrá ser: mayor, igual o menor que "cero" y en función de su valor va a ser utilizado, respectivamente, como factor de capitalización, neutro o de actualización.
- ♣ Si la magnitud de tiempo en que está expresada la tasa de interés "i" es diferente a la que expresa el tiempo es necesario, previo a la operación, sincronizar ambos factores.

  Para ello a la tasa de interés se expresa como una tasa subperiódica, proporcional en este caso, y, así también, se ha multiplicar el exponente "n" por la cantidad de ellos.

$$\mathbf{(1 + i/m)^{n\,m}}$$

- ♣ Si la tasa de interés "i" fuera equivalente: "n" necesariamente va a ser una fracción cuyo denominador estará expresado en la unidad de tiempo que sincronice tasa y tiempo y su numerador será el lapso que transcurre desde el momento de vencimiento original al momento de vencimiento de la nueva obligación.

Desarrollo analítico por formulas

Determinación del valor actual

Premisas

- ♣ El valor actual (V) es igual al valor nominal (N) menos el descuento (D)

$$V = N - D$$

- ♣ El valor actual de la nueva obligación es igual a la sumatoria de los valores actuales de los compromisos preexistentes

$$N_o <=> N_1 + N_2 + N_3 + \dots\dots\dots + N_n$$

[15] Para mayor detalle: ver capítulo de Actualizaciones.

$$V_o = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots + V_n$$

Desarrollo de la fórmula de valor actual

A la “quita” de intereses se la llama: “Descuento (D)”.

Luego: *el Descuento (D) es la cantidad que se resta al Valor Nominal (N) a efectos de obtener su Valor Actual (V)*

Por todo lo antes visto sabemos que: *el “Valor Final o Valor Nominal (N)” es el resultado de sumar “Intereses (I)” al “Valor Actual “V”.*

Luego:

$$I = D$$

I - Desarrollo con Tasa nominal “i” y subperíodos de capitalización “m”

- **N = V + I**

  $I = V\,[(1 + i/m)^{mn} - 1]$

  $N = V + V\,[(1 + i/m)^{mn} - 1]$

  $N = V\,\{1 + [(1 + i/m)^{mn} - 1]\}$

$$\mathbf{N = V\,(1 + i/m)^{mn}} \qquad \textbf{(1)}$$

- **D = N - V**

  Reemplazado por (1)

  $D = N - N / (1 + i/_m)^{n\,m}$

$$\mathbf{D = N\,[1 - 1 / (1 + i/_m)^{n\,m}]} \qquad \textbf{(2)}$$

  Operando entre corchetes:

$$D = N\,\{[(1 + i/_m)^{n\,m} - 1] / (1 + i/_m)^{n\,m}\}$$

$$D = [N / (1 + i/_m)^{n\,m}]\,[(1 + i/_m)^{n\,m} - 1]$$

$$\mathbf{D = V\,[(1 + i/_m)^{n\,m} - 1]}$$

- **V = N - D**

  Reemplazando por (2)

$$V = N - N\,[1 - 1 / (1 + i/_m)^{n\,m}]$$

$$V = N - N + N / (1 + i/_m)^{n\ m}$$

$$\mathbf{V = N / (1 + i/_m)^{n\ m}}$$

II - Utilizando tasa equivalente/efectiva:

Cabe el mismo razonamiento que para el caso anterior, por lo tanto se reemplazan los valores a considerar:

$$\mathbf{N = V (1 + i')^{1/m}}$$

$$\mathbf{D = N [1 - 1 / (1 + i')^{1/m}]}$$

$$\mathbf{V = N / (1 + i')^{1\ m}}$$

Cálculo del valor nominal de un nuevo vencimiento

Tal lo visto tenemos como dato la fecha de vencimiento pero desconocemos el monto o valor nominal.

Reemplazamos los valores actuales en función del descuento:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots\dots + V_n$$

$$N_o / (1+ i)^n{}_o = N_1 / (1+ i)^n{}_1 + N_2 / (1+ i)^n{}_2 + \dots\dots\dots + N_n / (1+ i)^n{}_n$$

$$N_0 / (1+ i)^n{}_o = \sum_{h=1}^{n} (N_h / (1 + i)^n{}_h)$$

$$N_0 = \sum_{h=1}^{n} (N_h / (1 + i)^n{}_h) * (1+ i)^n{}_o$$

Cálculo de la fecha de vencimiento

Tal lo visto tenemos como dato el valor nominal pero desconocemos la fecha de vencimiento.

$$N_o / (1 + i)^n{}_o = N_1 / (1+ i)^n{}_1 + N_2 / (1+ i)^n{}_2 + \dots\dots\dots + N_n / (1+ i)^n{}_n$$

$$N_o / (1+ i)^n{}_o = \sum_{h=1}^{n} N_h / (1 + i)^n{}_h$$

$$N_o / \sum_{h=1}^{n} N_h / (1 + i)^n{}_h = (1+ i)^n{}_o$$

$$\mathbf{n_o} = \log \left[N_o / \sum_{h=1}^{n} N_h / (1+i)^{n}{}_{h} \right] / \log (1+i)$$

Conclusión

Todo plan de pagos, rentas, sistemas de amortización, bonos, etc. que implique el movimiento de dinero en el tiempo es, por definición, un flujo de fondos y como tal debe ser tratado en caso de que, por la razón que fuere, se desee realizar algún tipo de cambio y/o valorización en algún momento del tiempo.

Para ello se deben aplicar las técnicas de valorización vistas y, en su caso, a partir de conocer su valor en algún momento de su vida financiera permite reformular la forma de pago pactada.

Ello es otra manera de tratar el "cambio en las condiciones pactadas de financiación".

A manera de ejemplo se plantea el siguiente hipotético caso de una empresa que decide reformular su deuda.

Ejemplo

Planteo:

Dada la siguiente situación financiera de una empresa, a saber:

a. $ 120.000, vencido hace 45 días,
b. $ 150.000,00 vencido hace 30 días,
c. vence en el día de la fecha $ 85.000,00;
d. tiene un plan de pagos de 12 cuotas de $ 120.500,00, mensuales, vencidas y consecutivas, primer vencimiento a los 90 días de la fecha y
e. dos pagos de $ 175.000,00 cada uno, con vencimiento a los 110 y 130 días, respectivamente, de la fecha.

Calcular el valor de las siguientes alternativas de pago:

1. Un pago al contado en el día de la fecha, con un descuento del 5% sobre el total adeudado al día del pago.
2. Un pago único a los 12 meses, con más intereses.
3. Operando con el Sistema Alemán de pago de intereses vencidos calcular la cuota que cancela ese pasivo en 12 mensualidades.
4. Entregando al contado la suma de $ 350.000,00 y el saldo en cinco cuotas calculadas por el Sistema Francés, realizar el cuadro de marcha.

5. Un pago a los 5 meses debiendo, el deudor, conformar una imposición de pago vencido de manera tal que al cabo de los 5 meses cuente con el dinero para aplicar al pago. Calcular la cuota de la imposición. Realizar el cuadro de marcha.

Operar en todo momento con el 5% nominal anual.

Resolución:

En primer lugar se ha de determinar el valor actual del pasivo, es decir cargar intereses a la deuda vencida y realizar el descuento a los vencimientos futuros.

	Pago	Importe	Vto. en días	Tasa	Ajustes	Valor Actual
					Intereses	
a	$ 120.000,00 vencido hace 45 días,	$ 120.000,00	-45	0,62%	$ 739,73	$ 120.739,73
b	$ 150.000,00 vencido hace 30 días,	$ 150.000,00	-30	0,41%	$ 616,44	$ 150.616,44
c	Vence en la fecha $ 85.000,00;		0	0,00%		
d	A pagar a los 110 días $ 175.000,00	$ 175.000,00	110	1,51%	$ -2.636,99	$ 172.363,01
d	A pagar a los 130 días $ 175.000,00	$ 175.000,00	130	1,78%	$ -3.116,44	$ 171.883,56
e	Plan de pagos de 12 cuotas de $ 120.500,00, mensuales, vencidas y consecutivas, primer vencimiento a los 90 días de la fecha					
	Se trata de una renta diferida por 90 días					
	Valor de la deuda al inicio de los pagos:				$ 1.407.587,25	
	Actualización:				$ 17.353,82	
	Valor de la deuda al día de su valorización:					$ 1.390.233,44
Deuda al día del acuerdo o valor actual del Pasivo:						**$ 2.005.836,18**

Determinado el valor actual de la deuda es posible calcular los importes de las distintas alternativas de pago.

A saber:

1. Un pago al contado en el día de la fecha, con un descuento del 5% sobre el total adeudado al día del pago. Se trata del cálculo de un descuento.

Valor actual de la deuda:	$ 2.005.836,18
Descuento:	
Tasa	5,00%
Importe	$ 100.291,81
Neto a pagar:	**$ 1.905.544,37**

2. Un pago único a los 12 meses, con más intereses. Se trata del cálculo de un Monto.

Valor actual de la deuda:	$ 2.005.836,18
Intereses	
Tasa	5,00%
Plazo	1 año
Interés	$ 100.291,81
Total a pagar:	**$ 2.106.127,99**

3. Operando con el *Sistema Alemán* de pago de intereses vencidos calcular las cuotas que cancelan ese pasivo en 12 mensualidades.

Cuota	Capital	Interes	Cuota	Resto
0		5% anual		$ 2.005.836,18
1	$ 167.153,02	$ 8.357,65	$ 175.510,67	$ 1.838.683,17
2	$ 167.153,02	$ 7.661,18	$ 174.814,19	$ 1.671.530,15
3	$ 167.153,02	$ 6.964,71	$ 174.117,72	$ 1.504.377,14
4	$ 167.153,02	$ 6.268,24	$ 173.421,25	$ 1.337.224,12
5	$ 167.153,02	$ 5.571,77	$ 172.724,78	$ 1.170.071,11
6	$ 167.153,02	$ 4.875,30	$ 172.028,31	$ 1.002.918,09
7	$ 167.153,02	$ 4.178,83	$ 171.331,84	$ 835.765,08
8	$ 167.153,02	$ 3.482,35	$ 170.635,37	$ 668.612,06
9	$ 167.153,02	$ 2.785,88	$ 169.938,90	$ 501.459,05
10	$ 167.153,02	$ 2.089,41	$ 169.242,43	$ 334.306,03
11	$ 167.153,02	$ 1.392,94	$ 168.545,96	$ 167.153,02
12	$ 167.153,02	$ 696,47	$ 167.849,49	$ 0,00

4. Entregando al contado la suma de $ 350.000,00 y el saldo en cinco cuotas calculadas por el *Sistema Francés,* realizar el cuadro de marcha.

Deuda	$ 2.005.836,18
Pago a cuenta	$ 350.000,00
Saldo a financiar	$ 1.655.836,18
Cuotas	5
Interés	5,00%
Importe de la cuota	$ 382.456,43

Cuota	Importe	Interés	Capital	Resto
0				$ 1.655.836,18
1	$ 382.456,43	$ 82.791,81	$ 299.664,62	$ 1.356.171,56
2	$ 382.456,43	$ 67.808,58	$ 314.647,85	$ 1.041.523,71
3	$ 382.456,43	$ 52,076,19	$ 330.380,24	$ 711.143,46
4	$ 382.456,43	$ 35.557,17	$ 346.899,26	$ 364.244,21
5	$ 382.456,43	$ 18.212,21	$ 364.244,22	$ -0,01

5. Un pago a los 5 meses debiendo, el deudor, *conformar una imposición de pago vencido* de manera tal que al cabo de los 5 meses cuente con el dinero para aplicar al pago. Calcular la cuota de la imposición. Realizar el cuadro de marcha.

Deuda	$ 1.655.836,18
Interés	$ 34.496,59
Valor nominal	$ 1,690.332,77
Cuota de la imposición	$ 335.261,04

Cuota	Importe	Interés	Ahorro
1	$ 335.261,04	$ 1.396,92	$ 336.657,96
2	$ 335.261,04	$ 1.402,74	$ 673.321,74
3	$ 335.261,04	$ 2.805,51	$ 1.011.388,29
4	$ 335.261,04	$ 4.214,12	$ 1.350.863,45
5	$ 335.261,04	$ 5.628,60	$ 1.691.753,09

CAPÍTULO 14
INTERÉS DIRECTO

Conceptos generales

Se denomina Interés Directo a una forma de determinar el recargo de una suma a financiar y a devolver en más de un pago o cuota.

El interés se calcula en forma lineal como en el Interés Simple:

$$I = C\ i\ n$$

Modalidades de pago

Calculado el interés se presentan dos alternativas para el pago: una es que se lo sumemos al capital y la otra es que se lo restemos.

Más allá de la modalidad adoptada y para poder aplicar correctamente las fórmulas que correspondan, cabe destacar que siempre:

- ♣ El valor del préstamo (V_0) es lo que efectivamente se recibe.
- ♣ El total adeudado (M) es igual a la suma efectivamente recibida (V_o) más los intereses (I):

$$M = V_o + I$$

- ♣ El valor de la cuota (α) a pagar es igual al total adeudado dividido por la cantidad de cuotas pactadas:

$$\alpha = M/n$$

Interés cargado

Si sumamos el interés al capital solicitado se llama **"**Interés cargado".

Considerando que el valor del préstamo es siempre lo que efectivamente se recibe en este caso será el capital solicitado.

El total a financiar será la suma de capital solicitado más los intereses.

El valor de la cuota a pagar siempre será igual al capital recibido más los intereses dividido por la cantidad de cuotas pactadas.

Se suma el Interés al capital "C" y luego a ese resultado se lo divide por la cantidad de cuotas "n" en que se va a pagar.

$$\text{Cuota} = \frac{C + I}{n}$$

$$\text{Cuota} = \frac{C + C\ i\ n}{n}$$

$$\text{Cuota} = \frac{C\ (1 + i\ n)}{n}$$

Interés deducido

Si restamos el interés al capital solicitado se llama "Interés deducido".

El valor del préstamo será el capital solicitado menos los intereses.

El total a financiar será solo el capital solicitado pues el interés se le resta al capital solicitado en el momento inicial (n = 0).

Para determinar el valor de la cuota: directamente al Capital solicitado se lo divide por la cantidad de cuotas en que se va a pagar pues lo intereses ya se dedujeron.

$$\text{Cuota} = C/n$$

Determinación de la tasa efectiva implícita en la operación

Dada la forma de determinación de la cuota resulta redundante y obvio decir que esa cuota lleva dentro de sí una parte que amortiza el capital y otra que se aplica a intereses.

Pero por otra parte también es evidente que estamos calculando intereses para todo el período sin considerar que en su intermedio se va devolviendo parcialmente, en cada cuota, el capital.

Las premisas si bien son claras y pactadas de común acuerdo entre las partes no son financieramente válidas, luego no es correcta la conclusión.

Por lo tanto el resultado no es financieramente válido aunque aritméticamente esté bien.

Sin duda alguna podemos afirmar que en esta forma de pago estamos pagando intereses sobre un dinero que no debemos.

Por lo tanto la suma cobrada por intereses es en términos absolutos, sin duda alguna, la obtenida en el procedimiento. Pero el costo efectivo medido en términos relativos (tasa efectiva de la operación) resulta mayor que el valor nominal de la tasa utilizada en el cálculo.

Es importante tener presente que esta forma de cancelar deudas produce una distorsión de la realidad que en todos los casos beneficia al acreedor de la operación.

Es necesario tener presente que utilizar esta forma de pago implica para el acreedor tomar la necesaria y prudente conducta de aclarar, previamente, la tasa efectiva resultante en la operación. Si así no fuere y dada la eventual confusión que se produce en el procedimiento se podría llegar a dudar de su buena fe en el proceder, hasta el punto de calificar su conducta como dolosa[16].

Para poder determinar cuál es el costo efectivo en términos relativos debemos partir del concepto de renta —propiamente dicha— o sea: una serie de pagos destinados a cancelar una deuda donde tenemos como datos el capital prestado, la cantidad de cuotas y el importe de cada una de ellas.

La *incógnita es la tasa de interés sobre saldos* que está de implícita en la operación y que por todo lo antes visto no es igual a la utilizada en la determinación de la cuota.

Buscamos la tasa de interés utilizada en la siguiente igualdad:

$$V_o = \alpha \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = \alpha \, a_o$$

Debemos despejar la tasa de interés "**i**".

Para despejar la tasa de interés utilizada en esa igualdad hay que razonar aplicando un procedimiento que escapa a los conocimientos necesarios para el logro del objetivo de este trabajo; motivo por el cual directamente se indica su resultado.

De dicho procedimiento se obtiene la llamada "Fórmula de Baily" que permite calcular con gran aproximación la tasa de interés cuando el número de períodos sea menor que 50 y la tasa no sea elevada.

$$i = h \frac{12 - (n - 1)\,h}{12 - 2\,(n - 1)\,h}$$

Siendo:

$$h = [(\alpha\, n) / V_o]^{(2/\,n+1)} - 1$$

[16] "Acción dolosa para conseguir la ejecución de un acto, es toda aserción de lo falso o disimulación de lo verdadero, cualquier artificio, astucia o maquinación que se emplee a tal fin", art. 931, Código Civil de la República Argentina.

Alternativas que se presentan respecto a las cuotas adelantadas o vencidas

Planteada esta forma de cancelar deudas y acorde a lo ya visto el Valor Actual “V_o” es el importe neto recibido o capital **“C”** que efectivamente se adeuda al momento en que se inicia la operación.

Nunca es el Monto (C + I) lo que se adeuda en ese momento. Ello siempre es así independientemente de las formas que pacten, acuerden o convengan.

Es muy común que el cálculo del interés en forma directa se realice tomando como factor tiempo “n” a la cantidad total de cuotas que se pagan, independientemente que el vencimiento sea *adelantado* (abonando la primer cuota al momento de concretarse la operación) o *vencido* (el primer pago es al vencimiento del primer período).

En todos los casos la Fórmula de Baily solo es aplicable para amortizaciones vencidas, es decir que en el caso que la cuota sea adelantada se debe ajustar la financiación a la modalidad de pago con cuota vencida.

En rigor de verdad **no existen planes de pago de cuotas adelantadas** pues al entregar una suma al momento inicial se altera el mismo: disminuyen la deuda y la cantidad de cuotas.

Lo que realmente se adeuda no es la suma utilizada en el cálculo del interés como Capital “C” sino una cantidad menor, disminuye en el valor de una cuota, y a pagar en una cuota menos.

Por lo tanto: no existe fórmula a aplicar para el pago de cuotas adelantadas, sino que al momento de plantear el análisis de la tasa sobre saldos utilizada, el problema a resolver es otro problema, distinto al inicialmente enunciado y las diferencias son las dos antes dichas antes dichas.

Considerando que en esa primera cuota que se paga en forma adelantada hay incluido intereses el monto a financiar disminuye en más que la “n-ava” parte en que fue dividido. Pues en el mismo momento en que se inicia la operación estamos pagando intereses y aún no ha transcurrido un solo período.

Por lo tanto se puede inferir que la tasa efectiva resultante será no solo mayor a la nominal sino también a la que hubiere resultado si la modalidad de pago hubiese sido de cuota vencida.

Es de destacar que también en este caso la consecuencia de esta modalidad resulta en que todo cambia para beneficio del acreedor.

CAPÍTULO 15
BONOS Y TÍTULOS VALORES

Introducción

Conceptos generales

Un “bono” es una forma de instrumentar un préstamo y pasa a ser la representación del mismo.

Son documentos emitidos al portador y de libre circulación, su tenencia implica propiedad la cual, obviamente, se transmite por la mera entrega del papel o título.

A los efectos de su tratamiento financiero son sinónimos: “bonos, títulos, y/o empréstitos” como así también “las obligaciones negociables y los debentures”.

Por lo general el deudor es un estado, institución o empresa de una magnitud significativa y la contraparte está conformada por más de una persona, acreedores, a los que se les llama inversionistas.

Desde el punto de vista del **deudor** *es asumir el compromiso de entregas futuras de dinero a cambio de una suma que recibe al momento de su emisión*.

Luego esa serie de movimientos de dinero conforman un “flujo de fondos”, por lo tanto puede afirmarse que analizar una inversión instrumentada u ofrecida bajo esta modalidad es, ni más ni menos, que el estudio de un “flujo de fondos”.

Un flujo de fondos es uno de los mejores ejemplos de lo que es una renta.

Flujos de fondos

Un flujo de fondos o fluir de fondos es el movimiento del dinero que se sucede en una operación o presupuesto.

En todo flujo de fondos hay movimientos “positivos” y “negativos” según se recupere o entregue dinero, respectivamente.

Así entonces un movimiento de dinero será “negativo” para quién lo entrega y “positivo” para el que lo recibe.

En el caso de un bono hay, desde el punto de vista del comprador, inversor o acreedor, una entrega inicial “flujo negativo” y luego la totalidad de los restantes movimientos son recuperos o cobros “flujos positivos” sea por intereses y/o capital. A la inversa para el deudor o emisor.

Instrumentación

Habida cuenta de la cuantía de la suma, las condiciones de la operatoria, las partes que intervienen y el destino del dinero este tipo de préstamos se instrumenta y consecuentemente opera de una manera diferente a la que se realiza en el comercio en general y la banca minorista.

Las condiciones de la operatoria: su importe, tasa de interés, forma de pago y otras particularidades propias del “bono” las establece el deudor en lo que se llama “prospecto de emisión”.

El inversionista tomará sus decisiones en base a esas “reglas” que fija el emisor.

Esa posibilidad de conocer el flujo futuro de fondos permite estudiar, planificar y realizar una o más inversiones de manera tal que, en el conjunto, se pueda establecer un flujo global del dinero tendiente a maximizar beneficios y/o minimizar los riesgos propios de esta operatoria.

Precio

El precio de un bien es la suma de dinero que el comprador está dispuesto a pagar para su adquisición.

En el caso de un “bono” el precio será la suma de dinero que el inversor esté dispuesto a pagar para ser acreedor de los flujos futuros.

Esa suma de dinero resulta de la valorización de la renta que conforma el flujo de fondos.

Ya se ha visto el modo de valorizar una renta y es esa valorización el modo de calcular el precio del bono: “a qué cantidad de dinero equivalen hoy esos ingresos futuros”.

Donde la tasa de interés es la expresión fáctica del riesgo que el inversor está dispuesto a asumir para ser beneficiario de la ganancia implícita en el flujo de fondos que está comprando.

Esa cantidad es, matemáticamente, igual a la sumatoria del valor actual de todos y cada uno de los flujos futuros y, por lo tanto, constituye el “valor actual” del bono.

Cabe destacar que no necesariamente la tasa de interés que el inversor utilice sea igual a la tasa de interés que el emisor ofrece en su propuesta de emisión.

Por otra parte cada inversionista aplicará, según su caso y conveniencia, la tasa de interés que le contribuya al incremento de la rentabilidad de su cartera.

Por lo tanto el precio tendrá una correlación inversa con la tasa de interés: *a mayor tasa menor precio y viceversa*.

Considerando que el cronograma de flujos futuros (positivos) está calculado a la tasa de interés ofrecida que la única posibilidad que tiene el inversor de incrementar su rentabilidad es calculando el precio o valor actual a una tasa menor que la propuesta por el emisor.

Sencillamente: pagará menos dinero por la compra del bono.

Valor de emisión

Para el deudor el precio es el "valor de emisión" y será la suma que resulte de la aplicación de la tasa de interés que él mismo propone o establece en las condiciones de emisión.

Precio de mercado

A su vez el bono tiene un "precio de mercado", que lleva una tasa de interés implícita, por lo tanto cada inversor tomará la decisión de comprar o no ese flujo de fondos en virtud de su situación particular y el rendimiento de las inversiones que conforman su cartera o portafolio de sus inversiones.

El precio de mercado es, por otra parte, el valor actual que el mercado dice que tiene ese flujo de fondos.

Esta manera de interpretar el valor actual —como un dato de la realidad y no como resultado de un proceso técnico de análisis financiero— es de fundamental importancia al momento de considerar y aplicar técnicas de ponderación de alternativas de análisis; análisis que se desarrollará más adelante.

Mercado y conceptos generales

Mercados

Un mercado es el lugar a donde concurren y se encuentran la oferta y la demanda de bienes y productos.

Respecto al tipo de operaciones existen dos tipos:

- ♣ Mercados físicos que es donde se opera con cosas (cereales, haciendas, frutos del país, etc.).
- ♣ Mercados financieros en el cual se opera con documentos o papeles (títulos, acciones, valores, etc.).

El primer tipo de mercado existe en toda localidad, desde las más pequeñas hasta las más importantes, en tanto que los mercados financieros funcionan solo en algunas ciudades y en general se los llama “Bolsa de Valores” o “Bolsa de Comercio”.

En este tipo de mercados no se venden bienes materiales sino “papeles”.

En el caso particular de los bonos lo que se está realizando al momento de materializar una operación de compra-venta es una transferencia de derechos sobre los cobros futuros, sea capital y/o renta.

Dentro de este tipo de mercados existen operaciones de compra venta de títulos, valores, bonos, etc. que se inician y finalizan en el momento con el pago y entrega de la documentación o bien operaciones que se cierran o finalizan en el futuro.

Es así que existe un mercado de futuros, donde hoy se pueden adquirir derechos y/o contraer obligaciones que se ejercerán a posteriori.

Conceptos generales

Vocabulario

Visto está que *invertir en bonos es comprar un flujo de fondos*, dicho de otro modo: *es comprar el derecho a recibir una renta programada en tiempo y dinero*.

La tasa de interés que se utiliza para la determinación de la renta del bono es comúnmente denominada “tasa de cupón” o “tasa de renta” y al pago de intereses se los denomina “pago de servicios” o “importe del cupón”.

El interés se determina multiplicando la tasa de interés sobre el valor residual del bono.

Por otra parte, y según lo antes visto, el capital prestado puede ser reintegrado en forma parcial durante el lapso de vida del bono o bien en su totalidad junto con el último pago de renta.

En el caso de que el capital sea abonado en forma parcial durante la vida del bono se realiza mediante el pago de “cupones de amortización”.

Al saldo de deuda de capital se lo denomina “valor residual” o “capital residual”.

A los intereses que se corresponden con el tiempo transcurrido desde el último pago de renta hasta el momento en que se está valorizando se los llama “intereses corrid*os*” y son los “intereses devengados” hasta ese momento.

Al resultado de la suma del “valor residual” más los “intereses corridos” se llama “valor técnico”.

A la relación entre el precio que un bono tiene en el mercado y su valor técnico se lo denomina “paridad” y por lo general se lo expresa como un porcentaje del valor nominal, por ejemplo: paridad del 98,85%.

Aquí vuelve el concepto de precios a la par, bajo la par o sobre la par y resulta de la comparación del precio que por un bono se paga en el mercado respecto a su valor técnico en ese momento, o sea la paridad.

Maduración

Por maduración de un bono se entiende el momento en el cual será cancelado, es decir pagado el capital o inversión.

El lapso menor de una deuda es por un día y el máximo, si bien no se puede afirmar una fecha como extremo tope, se toma el de los bonos a treinta años.

Los plazos pueden ser clasificados o considerados como:

- ♣ Corto plazo: hasta los cinco años.
- ♣ Plazo intermedio: de cinco a doce años.
- ♣ Largo plazo: de más de doce años.

Volatilidad

La volatilidad es el resultado de la conjunción de la velocidad en que se mueven los precios.

Es la variación que en el tiempo tiene el precio de un bien.

Respecto a los precios futuros existe una correlación directa entre volatilidad e incertidumbre.

Luego si la volatilidad es una realidad del mercado habrá que ver la manera de analizar y de contrarrestar esa incertidumbre.

De las variables a considerar en la determinación del precio (sea de un bien, bono u opción) es el único factor que no se conoce con certeza, por lo tanto y si bien existen herramientas y procedimientos aritméticos para su cálculo su ponderación es netamente subjetiva, luego su valor puede o no coincidir con las restantes cuantificaciones de los operadores del mercado.

Si no existiese la volatilidad o fuera no significativa no existirían dudas respecto a los precios futuros, pero como no es así para tratar de contrarrestar los efectos negativos de los cambios futuros se han desarrollado y existen los mercados de futuros y opciones.

Por lo tanto la incertidumbre no debe ser vista como una consideración negativa por el riesgo sino una realidad que habilita la posibilidad de operar tratando de obtener beneficios con su manejo: vender en sus picos y comprar en las bajas.

Portafolio

Si por lo antes visto se espera que un buen inversor realice sus inversiones tendiendo a

- ♣ Minimizar la *duration* para una misma tasa de rentabilidad o
- ♣ Maximizar la tasa para una misma *duration*.

Luego al realizar más de una inversión pasa a tener un nuevo flujo de fondos como resultado de la combinación o sumatoria del flujo de cada una de esas inversiones, o sea a los efectos de su análisis pasa a tener, en su conjunto, una nueva tasa de rentabilidad y una nueva *duration*.

Luego a partir de este concepto es posible desarrollar estrategias de inversión —portafolios— eficientes que tiendan, en su conjunto, a maximizar la tasa de rentabilidad y a una reducción en el tiempo de recupero del capital invertido.

Arbitraje

Se entiende por "*arbitraje*" la operatoria que se realiza en forma simultánea entre dos o más mercados ante el caso de que un mismo producto tenga precios diferentes entre ellos.

Obviamente se trata de una operatoria donde se compra en el mercado de menor precio para venderlo en el de mayor valor obteniéndose así una ganancia.

Es una fuente de ingresos de los operadores que aporta liquidez al mercado y contribuye a la formación de precios.

Tasas de corte y de transferencia

Una tasa es un ratio o razón, luego tanto por uno, que en la unidad de tiempo indica la variación relativa entre dos magnitudes.

En el caso del dinero es el interés generado por una unidad de capital en una unidad de tiempo.

Tasa de corte

La "tasa de corte" es la suma máxima que una entidad está dispuesta a pagar por una unidad de capital en la unidad de tiempo.

Ejemplo

Determinar el valor actual de una letra de tesorería, mediante la aplicación de una tasa de descuento, de valor nominal (VN) \$ .000,00 que vence a los 120 días y su tasa de corte es el 4% efectivo para cada 45 días.

a)	Tasa equivalente diaria:	
	$i_m = (1 + i)^{1/m} - 1$	$i_m = (1 + 0{,}04)^{1/45} - 1 = 0{,}00087195$
b)	Tasa efectiva para 120 días	$i_m = (1 + 0{,}00087915)^{120} - 1 =$
	$i_m = (1 + i)^{m} - 1$	0,11025372
c)	Tasa adelantada: $d = i / (1 + i)$	d = 0,11025372 /(1 + 0,11025372) = =0,09930498
d)	Valor actual de \$ 1,00	VA = 1 - d = 0,90069502
e)	Valor actual total =	\$ 500.000,00 * 0,9006952 = \$ **450.347,51**

Comprobación:

a) Tasa equivalente: $i_m = (1 + 0{,}04)^{120/45} - 1 = 0{,}11025$

b) Valor actual: $VN / (1 + i_m)$ = \$ 500.000,00/1,11025 = **\$ 450.349,02**

Tasa de transferencia

La "tasa de transferencia" de un préstamo es aquella a la cual se calcula el valor actual de los ingresos futuros de un bono o la tasa que aplicada para la actualización de los ingresos futuros determina el precio o valor actual del bono.

Es la tasa de rendimiento del flujo de fondos que se está comprando.

Para el caso particular de la transferencia de un crédito (cuenta por cobrar) que está pactado en cuotas iguales y periódicas la forma de determinar la tasa de transferencia de ese flujo de fondos es mediante la aplicación de la fórmula de Baily.

Ejemplo

Un crédito que en su origen era de \$ 25.000,00 a cobrar en 10 cuotas iguales, mensuales y consecutivas de \$ 2.746,89 es cedido luego del cobro de la tercera cuota en la suma de \$ 18.000,00 determinar la tasa de transferencia a la cual fue realizada la operación.

- ♣ Capital (V): \$ 18.000,00
- ♣ Cuota (α): \$ 2.746,89
- ♣ Cuotas (n): siete (7)

$$h = \left(\frac{\alpha\, n}{V}\right)^{2/(n+1)} - 1$$

$$i = \frac{12\ (n - 1)\ h}{12 * 2\ (n-1)\ h} * h$$

$$h = (2746{,}89 * 7/18.000{,}00)^{2/(7 + 1)} - 1 = 0{,}01664$$

$$= \frac{12 - (7 - 1)\ 0{,}01664}{12 - 2\ (7 - 1)\ 0{,}01664} * 0{,}01664 = 0{,}01678$$

Respuesta: la tasa de transferencia es el 1,678 %

Opciones

Concepto

Se le llama opción a un tipo especial de contrato.

El mismo es celebrado entre dos partes que, como en todo contrato, otorga derechos a quién paga y obliga a quién cobra.

Tiene la particularidad de que quién compra adquiere el derecho de ejercer o no el derecho que ha comprado, es decir “opta” y de allí deriva su nombre, en tanto quién lo vende tiene la obligación de responder en caso que la opción sea ejercida.

Se le llama lanzador a quién vende la opción.

Tipos

Un contrato de opciones puede constituirse sobre cualquier tipo de transacciones o bienes.

Por ejemplo el hecho de comprar con anticipación un pasaje para realizar un viaje da el derecho a quién lo ha comprado de utilizar ese servicio pero puede suceder que no lo haga, está en su decisión: hacerlo o no, pero la empresa de transporte siempre se encuentra obligada a llevarlo si quién tiene ese boleto decide hacer el viaje.

Lo más usual es la realización de un contrato para la compra o venta de títulos, acciones, cupones, opciones y/o bienes, en general, a un lapso determinado.

En el caso de las opciones da derecho a comprar o vender los títulos sobre los que versa el contrato y en el caso particular del mercado agrario a la compra o venta de contratos sobre granos (cereales u oleaginosos).

Existen dos tipos de opciones, que combinadas entre sí (productos y fechas) da interminables alternativas financieras, a saber:

- ♣ Opción de compra: *Call*

Es la opción que comprada permite al comprador comprar al precio acordado un determinado bien o título a su vencimiento o en cualquier momento durante su período de vigencia.

- Opción de venta: *Put*

  Es la opción que comprada permite al comprador vender al precio acordado un determinado bien o título a su vencimiento o en cualquier momento durante su período de vigencia.

  Es de destacar que no constituyen lados opuestos de una misma operatoria; neutraliza la venta de una opción la compra de una igual y viceversa.

  Existen dos tipos de opciones considerando el momento en que se ejercen, las opciones americanas que pueden ser ejercidas en cualquier momento de su vida o bien las opciones europeas que solo pueden ser ejercidas al momento de su vencimiento.

Precio

El precio o prima de una opción depende de varios factores, a saber:

- **Su tiempo de vida**

  Es el lapso que se sucede desde el momento de compra hasta su vencimiento. Existe una correlación directa entre tiempo y precio: a más tiempo mayor es el precio de la prima. Es válido tanto para las opciones de venta como para las de compra.

- **El precio de ejercicio de la opción**

  En este caso se da una correlación directa en el caso de una opción *put* pues cuanto mayor sea el precio de ejercicio más valor tendrá su prima, y en forma inversa para el caso de un *call* pues cuanto menor sea el precio de ejercicio más cara será su prima.

- **La volatilidad de los precios del mercado**

  Para ambos casos se da una correlación directa: ante el aumento de la volatilidad más caro será el precio de las opciones.

- **El valor del contrato de futuro subyacente**[17]

  Debe considerarse que a medida que transcurre el tiempo disminuye la incertidumbre y se suceden cambios en el precio del título o bien sobre el cual se ejercerá la opción.

  A medida que se suceden cambios en el precio del subyacente a futuro, cambia el precio de la opción.

  Si baja el precio del subyacente sube el precio de los *puts* y baja el de los *calls*, y viceversa.

[17] Subyacente es el tipo de bien o producto sobre el cual se ejercerá la opción, por ejemplo: trigo, maíz, acciones, etc.

Clasificación

A los bonos, títulos, empréstitos o de la forma en que denominemos el préstamo se los puede clasificar de más de una forma y en función de sus características.

La siguiente es una manera de hacerlo pero habrá tantas como queramos o podamos ver:

Por el tipo de desembolso inicial

- ♣ A la par: se abona una suma igual al valor nominal.
- ♣ Bajo la par: el pago es menor al valor nominal.
- ♣ Sobre la par: el pago es mayor al valor nominal.

Por el plazo de duración

- ♣ Temporarios: tienen una duración determinada entre dos fechas.
- ♣ Vitalicios: están relacionadas con la vida de una persona.
- ♣ Perpetuos: no tienen fecha de finalización.

Por el ente emisor

- ♣ Gobierno nacional, se los denomina “deuda soberana”.
- ♣ Provincias, municipios o entes públicos.
- ♣ Empresas privadas, se los denomina “deuda privada”.

Según las garantías ofrecidas por el deudor

- ♣ Simples o sin garantías: el aval está dado por el nombre y prestigio del deudor.
- ♣ Con garantías: existen varias maneras de garantizar un bono, la más usual es mediante la constitución de una hipoteca, también mediante carteras de créditos o bienes, prendas, etc.

Por la variabilidad del pago de capital e intereses

- ♣ Valores históricos: los pagos de la renta y/o el capital no se ajustan.
- ♣ Indexados: los pagos de la renta y/o el capital se ajustan en función de alguna variable pactada.

Por la tasa de interés

- ♣ Constantes o fijos: es una tasa predeterminada e inamovible.
- ♣ Variables: la tasa varía según el caso acordado.

Con opciones

- ♣ Rescatables (*callable*): incluye la opción para el emisor de rescatarlos a una fecha y precio determinado.
- ♣ Con opción de venta (*put option*): contrario a lo anterior incluye la opción de que el suscriptor pueda vender el bono al deudor en una fecha y precio previamente acordado.

Por la amortización

En todos los casos se considera que el capital y/o los intereses pueden o no ser indexados.

Por la cuantía del capital a reintegrar:

1. A la par: se paga una suma igual al valor nominal.
2. Bajo la par: el importe que se reintegra al inversor es menor que el valor nominal del bono; se los denomina de "cupón cero".
3. Sobre la par: inversa a la anterior.

   Este caso se denomina "con primas" y puede estar dado por el pago del valor nominal habiéndose suscripto por un valor bajo la par o bien por el efectivo pago de una suma superior a su valor nominal.
4. A perpetuidad: no se devuelve el capital y se cobra una renta perpetua.

Según la forma del pago

1. Integro: se rescatan todos los bonos de una sola vez en un solo pago, se los denomina "bonos Bullet".
   - ♣ Capital e intereses en forma conjunta
   - ♣ Con pago de intereses periódicos[18] y el capital al final de su vida
   - ♣ Títulos ex-cupón: no se cobra el último servicio de intereses, a ese momento solo se paga el capital

[18] Al cobro de intereses se los denomina también "pago de servicios".

- ♣ Con sobreprecio obligatorio: a su vencimiento se cobra el último servicio de intereses, el capital y una suma adicional.

2. Parcial o periódico: no se abona la totalidad del valor nominal de la totalidad de los bonos sino que se rescatan de una manera diferente:
   - ♣ Un pago parcial de la totalidad de los bonos
   - ♣ El pago total de una parte parcial de los bonos

Criterios de análisis de inversiones

Consideraciones previas

Ya se ha visto y analizado que toda inversión financiera tiene, necesariamente, asociado un flujo de dinero.

El flujo del dinero es la vida de la inversión y comprende dos aspectos: el momento en que se sucede cada movimiento de dinero y la cuantía del mismo (tal día, tal suma, respectivamente).

Obviamente que como todo evento a sucederse está sujeto a variables no manejables, luego la toma de decisiones lleva implícita la asunción de un riesgo.

Riesgo

El riesgo siempre está presente en toda inversión y tiene una correlación directa con la rentabilidad de la misma, es decir a mayor riesgo mayor renta y viceversa.

Para la medición del riesgo de un emisor, sea público o privado, existe quienes se ocupan de ello y se las denomina "empresas calificadoras de riesgo" y son ellas las que en base a determinadas variables asignan el grado de seguridad de recupero de la inversión y renta.

Por lo tanto los bonos de empresas o países calificados como de alto riesgo para tornarse atractivos deben tener rendimientos superiores a los ofrecidos por entes más seguros. Son bonos formalmente denominados "de alto rendimiento" o despectivamente "bonos basura".

En el caso de la calificación de los países el buen o mal posicionamiento condiciona a las empresas que en ellos residen pues una empresa nunca va a poder calificar mejor que el país en el que se encuentra más allá del nivel de gestión de la misma.

A solo efecto enunciativo los principales riesgos son:

- ♣ Default: de incumplimiento del deudor
- ♣ Liquidez: limitantes al momento de querer vender o transferir el bono a terceros.
- ♣ Inflación: pérdida de la capacidad de compra del dinero invertido.

- ♣ Rentabilidad: pérdida de valor del bono a consecuencia de cambios en las condiciones generales del mercado.
- ♣ Reinversión: cambios en las posibilidades de volver a invertir el dinero cobrado por rentas o recupero del capital.
- ♣ Moneda: alteraciones en el tipo de cambio que redunden en un quebranto respecto a la moneda que se utiliza como unidad de riqueza.

Alternativas de análisis

Valor Actual Neto

Se denomina VALOR ACTUAL NETO (VAN) a la diferencia entre el valor actual de los flujos positivos (ingresos o recuperos) con el valor actual de los flujos negativos (erogaciones).

$$VAN = -C_0 + C_1 (1+i)^{-1} + C_2 (1+i)^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n (1+i)^{-n}$$

$$C_0 = C_1 (1+i)^{-1} + C_2 (1+i)^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n (1+i)^{-n}$$

Donde:

- ♣ C_0 = Inversion inicial.
- ♣ C_1, C_2 ………………, C_n = Recuperos o flujos positivos.
- ♣ i = es la tasa de actualización utilizada para el período.

Consideraciones

Tasa de interés:

La tasa de actualización a utilizar puede ser de cualquier magnitud o cuantía, dependerá del inversor.

En general el inversor debiera utilizar como tasa de actualización a la tasa del costo de oportunidad de sus inversiones.

Si un inversor actualiza sus ingresos futuros a esa tasa y el resultado es mayor al desembolso inicial, quiere decir que esa inversión tiene un rendimiento mayor a la actual tasa de rentabilidad de sus operaciones.

Cuantía del Valor Actual

Debe tenerse presente que al ser el VA de cada uno de los períodos el resultado de la interrelación o producto de capital, tiempo y tasa, su magnitud va a estar en directa relación a:

1. El importe neto del período (renta, capital o la suma de ambas).
2. El tiempo (n) y
3. La tasa de interés (i)

♣ La distribución en el tiempo de cada uno de ellos tiene una fuerte incidencia en el resultado neto obtenido, pues —ante una misma tasa de interés— a medida que nos alejamos (en el tiempo) de la fecha inicial menor va a ser el valor actual de cada uno de los flujos.

♣ La tasa de interés también influye en forma inversa a su cuantía, a mayor tasa menor valor actual y viceversa.

Estas dos últimas variables consideradas, en forma conjunta o individual, van a tener una directa relación con el resultado de cada uno de los períodos pero no lo van a hacer cambiar de signo.

Pero el valor neto final obtenido —como sumatoria de todos los individuales— si podrá ser positivo, negativo o neutro y ello será a consecuencia del neto resultante de toda la inversión.

Resultados posibles

Si el VAN es mayor que cero (positivo) quiere decir que en términos de valuación existe una ganancia, en tanto que si fuese menor (negativo) debe entenderse que, en esos mismos términos, esa suma es la pérdida.

En tanto que si es cero quiere decir que no existe ganancia ni pérdida: es el punto de equilibrio.

Conclusión

Visto esta que el Valor Actual Neto (VAN) calculado a la tasa por la que se ha optado es la sumatoria de los valores actuales de todos y cada uno de los flujos de dinero.

Cuando el valor actual de las erogaciones es igual al valor actual de los flujos positivos el VAN es igual a cero, a la tasa de actualización utilizada se la llama Tasa Interna de Retorno (TIR).

Decisión

Una inversión debe ser llevada a la práctica si la sumatoria de los valores actuales de los ingresos futuros actualizados a la tasa del costo de oportunidad del inversor es superior a la inversión inicial.

$$\text{Inversión inicial} < \text{VAN} = \sum_{h=1}^{n} \frac{C_h}{(1+i)^h}$$

♣ h = distintos períodos de cobro de renta y/o recupero de capital.

- ♣ C_h = son los ingresos futuros.
- ♣ i = es la de interés para el período.

Variaciones

A consecuencia de la temporalidad de los flujos puede, también, concluirse que si bien el resultado neto va a ser el mismo el VAN variará —aumentando los beneficios— a consecuencia de la postergación de las erogaciones manteniendo constante los ingresos y/o adelantando los ingresos manteniendo constante las erogaciones y viceversa.

Tasa interna de retorno

Por lo antes visto y definido la TASA INTERNA DE RETORNO (TIR) es una tasa tal que aplicada al flujo de dinero da como resultado un VAN igual a cero (0).

Limitaciones

Puede suceder que se obtenga más de una TIR que satisfaga la igualdad a cero como resultado de la suma de los distintos valores.

Esa limitante, que si bien se presenta más en la teoría que en la práctica, es que siendo el valor actual del flujo de fondos la sumatoria de un polinomio de grado "equis" tendrá tantas soluciones o raíces como grados tenga al mismo.

Esas raíces pueden ser de signo positivo o negativo, números reales o imaginarios; motivo por el cual muchas de las mismas se deben descartar por no ser de aplicación posible en el marco del análisis financiero.

Conclusión

Teniendo presente de que puede darse el caso de que más de una TIR que haga igual a cero el VAN del flujo de fondos y que siendo la TIR un caso particular del VAN se torna necesario utilizar esta última técnica como la herramienta o medio idóneo en el análisis de todo proyecto de inversión.

Duration

Antes de entrar en el análisis y desarrollo de esta herramienta de evaluación de una inversión o cartera de inversiones es conveniente revisar el concepto de "promedio" y de "promedio ponderado".

Promedio y promedio ponderado

El promedio es la cantidad resultante de dividir la sumatoria de cantidades por la cantidad sumandos que componen esa sumatoria, así:

$$\text{Promedio} = \frac{\overset{h=1}{\overset{(1+i)^{t}{}_{h}n}{\sum \; h}}}{n}$$

Este valor que se obtiene no necesariamente es una cantidad representativa de la realidad que estamos analizando pues tiene, fundamentalmente, dos limitantes, la primera es la dispersión de los sumandos respecto al promedio mismo y la segunda es la importancia relativa que cada uno de ellos tiene en el conjunto.

A manera de ejemplo: dos alumnos pueden tener el mismo promedio pero no necesariamente eso quiere decir que como estudiantes sean iguales. Por ejemplo el alumno “A” tiene las siguientes notas: 10, 10 y 1 y el estudiante “B” tiene: 7, 7 y 7 si bien ambos tienen el mismo promedio no se puede aseverar que ambos sean iguales frente al estudio.

Por otra parte en lo que respecta a la importancia relativa que cada sumando tiene en el conjunto es consecuencia de una valorización subjetiva que de ninguna manera invalida o condiciona al promedio. Por ejemplo si una empresa busca a un empleado administrativo y recibe dos curriculums donde ambos oferentes tienen el mismo promedio pero resulta que tienen la siguiente composición:

Datos	A	B
Educación física	10	2
Religión	10	2
Historia	8	4
Dibujo	10	3
Derecho comercial	3	7
Economía	2	9
Matemáticas	2	10
Contabilidad	2	10
Sumatoria:	47	47
Promedio:	5,88	5,88

Evidentemente las propuestas no son iguales por más que el promedio sea el mismo.

Ello es así pues no todos los sumandos, materias en este caso, tienen la misma importancia relativa para el puesto a cubrir.

Ello es evidente y no necesita una mayor explicación. Pero puede suceder que existan muchos oferentes, que la diferencia o apreciación subjetiva respecto a las materias no sea tan terminante, que sean muchas las materias a considerar, etc. Ello hace que sea necesario aplicar algún tipo de valorización a cada una de ellas y luego, de algún modo, determinar el promedio ajustado a los valores subjetivos asignados.

De esta realidad y necesidad resulta el “promedio ponderado”.

Por ejemplo en el caso anterior el selector de personal puede asignar un “peso relativo” diferente a cada materia y así procede asignando una puntuación de uno a 10 en cada materia y luego multiplica el promedio de cada materia por el valor asignado, obtiene así una nueva cantidad que las suma y a ese resultado lo divide por la cantidad de sumandos:

Datos	Valores Base		Ponderación	Valores ponderados	
	A	B		A	B
Educación física	10	2	4	40	8
Religión	10	2	0	0	0
Historia	8	4	4	32	16
Dibujo	10	3	3	30	9
Derecho comercial	3	7	8	24	56
Economía	2	9	8	16	72
Matemáticas	2	10	9	18	90
Contabilidad	2	10	10	20	100
Sumatoria:	**47**	**47**		**180**	**351**
Promedio:	**5.875**	**5.875**		**22,5**	**43.875**

Ahora al comparar los nuevos promedios se ve clara e inequívocamente la diferencia.

Lo que el sentido común nos había dicho lo ratifica el cálculo con los nuevos valores resultantes de operar con una ponderación.

La importancia del promedio ponderado puede no ser evidente pero, por el contrario, se trata de una técnica muy útil y que puede marcar una diferencia considerable con el cálculo del promedio normal.

Consideraciones previas

Así como resulta que de la aplicación de un criterio subjetivo se manifiestan diferencias en el caso de los oferentes para la cobertura de un empleo en la administración en el campo de las inversiones el hecho de que dos o más tengan la misma rentabilidad y/o el mismo VAN y/o estén expuestas al mismo riesgo no necesariamente la igualdad de alguna o todas de esas variables quiere decir que las ambas sean indistintas.

Por ejemplo: existen dos alternativas de inversión, ambas por la misma cantidad de capital, $ 1.000.000,00, a la misma tasa, 15% TEA, pero con diferentes fechas de recuperos o “flujos positivos”.

Al solo efecto de contribuir a la claridad del concepto hemos considerado la misma tasa de interés para el cálculo del interés como para la determinación del VAN, es por ello que el VAN de todo el flujo es igual al valor actual de la inversión. Es, por otra parte, su TIR.

Las inversiones tiene el siguiente flujo de fondos:

A. Primer recupero a los 60 días de $ 500.000,00 más intereses y a los 90 días se cobra el saldo del capital, $ 500.000,00, más intereses y

B. Primer recupero a los 30 días de $ 500.000,00 más intereses y a los 90 días se cobra el saldo del capital, $ 500.000,00, más intereses

Si bien ambas tienen el mismo rendimiento relativo, tasas, instintivamente nos damos cuenta que no son iguales. Esto es lo mismo que para el caso de la elección del empleado administrativo pero llevado a dinero y donde el factor de ponderación del que resulta el "peso relativo" de cada opción no lo determinamos en forma subjetiva sino que resulta de un cálculo aritmético.

Caso	Capital	Días	Tasa	Interés	Monto	VAN	Peso relativo	Duration
A	$ 500.000,00	60	2,32%	$ 11.620,00	$ 511.620,000	$ 500.000,00	0,5000	30,00
A	$ 500.000,00	90	3,51%	$ 17.531,00	$ 517.531,00	$ 500.000,00	0,5000	45,00
	$ 1.000.000,00			$ 29.152,00	$ 1.029.152,00	$ 1.000.000,00	1,0000	75,00
B	$ 500.000,00	30	1,16%	$ 5.777,00	$ 505.777,00	$ 500.000,00	0,5000	15,00
B	$ 500.000,00	90	3,51%	$ 17.531,00	$ 517.531,00	$ 500.000,00	0,5000	45,00
	$ 1.000.000,00			$ 23.308,00	$ 1.023.308,00	$ 1.000.000,00	1,0000	60,00

La sumatoria de todos esos valores da como resultado la "Duration" de ese flujo de fondos.

Obviamente que se opta por la alternativa de menor Duration.

En el caso del ejemplo instintivamente optaremos por la opción "B" dado que antes recuperamos el dinero, realidad que luego, analíticamente, se ve ratificada pues la Duration de esa alternativa es la menor de ambas.

Conclusión

La "duration" es una magnitud de tiempo que indica el plazo —teórico— que ha de transcurrir hasta el momento de recupero de la inversión realizada.

En su cálculo intervienen las tres variables financieras que determinan el valor actual de una inversión: dinero, tiempo y tasa de interés.

Es, por lo visto, **el resultado de una sumatoria de productos** donde, en cada caso, intervienen solo dos factores:

- ♣ Uno es un número que resulta de un cociente donde el numerador es el valor actual de un flujo de fondos que divide, denominador, a la sumatoria de todos los valores actuales del flujos de fondos de la inversión y
- ♣ El otro factor es la cantidad de días que han de transcurrir desde el día que se realiza la operación hasta el que se materializa ese flujo.

Análisis

Una manera de iniciar el análisis financiero o tratamiento del concepto “duration de un bono” es considerar a cada uno de los ingresos futuros como una inversión independiente.

Invertir en un solo bono que tiene el recupero de capital y renta distribuido en el tiempo es lo mismo que hacer inversiones en tantos bonos como cupones de renta y/o de amortización de capital tenga esa única inversión.

Luego la sumatoria del valor actual de todos esos recuperos es igual al precio del bono.

En el caso de un bono de único vencimiento de capital e intereses no existe problema alguno pues su flujo tiene un solo momento en el tiempo, pero en el caso que así no sea bien cabe preguntarse cuál es la real fecha de recupero de la inversión.

Evidentemente que si la inversión tiene recuperos de capital y cobro de rentas distribuido en el tiempo la suma que se invierte no está inmovilizada por la totalidad del lapso de la inversión sino que se recupera antes.

Ese plazo va a ser menor que el plazo final o maturity.

Para ello debemos considerar cuál es la importancia relativa del valor actual de cada cupón de renta o capital dentro del valor actual de la inversión total.

Desarrollo práctico

A tal manera supongamos la siguiente inversión: la suma de $ 100.000,00 a un año de plazo con cobro de renta cada seis meses con una tasa del 20% anual.

Su precio será igual a la sumatoria del valor actual de la renta más el valor actual del capital invertido, luego:

Concepto	Vto.	Suma a cobrar	Valor Actual
Renta	6 meses	100.000 * 0,20/2 = 10.000,00	$10.000/(1 + 0{,}20)^{1/2}$ = 9.128,71
Renta	12 meses	100.000 * 0,20/2 = 10.000,00	10.000/(1 + 0,20) = 8.333,33
Capital	12 meses	100.000,00	100.000/(1 + 0,20) = 83.333,33
Precio del bono:			**$ 100.795,37**

Por lo tanto para que el flujo de fondos de esta inversión tenga una TIR del 20% nominal anual el precio del bono debe ser de $ 100.795,37.

Ahora si quisiéramos saber cuál es la importancia relativa del valor actual de cada recupero de dinero lo que debemos hacer es dividir el importe de cada ingreso por el total a cobrar, a saber:

Concepto	Valor Actual de la Suma a cobrar	Importancia relativa	Vto.	Ponderación plazo por su importancia relativa
Renta	9.128,71	9,05667%	6	0,54340
Renta	8.333,33	8,26757%	12	0,99211
Capital	83.333,33	82,67575%	12	9,92109
Total:	**100.795,37**	**100,00000%**		**11,45660**

La última columna, o sea la sumatoria de los plazos de vencimiento ponderados en función de la importancia relativa del valor actual de cada ingreso es la que determina la "duration" de la inversión.

La duration de la inversión es 11,45660 meses o lo que es lo mismo: 11,4566/12 = 0,95452 partes de año.

Generalmente se la expresa en años y va acompañada por una "x" al final: 0,95472 x.

Conclusiones

La duration es una unidad de medida de tiempo que indica el plazo —ponderado por el peso relativo de cada recupero dentro del total, ambos expresados en términos de valor actual— al que se invierte en un bono.

A cada tasa de rendimiento le corresponderá una sola duration.

No tiene sentido analizar una tasa de rendimiento para más de una inversión si no se asocia al concepto de duration.

- ♣ *Matemáticamente* es el resultado de la sumatoria del producto del valor actual de todas las sumas a cobrar multiplicadas por el tiempo de su vencimiento dividido por la sumatoria del valor actual de la inversión total.

  El "valor actual de la inversión total" es el precio de su cotización en el mercado.

$$\frac{\sum^{n} \frac{F_h}{} * t_h}{\sum_{h=1}^{n} \frac{F_h}{(1+i)^{t_h}}} = \text{Duration}$$

- ♣ Conceptualmente: el resultado es una magnitud de tiempo pues el numerador es dinero por tiempo y el denominador es solo dinero:

$$\frac{\$ * t}{\$}$$

- ♣ Financieramente: el cálculo de la duration permite homogeneizar el plazo de vencimiento de bonos con diferentes flujos de fondos y torna comparables a inversiones de diferente estructura temporal.

Correlaciones

Para el análisis de alternativas de inversión existe una correlación entre tiempo y tasa, a saber:

- ♣ Para un mismo flujo de fondos existe una correlación inversa entre tasa de rendimiento y su duration.

Luego: si la tasa baja la duration aumenta y viceversa.

- ♣ Para un mismo flujo de fondos y manteniendo constante la tasa de rendimiento existe una correlación directa entre tiempo y duration.

Luego: si el momento del cobro de los cupones se reduce en el tiempo baja la duration y viceversa.

Ejemplos

Partiendo de supuestos a manera de base (caso 1) o testigo para luego comparar las variaciones que se suceden ante cambios en las condiciones (renta o flujos de fondos) se analiza la variación de la Duration para tres casos en particular:

Caso	Tasa de interés	Cobro de la renta	Variaciones en la Duration
Caso 2	Se reduce	Igual	*Aumenta* pues baja la rentabilidad
Caso 3	Se aumenta	Igual	*Se reduce* pues aumenta la rentabilidad
Caso 4	Se mantiene	Se adelanta	*Se reduce* pues se cobra antes

Caso 1. Caso testigo					
TNA: 20%					
Concepto	**"n"**	**Importes**	**V_o**	**%**	**"n" ponderado**
Renta	6	$ 10.000,00	$ 9.128,71	9,06	0,5434
Renta	12	$ 10.000,00	$ 8.333,33	8,26	0,9921
Capital	12	$ 100.000,00	$ 83.333,33	82,68	9,9211
Totales:			$ 100.795,38	100,00	**11,4566**
Proporción:	0,95472				

Caso 2. Baja la tasa, igual plazo					
TNA: 10%					
Concepto	**"n"**	**Importes**	**V_o**	**%**	**"n" ponderado**
Renta	6	$ 5.000,00	$ 4.767,31	4,76	0,2854
Renta	12	$ 5.000,00	$ 4.545,45	4,54	0,5442
Capital	12	$100.000,00	$ 90.909,09	90,70	10,8849
Totales:			$ 100.221,86	100,00	**11,7145**
Proporción:	0,97621				
Consecuencia:	Aumenta la Duration				

Caso 3. Sube la tasa, igual plazo					
TNA: 30%					
Concepto	**"n"**	**Importes**	**V_o**	**%**	**"n" ponderado**
Renta	6	$ 15.000,00	$ 13.155,87	12,95	0,7768
Renta	12	$ 15.000,00	$ 11.538,46	11,35	1,3626
Capital	12	$ 100.000,00	$ 76.923,08	75,70	9,0839
Totales:			$ 101.617,41	100,00	**11,2233**
Proporción:	0,93528				
Consecuencia:	Baja la Duration				

Caso 4. Misma tasa, adelanta el cobro					
TNA: 20%					
Concepto	**"n"**	**Importes**	**Vo**	**%**	**"n" ponderado**
Renta	3	$ 5.000,00	$ 4.777,21	4,73	0,1419
Renta	6	$ 5.000,00	$ 4.564,35	4,52	0,2711
Renta	12	$ 10.000,00	$ 8.333,33	8,25	0,9900
Capital	12	$ 100.000,00	$ 83.333,33	82,50	9,9002
Totales:			$ 101.008,24	100,00	**11,3032**
Proporción:	0,941193				
Consecuencia:	Baja la Duration				

Valor de emisión o precio

Conceptos previos

Ya está visto y definido que un “bono” es una manera de instrumentar un préstamo, que para un inversor el precio de un bono es la suma que está dispuesto a pagar por su propiedad, en tanto que para el emisor es la suma que pretende recibir por asumir de ese compromiso de pago.

Existen dos tipos de ingresos: el recupero del capital y la renta.

La suma del valor actual de ambos es la cantidad que el inversor pagará, concretamente: su precio.

Se le llama *nuda propiedad* al valor actual de los ingresos para el recupero de la inversión y *usufructo* al valor actual de la renta.

Para una correcta decisión de invertir en un bono se debe tener presente por lo menos:

1. El cronograma de recupero de la inversión y renta
2. La capacidad que el deudor tiene para cumplir con su compromiso (solvencia)
3. La posibilidad de “salir de la inversión”, es decir de vender, ceder o transferir a un tercero el bono antes de su vencimiento
4. El valor de realización del bono en cualquier momento de su vida
5. La moneda en la cual fue emitido

Determinantes del precio

Tasa de interés

La rentabilidad del bono está dada por la tasa de interés.

Dentro de la condiciones de emisión de un bono se acuerda la tasa de interés que el deudor va a pagar al inversionista y esa tasa —generalmente expresada como tasa periódica anual— se la denomina *tasa nominal*.

Pero puede suceder que en el mercado los inversionistas coincidan o no con la tasa propuesta por el deudor, a la tasa utilizada para el cálculo se denomina: *tasa de rentabilidad*.

La tasa de interés, utilizada para la actualización, es un indicativo de la ponderación del riesgo: a mayor riesgo mayor tasa y viceversa.

Tiempo

Se entiende por tiempo al lapso que se sucede entre la fecha de compra del bono y la de los futuros ingresos.

Esta forma de recupero de la inversión esta acordada dentro de las condiciones de emisión del bono y conforma la cronología de los ingresos.

Para el caso de un mismo valor nominal y una misma tasa de interés el valor actual de un flujo de dinero tiende a disminuir a medida que se difiere su vencimiento.

Componentes del precio

Siendo el valor de un bono una cantidad equivalente a la sumatoria de los valores actuales de los ingresos futuros se torna necesario conocer el cronograma de pago de intereses y del recupero del capital invertido, es decir su flujo de fondos.

Para el caso de un flujo de intereses periódicos y cobro recupero de la inversión al finalizar el plazo, es:

- Valor = renta + nuda propiedad

Si definimos:

- α: a la suma que se cobra por interés
- k : al valor actual del recupero de la inversión
- v : factor de actualización que se expresa como $(1 + i)^{-n}$

Luego:

El valor actual de la renta será igual a:

- Renta = $\alpha\ a_n$

El valor actual del capital a recuperar o “nuda propiedad” será igual a:

- Nuda propiedad = k = C * $(1 + i)^{-n}$

Conclusión

El precio de un bono es, para un inversor, *la cantidad de dinero que está dispuesto a pagar para comprar un flujo de fondos.*

El precio de un bono esta correlacionado en forma directa y negativa con el riesgo pues al ser preestablecidas e inamovibles tanto las fechas como los importes de cobro de las rentas y/o de los recuperos de capital al asumir un mayor riesgo el único modo que resta para poder incrementar la ganancia es una reducción del precio de compra.

Técnicamente se trata de una reducción del valor actual del flujo de fondos y eso sucede sí y solo sí varía el único factor no preestablecido: la tasa de interés que pretende ganar el inversor.

$$\text{Valor actual} = \frac{\text{Valor Nominal}}{(1 + \text{tasa})^{\text{tiempo}}}$$

En términos aritméticos se puede concluir que ante un incremento de la tasa y/o el tiempo el denominador tiende a crecer y, consecuentemente, el resultado de esa relación decrecerá y viceversa.

El precio de un bono tiene una correlación inversa respecto a la tasa de interés: a medida que aumenta la tasa de interés el precio del bono decrece y viceversa.

Valuación de títulos

Consideraciones previas

Visto esta que el precio o valor de emisión de un título es igual a la sumatoria de los valores actuales de los ingresos futuros pactados.

Resulta ser así la suma del valor actual de la nuda propiedad, que se representa con la letra “k” más el valor actual de la renta a cobrar que se llama usufructo y se representa con la letra “μ”.

A la tasa de interés pactada o tasa nominal se la representa como “i” y a la tasa de interés que realmente se quiera que rinda la inversión: “i’”.

Bonos a perpetuidad

Son rentas que se cobran sin que en momento alguno sea devuelto el capital invertido, su precio o valor es el valor actual del usufructo dado que la nuda propiedad no existe.

Desde un punto de vista práctico el valor actual será la cantidad de dinero que hoy se necesita para, dada una tasa de interés, producir esa renta:

$$\alpha = C\ i$$

$$\mathbf{C = \alpha / i}$$

$$C = \alpha\ \frac{1 - (1+ i)^{-n}}{i}$$

Si “n” es una perpetuidad “n” tiende a infinito, luego $(1+ i)^{-n}$ tiende a cero, por lo tanto:

$$C = \alpha\ \frac{(1 - 0)}{i}$$

$$\mathbf{C = \alpha / i}$$

Rescate único (Bullet)

A la par

El valor actual de la nuda propiedad es:

$$\mathbf{k} = C\, v_{i'}^{\,n} = C * 1 / (1 + i')^n$$

La renta futura es el interés pactado en el título y se va a cobrar: Ci, luego el valor actual de la renta futura es:

$$\boldsymbol{\mu} = Ci\, a_{n\, i'}$$

Por lo tanto el valor de emisión será:

$$e = k + \mu = C\, v_{i'}^{\,n} + Ci\, a_{n\, i'}$$

$$e = k + Ci\, a_{n\, i'}$$

$$e = k + Ci\, \frac{1 - (1 + i')^{-n}}{i'} = k + i/i'\, (C - C\, v_{i'}^{\,n})$$

Luego el valor de emisión será:

$$\mathbf{e = k + i/i'\, (C - k)}$$

Bajo la par (quita)

Se lo denomina de esta manera cuando el reembolso del capital aportado se realiza a valor nominal menos una suma de dinero.

Básicamente existen dos maneras de calcular esa reducción o quita: una suma cualquiera o bien mediante el no pago de la última renta.

Al no pago de la última cuota de renta se les llama "títulos excupón", por lo que al final de su vida se cobra solo el capital (C) y no los intereses de ese período (Ci).

A efectos del desarrollo del análisis de los títulos excupón se supondrá que se cobra la renta en todos los períodos y que *la suma de intereses no cobrados constituyen la quita*, luego a los efectos del cálculo de la nuda propiedad se operará sobre "C - Ci" y no sobre "C".

Así entonces, se expresará simbólicamente a:

- ♣ La suma no cobrada o "quita": Q
- ♣ La "quita" será igual a: Ci
- ♣ C_1 a la suma a recuperar

$$C_1 = C - Q$$

$$k_1 = C_1 \, v_{i'}^{\,n}$$

$$i_1 = Ci/C_1$$

Luego el valor de emisión será:

$$\mathbf{e = k + i_1 / i' \, (C_1 - k_1)}$$

Sobre la par (sobreprecio)

Se denomina de esta manera al caso de los títulos en los que al final de su vida se cobra el capital aportado, los intereses del período y una suma adicional.

Simbólicamente al mayor valor lo representaremos con "S"

$$C_1 = C + S$$

$$k_1 = C_1 \, v_{i'}^{\,n}$$

$$i_1 = Ci/C_1$$

Luego el valor de emisión será:

$$\mathbf{e = k + i_1 \; / \; i' \, (C_1 - k_1)}$$

Rescate periódico de títulos

Se pueden dar dos alternativas o casos:

1. Un porcentaje de cada título.
2. El total de un número de títulos.

Amén de ello puede suceder que la tasa pactada sea igual a la tasa que se espera que realmente rinda el título o no.

Determinación de la cuota de amortización

La suma que se destina en forma periódica a rescate (α) será la cuota que amortiza el capital a la tasa y en el tiempo pactado:

$$\alpha = C \, a_n^{-1}$$

Determinación del valor de emisión

Luego si la tasa pactada es igual a la tasa esperada ($i = i'$) el valor de emisión será igual al valor actual de las sumas destinadas a cancelar la deuda e intereses:

$$e = \alpha\ a_{n\ i'}$$

Por lo tanto y reemplazando en:

$$e = C\ a_{n}^{-1}\ a_{n\ i'}$$

En el caso de que:

1. **Ambas tasas son iguales:**

$$e = C * i / [1 - (1 + i)^{-n}] * [1 - (1 + i)^{-n}] / i$$

Simplificando:

$$\mathbf{e = C}$$

2. **Las tasas no son iguales:**

$$\mathbf{e = C\ a^{-1}_{n}\ a_{n\ i'}}$$

El valor de emisión es igual al valor actual de las sumas (cuotas de rescate) destinadas a cancelar la deuda.

Cuadro de marcha

Para el caso de un rescate total de una parte de los títulos en circulación.

Siendo el pago de un bono, renta y capital, un caso de amortización de una deuda puede analizarse el desarrollo de ese flujo mediante la constitución de un cuadro de marcha.

Teniendo en cuenta que los títulos de un bono no puede amortizarse en forma parcial o fraccionaria es necesario desarrollar algún tipo de mecanismo de redondeo teniendo en cuenta que período a período existirá un residuo que generará intereses; luego ese monto se aplicará al rescate del período inmediato siguiente y así sucesivamente hasta cancelar totalmente la deuda.

Cuota o año	Importe total	Interés	Amortización		Resto o Saldo	Residuo		Títulos		
			Teórica	Real		Inicial	Más interés	Año	Total	Resto
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Este cuadro tendrá tantas filas como pagos existan y por lo menos las columnas indicadas.

1. Cuota o año: indica la secuencia de pagos.
2. Importe total: la cantidad de dinero destinada al pago de capital e intereses.
3. Interés: la cuantía de los intereses que contiene la cuota.
4. Amortización teórica: la diferencia entre el importe total de la cuota y la suma que se destina a intereses.

5. Amortización real: la cantidad redondeada en función de la cantidad de títulos y el importe de la amortización teórica.
6. Resto o saldo: saldo de la deuda.
7. Residuo inicial: la diferencia entre la amortización teórica y la amortización real.
8. Residuo más interés: el valor del residuo más el interés ganado.
9. Títulos año: la cantidad de títulos que se rescatan con ese pago
10. Título total: la cantidad de títulos rescatados hasta ese pago inclusive.
11. Títulos resto: la cantidad de títulos que se encuentran en circulación luego de ese pago.

Prima de emisión

Se llama prima de emisión a la diferencia entre la cotización de mercado de un título y su valor nominal.

Esa cantidad refleja la menor renta que se está dispuesto a cobrar por la seguridad que da la tenencia de ese bono.

$$P = e - C$$

$$P = [k + i / i' (C - k) - C$$

$$P = C\, v_{i'}^{n} + i/i' (C - k) - C$$

$$P = C\, v_{i'}^{n} - C + i/i' (C - k)$$

$$P = - C (1 - v_{i'}^{n}) + i/i' (C - k)$$

$$P = i/i' (C - C\, v_{i'}^{n}) - C (1 - v_{i'}^{n})$$

$$P = i/i'\, C (1 - v_{i'}^{n}) - C (1 - v_{i'}^{n})$$

$$P = C (1 - v_{i'}^{n}) (i/i' - 1)$$

$$P = C (1 - v_{i'}^{n}) (i – i'/i')$$

$$P = C [[(1 - v_{i'}^{n})] / i] * (i - i')$$

$$P = C [[(1 - (1+ i')^{-n})] / i] * (i - i')$$

$$P = C\, a_{n\, i'} (i - i')$$

$$\mathbf{P = C (i - i')\, a_{n\, i'}}$$

Por lo tanto la prima de emisión es el valor actual de la diferencia de intereses.

Luego si la tasa pactada es igual a la tasa esperada (i = i’) no existirá prima de emisión alguna y se ratifica que el valor de emisión será igual al valor actual de las sumas destinadas a cancelar la deuda e intereses:

CAPÍTULO 16
INTERÉS SIN CAPITALIZACIÓN

Conceptos generales

Es matemáticamente posible, financieramente inexacto, el cálculo de intereses sin capitalización al cabo de cada subperíodo, sistema llamado comúnmente: “Interés simple”.

Partiendo de este supuesto se ignora la lógica del razonamiento financiero.

Para el cálculo al no existir subperíodos de capitalización pasa a ser cada segmento del tiempo un mero factor en una multiplicación. El mismo debe también estar debidamente sincronizado con la tasa de interés.

Es una forma de establecer un “precio” al uso del dinero pero bajo punto de vista alguno representa la verdadera variación del Valor Actual de la operación en el transcurso del tiempo.

Pero por un exceso de simplicidad, comodidad, uso, práctica, a veces conveniencia y otras mala fe, se lo utiliza en el comercio y la banca tanto para el cálculo de intereses como para descuentos.

Es una realidad, motivo por el cual no puede dejar de ser vista.

Se parte de un Capital Inicial “C” que colocado a interés durante un lapso “t” (vigencia de la operación) gana intereses a la tasa porcentual “r”.

Como tiempo y tasa deben ser sincrónicos debemos ajustarlos entre ellos para poder operar, motivo por el cual al tiempo “t” lo dividiremos por la unidad de tiempo “ut” en el cual está expresada la tasa “i”.

El resultado de dividir el tiempo “t” por la unidad de tiempo “ut” son los períodos “n” a los que está expuesto el Capital.

A la tasa “r” que es para cada 100 unidades de capital la dividiremos por 100 de manera de obtener una tasa para cada unidad de capital y a su resultado le llamaremos “i”.

Si el interés obtenido durante los “n” períodos se lo sumamos al Capital inicial obtendremos una suma de dinero que lo llamaremos Monto “M”.

Nomenclatura

- C: Capital
- Tasa de interés: **r** (para cada 100 unidades de capital).

  i (para cada unidad de capital).

  i = r/100
- t: Tiempo
- ut: Unidad de tiempo
- n: Períodos

  n = t/ut
- I: Interés
- M: Monto

Gráficamente

```
 0            1               2                             n-1         n
     /  ..............  /  ..................  /  ............   /  ....................  /  ............  /
C                                                                                   M
```

Cálculo del interés

Tal lo antes dicho partimos de un capital “**C**” que lo colocamos a interés a la tasa “**i**” durante “**n**” períodos de tiempo sin capitalización en cada uno de los períodos en que dividamos al tiempo de vigencia de la operación.

Cada uno de los períodos en que se divida la vigencia de la operación será un factor de la multiplicación que dará como resultado o producto el interés.

Podemos desarrollarlo de la siguiente manera:

- Capital inicial: **C**
- Interés con un solo período de vigencia a la tasa “r”: **C r**
- Interés con “t” períodos de vigencia: **C r t**

- ♣ Interés con “t” períodos de vigencia, proporcionalizando el tiempo a la tasa y utilizando la tasa unitaria “i”: **C r/100 t/ut** = **C i n**

$$\mathbf{I = C\ i\ n}$$

Fórmulas derivadas de la fórmula de interés

Capital: C = I/i n

Tasa de interés: i = I/C n

Tiempo: n = I/C i

Cálculo del monto

Luego **para obtener el monto** habrá que sumar los intereses obtenidos al capital inicial:

$$M = C + C\ i\ n$$

$$M = C\ (1 + i\ n)$$

$$\mathbf{M = C\ (1 + i\ n)}$$

Fórmulas derivadas de la fórmula del monto

Capital: $C = M / (1 + i\ n)$

Tasa de interés: $i = \frac{(M/C) - 1}{n}$

Tiempo: $n = \frac{(M/C) - 1}{i}$

Descuentos

Desarrollo aritmético

Descuento comercial (D1)

Definición: El descuento comercial es el interés simple del valor nominal.

$$D_1 = N\ i\ n$$

$$V_1 = N - N\,i\,n$$

$$V_1 = N\,(1 - i\,n)$$

Operar un descuento sobre el Valor Nominal es una forma muy simple desde el punto de vista comercial y aritmético pero es esencialmente inequitativa y no responde a la realidad financiera.

Ello es así pues se está calculando el descuento o quita de intereses sobre una suma u obligación que hoy no "vale" esa cantidad. Tendrá ese valor llegada la fecha de vencimiento.

A tal extremo es injusto que si el resultado de "i n" es mayor que uno (1) la quita o descuento es mayor que el Valor Nominal. Concretamente nos está diciendo que al realizar la operación no solo no recibiremos suma de dinero alguna sino que tenemos que dejar el Pagaré o Documento y entregar dinero encima.

Descuento racional (D2)

Definición: El descuento racional es el interés simple del valor actual calculado a interés simple.

$$D_2 = \frac{N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$V_2 = N - \frac{N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$V_2 = \frac{N\,(1 + in) - N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$V_2 = \frac{N + N\,i\,n - N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$V_2 = \frac{N}{1 + i\,n}.$$

Diferencia entre Descuento Comercial (D1) y Descuento Racional (D2)

$$D_1 = N\,i\,n$$

$$D_2 = \frac{N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$D_1 - D_2 = N\,i\,n - \frac{N\,i\,n}{1 + i\,n}$$

$$D_1 - D_2 = N\,i\,n\left(1 - \frac{1}{1 + i\,n}\right)$$

$$D_1 - D_2 = N\,i\,n\left(\frac{1 + i\,n - 1}{1 + i\,n}\right)$$

$$D_1 - D_2 = \frac{N\ i\ n}{1 + in}\ i\ n$$

$$\mathbf{D_1 - D_2 = D_2\ in}$$

La diferencia entre el Descuento Comercial y el Descuento Racional *es el Interés Simple del Descuento Racional*

CAPÍTULO 17
EROGACIONES: GASTOS, COSTOS E INVERSIONES

Introducción

Las erogaciones o desembolsos pueden ser aplicados a la compra de una "cosa"[19] destinada a un "proceso productivo" o fabricación de un bien o al "desarrollo de actividades generales, complementarias", como por ejemplo: la administración, comercialización, etc.

El análisis de los costos totales, directos e indirectos, fijos y variables, es de fundamental importancia por su directa e inmediata participación en la rentabilidad de la empresa y, consecuentemente, en la política de inversiones en activos productivos para el logro de la reducción del costo total a consecuencia del incremento de la escala de producción que las inversiones permiten.

En general en todos los sectores de la economía hoy la manera de sostener la rentabilidad empresaria reside en un eficiente manejo de costos más que en la posibilidad de un incremento, en términos reales, del precio de venta de los bienes.

Ello lleva implícita una permanente y atenta acción tendiente a mantener a la reducción de costos como consecuencia de un aumento en la escala de producción y para ello, necesariamente, se ha de estar contestes a realizar las inversiones necesarias en maquinarias y equipos que permitan esa reducción.

En esta labor tiene fundamental participación el analista de costos financieros pues siempre y en todos los casos una inversión conlleva, en su propia esencia, un costo de oportunidad y es, precisamente, esta persona la que debe dar una opinión al respecto.

El verdadero desafío de la dirección financiera en forma conjunta con el área ingenieril de producción es la permanente acción tendiente a no perder mercado y, en lo posible, producir mejoras financieras a consecuencia de tratar de producir cambios, aumentos, en la escala productiva.

[19] Según el CCyC de la República Argentina en su art. 16 define a las "cosas": "bienes susceptibles de valor económico. Los bienes materiales se llaman cosas. Las disposiciones referentes a las cosas son aplicables a la energía y a las fuerzas naturales susceptibles de ser puestas al servicio del hombre".

Cambios en la escala productiva

Su más importante consecuencia es el cambio que se da en el punto de equilibrio de ingresos y costos.

Es importante tener presente que la ganancia es una magnitud de volumen (una suma de dinero) en tanto que la rentabilidad es el porcentaje que resulta de dividir esa ganancia sobre el capital invertido, luego una mayor ganancia no necesariamente implica un incremento en la rentabilidad.

Por caso una empresa agropecuaria puede incrementar su ganancia porque aumenta la superficie cultivada pero será más rentable si y solo si ese incremento de la ganancia es, porcentualmente, superior el incremento porcentual del capital invertido

Aumentar la cantidad producida por unidad de superficie implica un incremento en el costo total de producción pues aumentan tanto los **costos fijos** (mayores inversiones en bienes amortizables) como los **costos variables**: insumos, materias primas, retribuciones al personal a consecuencia de tener que contar con una mano de obra más calificada, etc.

Esta situación genera un círculo que se retroalimenta pues *para lograr un incremento en la rentabilidad es necesario incrementar la productividad, para lograr un incremento en la productividad es necesaria una mayor inversión, de ello deviene un incremento del costo total y, consecuentemente, una mayor necesidad de recursos financieros*.

Dado que el costo total es la sumatoria del costo variable total mas el costo fijo total y el costo total unitario es el resultado del cociente entre el costo total y la cantidad producida, se puede concluir que: *la reducción del costo total unitario será solo a consecuencia de que el incremento relativo del costo total sea menor que el incremento relativo de las cantidades producidas*.

Ese es el nudo del problema: **aumentar la escala productiva**

Y es esa la causa origen de la concentración empresarial, en todos los sectores productivos o de servicios de la economía, pues todo empresario que no pueda sostener el ritmo de inversión necesaria en bienes, procesos y conocimientos pasa a ser ineficiente en términos productivos

Prueba de ello son las transformaciones que a diario se ven en las estructuras de las empresas "concentración y especialización" cualquiera que fuere el sector que se trate, por ejemplo: agrícolas, comunicaciones, servicios, etc.

Costo o gasto

En general a la primera alternativa se la define como "costo" en tanto que a la segunda opción se la trata como un "gasto".

Imputación al costo

Según su destino

En el supuesto caso que se aplique directamente al proceso productivo se trata de un "costo de producción" y la cuantía de su imputación, proporción al precio total pagado, debe necesariamente, estar correlacionada en forma directa y positiva con la vida útil o posibilidades de uso en el tiempo, obviamente que esta manera de tratar a los costos de producción también es válida al momento de tener que imputar la aplicación de un bien de uso al desarrollo de las actividades complementarias.

Según su vida útil

Así, entonces, podrá suceder que:

- ♣ *Se agote su vida útil en la primera aplicación o uso.*

  Por ejemplo: mano de obra, materias primas, energía eléctrica, combustibles, etc.

  En tal caso se imputa la totalidad de la suma erogada al sector que corresponda en función de su destino: panoplia que se extiende desde el proceso de producción hasta el sector de servicios al que se destine, por ejemplo: administración, comercialización, etc.

- ♣ *Su primer uso no agota su vida útil*.

  Es decir que puede utilizarse en más de una oportunidad.

  Se trata de “una inversión” y, por lo tanto, el total erogado no debe tratarse como un costo en la primera aplicación o uso sino que debe imputarse al proceso productivo o de servicios en proporción a su uso y/u obsolescencia dada por el avance tecnológico.

  Es el caso de la totalidad de los bienes de uso, por ejemplo: una cosechadora en una explotación agropecuaria, una fresadora en una tornería, etc.

  Dentro de la clasificación de costos se lo define como “costo extinguido” pues la suma imputada al proceso productivo o servicio no conlleva una erogación.

Tratamiento contable de los bienes de uso

Registración

Los bienes que no se consumen en su primer uso pasan a conformar un grupo que se los denomina “Bienes de Uso” y según la Resolución Técnica n.° 9 de la Federación de Consejos Profesionales de la República Argentina

> Son aquellos tangibles destinados a ser utilizados en la actividad principal del ente y no a la venta habitual, incluyendo a los que están en construcción, tránsito o montaje y los anticipos a proveedores por compras de estos bienes (…).

Se los registra dentro del rubro *Activo*, subrubro *Activo No Corriente* y, a medida que transcurre el tiempo, se debe restar, periódicamente, al valor original una cantidad tal que represente su menor valor a consecuencia de su uso y/u obsolescencia que se sucede a consecuencia del avance tecnológico.

Amortizaciones

A esa quita de valor se le llama *Amortización* y este, a su vez, es un concepto que, etimológicamente, está conformado por la combinación de tres componentes de origen latino: *mortis*, *izare* y el sufijo *ción* que, respectivamente, quieren decir: *muerte*, *convertir en* y *acción y efecto*.

Luego la palabra, en su conjunto, significa *acción y efecto de reducir hasta que se muera* y en términos contables es un concepto que se utiliza para registrar una *pérdida de valor*.

Es de destacar que no solo es por el uso que se reduce la capacidad productiva y, consecuentemente, el valor sino que, hoy, a consecuencia del avance tecnológico muchos bienes, en particular los que operan con sistemas electrónicos por ejemplo: telefonía y computadoras, se tornan obsoletos y/o de uso antieconómico antes del desgaste físico del mismo.

Por lo tanto la cantidad de dinero invertida en la compra de un bien de uso deberá ser aplicada al proceso productivo a medida que el bien adquirido se afecte a la producción o bien a consecuencia de la pérdida de su capacidad como resultado del avance tecnológico.

Proveer a la reposición de un bien amortizable implica tomar una decisión del modo que se operará al respecto y sobre ello existen varios métodos.

CAPÍTULO 18
VALORIZACIÓN DE ACTIVOS EXTINGUIBLES

Amortizaciones

Métodos de amortizaciones

Se analizarán tres tipos o métodos de amortización y dentro de cada modo las alternativas de interés, a saber:

1. Proporcionales de cuota fija.
   - 1.1. Directo o línea recta.
   - 1.2. Del servicio.
   - 1.3. Del rendimiento.
2. De reducción uniforme o acelerados.
   - 2.1. Tanto por ciento fijo sobre saldos.
   - 2.2. De los números dígitos.
3. Con interés.
   - 3.1. Anualidades.
   - 3.2. Fondo amortizante.

1 - Métodos proporcionales o de cuota fija

Estos métodos no consideran aspectos financieros solamente operan con el Costo incurrido en la adquisición del bien, su Valor Residual y la vida útil del mismo.

Al Costo se le resta el Valor Residual y esa diferencia constituye la suma a amortizar en el transcurso de su vida útil.

Nomenclatura común:

- ♣ C = Costo.
- ♣ VR = Valor Residual.
- ♣ α = Cuota de amortización
- ♣ n = Vida útil estimada.

1.1 - Directo o línea recta

Este método se funda en que el menor valor del bien se sucede en forma igual a lo largo del toda la vida útil, es decir que la amortización periódica, generalmente anual, es una cuota constante.

Si “n” es la vida útil del bien la cuota de amortización periódica “α” será:

$$\alpha = (C - VR) / n$$

1.2 - Del servicio

En este caso se considera que la amortización del bien debe ser aplicada en función de las horas de trabajo que el mismo tiene para cada caso en particular.

Si llamamos “h” a las horas de trabajo y “k” al total de las horas de vida útil la cuota de amortización será:

$$\alpha = (C - VR) * h/k$$

1.3 - Del rendimiento

En este caso se considera que la amortización del bien debe ser aplicada en función de las unidades que se han producido a consecuencia de su uso para cada caso en particular.

Si llamamos “m” a las unidades producidas y “j” al total de las unidades estimadas a producir la cuota de amortización será:

$$\alpha = (C - VR) * m/j$$

2 - Métodos de reducción uniforme o acelerados

Son métodos de cuotas de amortización decreciente, o sea que se amortiza el bien en mayor cuantía en los primeros años de vida útil.

Se los denomina también “métodos acelerados” de amortización.

2.1 - Tanto por ciento fijo sobre saldos

Conceptos

Se trata de un método de amortización de cuotas decrecientes pues si bien la tasa periódica de amortización es fija o constante el cálculo de la cuota se realiza sobre el valor residual, al inicio de cada lapso, del bien, el cual es, obviamente, decreciente.

Dado un porcentaje o tasa de amortización fija es posible determinar el valor de cada una de las cuotas periódicas de amortización, el valor del bien al último año de su vida útil o valor residual (VR), la vida útil esperada y dado un Valor Residual y conociendo su vida útil determinar la tasa de amortización implícita en esos datos.

Nomenclatura

C = Valor de origen.

I = Tasa periódica de amortización.

VR = Valor residual.

S_1 = Valor al fin del primer año.

S_2 = Valor al fin del segundo año.

S_n = Valor al fin del último año de vida útil.

S_n = VR

Desarrollo

Valor del bien al fin del último año de vida útil (VR)

Al fin del primer año:

$$S_1 = C - Ci = C\ (1 - i)$$

Al fin del segundo año:

$$S_2 = S_1 - S_1\ i = S_1\ (1 - i) = C\ (1 - i)\ (1 - i) = C\ (1 - i)^2$$

En general, al fin de su vida útil su valor residual será:

$$VR = S_n = C\ (1 - i)^n$$

Ejemplo:

S el valor de costo de un bien es de $ 10.000,00, su tasa de amortización es del 25% anual y su vida útil es de 8 años, se pregunta ¿cuál será su valor residual?

$$VR = S_n = C\ (1 - i)^n$$

$$VR = 10\,000{,}00\ (1 - 0{,}25)^8$$

$$VR = 1.001{,}13$$

Vida útil de un bien:

Partiendo de la fórmula del Valor Residual VR

$$VR = C\ (1 - i)^n$$

$$VR/C = (1 - i)^n$$

Despejando el tiempo

$$n = \ln\ (VR\ /C)\ /\ \ln\ (1 - i)$$

Ejemplo: si el valor residual es de $ 1.000,00 y su valor de origen es de $ 10.000,00 se pregunta cuántos años de vida útil tendrá un bien que se amortiza al 25% anual

$$n = \frac{\ln\ (1.000{,}00/10.000{,}00)}{\ln\ (1 - 0{,}25)}$$

$$n = -2{,}30259/-0{,}28768 = 8 \text{ años}$$

Tasa de amortización de un bien:

Partiendo de la fórmula del Valor Residual VR

$$VR = C\ (1 - i)^n$$

$$i = 1 - (VR/C)^{1/n}$$

Ejemplo: si la vida útil de un bien es de 8 años y su valor residual un décimo de precio de costo determinar a qué tasa se debe amortizar.

$$i = 1 - (0{,}10/1)^{1/8}$$

$$i = 0{,}25$$

Cuadro de marcha

Años	Valor inicial	Amortización	Valor final
0	$ 10.000,00		$ 10.000,00
1	$ 10.000,00	$ 2.500,00	$ 7.500,00
2	$ 7.500,00	$ 1.875,00	$ 5.625,00
3	$ 5.625,00	$ 1.406,25	$ 4.218,75
4	$ 4.218,75	$ 1.054,69	$ 3.164,06
5	$ 3.164,06	$ 791,02	$ 2.373,05
6	$ 2.373,05	$ 593,26	$ 1.779,79
7	$ 1.779,79	$ 444,95	$ 1.334,84
8	$ 1.334,84	$ 333,71	$ 1.001,13

2.2 - De los números dígitos

Concepto

Es un valor de amortización periódico decreciente, el cual es el resultado de multiplicar el valor del bien por un ratio decreciente.

Esta razón es el resultado del cociente que tiene como numerador al resto de la vida útil del bien al inicio del ejercicio o lapso de amortización y como denominador a la sumatoria de los dígitos de la vida útil del bien.

Nomenclatura

K = suma de los dígitos

Y = n.° de años de vida útil que restan al inicio del período o ejercicio

$$\text{Cuota} = (C - VR) * Y/K$$

Ejemplo: dado un bien cuyo costo es de $ 100.000,00 y se acuerda un valor residual de $ 10.000,00 al cabo de 10 años determinar el importe de cada cuota anual de amortización.

Cuadro de marcha

Vida Útil		Cuota de amortización
Años	Y = Resto	
1	10	$ 16.363,64
2	9	$ 14.727,27
3	8	$ 13.090,91
4	7	$ 11.454,55
5	6	$ 9.818,18
6	5	$ 8.181,82
7	4	$ 6.545,45
8	3	$ 4.909,09
9	2	$ 3.272,73
10	1	$ 1.636,36
K = 55		**$ 90.000,00**

3 - Métodos con interés

Concepto

Son sistemas que parten del supuesto que la suma —cantidad periódica de amortización— que se debiera destinar a la conformación de una imposición se de tal cuantía que al fin de la vida útil del bien el total ahorrado sea igual al total amortizado.

Si se optase por esta forma de cálculo la suma destinada a la amortización cumpliría una doble función:

- ♣ *Costo:* es un costo de producción y como tal debe ser considerada al momento de fijar el precio de venta de los bienes producidos
- ♣ *Cuota de ahorro:* es la cuantía de dinero que se ha de destinar a la conformación de un fondo que permita, al fin de la vida útil del bien, contar con el dinero necesario para el reemplazo del mismo.

Costo de oportunidad

Puede suceder que al costo del bien a amortizar se sume el "costo de oportunidad" que tiene la inversión realizada.

Si así fuere se considera como tal a *la suma dejada de ganar por el capital invertido* si en lugar de comprar el bien de uso se hubiese invertido esa suma en el mercado financiero.

Por lo tanto al capital invertido se adicionan los intereses dejados de ganar, lo que de alguna forma puede ser definido como el "cargo al proceso productivo del costo financiero del capital propio".

Sistemas

3.1 - Fondo amortizante

El objetivo es la conformación de una suma al cabo de "n" años que sea igual a la amortización del bien:

$$\text{Cuota de amortización} = (C - VR)\ S_n^{-1}$$

Es el importe de la inversión sin considerar intereses.

3.2 - Anualidades

En este sistema se toma como total a amortizar el costo del bien más un cargo financiero del capital propio; a esa suma se ha de restar el valor residual del bien.

Nomenclatura:

- ♣ C = Costo del bien a amortizar.
- ♣ VR = Valor residual.
- ♣ i = Tasa de interés a utilizar para el cálculo del importe total a amortizar.
- ♣ i´= Tasa de interés a utilizar para determinar la cuota del ahorro.

Luego el total a amortizar será:

1. El precio de costo del bien "C" más.
2. El interés hasta el final de su vida "n" calculado a la tasa "i" menos.
3. El valor residual "VR".

$$\text{Total a amortizar} = C\ (1 + i)^n - VR$$

Por lo tanto el importe de cada cuota de amortización será el valor de la cuota de la imposición que conforme al final de su vida útil una suma igual al "total a amortizar" calculada a la tasa "i´".

$$\text{Cuota de amortización} = [C\ (1 + i)^n - VR]\ S_{n\ i'}^{-1}$$

Vida media de un activo

Conceptos

El conjunto de bienes que utiliza una empresa en su proceso productivo, en términos contables: "Bienes de Uso" están compuesto por cosas de diferente conformación, precio y destino donde no necesariamente existe una correlación directa entre precios y vida útil.

Es por ello que si lo que se desea es conocer, de alguna manera, la vida útil, promedio, del conjunto es necesario relacionar la suma total del rubro "Bienes de Uso" con la sumatoria de las cuotas de amortización de todos y cada uno de esos bienes.

De esa relación y aplicando conceptos financieros es posible determinar la vida útil promedio del total de los bienes.

Cabe destacar que *no se han de considerar los bienes de uso no amortizables*, por ejemplo, la tierra en una explotación agropecuaria y, por otra parte, que si el sistema que se desea aplicar para obtener la cuota de amortización es la correspondiente a una "imposición" la vida media del conjunto de bienes será inferior a la que hubiere resultado si la cuota de amortización no tuviese esa característica.

Ese grado de obsolescencia permite al empresario planificar la renovación de los mismos y, tanto a él como a terceros, tener una idea (general) del valor de la empresa, tanto por su capacidad de generar riqueza como en caso de tener que ser realizados.

Determinación de la vida media

Detalle de bienes	**Costo**	**Valor Residual**	**Valor a amortizar**	**Vida útil**	**Cuota de Amortización anual**
A	C_1	VR_1	$C_1 - VR_1$	n_1	$P_1 = (C_1 - VR_1) / n_1$
B	C_2	VR_2	$C_2 - VR_2$	n_2	$P_2 = (C_2 - VR_2) / n_2$
C	C_3	VR_3	$C_3 - VR_3$	n_3	$P_3 = (C_3 - VR_3) / n_3$
Totales:			U		S

Representamos con una:

- "U" a la sumatoria del valor total a amortizar y
- "S" a la sumatoria de las cuotas de amortización, periódicas, de todos y cada uno de los bienes.

Luego es posible determinar el valor de la vida media considerando a este como el factor "n".

Obviamente que la vida media "n" del conjunto de bienes va a tener una directa correlación con dos variables según el método de amortización que se utilice para el cálculo de:

- La cuota de amortización
- El método o forma que se aplique para el cálculo de la vida media "n"

Cálculo de la "Cuota de Amortización" por uno de los métodos de "Proporcionales o de reducción uniforme":

Método: Proporcional, directo o de la línea recta					
	Costo = VO	**Valor Residual = VR**	**A Amortizar = U**	**V.U.**	**Cuota = S**
1	$ 50.000,00	$ 5.000,00	$ 45.000,00	10	$ 5.000,00
2	$ 120.000,00	$ 12.000,00	$ 108.000,00	5	$ 24.000,00
3	$ 5.000,00	$ 500,00	$ 4.500,00	4	$ 1.250,00
4	$ 250.000,00	$ 25.000,00	$ 225.000,00	10	$ 25.000,00
5	$ 100.000,00	$ 10.000,00	$ 90.000,00	10	$ 10.000,00
6	$ 25.000,00	$ 2.500,00	$ 22.500,00	20	$ 1.250,00
7	$ 87.000,00	$ 8.700,00	$ 78.300,00	10	$ 8.700,00
8	$ 215.000,00	$ 21.500,00	$ 193.500,00	5	$ 43.000,00
9	$ 300.000,00	$ 30.000,00	$ 270.000,00	5	$ 60.000,00
	$ 1.152.000,00	$ 115.200,00	$ 1.036.800,00		$ 178.200,00

Calculo de la *vida media* aplicando *el mismo método*:

$$\text{Cuota} = (VO - VR) / n$$

Luego:

$$n = (VO - VR) / \text{Cuota}$$

$n = (1.152.000,00 - 115.200,00) / \text{Cuota} =$ **5,82** o sea cinco años y nueve meses

Igual al valor que se obtiene, al final de la vida útil de los bienes, por efecto de la capitalización de todas y cada una de las cuotas "U".

Luego se puede asimilar a una "imposición", por lo tanto analíticamente es:

$$U = S\, S_{ni}$$

$$U = S\, [(1+ i)^n - 1] / i$$

$$1 + U\, i/S = (1 + i)^n$$

$$\ln (1 + U\, i/S) = n \ln (1+ i)$$

$$\mathbf{n = \frac{\ln (1 + U\, i/S)}{\ln (1+ i)}}$$

Valuación de bienes extinguibles

Conceptos

Se trata de bienes que tienen una vida útil limitada pues carecen de la capacidad de generar el producto que se les extrae. Pierden valor a medida que se los explota hasta quedar totalmente agotados. Por ejemplo: una mina de carbón, un pozo de petróleo, etc.

Un modo de calcular su valor es partiendo del supuesto de que al finalizar la vida útil del bien el inversor *cuente con un capital igual a la suma invertida más la ganancia esperada del proyecto.*

Al tratarse de un caso donde es el inversor quien decide *la tasa de rentabilidad esperada de la inversión* como, así también, *la tasa de interés de la imposición* para su ahorro, se puede afirmar que la cantidad de dinero a invertir estará determinada en base a la suma de esos dos conceptos, a saber: *renta más cuota de imposición.*

Nomenclatura

- M = La suma del ingreso periódico.
- i = Tasa de rentabilidad esperada de la inversión.
- C = Capital a invertir o inversión.
- C i = Renta de la inversión.
- i´= Tasa de interés de la imposición.

Determinación del capital invertir:

El valor de "**M**" será el del mínimo ingreso periódico deseado.

Resulta de dos sumandos:

- La utilidad esperada "**C i**"
- La cuota de la imposición "$\mathbf{C\ S_{n\,i'}^{-1}}$", que es la cantidad de dinero necesario para la formación de un monto igual al capital invertido "**C**".

Luego:

$$M = C\,i + C\,S_{n\,i'}^{-1}$$

$$M = C\,(i + S_{n\,i'}^{-1})$$

$$C = M\,/\,(i + S_{n\,i'}^{-1})$$

Es valor del bien o el límite máximo de la suma a abonar por la compra del bien.

CAPÍTULO 19
TRABAJOS PRÁCTICOS

Revisión de progresiones, potencias y logaritmos

Enunciados

1. Dado: $h^m * h^n = 120{,}00$

   Calcular el valor de "h" para: m = 5 y n = 4. Verificar

2. Si $a^m * b^m = 5.000{,}00$

   Calcular el valor de "m" para: a = 10 y b = 20. Verificar

3. Si $a^m/b^m = 1.000{,}00$

   Calcular el valor de "a" para: b = 100,00 y m = 10,00. Verificar

4. Si $b_m/b_n = 500{,}00$

   Calcular el valor de "b" si: m = 10,00 y n = 2,00. Verificar

5. Dada una población inicial de 3.000.000 de personas en el año 1970 y un crecimiento poblacional dado por la función: $G(t) = e^{0{,}125\,t}$ donde "t" esta expresado en años. Calcular:

   5.1. La población para el año 1980.

   5.2. La población para el año 2000.

   5.3. Comparar la tasa de crecimiento entre el año 1980 y el año 2000.

6. Calcular el valor de "r" si:

$$a\,(1 + r)^m = b\,(1 + r)^n$$

Donde a = 1.000.000,00, b = 870.000,00, m = 10 y n = 20. Verificar.

7. Dada la expresión: $\ln (8 - 4\ h) - \ln (h)^2 = 0$

   Hallar el valor de "h". Verificar.

8. Si una población crece exponencialmente a razón del 3% anual se pregunta qué tiempo debe transcurrir para que se duplique. Verificar.

9. Con los datos del ejercicio anterior calcular a que tasa debiera tener que crecer la población de modo que se duplique al cabo de 10 años. Verificar.

10. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia entre cada término es dos, hallar la suma de los primeros nueve términos de la sucesión.

11. ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética cuyo primer término es 8 y el último 36, si la diferencia es 2?

12. Hallar la suma de los diez primeros términos de una progresión aritmética si el primer término es 7 y el último 52.

13. La dosis de un medicamento es de 100 mg. El primer día y 5 mg. mas cada uno de los días subsiguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos debe tomar el paciente durante todo el tratamiento?

14. Calcular la razón de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es 3 y el octavo es 384.

15. Una bacteria se reproduce por bipartición cada 15 minutos. ¿Cuántas bacterias habrá después de 6 horas?

16. Consideremos la siguiente situación: dos maratonistas se preparan para una competencia. El primero comienza con 1.000 mts. y todos los días agrega otros 1.000 mts. El segundo corredor comienza con 200 mts. Y cada día duplica lo hecho el día anterior. Determinar cuántos metros recorre cada deportista el décimo día.

17. Hallar el onceavo término de la siguiente progresión aritmética: 4, 7, 10,...

18. Una persona ha adquirido 20 revistas. Por el primer ejemplar pagó $ 1, por el segundo $ 2, por el 3º $ 4, por el 4º $ 8 y así sucesivamente. ¿Cuál fue el total abonado?

19. Un señor firma un contrato de alquiler por el cual debe pagar seis cuotas anuales. La primera asciende a $ 500 y cada una de las subsiguientes es igual a la anterior ajustada en un 1%. Calcular el importe total abonado al final del contrato.

Resoluciones

PRIMERO

$m = 5$

$n = 4$

$h^m * h^n = 120$

$h^{m+n} = 120$

$h^{5+4} = 120$

$h = 120^{(1/9)}$

$h = 1{,}70224$

Verificación

$h^m * h^n = 120$

$h^{1{,}70224} * h^{1{,}70224} = 120$

$14{,}29236 * 8{,}39621 = 120$

SEGUNDO

$a = 10$

$b = 20$

$a^m * b^m = 5.000{,}00$

$(a * b)^m = 5.000{,}00$

$(a * b)^m = 5.000{,}00$

$200^m = 5.000{,}00$

$m * \ln 200 = \ln 5.000{,}00$

$m = \ln 5.000{,}00/\ln 200$

$m = 8{,}51719/5{,}2983$

$m = 1{,}60753$

Verificación

$a^m * b^m = 5.000{,}00$

$10^{1{,}60753} * 20^{1{,}60753} = 5.000{,}00$

$40{,}507 * 123{,}4368 = 5.000{,}00$

TERCERO

$m = 10$

$b = 100$

$a^m/b^m = 1.000{,}00$

$(a/b)^m = 1.000{,}00$

$(a/100)^{10} = 1.000{,}00$

$a = (1.000^{(1/10)} * 100)$

$a = 199{,}53$

Verificación

$a^m/b^m = 1.000{,}00$

$199{,}53^{10}/100^{10} = 1.000{,}00$

$1{,}00018 * 10^{23}/1 * 10^{20} = 1.000{,}00$

$1{,}00018 * 10^{23}/10^{20} = 1.000{,}00$

$1{,}00018 * 10^{13} = 1.008{,}18$

CUARTO

$m = 10$

$n = 2$

$b^m/b^n = 500,00$

$b^{m-n} = 500,00$

$b^{10-2} = 500,00$

$b = 500,00^{1/8}$

$b = 2,1745600$

Verificación

$b\ m/b\ n = 2,17456^{10}/2,17456^2$

$b\ m/b\ n = 2364,36/4,7287$

$b\ m/b\ n = 500$

QUINTO

a) Desde el año 1970 al año 1980 han de transcurrir 10 años

Por lo tanto:

$P\ (10) = 3.000.000\ e^{0,125 * 10}$

$P\ (10) = 3.000.000 * 3,49034$

$P\ (10) = 10.471.028$

b) Desde el año 1970 al año 2000 han de transcurrir 30 años

Por lo tanto:

$P\ (30) = 3.000.000\ e^{0,125 * 30}$

$P\ (30) = 3.000.000 * 42,52108$

$P\ (30) = 127.563.246$

c) Crecimiento entre los años 1980 y 2000

Desde el año 1980 al año 2000 han de transcurrir 20 años

La población en 1980: 10.471.028 personas

Por lo tanto

$P\ (20) = 10.471.028\ e^{0,125 * 20}$

$P\ (20) = 10.471.028 * 12,18249$

$P\ (20) = 127.563,246$

d) Crecimiento entre los años 1980 y 2000

Población en 1980: 10.471.028

Población en 2000: 127.563.246

$P_{2000} = P_{1980}\ e^{i * 20}$

$P_{2000}\ /P_{1980} = \ln e^{i * 20}$

$\ln (P_{2000}/P_{1980}) = i * 20$

$i = \ln (P_{2000}/P_{1980}) / 20$

$i = \ln 12,1825/20$

$i = 2,5/20$

$i = 0,125$

Que es la tasa de crecimiento dada como dato

SEXTO

$a = 1.000.000$

$b = 870,000$

$m = 10$

$n = 20$

$a\ (1 + r)^m = b\ (1 + r)^n$

$a/b = (1 + r)^n / (1 + r)^m$

$a/b = (1 + r)^{n - m}$

$r = (a/b)^{(1/n - m)} - 1$

$r = (1.000.000/870.000)^{(1/20 - 10)} - 1$

$r = 0{,}0140236$

Verificación

$a\ (1 + r)^m = b\ (1 + r)^n$

$1.000.000\ (1 + 0{,}0140236)^{10} = 870.000\ (1 + 0{,}0140236)^{20}$

$1.149.425{,}28 = 1.149.425{,}28$

SÉPTIMO

$\ln (8 - 4\ h) - \ln (h)^2 = 0$

Por propiedades de los logaritmos se puede expresar como:

$\ln (8 - 4\ h) - 2 \ln (h) = 0$

Por propiedad de los logaritmos una resta de logaritmos es igual al logaritmo del cociente de los términos:

$\ln [(8 - 4\ h)/h^2] = 0$

El logaritmo de uno (1) es igual a cero (0), por lo tanto el primer término es igual a uno (1)

$(8 - 4\ h)/h^2 = 1$

$(8 - 4\ h) = h^2$

$h^2 + 4\ h - 8 = 0$

Que es una ecuación de segundo grado que se resuelve por Bascara:

$[-b +/- (b^2 - 4\ a\ c)^{(1/2)}]/2\ a$

$[-4 +/- 48^{(1/2)}]/2$

$[-4 + 48^{(1/2)}]/2 = 1{,}464100$

$[- 4 - 48^{(1/2)}]/2 = - 5{,}464100$

No corresponde tomar el negativo

Verificación

$\ln (8 - 4\ h) - \ln (h)^2 = 0$

$\ln (8 - 4 * 1{,}4641) - \ln (1{,}4641)^2 = 0$

$0{,}76248 - 0{,}76248 = 0$

OCTAVO

$V_0 = 1$

$V_1 = 2$

tasa de crecimiento anual: 3,00%

$V_0\ e^{in} = V_1$

$V_0/V_1 = e^{in}$

$\ln (V_0/V_1) = i\ n \ln e$

$\ln 2 = 0{,}03\ n$

$\ln 2/0{,}03 = n$

$0{,}693147/0{,}03 = 23{,}10$ años

Luego = 23 años, 1 mes y 6 días

Verificación

$V_0\ e^{in} = 1 * 2{,}7182818^{0{,}03 * 23{,}10}$

$V_0\ e^{in} = 2$

NOVENO

$V_0 = 1$
$V_1 = 2$
$n = 10$
$V_0 e^{in} = V_1$
$V_0/V_1 = e^{in}$
$\ln (V_0/V_1) = i\ n \ln e$
$\ln 2 = i\ 10$
$\ln 2/10 = 0{,}693147/10$
$0{,}693147/10 = 0{,}0693147$
Verificación
$V_0 e^{in} = 2{,}7182818^{0{,}0693147 * 10}$
$2{,}7182818^{0{,}0693147 * 10} = 2$

DÉCIMO

Progresión aritmética
Hallar la suma de los primeros nueve términos.
Quinto término:18
Razón: 2
Cantidad de términos: 9
Primer término (a_1): 18 - 5 * 2
Primer término (a_1): 10
Último término (a_n): $a_n = a_1 + c\ (n - 1)$
Último término (a_9): 26
Suma: $S_n = [(a_1 + a_n)/2]\ n$
Suma: 162

UNDÉCIMO

Progresión aritmética
Determinar la cantidad de términos
Primer término: 8
Último término: 36
Razón: 2
Último término (a_n): $a_n = a_1 + c\ (n - 1)$
Términos: $a_n - a_1 = c\ (n - 1) = [(a_n - a_1)/c] +1 = c$
Términos: 15

DUODÉCIMO

Progresión aritmética
Hallar la suma de los 10 primeros términos
Primer término: 7
Último término: 52
Cantidad de términos: 10
Suma: $S_n = [(a_1 + a_n)/2]\ n$
Suma: 295

DECIMOTERCERO

Hallar la suma de una progresión aritmética

Primer término: 100

Razón de variabilidad: 5

Cantidad de términos: 12

Último término (a_n): $a_n = a_1 + c\ (n - 1)$

Último término (a_n): 155

Suma : $S_n = [(a_1 + a_n)/2\ ]\ n$

Suma: 1.530,00

DECIMOCUARTO

Hallar la razón de una progresión geométrica

Primer término: 3

Octavo término: 384

Cuantía del "n" término: $a_n = a_1 * q^{n-1}$

Razón: $a_n/a_1 = q^{n-1}$

Razón: $q = (a_n/a_1)^{(1 / n-1)}$

Razón: 2

DECIMOQUINTO

Hallar el último término de una progresión geométrica

Primer término: 1

Razón de variabilidad: 2

Términos: 24

Último término: $a_n = a_1 * q^{n-1}$

Último término: 8.388.608,00

DECIMOSEXTO

Comparación entre una progresión aritmética y una geométrica

Progresión aritmética

Primer término: 1.000,00

Razón de variabilidad: 1.000,00

Progresión geométrica

Primer término: 200,00

Razón de variabilidad: 2,00

Términos: 10

Último término:

Progresión aritmética: $a_n = a_1 + c\ (n - 1)$

Progresión aritmética: 10.000,00

Progresión geométrica: $a_n = a_1 * q^{n-1}$

Progresión geométrica: 102.400,00

DECIMOSÉPTIMO

Determinar un término en una progresión aritmética

Primer término: 4

Segundo término: 7

Razón de variabilidad. 3

Calcular la cuantía del 11 término

Valor del último término: $a_n = a_1 + c\ (n - 1)$

Valor del último término: 34,00

DECIMOCTAVO

Determinar la suma de una progresión geométrica

Primer término: $ 1,00

Segundo término: $ 2,00

Razón de variabilidad: 2,00

Cantidad de términos: 20,00

Suma de una progresión geométrica: $S_n = a_1 (r^n - 1) / (r - 1)$

Suma de una progresión geométrica: $1.048.575,00

DECIMONOVENO

Determinar la suma de una progresión geométrica

Primer término: 500,00

Razón de variabilidad: 1,01

Cantidad de términos: 6, 00

Suma de una progresión geométrica: $S_n = a_1 (r^n - 1) / (r - 1)$

Suma de una progresión geométrica: $ 3.076,01

Interés

Enunciados

1. Que monto se obtendrá al cabo de 5 años con capital de $ 1.310,00 que colocado al 12% nominal anual capitaliza anualmente.
2. Que monto se obtendrá al cabo de 5 años con capital de $1.310,00 que colocado al 12% nominal anual capitaliza mensualmente.
3. Que monto se obtendrá al cabo de 5 años con capital de $1.310,00 que colocado al 12% nominal anual capitaliza semestralmente.
4. Qué interés compuesto se obtendrá al cabo de 4 meses de un capital de $ 3.000,00 colocado a una tasa nominal bimestral del 6% que capitaliza bimestralmente.
5. Qué interés compuesto se obtendrá al cabo de 4 meses de un capital de $ 3.000,00 colocado a una tasa nominal mensual del 6% que capitaliza mensualmente.
6. Qué capital fue necesario colocar a una tasa nominal del 12% bimestral de manera tal que al cabo de 4 meses con capitalización bimestral se forme un monto de $ 4.510,00.
7. Qué capital fue necesario colocar a una tasa nominal del 12% bimestral de manera tal que al cabo de 4 meses con capitalización mensual se forme un monto de $ 4.510,00.
8. Calcular la tasa nominal de interés periódica partiendo de un capital de $1.750,00 que al cabo de 4 subperíodos mensuales de capitalización forma un monto de $2.000,00.
9. A que tasa nominal de interés se colocó un capital de manera tal que al cabo de 12 subperíodos de capitalización se duplicó.
10. Calcular el tiempo que tuvo que estar colocado un capital de $ 1.800,00 con capitalización anual de manera tal a una tasa del 10% nominal anual se transforme en un monto de $ 2.000,00.
11. Calcular el tiempo que tuvo que estar colocado un capital de $ 1.750,00 con capitalización mensual de manera tal a una tasa del 15% nominal anual se transforme en un monto de $ 3.500,00.

Resoluciones

PRIMERO

Capital = $ 1.310,00
TNA = 12%
Capitalización = anual
n = 5 años
m = 1
$M = C\ (1 + i/_{m})^{m\ n}$
$M = 1.310,00\ (1 + 0,12)^{5}$
M = $ 2.308,67

SEGUNDO

Capital =$1.310,00
TNA =12%
Capitalización = mensual
n = 5 años
m = 12
$M = C\ (1 + i/_{m})^{m\ n}$
$M = 1.310,00\ (1 + 0,12/12)^{5\ *\ 12}$
M = $ 2.379,87

TERCERO

Capital = $ 1.310,00
TNA = 12%
Capitalización = semestral
n = 5 años
m = 2
$M = C\ (1 + i/_{m})^{m\ n}$
$M = 1.310,00\ (1 + 0,12/2)^{5\ *\ 2}$
M =$ 2.346,01

CUARTO

Capital = $ 3.000,00
TN Bimestral = 6%
Capitalización = bimestral
n = 4 meses
$I = C\ [(1 + i/_{m})^{m\ n} - 1]$
$I = 3.000,00\ [(1 + 0,06)^{2} - 1]$
I = $ 370,80

QUINTO

Capital = $ 3.000,00
TN Mensual = 6%
Capitalización = mensual
n = 4 meses
$I = C\ [(1 + i/_{m})^{m\ n} - 1]$

$I = 3.000,00\ [(1 + 0,06)^4 - 1]$

$I = \$\ 787,43$

SEXTO

Monto = $ 4.510,00

TN Bimestral = 12%

Capitalización = bimestral

n = 2 períodos

m = 1

$M = C\ (1 + i/_m)^{m\ n}$

$C = M\ (1 + i/_m)^{-m\ n}$

$C = \$\ 4510\ (1 + 0,12)^{-2}$

I = $ 3.594,34

SÉPTIMO

Monto =$ 4.510,00

TN Bimestral = 12%

Capitalización = mensual, durante 4 meses

m = 2

n = 2 periodos

$M = C\ (1 + i/_m)^{m\ n}$

$C = M\ (1 + i/_m)^{-m\ n}$

$C = \$\ 4.510,00\ (1 + 0,12/2)^{-4}$

I = $ 3.572,34

OCTAVO

Monto = $ 2.000,00

Capital = $ 1.750,00

Capitalización = mensual

m = 4

n = 1 período de 4 meses

$M = C\ (1 + i/_m)^{m\ n}$

$i/m = (M/C)^{1/n} - 1$

$i/m = (2.000,00/1.750,00)^{1/4} - 1$

i /m = 3,39463%

i = 3,39463 * 4

i = 13,57852%

NOVENO

Monto = $ 2,00

Capital = $ 1,00

Capitalización = periódica

m = 12 períodos mensuales

n = 1 período de 12 meses

$M = C\ (1 + i/_m)^{m\ n}$

$i/m = (M/C)^{1/n} - 1$

$i/m = (2/1)^{1/12} - 1$

i/m = 5,94631%

i = 71,35571%

DÉCIMO

Monto =$ 2.000,00

Capital =$ 1.800,00

Capitalización = anual

TNA = 10%

$M = C (1 + i)^n$

$n = \ln (M/C) / \ln (1 + i)$

$\ln (2.000,00/1.800,00) / \ln (1 + 0,10)$

$n = 0,10536/0,09531$

n = 1,11 años o 1 año, 1 mes y 8 días

UNDÉCIMO

Monto = $ 3.500,00

Capital = $ 1.750,00

Capitalización = mensual

TNA = 15%

$M = C (1 + i/_{m})^{m\ n}$

$m = \ln (M/C) / \ln (1 + i/m)$

$m = \ln (3.500,00/1.750,00) / \ln (1 + 0,15/12)$

$m = 0,69315/0,01242$

m = 55,80 meses o 55 meses y 10 días

Tasas de interés

Enunciados

1. Calcular la tasa nominal anual que proporcionada a operaciones de 30 días obtiene un rendimiento anual del 100%.
2. Calcular la tasa equivalente a periodos de 38 días que tenga el mismo rendimiento que el 75% efectivo anual.
3. Calcular la tasa efectiva anual que resulta de utilizar el 60% nominal anual para operaciones a 20 días.
4. Calcular la tasa efectiva anual que tenga el mismo rendimiento que el 18,50% nominal anual para operaciones a 22 días.
5. Dada una tasa del 25%, efectiva, para un periodo de 30 días determinar:
    a. La tasa equivalente para 7 días.
    b. La tasa equivalente para 15 días, partiendo de:
        b.1. Enunciado.
        b.2. Ítem a).
    c. La tasa equivalente para 60 días.
    d. La tasa equivalente para 365 días.
    e. La tasa efectiva anual partiendo de:
        e.1. La tasa equivalente hallada en el ítem a).
        e.2. La tasa equivalente hallada en el ítem b.2).
6. Dada una tasa del 10% nominal anual, determinar:
    a. La tasa proporcional para 7 días.
    b. La tasa proporcional para 70 días.
    c. La tasa efectiva a 70 días partiendo de a).
    d. La tasa efectiva a 70 días partiendo de b).
    e. La tasa efectiva anual partiendo de c).
    f. La tasa efectiva anual partiendo de d).
    g. La tasa equivalente a 7 días partiendo de e).
    h. La tasa equivalente a 70 días partiendo de f).
7. Cuál es la alternativa más conveniente para el deudor:
    1. Depositar a plazo fijo a 30 días al 7%.

2. Depositar a plazo fijo a 90 días al 7%, con retiro cada 30 días de los intereses.
3. Depositar a plazo fijo a 90 días al 25%.
4. Depositar a 190 días al 50%.
5. Depositar a 210 días con el siguiente régimen:
    5.1. Primeros 60 días al 5% capitalizable cada 30 días.
    5.2. Luego 90 días al 8% capitalizable cada 30 días.
    5.3. Hasta el final al 7% capitalizable cada 30 días.

8. ¿Cuál es el rendimiento real de una inversión financiera que ha sido realizada a 160 días al 20% si la tasa de inflación para el mismo período fue del 10%?
9. ¿Cuál es el rendimiento real de una inversión financiera que ha sido realizada a 190 días al 4,53% efectivo para 30 días si la tasa de inflación para el mismo período fue del 2,18% para cada 30 días?
10. Un productor agropecuario decide no vender la producción de su campo y para poder financiar sus erogaciones decide tomar un préstamo a 190 días al 15% nominal anual, si en el mismo período la variación de precios de su producción fue, en mas, del 17% se pregunta: dado el resultado financiero de esa operación el productor se benefició o perjudicó?
11. ¿Cuál es la tasa de interés resultante de una operación de descuento donde se ha descontado el 12,50% si el pagaré vencía a los 175 días? Comprobarlo.
12. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva anual resultante de una operación de descuento donde se ha descontado el 22,50% nominal anual si el pagaré vencía a los 45 días? Comprobarlo.
13. ¿Cuál es el valor actual de una obligación de $ 450.000,00 que vence a 59 días, siendo la tasa de interés del 2%?
14. Dada una tasa periódica del 5% determinar la tasa instantánea de interés para ese mismo lapso. Comprobar.
15. Dada una tasa instantánea de 8,158% determinar la tasa periódica correspondiente. Comprobar.
16. Si la tasa instantánea anual de interés es del 22,50% calcular la tasa nominal anual que corresponde para un plazo de 120 días. Comprobar.
17. Si la tasa para 30 días es del 5,50% cuál será la tasa anual instantánea que corresponde a la tasa efectiva anual. Comprobar.

Resoluciones

PRIMERO

Tasa efectiva = $(1 + i/m)^{m} - 1$

$1 = (1 + i/_{(365/30)})^{(365/30)} - 1$

$(1 + 1)^{(30/365)} = 1 + i/_{(365/30)}$

$i = [(1 + 1)^{(30/365)} - 1] \times (365/30)$

$i = 0,71327$

SEGUNDO

Tasa efectiva = $(1 + i/m)^{m} - 1$

$i = (1 + i)^{(365/38)} - 1$

$i = (1 + 0,75)^{(38/365)} - 1$

$i = 0,05999$

TERCERO

Tasa efectiva = $(1 + i/m)^{m} - 1$

$i' = (1 + 0,60/_{(365/20)})^{(365/20)} - 1$

$i = 0,80462$

CUARTO

Tasa efectiva = $(1 + i/m)^{m} - 1$

$i' = (1 + 0,185/_{(365/22)})^{(365/22)} - 1$

$i = 0,20199$

QUINTO

a- Tasa equivalente para 7 días: $(1 + 0,25)^{7/30} - 1 = 0,05345$

b- Tasa equivalente para 15 días:

  b.1- $(1 + 0,25)^{15/30} - 1 = 0,11803$

  b.2- $(1 + 0,053446)^{15/7} - 1 = 0,11803$

c- Tasa equivalente para 60 días = $(1 + 0,25)^{60/30} - 1 = 0,56250$

d- Tasa equivalente para 365 días: $(1 + 0,25)^{365/30} - 1 = 14,10330$

e- Tasa efectiva anual:

  e.1- Partiendo de a) $(1 + 0,053446)^{365/7} - 1 = 14,10330$

  e.2- Partiendo de b2) $(1 + 0,118034)^{365/15} - 1 = 14,10330$

SEXTO

a- Tasa proporcional a 7 días = $0,10/_{365/7} = 0,00192$

b- Tasa proporcional a 70 días: $0,10/_{365/70} = 0,01918$

c- Tasa efectiva a 70 días partiendo de a): $(1 + 0,0019178)^{70/7} - 1 = 0,01934$

d- Tasa efectiva a 70 días partiendo de b): $(1 + 0,019178)^{70/70} - 1 = 0,01918$

e- Tasa efectiva anual partiendo de c): $(1 + 0,019344)^{365/70} - 1 = 0,10506$

f- Tasa efectiva anual partiendo de d): $(1 + 0,019178)^{365/70} - 1 = 0,10412$

g- Tasa efectiva a 7 días partiendo de e): $(1 + 0.1050646)^{7/365} - 1 = 0,00192$

h- Tasa equivalente a 70 días partiendo de f): $(1 + 0,1041251)^{70/365} - 1 = 0,01918$

SÉPTIMO

a- $(1 + 0{,}07)^{210/30} - 1 = 0{,}60578$

b- Idem a)

c- $(1 + 0{,}25\ )^{210/90} - 1 = 0{,}68315$

d- $(1 + 0{,}50)^{210/190} - 1 = 0{,}56541$

e- $[(1 + 0{,}05)^{60/30} \text{ x } (1 + 0{,}08)^{90/30} \text{ x } (1 + 0{,}07)^{60/30}] - 1 =$

La más conveniente es la d)

OCTAVO

Plazo, en días, de la inversión: 160

Tasa de interés de la inversión: 20%

Tasa de inflación para el período: 10%

Rendimiento real: (i - f) / (1 + f)

Rendimiento real: (0,20 - 0,10) / (1 + 0,10)

Rendimiento real: 9,09091%

NOVENO

Plazo, en días, de la inversión: 190

Tasa de interés - efectiva para 30 días 4,5300%

Tasa de interés - efectivo para 180 días: 32,3913%

Tasa de inflación para cada 30 días: 2,18%

Tasa de inflación - efectivo para 180 días: 14,6350%

Rendimiento real: (i - f) / (1 + f)

Rendimiento real: (0,323913 - 0,146350) / (1 + 0,146350)

Rendimiento real: 15,48937%

DÉCIMO

Plazo, en días, del préstamo: 190

Tasa de interés - nominal anual: 15,0000%

Tasa de interés - proporcional : 7,8082%

Variación de precios para el período: 17,00%

Rendimiento real: (i - f) / (1 + f)

Rendimiento real: (0,078082 - 0,15) / (1 + 0,15)

Rendimiento real: -7,85622%

UNDÉCIMO

Plazo de vencimiento, en días, del pagaré: 175

Tasa de descuento para el período: 12,50%

Tasa de interés: d / (1- d)

Tasa de interés: 14,28571%

Comprobación:

Valor nominal: $ 100,00

Valor actual: VN - D

Descuento: $ 12,50

Valor actual: $ 87,50

Valor final: VA más interés

Valor final: 89,50 * 1+ 0,1428571

Valor final: $ 100,00

DUODÉCIMO

Plazo de vencimiento, en días, del pagaré: 45

Tasa de descuento nominal anual: 22,50%

Cantidad de subperíodos (m): 8,111111

Tasa de interés: (d/m) / [1 - (d/m)]

Tasa de interés: 2,85312%

TEA: $(1 + 0{,}0285312)^{8{,}11111}$

TEA: 25,6311%

Comprobación:

Valor nominal: $ 100,00

Valor actual: VN - D

Descuento: VN * d/m * 1

Descuento: $ 2,88

Valor actual: $ 97,23

Valor final: VA más interés

Valor final: 97,02 * 1 + 0,0285312

Valor final: $ 100,00

DECIMOTERCERO

Valor nominal: $ 450.000,00

Tasa de interés, efectivo para 30 días:

Días a los que vence: 59

Una manera de resolverlo:

$V_0 = V_n / (1+ i)^{m1/m2}$

$V_0 = 45{+}2.460.000/(1+ 0{,}02)^{59/30}$

$V_o = \$\ 432.811{,}55$

Otra forma:

a) Tasa efectiva para 59 días:

$i = (1 + i)^{m1/m2} - 1$

i = 0,039713471

b) Luego determinar la tasa de descuento:

d = i / (1+ i)

i = 0,038196554

c) Luego el Valor actual para la unidad de capital será:

$V_0 = 1 - d$

$V_0 = 96{,}18034\%$

d) Luego el Valor actual para el total será:

$V_0 = 450.000{,}00 * 0{,}8290761$

$V_0 = \$\ 432.811{,}55$

DECIMOCUARTO

Tasa periódica = 5%

$(1 + i/m)^m - 1 = 0{,}05$

$(1 + i/m)^m = 1+ 0{,}05$

$\text{Lim } (1 + i/m)^m = 1+ 0{,}05$

Este límite con “m” tendiendo a infinito es:

$\text{Lim } (1 + i/m)^m = e^b$

$e^b = 1+ 0{,}05$

$b\ l_n\ e = l_n\ 1{,}05$

$b = l_n\ 1{,}05$

$b = 0{,}048790$

Comprobación de la tasa instantánea

Calcular el monto continuo

$C\ e^{\ 0{,}04879} =$

Si: $C = 1$

$e^{0{,}04879} = 1{,}05$

DECIMOQUINTO

Tasa instantánea: 0,0815800

$b = 0{,}0815800$

$1 + i = e^b$

$1 + i = 2{,}71828^{0{,}08158}$

$1 + i = 1{,}085000$

$i\ = 0{,}085000$

Comprobación de la tasa instantánea

Calcular el monto contínuo

$C\ e^{0{,}08158} = 1 + b$

Si: $C = 1$

$\boldsymbol{e^{\ 0{,}08158} = 1{,}0850}$

DECIMOSEXTO

Tasa instantánea anual: 22,50%

Plazo en días: 120

$(1 + i/m)^m - 1 = e^b - 1$

$(1 + i/m)^m = e^b$

$m = 365/120$

$m = 3{,}0417$

$(1 + i/3{,}0417)^{3{,}0417} = e^{0{,}225}$

$i = (e^{0{,}225\ *120/365} - 1) * 365/120$

$i = 0{,}23353$

Comprobación de la tasa hallada

$e^{0{,}225} = 1{,}25232$

$(1 + 0{,}23353/3{,}0417)^{3{,}0417} = 1{,}25232$

DECIMOSÉPTIMO

Tasa subperiódica: 5,50%

Plazo en días: 30

$(1 + i)^m - 1 = e^b - 1$

$(1 + i)^m = e^b$

$m = 365/30$

$m = 12{,}1667$

$(1 + 0{,}055)^{12{,}1667} = e^b$

$b = \ln\ (1 + 0{,}055)^{365/30}$

$b = 0{,}6514$

Comprobación de la tasa hallada

$e^{0{,}6514} = 1{,}91822$

$(1 + 0{,}055)^{365/30} = 1{,}91822$

Descuento

Notas

- En los ejercicios 1, 2 y 3 para el caso de Descuento Compuesto utilizar la misma tasa considerándola primero como nominal anual y luego como efectiva anual.
- En los ejercicios 4, 5 y 6 realizar los cálculos con Descuento Comercial, Descuento Racional y Descuento Compuesto con tasa efectiva.

Enunciados

Ejercicios:

1. Dado un pagare de $ 5.000,00 con vencimiento a los 180 días calcular el descuento correspondiente. Tasa de interés 12%.
2. Calcular cual será el valor nominal de una obligación que venza a los 180 días si su valor actual es de $ 2.500,00. Tasa de interés 12%.
3. Dado un pagare de $ 7.500,00 a 150 días en el que hemos incluido intereses calcular su valor actual. Tasa de interés 7,50%.
4. A cuantos días antes de su vencimiento se habrá recibido la suma de $ 930,00, por un pagare de valor nominal de $ 1.000,00. Tasa de interés 7,50%.
5. Dada una tasa del 10% nominal anual calcular en qué plazo el valor actual de un pagare es igual a su descuento.
6. Si 45 días antes de su vencimiento el descuento de un pagare de $ 1.000,00, es la suma de $ 55,00. Calcular cual es la tasa nominal implícita en la operación.

Resoluciones

PRIMERO

Valor nominal = $ 5.000,00

Vencimiento = 180 días

TNA = 12%

$D_1 = N\ i\ n$

$D_1 = 5000 * 180 * 0{,}12/365 = \$\ 295{,}89$

$D_2 = (N\ i\ n) / (1 + i\ n) =$

$D_2 = (5.000{,}00 * 0{,}12 * 180/365) / (1 + 0{,}12 * 180/365) = \$\ 279{,}36$

Descuento compuesto con tasa nominal anual

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i/_{m})^{m * n}] =$

$D_3 = 5.000{,}00\ [1 - 1 / (1+ 0{,}12/_{(365/180)})^{(365/180)* (150/365)}] = \$\ 279{,}36$

Descuento compuesto con tasa efectiva anual

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i')^{1/m}] =$

$D_3 = 5.000{,}00\ [1 - 1 / (1 + 0{,}12\ )^{(180/365)}\ ] = \$\ 271{,}70$

SEGUNDO

Con descuento comercial:

$D = N - V$

$D_1 = N\ i\ n$

$D + V = N$

$N\ i\ n + V = N$

$N = V / (1 - in)$

$N = 2.500{,}00 / (1 - 0{,}12 * 180/365)$

$N = \$\ 2.657{,}25$

Con descuento racional:

$N = V\ (1 + i\ n)$

$N = 2.500{,}00\ (1 + 0{,}12/_{365} * 180)$

$N = \$\ 2.647{,}95$

Con descuento compuesto:

$N = V\ (1 + i)^n$

Descuento compuesto con tasa nominal anual -

$N = 2.500{,}00\ (1 + 0{,}12/_{365/180})^{(365/180) * (180/365)}$

$N = \$\ 2.647{,}95$

Descuento compuesto con tasa efectiva anual:

$N = 2.500{,}00\ (1 + 0{,}12)^{1/(365/180)}$

$N = \$\ 2.643{,}70$

TERCERO

Valor nominal = $ 7.500,00

Vencimiento = 150 días

TNA = 7,50%

Con descuento comercial:

$D = N - V$

$D_1 = N\ i\ n$

$V = N - N\ i\ n$

$V = N\ (1 - i\ n)$

$V = 7.500,00 (1 - 0,075 * 150/_{365})$

$V = \$ 7.268,84$

Comprobación:

$D = N - V = 7.500,00 - 7.268,84 = 231,17$

$D = N\ i\ n = 7.500,00 * 0,075 * 150/365 = 231,17$

Con descuento racional

$N = V (1 + i\ n)$

$V = N / (1 + i\ n)$

$V = 7.500,00 / (1 + 0,075 / 365 * 150)$

$V = \$ 7.275,75$

Comprobación

$D = N\ i\ n / (1 + i\ n) =$

$D = 7.500,00 * (0,075 * (150/365)) / (1 + (0,075 * (150/365)))=$

$D = 224,25$

$V + D = N = 7.275,75 + 2.24,25 = 7.500,00$

Con descuento compuesto:

$N = V (1 + i)^n$

Descuento compuesto con tasa nominal anual

$V = N / (1 + i)^n$

$V = 7.500,00 / (1 + 0,075/_{365/150}) \wedge ^{(365/150) * (150/365)}$

$V = \$ 7.275,75$

Comprobación:

$D_3 = N * [1 - 1 / (1+ i/_m)^{n\ m}] =$

$D_3 = 7.500,00 * [1 - 1 / (0,075/_{365/150}) \wedge ^{(365/150) * (150/365)}]$

$D_3 = \$ 224,25$

$V + D = N = 7.275,75 + 224,25 = 7.500,00$

Descuento compuesto con tasa efectiva anual:

$V = N / (1 + i')^{1/m}$

$V = 7.500,00 / (1 + 0,075) \wedge (1/(365/150))$

$V = \$ 7.280,37$

Comprobación:

$D_3 = N * [1 - 1 / (1+ i')^{1/m}] =$

$D_3 = 7.500,00 * (1 - 1 / (1 + 0,075) \wedge ^{(1/(365/150))}$

$D_3 = \$ 219,63$

$V + D = N = 7.280,37 + 219,63 = 7.500,00$

Cuarto

Valor nominal = $ 1.000,00

Valor actual = $ 930,00

Descuento = N - V = $ 70,00

TNA = 7,50%

Con descuento comercial

$D = N\ i\ n$

$n = D/N\ i$

$n = 70,00/1.000,00 * (0,075/_{365})$

$n = 340,67$ días

Con descuento racional

$D_2 = (N\ i\ n) / (1 + i\ n)$

$D_2 (1 + i\ n) = N\ i\ n$

$D_2 = N\ i\ n - D_2\ i\ n$

$D_2 = n\ (N\ i - D_2\ i)$

$n = D_2 / (N\ i - D_2\ i)$

$n = D_2/i\ (N - D_2)$

$n = D_2/i\ V$

$n = 70/0{,}075 * 930$

$n = 1{,}0035842$ partes de año

$n = 366{,}31$ días

Con descuento a interés compuesto:

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i)]$

Descuento compuesto con tasa efectiva anual -

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i')^{1/m}]$

$(D_3/N) - 1 = - (1 / (1+ i')^{1/m})$

$(N - D_3\ ) / N = 1 / (1+ i')^{1/m}$

$V/N = 1 / (1+ i')^{1/m}$

$N/V = (1 + i')^{1/m}$

$\log (N/V) / \log (1 + i') = 1/m$

$\log (1 + i') / \log (N/V) = m$

$\log (1 + 0{,}075) / \log (1000/930) = m$

$m = 0{,}996500$

$0{,}9965 = 365/x$

$x = 365/0{,}99650$

$x = 366{,}28$

Días antes del vencimiento = 366,28

Quinto

Valor nominal = \$ 2,00

Descuento = \$ 1,00

Valor actual = N - D = \$ 1,00

TNA = 10,00%

Con descuento comercial:

$D = N\ i\ n$

$n = D/N\ i$

$n = 1 / (2 * 0{,}10)$

$n = 5$ años

Con descuento racional:

$D_2 = (N\ i\ n) / (1 + i\ n)$

$D_2\ (1 + i\ n) = N\ i\ n$

$D_2\ 1 + D_2\ i\ n = N\ i\ n$

$D_2 = N\ i\ n - D_2\ i\ n$

$D_2 = i\ n\ (N - D_2)$

$n = D_2/i\ (N - D_2)$

$n = D_2/V\ i$

$n = 1/1 * 0{,}10$

$n = 10$ años

Con descuento compuesto:

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i\ )^m] =$

Descuento compuesto con tasa efectiva anual -

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i')^{1/m}]$

$(D_3/N) - 1 = - (1 / (1+ i'))^{1/m})$

$(N - D_3) / N = 1 / (1+ i')^{1/m}$

$V/N = 1 / (1+ i')^{1/m}$

$N/V = (1+ i')^{1/m}$

$\log (N/V) / \log (1 + i') = 1/m$

$\log (1 + i') / \log (N/V) = m$

$\log (1 + 0{,}10) / \log (2/1) = 0{,}13750$

$m = 0{,}13750$

$0{,}13750 = 365/x$

$x = 365/0{,}13750$

$x = 2654{,}55$

Es a los = 2.654,55 días

Expresado en años = 7,2727 años

SEXTO

Valor nominal = 1.000,00

Descuento = 55,00

Valor actual = N - D = 945

Plazo = 45 días

Con descuento comercial

$D = N\ i\ n$

$i = D/N\ n$

$55{,}00/1.000{,}00 * (45/_{365})$

$i = 0{,}44611$

$r = 44{,}61\%$

Con descuento racional

$D_2 = (N\ i\ n) / (1 + i\ n)$

$D_2\ (1 + i\ n) = N\ i\ n$

$D_2\ 1 + D_2\ i\ n = N\ i\ n$

$D_2 = N\ i\ n - D_2\ i\ n$

$D_2 = i\ (N\ n - D_2\ n)$

$i = D_2 / (N\ n - D_2\ n)$

$i = D_2/n\ (N - D_2)$

$i = D_2/n\ V$

$i = 55/45*945$

$i = 0{,}0012934$ tasa diaria

$i = 0{,}47$ TNA

$r = 47{,}21$ TNA

Con descuento a interés compuesto:

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i)]$

Descuento compuesto con tasa nominal anual -

$D_3 = N\ [1 - 1 / (1+ i')^{1/m}]$

$(D_3/N) - 1 = -(1 / (1 + i')^{1/m})$

$1 - (D_3/N) = (1 / (1 + i')^{1/m})$

$(N - D) / N = (1 / (1 + i')^{1/m})$

$V/N = (1 / (1 + i')^{1/m}\ )$

$N/V = (1 + i')^{1/m}$

$(N/V)^m = 1 + i'$

$(N/V)^m - 1 = i$

$i = [(1000{,}00/945{,}00)^{(365/45)} - 1$

$i = 0{,}58225$

Relaciones entre tasas de descuentos y de interés

Enunciados

1. Dada una tasa del 20% nominal anual de descuento para operaciones a 30 días, determinar:
   - La tasa de interés proporcional
   - La tasa de interés nominal anual
   - La tasa efectiva anual
2. Dada una tasa de interés del 3,50% para operaciones a 30 días determinar:
   - La tasa de descuento para ese período:
   - La tasa de descuento nominal anual:
3. Dada una tasa de descuento del 2% para operaciones a 32 días determinar:
   - La tasa de interés para ese período:
   - La tasa de interés nominal anual:
   - La tasa efectiva anual:
4. Dada una tasa de interés del 25% nominal anual, determinar las equivalentes de descuento proporcional y nominal anual para operaciones a:
   - 15 días
   - 45 días
   - 90 días.
   - 155 días
5. Dada una tasa de descuento del 28% nominal anual determinar las equivalentes de interés proporcional, nominal anual y efectiva para operaciones a:
   - 30 días
   - 68 días
   - 99 días
   - 125 días

Resoluciones

PRIMERO

d =0,20 TNA Para operaciones a 30 días -
i = d/1 - d
Tasa de interés proporcional:
i/m = d/m / (1 - d/m)
i/m = [0,20 / (365/30)] / [1 - (0,20 / (365/30))]
i/m = 0,01644/0,98356
i/m = 0,01671Tasa de interés para operaciones a 30 días
Tasa nominal anual:
i/m = 0,01671
i = 0,01671 * (365/30)
i = 0,20331Tasa de interés nominal anual
Tasa efectivo anual:
I' = (1 + 0,01671) 365/30 - 1
i' = 0,22339 Tasa efectiva anual -

SEGUNDO

i =0,0350 Tasa para operaciones a 30 días –
d = i / (1 + i)
Tasa de descuento para 30 días:
d/m = i / (1 + i)
d/m = 0,035 / (1 + 0,035)
d/m = 0,0338 Tasa de descuento para operaciones a 30 días
Tasa de descuento nominal anual:
d/m =0,0338
d =0,0338 * m
d =0,0338 * (365/30)
d =0,41123 Tasa de descuento para operaciones a 30 días

TERCERO

d =0,02 TN - Para operaciones a 32 días -
i = d/1 - d
Tasa de interés proporcional:
i/m = d/m / (1 - d/m)
i/m = 0,02 / (1 - 0,02)
i/m = 0,02041 Tasa de interés para operaciones a 32 días -
Tasa nominal anual:
i/m = 0,02041
i = 0,02041 * (365/32)
i = 0,23280 Tasa de interés nominal anual
Tasa efectivo anual:
i' = (1 + 0,02041) 365/32 - 1
i' = 0,25918 - Tasa efectiva anual

CUARTO

i = 0,25 TNA

d = i / (1 + i)

Días	Tasa Periódica	Tasa Nominal Anual
15	0,10107	0,24746
45	0,02990	0,24252
90	0,05806	0,23548
155	0,09598	0,22601

QUINTO

d = 0,28 TNA

i = d / (1 – d)

Días	Tasa Periódica	Tasa nominal anual	Tasa efectiva anual
30	0,02356	0,28660	0,32747
68	0,05504	0,29541	0,33318
99	0,08219	0,30301	0,33804
125	0,10606	0,30970	0,34225

Rentas

Enunciados

1. Dada una serie de 7 pagos, con vencimiento cada 30 días, iguales de $1.000,00 y operando a una tasa del 2% periódica, calcular:

   1.1 Su valor actual

      1.1.1 Considerándolos de pago vencido

      1.1.2. Considerándolos de pago adelantado

   1.2. Su valor final

      1.2.1. Considerándolos de pago vencido.

      1.2.2. Considerándolos de pago adelantado.

   1.3. Verificar los importes de 1 partiendo de 2.

2. Dada una serie de 7 pagos, con vencimiento cada 30 días, iguales de $1.000,00 y operando a una tasa del 2% periódica, calcular:

   2.1. Siendo de pago adelantado:

      2.1.1. Su valor si de anticipa por 5 períodos.

      2.1.2. Su valor si se difiere por 4 períodos.

   2.2. Siendo de pago vencido:

      2.2.1. Su valor si de anticipa por 5 períodos.

      2.2.2. Su valor si se difiere por 4 períodos.

3. Una persona quisiera arrendar un campo por 3 años con pagos trimestrales adelantados de $ 3.500,00 cada uno. El día 01 de marzo se presenta ante la inmobiliaria y lo ofrece diciendo su voluntad pero quién resulte interesado deberá esperar un año a partir de ahora pues actualmente está ocupado. Luego el propietario da un poder al corredor para que actúe diciéndole que él se va del país por 4 años y que maneje a su buen criterio la locación

   Transcurridos 3 meses el apoderado ha recibido una propuesta de una persona que hoy le pagaría al contado la suma de $ 36.500,00 por todo el período y que la tasa de interés del Banco de la Nación para colocaciones a 90 días es el 2,25%.

   Si se analiza la operación solo desde el punto de vista financiero: cuál es la respuesta lógica?

4. Una persona quiere alquilar una casa que cuyo valor locativo es de $ 500,00 mensuales, adelantados, por cuatro años y de pago mensual. Ante su interés y posibilidades hace el siguiente ofrecimiento: iniciar la locación a partir de este momento y realizar un solo pago a los 14 meses de $ 21.500,00. Operando con una tasa del 1,25% mensual calcular si es conveniente para el propietario.

Resoluciones

PRIMERO

Determinación del valor actual

	Cuota	Cantidad	Tasa	a_0	$a_0\ (1 + i)$	V_0
Vencido	$ 1.000,00	7	0,02	6,47199		$ 6.471,99
Adelantado	$ 1.000,00	7	0,02		6,60143	$ 6.601,43

Cuadro de marcha

Cuota	Importe	V_0	Neto total
1	$ 1.000,00	$ 980,39	$ 980,39
2	$ 1.000,00	$ 961,17	$ 1.941,56
3	$ 1.000,00	$ 942,32	$ 2.883,88
4	$ 1.000,00	$ 923,85	$ 3.807,73
5	$ 1.000,00	$ 905,73	$ 4.713,46
6	$ 1.000,00	$ 887,97	$ 5.601,43
7	$ 1.000,00	$ 870,56	$ 6.471,99

Cuota	Importe	V_0	Neto total
1	$ 1.000,00	$ 1.000,00	$ 1.000,00
2	$ 1.000,00	$ 980,39	$ 1.980,39
3	$ 1.000,00	$ 961,17	$ 2.941,56
4	$ 1.000,00	$ 942,32	$ 3.883,88
5	$ 1.000,00	$ 923,85	$ 4.807,73
6	$ 1.000,00	$ 905,73	$ 5.713,46
7	$ 1.000,00	$ 887,97	$ 6.601,43

Determinación del valor final

	Cuota	Cantidad	Tasa	a_0	$a_0\ (1 + i)$
Vencido	$ 1.000,00	7	0,02	7,43428	
Adelantado	$ 1.000,00	7	0,02		7,58297

Cuadros de marcha

Cuota	Importe	Sujeto a interés	Interés	Monto del período	Valor de la renta al fin
1	$ 1.000,00				$ 1.000,00
2	$ 1.000,00	$ 1.000,00	$ 20,00	$ 1.020,00	$ 2.020,00
3	$ 1.000,00	$ 2.020,00	$ 40,40	$ 2.060,40	$ 3.060,40
4	$ 1.000,00	$ 3.060,40	$ 61,21	$ 3.121,61	$ 4.121,61
5	$ 1.000,00	$ 4.121,61	$ 82,43	$ 4.204,04	$ 5.204,04
6	$ 1.000,00	$ 5.204,04	$ 104,08	$ 5.308,12	$ 6.308,12
7	$ 1.000,00	$ 6.308,12	$ 126,16	$ 6.434,28	$ 7.434,28

Cuota adelantada	Importe	Sujeto a interés	Interés	Monto del periodo	Monto acumulado
1	$ 1.000,00	$ 1.000,00	$ 20,00	$ 1.020,00	$ 1.020,00
2	$ 1.000,00	$ 2.020,00	$ 40,40	$ 2.060,40	$ 2.060,40
3	$ 1.000,00	$ 3.060,40	$ 61,21	$ 3.121,61	$ 3.121,61
4	$ 1.000,00	$ 4.121,61	$ 82,43	$ 4.204,04	$ 4.204,04
5	$ 1.000,00	$ 5.204,04	$ 104,08	$ 5.308,12	$ 5.308,12
6	$ 1.000,00	$ 6.308,12	$ 126,16	$ 6.434,28	$ 6.434,28
7	$ 1.000,00	$ 7.434,28	$ 148,69	$ 7.582,97	$ 7.582,97

Verficación	A	B	C	D	E = A * D
	V_n	Periodos	Tasa	(1 + i) - n	V_0
Vencida	7.434,28	7	0,02	0,87	6.471,99
Adelanto	7.582,97	7	0,02	0,87	6.601,43

SEGUNDO

Renta adelantada

Determinación del valor de la renta en el Época Inicial:

Datos:

Cuota: $ 1.000,00

Periodos: 7

Tasa: 0,02

Valor actual de una renta periódica unitaria: $a_0 (1 + i) = 6{,}60143$

Valor actual de la renta: $ 6.601,43

Determinación del valor de la renta en la Epoca de Valuación:

Caso de una renta anticipada por 5 períodos:

$$\text{Factor de capitalización: } (1 + 0{,}02)^5 = 1{,}10408$$

Valor de la renta:

$$a_0 (1 + i) (1 + i)^n$$

$$6.601{,}43 * 1{,}02^5 = 7.288{,}51$$

Caso de una renta diferida por 4 períodos:

Factor de capitalización: $(1 + 0{,}02)^{-4} = 0{,}92385$

Valor de la renta:

$$a_0 (1 + i) (1 + i)^{-n}$$

$$6.601{,}43 * 1{,}02^{-4} = 6.098{,}70$$

TERCERO

Una primera forma de analizar es determinar el valor de la renta en la EV y comparar el pago a realizar en ese momento

Determinación del valor de la renta a la Epoca Inicial:

Cuota: $ 3.500,00

Cantidad de cuotas: 12

Tasa de interés: 0,0225

Valor unitario de la cuota:

$$a_0 (1 + i) = 10,64911$$

Valor de la renta:

$$\alpha\ a_0 (1 + i) = 37.271,89$$

Determinación del valor de la renta a la Época de Valuación:

Diferimiento: 3 períodos

Factor de actualización:

$$(1 + i)^{-n} = (1 + 0,0225)^{-3} = 0,93543$$

Valor de la renta:

$$\alpha\ a_0 (1 + i)\ (1 + i)^{-n} = 37.271,89 * 0,93543 = 34.865,14$$

Otra forma de analizar la conveniencia o no es determinar el valor de la renta a la EI y luego capitalizar el pago a realizarse a ese momento:

Pago: $ 36.500,00

Tasa: 0,0225

Períodos: 3

$$\text{Monto: } c\ (1 + i)^{n} = 36.500,00\ (1 + 0,0225)^{3} = \$\ 39.019,60$$

Por todo lo visto si le conviene cobrar hoy los $ 36.500,00

CUARTO

Cuotas: $ 500,00

Tasa mensual: 0,0125

Pagos: 48 mensualidades

Lapso del diferimiento: 14 meses

Valor actual al inicio: 18.190,31

Factor de capitalización: 1,18995

Valor a los 14 meses: $ 21.645,65

Conclusión: no le conviene aceptar hoy los $ 21.500,00

Sistemas de amortización

Enunciados

1. Cuál será la cuota necesaria para cancelar en cinco pagos iguales, mensuales y consecutivos una deuda de $ 12.000,00 utilizando una tasa del 1,50% mensual sobre saldos. Intereses vencidos. Calcular la cuota y realizar el cuadro de marcha de la operación.
2. Cuál será la cantidad de dinero que podemos tomar como crédito de manera tal que sea cancelado mediante 4 pagos iguales, mensuales y consecutivos de $ 1.250,00. Si abonamos intereses vencidos a una tasa del 1,75% mensual sobre saldos. Realizar el cuadro de marcha.
3. Cuál será la cuota necesaria para cancelar en cinco pagos iguales, mensuales y consecutivos una deuda de $ 10.000,00, utilizando una tasa del 1,25% mensual sobre saldos. Intereses adelantado. Calcular la cuota y realizar el cuadro de marcha de la operación.
4. Cuál será la cantidad de dinero que podemos tomar como crédito de manera tal que sea cancelado mediante 3 pagos iguales, mensuales y consecutivos de $ 2.500,00. Si abonamos intereses vencidos a una tasa del 1,75% mensual sobre saldos. Realizar el cuadro de marcha.
5. Para cancelar una deuda de $ 10.000,00, se acuerda pagar durante 5 meses intereses a fin de cada mes a una tasa del 2% y al fin del período abonar el capital total. Asimismo se decide realizar una imposición vencida mensual al 1,75% de manera tal que al fin del período el valor acumulado sea igual a la deuda. Calcular la cuota necesaria y realizar el cuadro de marcha.
6. Cuál será la cuota necesaria, en cada pago, para cancelar en cinco cuotas mensuales y consecutivas una deuda de $ 12.000,00, utilizando una tasa del 1,50% mensual sobre saldos. Intereses vencidos. La cuota de capital es constante y los intereses sobre saldos.
7. Por la compra de un equipo de computación se deben abonar cinco cuotas iguales, mensuales y consecutivas de $ 4.000,00 cada una, utilizando una tasa mensual del 3,50%, calcular:
   a) Valor del bien al momento de la compra.
   b) Total de intereses incluidos en la cuarta cuota.
   c) Saldo de deuda luego de abonar la segunda cuota.
   d) Total amortizado luego de la tercera cuota.
   e) Confeccionar el cuadro de marcha.

Resoluciones

PRIMERO

$\alpha = V_0\, a_n^{-1}$

$\alpha = 509{,}07$

n	Cuota	I	C	E	R
0					12.000,00
1	2.509,07	180,00	2.329,07	2.329,07	9.670,93
2	2.509,07	145,06	2.364,01	4.693,08	7.306,92
3	2.509,07	109,60	2.399,47	7.092,54	4.907,46
4	2.509,07	73,61	2.435,46	9.528,00	2.472,00
5	2.509,07	37,08	2.471,99	11.999,99	0,01

SEGUNDO

$V_0 = a\, a_n$

$V_0 = 4.788{,}68$

n	Cuota	I	C	E	R
0					4.788,68
1	1.250,00	83,80	1.166,20	1.166,20	3.622,48
2	1.250,00	63,39	1.186,61	2.352,80	2.435,88
3	1.250,00	42,63	1.207,37	3.560,18	1.228,50
4	1.250,00	21,50	1.228,50	4.788,68	0,00

TERCERO

$\alpha = V\, i / [1 - (1 - i)^n]$

$\alpha = 2.547{,}36$

n	Cuota	I	C	E	R
0		125,00			10.000,00
1	2.547,36	94,34	2.453,02	2.453,02	7.546,95
2	2.547,36	63,29	2.484,07	4.937,10	5.062,88
3	2.547,36	31,84	2.515,52	7.452,62	2.547,36
4	2.547,36		2.547,36	10.000,00	

CUARTO

$V_0 = \alpha\, [1 - (1 - i)^n] / i$

$V_0 = 9.740{,}55$

n	Cuota	I	C	E	R
0		128,97			7.369,51
1	2.500,00	86,73	2.413,27	2.413,27	4.956,25
2	2.500,00	43,75	2.456,25	4.869,52	2.500,00
3	2.500,00		2.500,00	7.369,52	

QUINTO

$\alpha = V [i + S_n^{-1}{}_{i'}]$

$\alpha = 2.131,21$

n	cuota	Interés a pagar	Neto a ahorrar	Interés del periodo	Total del periodo	Total acumulado
1	2.131,21	200,00	1.931,21		1.931,21	1.931,21
2	2.131,21	200,00	1.931,21	33,80	1.965,01	3.896,22
3	2.131,21	200,00	1.931,21	68,18	1.999,39	5.895,61
4	2.131,21	200,00	1.931,21	103,17	2.034,38	7.929,99
5	2.131,21	200,00	1.931,21	138,77	2.069,98	9.999,98

SEXTO

Deuda: 12.000,00

Cuotas: 5

Interés: 1,50%

Importe del capital: 2.400,00

n	Capital	Interés	Cuota total	Total amortizado	Saldo de deuda
0					12.000,00
1	2.400,00	180,00	2.580,00	2.400,00	9.600,00
2	2.400,00	144,00	2.544,00	4.800,00	7.200,00
3	2.400,00	108,00	2.508,00	7.200,00	4.800,00
4	2.400,00	72,00	2.472,00	9.600,00	2.400,00
5	2.400,00	36,00	2.436,00	12.000,00	

SÉPTIMO

$V_0 = \alpha\ a_n$

$n = 5$

$i = 3,50\%$

a) $V_0 = 18.060,20$

n	Cuota	I	C	E	R
0					18.060,20
1	4.000,00	632,11	3.367,89	3.367,89	14.692,31
2	4.000,00	514,23	3.485,77	6.853,66	11.206,54
3	4.000,00	392,23	3.607,77	10.461,43	7.598,77
4	4.000,00	265,96	3.734,04	14.195,48	3.864,72
5	4.000,00	135,27	3.864,73	18.060,21	-0,01

b) Total de intereses en la cuarta cuota

$i_4 = \alpha\ a_{n-(k-1)} * i$

$i_4 = [4.000,00 * (1 - (1 + 0,035) - 2) / 0,035] * 0,035$

$i_4 = \$\ 265,96$

c) Saldo de deuda luego de abonar la segunda cuota

$R_2 = \alpha\ a_{n-k}$

R_2 = [4.000,00 * (1 - (1 + 0,035) - 3) / 0,035]

R_3 = $ 11.206,55

d) Total amortizado luego de la tercera cuota

$E_3 = V_o - R\ k$

$E_3 = V_o - \alpha a_{n-k}$

E_3 = 18.060,20 - [4.000,00 * (1 - (1 + 0,035) - 2) / 0,035]

E_3 = $ 10.461,42

Sistemas de amortización. Casos especiales

Enunciados

1. Si un préstamo de $ 50.000,00 puede ser cancelado en 5 cuotas mensuales, con una tasa del 2,5% mensual de interés y al momento de abonar la tercera cuota se realiza un pago adicional de $ 10.000,00. Determinar:
   a. La cuota que cancela el préstamo.
   b. Manteniendo la misma cuota pactada se pregunta: en qué tiempo se cancela el préstamo y cuál es el valor de la última cuota.
   c. La nueva cuota que cancela el préstamo a partir del pago adicional manteniendo constante la cantidad de cuotas.
   d. Realizar los cuadros de marcha para ambos casos.
2. Dados los siguientes pagarés:

Importe	Vencimiento
$ 10.000,00	30 días
$ 7.500,00	45 días
$ 8.000,00	93 días

y considerando una tasa del 2,50% para cada 30 días determinar cuál es el importe del crédito al que podemos acceder.

Confeccionar el cuadro de marcha.

3. Si se ha tomado un crédito de $ 12.000,00 a pagar en 5 cuotas mediante el sistema francés, calcular las cuotas que lo cancelan si las tasas de interés varían según el siguiente detalle:

Mes	Tasa
1	1,50%
2	1,75%
3	2,00%
4	1,50%
5	1,85%

Confeccionar el cuadro de marcha.

4. Para cancelar una deuda de $ 12.500,00 optamos por hacerlo en cinco (5) meses con pagos asincrónicos al vencimiento del segundo, tercer y quinto mes operando a una tasa del 3% mensual vencida. Determinar el importe de cada una de las cuotas que cancelan dicho préstamo y confeccionar el cuadro de marcha.
5. Dado un préstamo hipotecario de $ 100.000,00 a un interés del 2% mesual pagadero en 3 cuotas mensuales vencidas y considerando que: a) se debe abonar el IVA a una tasa del 21%, b) los

gastos de constitución de la hipoteca son del 5% y c) estamos obligados a abrir una cuenta corriente bancaria cuyo costo es de $ 10,00 mensuales; determinar:

a) La cuota que cancela el préstamo.

b) Realizar el cuadro de marcho del préstamo.

c) Determinar el costo efectivo del crédito.

Resoluciones

PRIMERO

Préstamo: $ 50.000,00

Cuotas: 5

Tasa: 2,50%

Pago adicional: $ 10.000 al momento de pagar la tercer cuota

a) Cuota inicial**:** a = $\mathbf{V_o\, a_n^{-1}}$ = $ 10.762,34

b) Resto al fin de la tercer cuota

$V_o = a\, \mathbf{a}_n$	$ 20.743,61
Pago adicional	$ 10.000,00
Saldo	$ 10.743,61
Interés	$ 268,59
Deuda	$ 11.012,20
Cuota	$ 10.762,34
Saldo	$ 249,86
Interés	$ 6,25
Ultima cuota	$ 256,11

c) La cuota que cancela el préstamo en los meses restantes

Deuda al tercer pago = $ 10.743,61

a = $V_o\, \mathbf{a}_n^{-1}$ $ 5.574,07

Cuadro de marcha

Cuota	Total	Interés	Capital	Capital Acumulado	Saldo
0					$ 50.000,00
1	$10.762,34	$ 1.250,00	$ 9.512,34	$ 9.512,34	$ 40.487,66
2	$10.762,34	$ 1.012,19	$ 9.750,15	$ 19.262,49	$ 30.737,51
3	$10.762,34	$ 768,44	$ 9.993,90	$ 29.256,39	$ 20.743,61
4	$10.762,34	$ 518,59	$ 10.243,75	$ 39.500,14	$ 10.499,86
5	$10.762,34	$ 262,50	$ 10.499,84	$ 49.999,98	$ 0,02

Cuadro de marcha con pago adicional

Cuota	Total	Interés	Capital	Capital Acumulado	Saldo
0					$ 50.000,00
1	$10.762,34	$ 1.250,00	$ 9.512,34	$ 9.512,34	$ 40.487,66
2	$10.762,34	$ 1.012,19	$ 9.750,15	$ 19.262,49	$ 30.737,51
3	$10.762,34	$ 768,44	$ 9,90	$ 29.256,39	$ 20.743,61
Adic.	$ 10.000,00		$ 10.000,00	$ 39.256,39	$ 10.743,61
4	$10.762,34	$ 268,59	$ 10.493,75	$ 49.750,14	$ 249,86
5	$256,11	$ 6,25	$ 249,86	$ 50.000,00	$ 0,00

Cuadro de marcha con pago adicional y cuota modificada

Cuota	Total	Interés	Capital	Capital Acumulado	Saldo
0					$ 50.000,00
1	$10.762,34	$ 1.250,00	$ 9.512,34	$ 9.512,34	$ 40.487,66
2	$10.762,34	$ 1.012,19	$ 9.750,15	$ 19.262,49	$ 30.737,51
3	$10.762,34	$ 768,44	$ 9.993,90	$ 29.256,39	$ 20.743,61
Adic.	$ 10.000,00		$ 10.000,00	$ 39.256,39	$ 10.743,61
4	$ 5.574,07	$ 268,59	$ 5.305,48	$ 44.561,87	$ 5.438,13
5	$ 5.574,07	$ 135,95	$ 5.438,13	$ 50.000,00	$ 0,00

SEGUNDO

Determinación del valor actual de los pagarés

Tasa: 2,50%

Cuota	Importe	Vto.	Factor de actualización	Valor actual
1	$ 10.000,00	30	0,975609756	$ 9.756,10
2	$ 7.500,00	45	0,963638631	$ 7.227,29
3	$ 8.000,00	93	0,926309285	$ 7.410,47
				$ 24.393,86

Cuadro de marcha

Cuota	Total	Tasa equivalente	Interés	Capital	Saldo
0					$ 24.393,86
30	$ 10.000,00	2,500%	$ 609,85	$ 9.390,15	$ 15.003,71
45	$ 7.500,00	1,242%	$ 186,39	$ 7.313,61	$ 7.690,10
60		1,242%	$ 95,53	$ -95,53	$ 7.785,63
90		2,500%	$ 194,64	$ -194,64	$ 7.980,27
93	$ 8.000,00	0,247%	$ 19,73	$ 7.980,27	$ 0,00

TERCERO

$a = V_o\, \mathbf{a}_n^{-1}$ $ 2.509,07

Cuota	Total	Tasa de interés	Interés	Capital	Saldo
0					$ 12.000,00
5	$ 2.509,07	1,500%	$ 180,00	$ 2.329,07	$ 9.670,93
4	$ 2.524,43	1,750%	$ 169,24	$ 2.355,18	$ 7.315,74
3	$ 2.536,77	2,000%	$ 146,31	$ 2.390,45	$ 4.925,29
2	$ 2.518,19	1,500%	$ 73,88	$ 2.444,31	$ 2.480,98
1	$ 2.526,88	1,850%	$ 45,90	$ 2.480,98	$ 0,00

Para el caso de mantenerse la misma amortización de capital

Primero: determinar la composición de capital en la cuota de pago a tasa constante

Cuota	Total	Tasa de interés	Interés	Capital	Capital acumulado	Saldo
0						$ 12.000,00
5	$ 2.509,07	1,500%	$ 180,00	$ 2.329,07	$ 2.329,07	$ 9.670,93
4	$ 2.509,07	1,500%	$ 145,06	$ 2.364,01	$ 4.693,08	$ 7.306,92
3	$ 2.509,07	1,500%	$ 109,60	$ 2.399,47	$ 7.092,55	$ 4.907,45
2	$ 2.509,07	1,500%	$ 73,61	$ 2.435,46	$ 9.528,01	$ 2.471,99
1	$ 2.509,07	1,500%	$ 37,08	$ 2.471,99	$ 12.000,00	$ 0,00

Segundo: mantener la participación del capital en cada cuota

Cuota	Total	Tasa de interés	Interés	Capital	Capital acumulado	Saldo
0						$ 12.000,00
5	$ 2.509,07	1,500%	$ 180,00	$ 2.329,07	$ 2.329,07	$ 9.670,93
4	$ 2.533,25	1,750%	$ 169,24	$ 2.364,01	$ 4.693,08	$ 7.306,92
3	$ 2.545,61	2,000%	$ 146,14	$ 2.399,47	$ 7.092,55	$ 4.907,45
2	$ 2.509,07	1,500%	$ 73,61	$ 2.435,46	$ 9.528,01	$ 2.471,99
1	$ 2.517,72	1,850%	$ 45,73	$ 2.471,99	$ 12.000,00	$ 0,00

Para el caso que la participación del capital sea igual en cada cuota:

Cuota	Total	Tasa de interés	Interés	Capital	Capital acumulado	Saldo
0						$ 12.000,00
5	$ 2.580,00	1,500%	$ 180,00	$ 2.400,00	$ 2.400,00	$ 9.600,00
4	$ 2.568,00	1,750%	$ 168,00	$ 2.400,00	$ 4.800,00	$ 7.200,00
3	$ 2.544,00	2,000%	$ 144,00	$ 2.400,00	$ 7.200,00	$ 4.800,00
2	$ 2.472,00	1,500%	$ 72,00	$ 2.400,00	$ 9.600,00	$ 2.400,00
1	$ 2.444,40	1,850%	$ 44,00	$ 2.400,00	$ 12.000,00	$ 0,00

CUARTO

Interés = 0,03

$V_o = a\,[(1 + i)^{-n1} + (1 + i)^{-n2} + (1 + i)^{-n2}]$

$a = V_o / [(1 + i)^{-n1} + (1 + i)^{-n2} + (1 + i)^{-n2}]$

$a = 12.500,00 / [(1 + 0,03)^{-2} + (1 + 0,03)^{-3} + (1 + 0,03)^{-5}]$

$a = 12,500,00 / [0,94260 + 0,91514 + 0,86261]$

$a = \$\ 4.595,00$

n	Total	Interés	Capital	Saldo
0				$ 12.500,00
1		$ 375,00	$ -375,00	$ 12.875,00
2	$ 4.595,00	$ 386,25	$ 4.208,75	$ 8.666,25
3	$ 4.595,00	$ 259,99	$ 4.335,01	$ 4.331,24
4		$ 129,94	$ -129,94	$ 4.461,17
5	$ 4.595,00	$ 133.84	$ 4.461,16	$ 0,01

QUINTO

$V_o = 100.000,00$

$i = 0,02$

IVA = 21,00%

$n = 3$

$\alpha = V_o\, \mathbf{a}_n^{-1}$

$\alpha = V_o\, [(i\, g\, (1 + ig)^n) / (1 + ig)^n - 1] =$

$\alpha = = 100.000,00\, [(0,02 * 1,21\, (1 + 0,02 * 1,21)^3) / (1 + 0,02 * 1,21)^3 - 1]$

$\alpha = \$\ 34.959,52$

n	Total	I	IVA	C	R
0					$ 100.000,00
1	$ 34.959,52	$ 2.000,00	$ 420,00	$ 32.539,52	$ 67.460,48
2	$ 34.959,52	$ 1.349,21	$ 283,33	$ 33.326,98	$ 34.133,50
3	$ 34.959,52	$ 682,67	$ 143,36	$ 34.133,49	$ 0,01

c) Importe: $ 100.000,00

Neto recibido: $ 95.000,00

Gastos : $ 5.000,00

Cuota total: Cancelación + gastos

Cuota total: $ 34.969,52

h = 0,050857094

i = 0,051295602

Interés directo

Notas

- Los ejercicios 1 y 2 son casos de interés cargado y cuota de pago vencido. Los ejercicios 3 y 4 están vinculados, respectivamente, con los anteriores pues con los mismos datos y siendo también de interés cargado la cuota es de pago adelantado. Analizar y comparar los resultados en los ejercicios vinculados.
- Los ejercicios 5 y 6 son casos de interés deducido. Ellos han sido planteados con los mismos datos, solo que la cuota es de pago vencido y adelantado respectivamente. Amén de lo dicho los datos se corresponden con los ejercicios 2 y 4. Analizar y comparar los resultados en los ejercicios vinculados.

Enunciados

1. Por la compra de una computadora que cuesta al contado $ 1.250,00 nos otorgan un crédito a pagar en cinco cuotas mensuales, iguales, consecutivas y vencida de $ 350,00. Determinar la tasa de interés directa implícita en la operación, luego la tasa mensual sobre saldos y su efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha de la operación.
2. Para abonar un automóvil que al contado cuesta $ 12.000,00 no es posible pagarlo en cuatro cuotas iguales, trimestrales, consecutivas y vencidas con más un interés directo del 7,50% trimestral. Calcular la cuota, la tasa de interés sobre saldos y su correspondiente efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha.
3. Por la compra de una computadora que al contado cuesta $ 1.250,00 nos otorgan un crédito a pagar en cinco cuotas mensuales, iguales, consecutivas y adelantadas de $ 350,00. Determinar la tasa de interés directa implícita en la operación, luego la tasa mensual sobre saldos y su efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha.
4. Para abonar un automóvil que cuesta al contado la suma de $ 12 000,00 nos es posible pagarlo en 4 cuotas iguales, trimestrales, consecutivas y adelantadas con más un interés directo del 7,50 % trimestral. Calcular la cuota, la tasa de interés sobre saldos y su correspondiente efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha.
5. Por un préstamo en efectivo de $ 12.000,00 nos facilitan pagarlo en cuatro cuotas iguales, trimestrales, consecutivas y vencidas con más un interés directo del 7,50% trimestral. Calcular la cuota, la tasa de interés sobre saldos y su correspondiente efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha.
6. Por un préstamo en efectivo de $ 12.000,00 nos facilitan pagarlo en cuatro cuotas iguales, trimestrales, consecutivas y adelantadas con más un interés directo del 7,50% trimestral. Calcular la cuota, la tasa de interés sobre saldos y su correspondiente efectiva anual. Realizar el cuadro de marcha.

Resoluciones

PRIMERO

Tasa sobre saldos:

$h=[(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$i = \dfrac{12 - (n - 1)\,h}{12 - 2\ \ n - 1)\,h}\ h$

$h = 0{,}11869$

$i = 0{,}12379$

Tasa efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0{,}12379)^{12} - 1$

$i' = 305{,}72\%$

Tasa directa:

$a = (C\ i\ n + C) / n$

$i = [(a\ n/C)- 1] / n$

$i = [(350 \times 5/1250) - 1] / 5 = 0{,}08$

Cuadro de marcha:

n	a	I	C	E	R
0					$ 1.250,00
1	$ 350,00	$ 154,74	$ 195,26	$ 195,26	$ 1.054,74
2	$ 350,00	$ 130,57	$ 219,43	$ 414,70	$ 835,30
3	$ 350,00	$ 103,40	$ 246,60	$ 661,29	$ 588,71
4	$ 350,00	$ 72,88	$ 277,12	$ 938,42	$ 311,58
5	$ 350,00	$ 38,57	$ 311,43	$ 1.249,85	$ 0,15

SEGUNDO

Determinación de la cuota:

$a = C\,(1 + i\ n) / n$

$a = [12.000{,}00\ (1 + 0{,}075 \times 4)] / 4$

$a = 3.900{,}00$

Determinación de la tasa sobre saldos:

$h = [(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$i = \dfrac{12 - (n - 1)\,h}{12 - 2\,(n - 1)\,h}\ h$

$h = 0{,}11065$

$i = 0{,}11388$

Determinación de la tasa efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0{,}11388)^4 - 1$

$i' = 53{,}94\%$

Cuadro de marcha:

n	a	I	C	E	R
0					$ 12.000,00
1	$ 3.900,00	$ 1.366,56	$ 2.533,44	$ 2.533,44	$ 9.466,56
2	$ 3.900,00	$ 1.078,05	$ 2.821,95	$ 5.355,39	$ 6.644,61
3	$ 3.900,00	$ 756,69	$ 3.143,31	$ 8.498,70	$ 3.501,30
4	$ 3.900,00	$ 398,73	$ 3.501,27	$ 11.999,97	$ 0,03

TERCERO

Costo: 1.250,00

Cuotas: 5 adelantadas

α: 350,00

A financiar: 1.250,00 - 350,00 = 900,00 en 4 cuotas de 350,00

Tasa directa:

$a = (C\ i\ n + C) / n$

$i = [(a\ n/C) - 1] / n$

$i = [(350 \times 5/1250) - 1] / 5 = 0,08$

Tasa de interés sobre saldos:

$h = [(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$$i = \frac{12 - (n - 1)\ h}{12 - 2\ (n - 1)\ h}$$

$h = 0,19331$

$i = 0,20355$

Tasa de interés efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0,20355)^{12} - 1$

$i' = 823,78\%$

Cuadro de marcha:

n	a	I	C	E	R
0					
1	$ 350,00	$ 183,20	$ 166,81	$ 166,81	$ 733,20
2	$ 350,00	$ 149,24	$ 200,76	$ 367,56	$ 532,44
3	$ 350,00	$ 108,38	$ 241,62	$ 609,19	$ 290,81
4	$ 350,00	$ 59,20	$ 290,80	$ 899,99	$ 0,01

CUARTO

Costo = 12.000,00

Cuotas = 4 adelantadas

i = 0,0750 directo

Determinacion de la cuota:

$\alpha = [C\ (1 + i\ n)] / n$

$\alpha = [12.000,00\ (1 + 0,075 \times 4)] / 4$

$\alpha = 900,00$

A financiar: 12.000,00 – 3.900,00 = 8.100,00 en 3 cuotas de $ 3.900,00

Determinacion de la tasa sobre saldos:

$h = [(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$i = \dfrac{12 - (n - 1)\, h}{12 - 2\,(n - 1)\, h}\ h$

h = 0,20185

i = 0,20907

Determinación de la tasa efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0{,}20907)^4 - 1$

i' = 113,70%

Cuadro de marcha:

n	a	I	C	E	R
0					$ 8.100,00
1	$ 3.900,00	$ 1.693,47	$ 2.206,53	$ 2.206,53	$ 5.893,47
2	$ 3.900,00	$ 1.232,15	$ 2.667,85	$ 4.874,39	$ 3.225,61
3	$ 3.900,00	$ 674,38	$ 3.225,62	$ 8.100,01	$ -0,01

QUINTO

Préstamo: 12.000,00

Interés: 12.000,00 * 0,075 * 4 = 3.600,00

Neto recibido: 8.400,00

Cuota: 12.000,00/4 = 3.000,00

Determinacion de la tasa sobre saldos:

$h = [(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$i = \dfrac{12 - (n - 1)\, h}{12 - 2\,(n - 1)\, h}\ h$

h = 0,15335

i = 0,15967

Determinacion de la tasa efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0{,}15967)^4 - 1$

i' = 0,80858

Cuadro de marcha:

n	a	I	C	E	R
0					$ 8.400,00
1	$ 3.000,00	$ 1.341,23	$ 1.658,77	$ 1.658,77	$ 6.741,23
2	$ 3.000,00	$ 1.076,37	$ 1.923,63	$ 3.582,40	$ 4.817,60
3	$ 3.000,00	$ 769,23	$ 2.230,77	$ 5.813,17	$ 2.586,83
4	$ 3.000,00	$ 413,04	$ 2.586,96	$ 8.400,00	$ -0,14

SEXTO

Préstamo: $ 12.000,00

Interés: 12.000,00 * 0,075 * 4 = 3.600,00

Neto recibido: 8.400,00

Cuota: 12.000/4 = 3.000,00

A financiar: 8.400,00 – 3.000,00 = 5.400,00

En 3 cuotas de 3.000,00

Determinación de la tasa sobre saldos:

$h = [(a \times n)/V]^{2/(n+1)} - 1$

$i = \dfrac{12 - (n - 1)\,h}{12 - 2\,(n - 1)\,h}\ h$

$h = 0{,}29099$

$i = 0{,}30636$

Determinación de la tasa efectiva anual:

$i' = (1 + i)^m - 1$

$i' = (1 + 0{,}30636)^4 - 1$

$i' = 1{,}91240$

Cuadro de marcha:

n	**a**	**I**	**C**	**E**	**R**
0					$ 5.400,00
1	$ 3.000,00	$ 1.654,34	$ 1.345,66	$ 1.345,66	$ 4.054,34
2	$ 3.000,00	$ 1.242,09	$ 1.757,91	$ 3.103,57	$ 2.296,43
3	$ 3.000,00	$ 703,54	$ 2.296,46	$ 5.400,03	$ -0,03

Interés con y sin capitalización. Trabajos comunes

Enunciados

1. Cuál es el interés simple producido por un capital de $ 100,00 colocados a 10 años de plazo a una tasa anual del 10%.
2. Cuál es el interés simple producido por un capital de $ 100,00 colocado a 10 meses de plazo a una tasa anual del 10%.
3. Cuál es el interés simple producido por un capital de $ 175,00 colocado a 45 meses de plazo a una tasa mensual del 7%.
4. Cuál es el interés simple producido por un capital de $ 150,00 colocado a 36 meses de plazo a una tasa mensual del 7%.
5. Cuál es el monto simple producido por un capital de $ 1.500,00 colocado a 14 años de plazo a una tasa anual del 7%.
6. Cuál es el monto simple producido por un capital de $ 1.000,00 colocado a 16 años de plazo a una tasa del 2% mensual.
7. Cuál es el monto simple producido por un capital de $ 1.720,00 colocado a 50 meses a una tasa del 14% anual.
8. Qué tiempo estuvo colocado un capital de $ 100,00 para que a una tasa del 12% anual se convirtiera en un monto de $ 130,00
9. A una tasa del 20% anual cuanto tiempo debe transcurrir para generar un monto igual al doble del capital inicial.
10. A que tasa de interés estuvo colocado un capital de $ 1.740,00 durante 10 años de manera tal que formara un monto de $ 2.350,00.
11. A que tasa de interés tiene que estar colocado un capital de manera tal que al cabo de 7 años se conforme un monto igual a una vez y media el capital inicial.
12. A que tasa de interés simple tiene que estar colocado un capital de manera tal que al cabo de un año tenga el mismo rendimiento que un capital colocado al 3% mensual con capitalización mensual.
13. Se tiene un capital de $ 10000,00 y otro de $ 20000,00 que se colocan en distintos lugares. El primer capital colocado a interés simple gana el 25% anual permaneciendo durante 6 meses. Se pregunta a que tasa nominal anual tiene que estar colocado el segundo capital, a interés compuesto, con capitalización mensual, de manera tal que en el mismo plazo en conjunto se obtenga un monto de $ 40500,00.
14. Se tiene un capital de $ 10000,00 y otro de $ 20000,00 que se colocan en distintos lugares. El primer capital colocado a interés compuesto, con capitalización mensual, gana el 25% nominal anual permaneciendo durante 6 meses. Se pregunta a que tasa nominal anual tiene que estar

colocado el segundo capital de manera tal que, en el mismo plazo y bajo el mismo régimen de capitalización, en conjunto se obtenga un monto de $ 40500,00.

15. A que tasa de interés nominal anual con capitalización mensual estuvo colocado un capital de $ 5.000,00 durante 3 años de manera tal que se formara un monto de $ 7.698,00.
16. A que tasa proporcional de interés compuesto con capitalización bimestral estuvo colocado un capital de $ 5.000,00 durante 3 años de manera tal que ganara un interés de $ 2.698,00.
17. Cuantos meses estuvo colocado un capital de $ 1.000,00 a una tasa nominal del 12% anual, con capitalización mensual, de manera tal que se formara un monto de $ 2.350,00.
18. Cuantos años estuvo colocado un capital de $ 1.000,00 a una tasa del 12% nominal anual, con capitalización mensual, de manera tal que ganara un interés de $ 1.350,00.

Resoluciones

PRIMERO

Capital: $ 100,00
Plazo: 10 años
TNA: 10%
I = C i n
I = 100 * 0,10 * 10 = $ 100,00

SEGUNDO

Capital: $ 100,00
Plazo: 10 meses
TNA: 10%
I = C i n/12
I = 100 * 0,10 * 10/12 = $ 8,33

TERCERO

Capital: $ 175,00
Plazo: 45 meses
TNM: 7%
I = C i n
I = 175 * 0,07 * 45 = $ 551,25

CUARTO

Capital: $ 150,00
Plazo: $ 36,00 meses
TNM: 7%
I = C i n
I = 150 * 0,07 * 36 = $ 378,00

QUINTO

Capital: $ 1.500,00
Plazo: 14,00 años
TNM: 12%
M = C (1 + i n)
M = 1.500,00 * (1 + 0,07 * 14) = $ 2.970,00

SEXTO

Capital: $ 1.000,00
Plazo: 16 años
TNM: 2% mensual
M = C (1 + i n)
M = 1.000,00 * (1 + 0,02 * 16 * 12) = 4.840,00

SÉPTIMO

Capital: $ 1.720,00
Plazo: 50 meses

TNA: 14%

M = C (1 + i n)

M = 1.720,00 * (1 + 0,14 * 50/12) = $ 2.723,33

OCTAVO

Capital: $ 100,00

Monto: $ 130,00

TNA: 12%

M = C (1 + i n)

n = ((M/C) -1) / i

n = ((130/100) - 1) / 0,12 = 2,50 años

NOVENO

Capital: $ 1,00

Monto: $ 2,00

TNA: 20%

M = C (1 + i n)

n = ((M/C) - 1) / i

n = ((2/1) - 1) / 0,2 = 5 años

DÉCIMO

Capital: $ 1.740,00

Monto: $ 2.350,00

n = 10 años

M = C (1 + i n)

i = ((M/C) - 1) / n

i = ((2.350,00/1.740,00) - 1) / 10 = 3,50575%

UNDÉCIMO

Capital: $ 1,00

Monto: $ 1,50

n = 7 años

M = C (1 + i n)

i = ((M/C) - 1) / n

i = ((1,5/1) - 1) / 7 = 7,14286%

DUODÉCIMO

Capital = $ 1,00

m = 12

Capitalizacion = anual

n = 1 año

$C\ i\ n = C\ (1 + i/_{m})^{m\ n}$

$i = (1 + 0{,}03)^{12}$

i = 1,42576

r = 142,57%

DECIMOTERCERO

C_1 = $ 1.000,00

TNA = 25%

Capitalizacion = Interés simple

n = 6 meses

C_2= $ 2.000,00

Capitalizacion = mensual

n = 6 meses

$M_1 + M_2$ = $ 4.500,00

$M_1 = C (1 + i n) =1.000,00 (1 + 0,25 * 1/2) =$

M_1 = $ 1.125,00

$M_2 = C (1 + i/_m)^{m\,n} = 2.000,00 (1 + i /_{12})^{12 * 1/2}$

$4.500,00 = 1.125,00 + 2.000,00 (1 + i/_{12})^6$

$3.375,00 = 2.000,00 * (1 + i/_{12})^6$

$i = (1,678^{1/6} - 1) 12$

i = 1,093480

r = 109,348%

DECIMOCUARTO

C_1 = $ 1.000,00

TNA = 25%

Capitalizacion = mensual

Plazo = 6 meses

C_2= $ 2.000,00

Capitalizacion = mensual

n = 6 meses

TNA = ?

$M_1 + M_2$ = $ 4.500,00

$M_1 = C (1 + i/_m)^{m\,n} = 1000 (1 + 0,25/_{12})^{12 * 1/2}$

M_1 = $ 1.131,69

$M_2 = 4.500,00 – 1.131,69$

$M_2 = C (1 + i/_m)^{m\,n} = 2.000,00 (1 + i /_{12})^{12 * 1/2}$

M_2 = $ 3.368,31

$i = [(3368,31/2000,00)^{1/6} - 1] 12$

i = 1,08915

r = 108,92%

DECIMOQUINTO

Capital = $ 5.000,00

Capitalizacion = mensual

n = 3 años

Monto = $ 7.698,00

$I = C [(1 + i/_m)^{m\,n} - 1]$

$i = [(M/C)^{1/m\,n} - 1] m$

$i = [(7.698,00/5.000,00)^{1 / (12 * 3)} - 1] 12$

i = 0,144710

r = 14,47%

DECIMOSEXTO

Capital = $ 5.000,00

Capitalizacion = bimestral

n = 3 años

Interés = $ 2.698,00

$I = C [(1 + i/_{m})^{m\,n} - 1]$

$i = [(M/C)^{1 / m\,n} - 1]\ m$

$i = [(7.698,00/5.000,00)^{1 /18} - 1]\ 6$

i = 0,145580

r = 14,55%

DECIMOSÉPTIMO

Capital = $ 1.000,00

TNA = 12%

Capitalizacion = mensual

Monto = $ 2.350,00

$M = C (1 + i/_{m})^{m\,n}$

$M / C = (1 + i/_{m})^{m\,n}$

$n * m = \log (M/C)/ \log (1 + i/_{m})$

n * m = 0,85442/0,00995

n * m = 85,87 meses

DECIMOCTAVO

Capital = $ 1.000,00

TNA = 12%

Capitalización = mensual

Interés = $ 1.350,00

$I = C [(1 + i/_{m})^{m\,n} - 1]$

$(I/C) + 1= (1 + i/_{m})^{m\,n}$

$n = [\log (M/C)/\log (1 + i/_{m})] / 12$

n = (0,85442/0,00995) / 12

n = 7,1559 años

Cambios en las condiciones pactadas de financiación

Enunciados

Nota preliminar: en todos los casos operar con una tasa anual del 10%.

1. Una persona tiene el siguiente pasivo:

   - A 30 días $ 10.000,00.
   - A 45 días $ 15.000,00.
   - A 120 días $ 18.000,00.

   No puede cumplir en esa forma y propone pagar en un solo pago a 365 días.

   Calcular el Valor nominal de la nueva obligación utilizando los tres tipos de descuentos: comercial, racional y compuesto.

2. Una persona tiene el siguiente pasivo:

   - A 30 días $ 10.000,00.
   - A 45 días $ 15.000,00.
   - A 120 días $ 18.000,00.

   No puede cumplir en esa forma y propone pagar a los 365 días $ 20.000,00 y a 730 días el saldo.

   Calcular el Valor nominal de la nueva obligación utilizando los tres tipos de descuentos: comercial, racional y compuesto. Tasa de interés 10% anual.

3. Una persona tiene el siguiente pasivo:

   - A 30 días $ 10.000,00.
   - A 45 días $ 15.000,00.
   - Vencido hace 40 días $ 20.000,00.

   No puede cumplir en esa forma y solicita sean analizadas las siguientes alternativas:

   - Un solo pago a 365 días.
   - Un pago de $ 15.000,00 a 365 días y el saldo a 730 días.
   - Hoy pagar $ 20.000,00 y el saldo a 365 días.

   Calcular para cada caso el Valor nominal de la nueva obligación utilizando los tres tipos de descuentos: comercial, racional y compuesto.

4. Una persona tiene las siguiente situación financiera:

   Debe:

   - A 30 días $ 10.000,00.

- A 45 días $ 15.000,00.
- A 120 días $ 18.000,00.

A cobrar

- A 150 días $ 45.000,00

Pregunta:

- Si con esa suma en esa fecha cancela su pasivo.
- En caso que así no fuera: cuál es la diferencia.
- Calcular utilizando los tres tipos de descuentos: Comercial, Racional y Compuesto.

5. Una persona tiene las siguiente situación financiera:

   Debe:

   - A 30 días $ 10.000,00.
   - A 45 días $ 15.000,00.
   - A 120 días $ 18.000,00.

   Quiere conocer en qué fecha debe pagar su deuda si la unifica en alguna de las siguientes sumas alternativas:

   - $ 40.000,00.
   - $ 50.000,00.
   - $ 60.000,00.

   Calcular utilizando los tres tipos de descuentos: Comercial, Racional y Compuesto.

6. Una persona tiene la siguiente situación financiera:

   Debe:

   - A 40 días $ 10.000,00.
   - A 60 días $ 20.000,00.
   - A 180 días $ 50.000,00.

   A cobrar:

   - Hoy $ 5.000,00.
   - A 30 días $ 10.000,00.
   - A 75 días $ 15.000,00.

   Pregunta:

   - ¿Es posible canjear directamente?
   - Si no fuera posible:

- ¿Cuál es la diferencia a pagar o cobrar hoy?
- ¿Cuál sería la diferencia a 120 días?
- ¿Cuándo la diferencia sería de $ 55.000,00?
- ¿Cuándo la diferencia sería de $ 40.000,00?

Realizar los cálculos utilizando los tres tipos de descuentos.

Resoluciones

PRIMERO

Con D 1

N	n	N i n	N - N i n	Pago a 365 días
$ 10.000,00	30	$ 82,19	$ 9.917,81	
$ 15.000,00	45	$ 184,93	$ 14.815,07	
$ 18.000,00	120	$ 591,78	$ 17.408,22	
$ 43.000,00		$ 858,90	$ 42.141,10	$ 46.823,44

Con D 2

N	n	1 + i n	N / (1 + i n)	Pago a 365 días
$ 10.000,00	30	1,008219	$ 9.918,48	
$ 15.000,00	45	1,012329	$ 14.817,32	
$ 18.000,00	120	1,032877	$ 17.427,06	
$ 43.000,00			$ 42.162,85	$ 46.379,14

Con D 3

N	n	$(1 + i)^n$	N / (1 + i)^n)	Pago a 365 días
$ 10.000,00	30	1,007864	$ 9.921,97	
$ 15.000,00	45	1,011820	$ 14.824,77	
$ 18.000,00	120	1,01831	$ 17.444,72	
$ 43.000,00			$ 42.191,46	$ 46.410,61

SEGUNDO

Con D 1

Valor actual de las obligaciones preexistentes: $ 42.141,10
Valor actual del pago de $ 20.000,00 $ 18.000,00
Valor actual a financiar: $ 24.141,10
Valor nominal de la nueva obligación: $ 30.176,37

Con D 2

Valor actual de las obligaciones preexistentes: $ 42.162,85
Valor actual del pago de $ 20.000,00 $ 18.181,82
Valor actual a financiar: $ 23.981,04
Valor nominal de la nueva obligación: $ 28.777,24

Con D 3

Valor actual de las obligaciones preexistentes: $ 42.191,46
Valor actual del pago de $ 20.000,00 $ 18.181,82
Valor actual a financiar: $ 24.009,64
Valor nominal de la nueva obligación: $ 29.051,67

TERCERO

Con D 1

N	n	i n	Factores	
$ 10.000,00	30	0,00822	0,99178	$ 9.917,81
$ 15.000,00	45	0,01233	0,98767	$ 14.815,07
$ 20.000,00	40	0,01096	1,01096	$ 20.219,18
		Factor de capitalización	0,9000	
		Un pago a 365 días	$ 49.946,73	

Con D 2

N	n	i n	Factores	
$ 10.000,00	30	0,00822	1,00822	$ 9.918,48
$ 15.000,00	45	0,01233	1,01233	$ 14.817,32
$ 20.000,00	40	0,01096	0,98916	$ 20.219,18
		Factor de capitalización	1,1000	
		Un pago a 365 días	$ 49.450,47	

Con D 3

N	n	Factores	
$ 10.000,00	30	1,00786	$ 9.921,97
$ 15.000,00	45	1,01182	$ 14.824,77
$ 20.000,00	40	0,98961	$ 20.209,99
		Factor de capitalización	1,1000
		Un solo pago a 365 días	$ 49.452,41

Un pago de $ 15.000,00 a 365 días y el saldo a 730 días

Determinación del VA de $ 15.000,00

	N	Y
Con D 1	$ 15.000,00	$ 13.500,00
Con D 2	$ 15.000,00	$ 13.636,36
Con D 3	$ 15.000,00	$ 13.636,36

Determinación del VA de la deuda a pagar a 730 días

	Valores actuales		A financiar	Factor de capitalización/actualización	A pagar a 730 días
	Preexist.	De $ 15 000,00			
Con D 1	$ 44.952,02	$ 13.500,00	$ 31.452,05	0,80000	$ 39.315,07
Con D 2	$ 44.954,98	$ 13.636,36	$ 31.318,61	1,20000	$ 37.582,34
Con D 3	$ 44.956,74	$ 13.636,36	$ 31.320,37	1,21000	$ 37.897,65

Hoy un pago de $ 20 000,00 y el saldo a 365 días

	Valores actuales		A financiar	Factor de capitalización/actualización	A pagar a 365 días
	Preexist.	De $ 15.000,00			
Con D 1	$ 44.952,02	$ 20.000,00	$ 24.952,05	0,90000	$ 27.724,51
Con D 2	$ 44.954,98	$ 20.000,00	$ 24.954,98	1,10000	$ 27.450,47
Con D 3	$ 44.956,74	$ 20.000,00	$ 24.956,74	1,10000	$ 27.452,41

Cuarto

Con D 1

N	n	N i n	V
$ 10.000,00	30	$ 82,19	$ 9.917,81
$ 15.000,00	45	$ 184,93	$ 14.815,07
$ 18.000,00	120	$ 591,78	$ 17.408,22
$ 43.000,00		$ 858,90	$ 42.141,10

A cobrar:

N	n	N i n	V
$ 45.000,00	150	$ 1.849,32	$ 43.150,68
Diferencia a cobrar			$ 1.009,59

Con D 2

N	n	1 + i n	N / (1 + i n)
$ 10.000,00	30	1,008219	$ 9.918,48
$ 15.000,00	45	1,012329	$ 14.817,32
$ 18.000,00	120	1,032877	$ 17.427,06
$ 43.000,00			$ 42.162,85

A cobrar:

Con D 3

N	n	$(1 + i)^n$	$N/(1 +i)^n$
$ 10.000,00	30	1,007864	$ 9.921,97
$ 15.000,00	45	1,011820	$ 14.824,77
$ 18.000,00	120	1,031831	$ 17.444,72
$ 43.000,00			$ 42.191,46

N	n	$(1 + i)^n$	$N/(1 +i)^n$
$ 45.000,00	150	1,039946	$ 43.271,49
A cobrar:			$ 1.080,03

QUINTO

Con D 1

Deuda:

N	n	N i n
$ 10.000,00	30	$ 82,19
$ 15.000,00	45	$ 184,93
$ 18.000,00	120	$ 591,78
$ 43.000,00		$ 858,90

Opciones de pago:	Años	Días	
$ 40.000,00	-0,535274	-195	No es posible por ser negativo
$ 50.000,00	1,571781	574	
$ 60 000,00	2,976484	1086	

Con D 2

Deuda:

N	n	1 +i n	N / (1 +in)
$ 10.000,00	30	$ 1,008219	$ 9.918,48
$ 15.000,00	45	$ 1,012329	$ 14.817,32
$ 18.000,00	120	$ 1,032877	$ 17.427,06
			$ 42.162,85

Opciones de pago	Años	Días	
$ 40.000,00	-0,51298	-187	No es posible por ser negativo
$ 50.000,00	1,85878	678	
$ 60.000,00	4,23054	1544	

Con D 3

Deuda:

N	n	(1 + i) ^ n	
$ 10.000,00	30	$ 1,007864	$ 9.921,97
$ 15.000,00	45	$ 1,011820	$ 14.824,77
$ 18.000,00	120	$ 1,031831	$ 17.444,72
			$ 42.191,46

Opciones de pago			Años	
$ 40.000,00	0,94806	-0,05333837	-0,55963	No es posible por ser negativo
$ 50.000,00	1,18507	0,16980518	1,78161	
$ 60.000,00	1,42209	0,35212674	3,69453	

LN (1 + 0,10) =0,09531

SEXTO

Con D 1

N	n	1 - i n	N * (1-in)
$ 10.000,00	40	0,9890411	$ 9.890,41
$ 20.000,00	60	0,9835616	$ 19.671,23
$ 50.000,00	180	0,9506849	$ 47.534,25
$ 80.000,00			$ 77.095,89

N	n	1 - i n	N * (1-in)
$ 5.000,00	0	1,0000000	$ 5.000,00
$ 10.000,00	30	0,9917808	$ 9.917,81
$ 15.000,00	75	0,9794521	$ 14.691,78
$ 30.000,00			$ 29.609,59
Diferencia hoy:			$ 47.486,30

A 120 días

N	n	1 - i n	N / (1-in)
$ 47.486,30	120	0,9671233	$ 49.100,57

Cuando la diferencia sería de:

N	i	V	[1 - (V/N)] / i	
$ 55.000,00	0,1	$ 47.486,30	1,3661	
$ 40.000,00	0,1	$ 47.486,30	-1,8716	No es posible por ser negativo

Con D 2

N	n	1 + i n	N / (1 + in)
$ 10.000,00	40	1,0109589	$ 9.891,60
$ 20.000,00	60	1,0164384	$ 19.676,55
$ 50.000,00	180	1,0493151	$ 47.650,13
$ 80.000,00			$ 77.218,28

N	n	1 + i n	N / (1 + in)
$ 5.000,00	0	1,0000000	$ 5.000,00
$ 10.000,00	30	1,0082192	$ 9.918,48
$ 15.000,00	75	1,0205479	$ 14.697,99
$ 30.000,00			$ 29.616,46
Diferencia hoy:			$ 47.601,82

A 120 días

V	n	1 + in	N
$ 47.601,82	120	1,03288	$ 49.166,81

Cuando la diferencia sería de:

V	N	[(N / V)-1] / i	En días	
$ 47.486,30	$ 55.000,00	$ 1,58	578	
$ 47.486,30	$ 40.000,00	$ -1,58	-575	No es posible por ser negativo

Con D 3

N	n	(1 + i)^n	N / ((1 + i)^n)
$ 10.000,00	40	1,0104997	$ 9.896,09
$ 20.000,00	60	1,0157908	$ 19.689,09
$ 50.000,00	180	1,0481244	$ 47.704,26
$ 80.000,00			$ 77.289,45

N	n	(1 + i)^n	N/((1 + i)^n)
$ 5.000,00	0	1,0000000	$ 5.000,00
$ 10.000,00	30	1,0078645	$ 9.921,97
$ 15.000,00	75	1,0197773	$ 14.709,09
$ 30.000,00			$ 29.631,06
Diferencia hoy:			$ 47.658,39

A 120 días

V	n	(1 + i)^n	N
$ 47 658,39	120	1,03183	$ 49 175,40

V	N	Ln (N/V)	Ln (1 +i)	n	en días
$ 47.658,39	$ 55.000,00	$ 0,143275	$ 0,095310	1,5032	549
$ 47.658,39	$ 40.000,00	$ -0,175179	$ 0,095310	-1,8380	no es posible

Bonos y títulos valores

Enunciados

1 - Rescate total al vencimiento

A su valor nominal

En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal igual a la TIR

1. Calcular el precio de un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años y que paga intereses al 10%, si se desea que rinda (TIR) un 10% anual efectivo. Verificar por fórmula.

Pago periódico de intereses, tasa nominal igual a la TIR, y un solo pago de capital

2. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años y que paga intereses al 10% en forma anual calcular su precio si se desea que rinda (TIR) un 10% anual efectivo.
3. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años, que paga intereses en forma anual a una tasa del 4% anual calcular su precio si se desea que rinda (TIR) un 4% anual efectivo. En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal diferente a la TIR.
4. Calcular el precio de un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a un año a una tasa nominal del 10% anual si se desea una renta (TIR) del 15%.
5. Calcular el precio de un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años a una tasa del 10% efectivo anual si se desea una renta (TIR) del 15% efectiva anual.

Pago periódico de intereses, tasa nominal diferente a la TIR, y un solo pago de capital

6. Calcular el precio de un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años con pago anual de intereses a una tasa del 10% anual y se desea una renta (TIR) del 15% efectiva anual.

Con sobreprecio

En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal igual a la TIR

7. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años a una tasa efectiva del 10% anual y a su vencimiento paga un plus de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 10% efectivo anual.

Pago periódico de intereses, tasa nominal igual a la TIR, y un solo pago de capital

8. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años a una tasa del 10% anual, con pago de intereses en forma anual y a su vencimiento paga un plus de $ 5.000,00 calcular su precio si se desea que rinda (TIR) un 10% efectivo anual.

En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal diferente a la TIR

9. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a un año a una tasa del 10% anual, con pago de intereses en forma anual y a su vencimiento paga un plus de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 8% anual.

Pago periódico de intereses, tasa nominal diferente a la TIR, y un solo pago de capital

10. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años a una tasa del 10 % anual, con pago de intereses en forma anual y a su vencimiento paga un plus de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que tenga un rendimiento (TIR) del 5%.

Con quita

En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal igual a la TIR

11. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a un año a una tasa del 10% anual y a su vencimiento se recupera (quita) de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 10% efectivo anual.

Pago periódico de intereses, tasa nominal igual a la TIR, y un solo pago de capital

12. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años con pago de intereses en forma anual a una tasa del 10% anual y a su vencimiento se le realiza una quita de $ 5.000,00 calcular la suma a pagar o precio si se desea que rinda (TIR) un 10% efectivo anual.
13. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los tres años con pago de intereses en forma anual a una tasa del 10% anual y a su vencimiento se le realiza una quita de $ 10.000,00 calcular su precio si se desea que rinda (TIR) un 10%.

En un solo pago de capital e intereses, tasa nominal diferente a la TIR

14. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a un año emitido a una tasa del 10% anual, con pago de intereses en forma anual y a su vencimiento se efectúa una quita de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 8% anual.

Pago periódico de intereses, tasa nominal diferente a la TIR, y un solo pago de capital

15. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los dos años emitido a una tasa del 10% anual, con pago de intereses en forma anual y a su vencimiento se le realiza una quita de $ 5.000,00 calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 8% anual.

Excupón con pago periódico de intereses

16. Dado un título emitido por un valor nominal de $ 100.000,00 que vence a los tres años emitido a una tasa del 10% anual, con pago de intereses en forma anual emitido bajo la modalidad ex-cupón calcular el precio si se desea que rinda (TIR) un 10%.

2 - Rescate parcial o amortización periódica

17. Se emite un empréstito cuyo precio es la suma de $ 1.000.000,00 conformado por 1.000 títulos de valor nominal $ 1.000,00 cada uno que se pagó en cinco cuotas iguales, anuales y consecutivas; utilizando una tasa del 10% calcular su cuota de pago y realizar el cuadro de marcha.

3 - Prima de emisión

18. Dado un título de $ 100,00 que se rescata a los cinco periodos hallar su precio con una tasa anual del 5% si se acepta una tasa de rentabilidad anual del 4%. Calcular el valor de la prima por formula directa.

Resoluciones

PRIMERO

C = $ 100.000,00
i = 0,1
n = 2

$e = [C + C [(1 + i)^n -1]] (1 + i)^{-n}$
$e = [100.000,00 + 100.000,00 [(1 + 0,10)^2 -1]] (1 + 0,10)^{-2}$
$e = (100.000,00 + 21.000) * 0,82645$
$e = 100.000,00$

Analíticamente:

$e = [C + C [(1 + i)^n -1]] (1 + i)^{-n}$
$e = C + C (1 + i)^n - C] (1 + i)^{-n}$
$e = [C + C (1 + i)^n - C] (1 + i)^{-n}$
$e = [C (1 + i)^n] (1 + i)^{-n}$
$\mathbf{e = C}$

Verificación:

$e = K + (i_1/i') (C - K)$
$e = 100.000,00 (1 + 0,10)^{-2} + (0,10/0,10) [100.000,00 - 100.000,00 * (1 + 0,10)^{-2}]$
$e = 82.644,63 + 1 * (100.000.00,00 - 82.644,63)$
$e = 100.000,00$

Analíticamente:

$e = K + (i/i') (C - K)$
$e = K + C - K$
$e = C$

SEGUNDO

C = $ 100.000,00
i = 0,10
n = 2

$e = Ci (1 + i)^{-1} + Ci (1 + i)^{-2} + C (1 + i)^{-2}$
$e = 10.000,00 * 0,90909 +10.000,00 * 0,826446 + 100.000,00 * 0,826446$
$e = 9.090,90 + 8.264, 46 + 82.644,64$
$e = \$ 100.000,00$

TERCERO

C = $ 100.000,00
i = 0,04
n = 2
$e = Ci (1 + i)^{-1} + Ci (1 + i)^{-2} + C (1 + i)^{-2}$
$e = \$ 100.000,00$

CUARTO

C = $ 100.000,00
i = 0,1
i´ = 0,15
n = 1

$e = (C + Ci)\ (1 + i')^{-1}$

$e = (100.000{,}00 + 100.000{,}00 * 0{,}10)\ (1 + 0{,}15)^{-1}$

$e = (100.000{,}00 + 10.000{,}00)\ 0{,}869565$

$e = 110\ 000{,}00 * 0{,}869565$

$e = \$\ 95.652{,}17$

Verificación:

$e = K + (i/i')\ (C - K)$

$e = 100.000{,}00\ (1+0{,}15)^{-1} + (0{,}10/0{,}15)\ [100.000{,}00 – 100.000{,}00 * (10{,}15)^{-1}]$

$e = 86.952{,}17 + (0{,}10/0{,}15)\ [100.000{,}00 – 86.952{,}17\ ]$

$e = 86.952{,}17 + (0{,}10/0{,}15)\ 13.043{,}48$

$e = \$\ 95.652{,}17$

QUINTO

$C = \$\ 100.000{,}00$

$i = 0{,}10$

$i' = 0{,}15$

$n = 2$

$e = [C + C\ [(1 + i)^{n} -1]]\ (1 + i')^{-n}$

$e = [C + C\ (1 + i)^{n} - C]\ (1 + i')^{-n}$

$e = C\ (1 + i)^{n}\ (1 + i')^{-n}$

$e = 100.000{,}00\ (1 + 0{,}10)^{2}\ (1 + 0{,}15)^{-2}$

$e = \$\ 91.493{,}38$

Verificación:

$e = K + (i/i')\ (C - K)$

$e = 100.000{,}00\ (1+0{,}15)^{-2} + (0{,}21/0{,}3225)\ [100.000{,}00 – 100.000{,}00 * (1+0{,}15)^{-2}]$

$e = 75.614{,}33 + 0{,}65116\ (100.000{,}00 – 75.614{,}33\ )$

$K = \$\ 75.614{,}37$

$e = \$\ 91.493{,}38$

SEXTO

$C = \$\ 100.000{,}00$

$i = 0{,}1$

$i' = 0{,}15$

$n = 2$

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2} + C\ (1 + i)^{-2}$

$e = 10.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-1} + 10.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-2} + 100.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-2}$

$e = 8.695{,}65 + 7.561{,}43 + 75.614{,}37$

$e = \$\ 91.871{,}46$

Otra forma:

$e = C\ [i\ (1 + i)^{-1} + i\ (1 + i)^{-2} + (1 + i)^{-2}]$

$e = C\ [i\ (1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2}\ (i + 1)]$

$e = 100.000{,}00\ (0{,}08696 + 0{,}83176)$

$e = \$\ 91.871{,}81$

Verificación:

$e = C * V^{n}_{i'} + (i/i')\ (C - C\ V^{n}_{i'})$

$K = C * V^{n}_{i'}$

$K = 100.000{,}00\ (1 + 0{,}15)^{-2}$

$K = \$\ 75.614{,}37$

$e = K + (i/i')\ (C - K)$

$e = 75.614,37 + (0,10/0,15)\ (100.000,00 - 75.614,37)$

$e = 75.614,37 + (0,10/0,15)\ 24.385,64$

$e = \$\ 91.871,46$

SÉPTIMO

$C = \$\ 100.000,00$

$i = 0,1$

$Plus = P = \$\ 5.000,00$

$n = 2$

$e = [C + C\ [(1 + i)^n -1] + P]\ (1 + i')^{-n}$

$e = [C\ (1 + i)^n + P]\ (1 + i')^{-n}$

$e = [100.000,00\ (1 + 0,10)^2 + 5.000]\ (1 + 0,10)^{-2}$

$e = \$\ 104.132,23$

Verificación:

$e = K_1 + (i_1/i')\ (C_1 - K_1)$

$C_1 = C + P$

$C_1 = 100.000,00 + 5.000,00$

$C_1 = \$\ 105.000,00$

$K_1 = C_1\ (1 + i)^{-n}$

$K_1 = 105.000,00\ (1 + 0,10)^{-2}$

$K_1 = \$\ 86.776,86$

$i_1 = I/C$

$i_1 = C\ [(1 + i)^n - 1] / C$

$i_1 = 100.000,00\ [(1 + 0,10)^2 - 1]/(100.000,00\ )$

$i_1 = 21.000,00/100.000,00$

$i_1 = 0,21$

$e = 86.776,86 + (0,20\ /0,21)\ (105.000,00 – 86.776,86)$

$e = \$\ 104.132,23$

OCTAVO

$C = \$\ 100.000,00$

$i = 0,1$

$n = 2$

$Plus = P = \$\ 5.000,00$

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2} + C\ (1 + i)^{-2} + P\ (1 + i)^{-2}$

$e = 9.090,90 + 8.264,46 + 82.644,62 + 4.132,23$

$e = 100.000,00 + 4.132,23$

$e = \$\ 104.132,21$

Verificación:

$e = K_1 + (i_1 / i')\ (C_1 - K_1)$

$C_1 = C + P = 105.000,00$

$K_1 = C\ V^{n}_{i'} = 105.000,00 * 1/(1 + 0,10)^2 = 86.776,86$

$i_1 = I /C = 20.000,00/100.000,00 = 0,20$

$i' = (1 + 0,10)^2 - 1$

$i' = 0,21$

$e = 86.776,86 + (0,20/0,21)\ (105.000,00 - 86.776,86) = 104.132,57$

$e = 86.776,86 + 0,9524 * 18.223,14$

$e = \$\ 104.132,23$

NOVENO

C = $100.000,00

i = 0,10

i´ = 0,08

n = 1

Plus = P = $ 5.000,00

$e = Ci\ (1 + i')^{-1} + C\ (1 + i)^{-1} + P\ (1 + i)^{-1}$

$e = 100.000,00 * 0,10 * 1,08^{-1} + 100.000,00 * 1,08^{-1} + 5.000,00 * 1,08^{-1}$

$e = 9.259,26 + 92.592,59 + 4.629,63$

e = $ 106.481,48

Otra forma:

$e = Ci\ (1 + i')^{-1} + C\ (1 + i)^{-1} + P\ (1 + i)^{-1}$

$e = (Ci + C + P)\ (1 + i')^{-1}$

$e = (10.000,00 + 100.000,00 + 5.000,00)\ (1 + 0,08)^{-1}$

e = $ 106.481,48

Verificación:

$e = K_1 + (i_1/i')\ (C_1 - K_1)$

$C_1 = C + P$

C_1 = $ 105.000,00

$K_1 = C\ V^{n}_{i'} = 105.000,00/(1 + 0,08)^1 =$

K_1 = $ 97.222,22

$i_1 = I/C$

$i_1 = 0,10$

$e = 97.222,22 + (0,10/0,08)\ (105.000,00 - 97.222,22)$

e = $ 106.944,44

DÉCIMO

C = $ 100.000,00

i = 0,10

i’ = 0,05

n = 2

Plus = 5.000,00

$e = Ci\ (1 + i')^{-1} + Ci\ (1 + i')^{-2} + C\ (1 + i')^{-2} + D\ (1 + i')^{-2}$

e = $ 113.832,20

Desarrollo por formulas

$e = K_1 + (i/i')\ (C - K_1)$

$C_1 = C + D = 105.000,00$

$K_1 = C\ V^{n}_{i'} = 105.000,00 * 1 / (1 + 0,10)^2 = 95.238,10$

$i_1 = C\ i / (C - C\ i) = 10.000,00/105.000,00 = 0,09524$

$e = 95.238,10 + (0,09524/0,10)\ (105.000,00 - 95.238,10) = 113.832,56$

UNDÉCIMO

C = $ 100.000,00

i = 0,10

Quita = $ 5.000,00

n = 1

$e = (C + C\ i - E)\ (1 + i)^{-1}$

$e = (100.000,00 + 100.000,00 * 0,10 - 5.000,00) * (1,10)^{-1}$

$e = 105.000,00 * 0,90909$

$e = \$\ 95.454,55$

DECIMOSEGUNDO

C = $ 100.000,00

i = 0,10

Quita = $ 5.000,00

n = 2

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2} + (C - Q)\ (1 + i)^{-2}$

$e = 10.000,00 * 0,90909 + 10.000,00 * 0,82644 + 95.000,00 * 0,82644$

$e = 9.090,90 + 8.264,40 + 78.512,40$

$e = \$\ 95.867,77$

DECIMOTERCERO

C = $ 100.000,00

i = 0,1

Quita = $ 10.000,00

n = 3

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2 +}\ Ci\ (1 + i)^{-3} + (C - Q)\ (1 + i)^{-3}$

$e = \$\ 92.486,85$

DECIMOCUARTO

C = $ 100.000,00

i = 0,10

i’ = 0,08

n = 1

Quita = $ 5.000,00

Intereses Anuales

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + (C - Q)\ (1 + i)^{-1}$

$e = \$\ 97.222,22$

Otra forma:

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + (C - Q)\ (1 + i')^{-1}$

$e = (Ci + C - Q)\ (1 + i')^{-1}$

$e = \$\ 97.222,22$

Verificación:

$e = K_1 + (i / i')\ (C - K_1)$

$C_1 = C - Q$

$C_1 = \$\ 95.000,00$

$K_1 = C_1\ V^n_{i'}$

$K_1 = \$\ 87.962,96$

$i_1 = C\ i / (C - Q)$

$i_1 = 0,10526$

$e = \$\ 97.222,22$

DECIMOQUINTO

C = $ 100.000,00

i = 0,10

i’ = 0,08

n = 2

Quita = $ 5.000,00

Intereses Anuales

$e = C\ i\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2} - (C - Q)\ (1 + i)^{-2}$

$e = \$\ 99.279,84$

Desarrollo por formulas

$e = K_1 + (i_1/i')\ (C_1 - K_1)$

$C_1 = C - Q$

$C_1 = \$\ 95.000,00$

$K_1 = C\ V^n_{i'}$

$K_1 = \$\ 81.447,19$

$i_1 = C\ i\ /\ (C - Q)$

$i_1 = 0,10526$

$e = \$\ 99.279,84$

DECIMOSEXTO

C = $ 100.000,00

i = 0,1

Ex - cupon

n = 3

$e = Ci\ (1 + i)^{-1} + Ci\ (1 + i)^{-2} + (C - Q)\ (1 + i)^{-3}$

$e = 100.000,00\ (1 + 0,10)^{-1} + 100.000,00\ (1 + 0,10)^{-2} + 100.000,00\ (1 + 0,10)^{-3}$

$e = \$\ 92.486,85$

Desarrollo por formulas

$e = K_1 + (i\ /i')\ (C_1 - K_1)$

$C_1 = C - Ci$

$C_1 = \$\ 90.000,00$

$K_1 = C\ V^n_{i'}$

$K_1 = \$\ 67.618,33$

$i_1 = C\ i\ /\ (C - C\ i)$

$i_1 = 0,1111$

$e = 67.618,33 + (0,1111/0,10)\ (90.000,00 – 67.618,33)$

$e = \$\ 92.486,85$

DECIMOSÉPTIMO

Valor de emisión $ 1.000.000,00

Cuotas de pago 5

Tasa de interés 10%

Valor del título $1.000,00

Títulos totales 1,000

Cuota: $V_o * [[1 - (1+i)^{-n}] / i]^{-1}$

Cuota: $1.000,00 * [[1 - (1 + 0,10)^{-5}] / 0,10]^{-1}$

Cuota: $ 263.797,48

DECIMOCTAVO

Valor nominal: $ 100,00

Periodos: 5

Tasa nominal: 5,00%

Rentabilidad: 4.00%

$e = C * V^n_i + (i/i')\ (C - C * V^n_i)$

$K = C * V^{n}_{i}$

$e = K + (i/i') (C - K)$

$e = 100{,}00 (1 + 0{,}04)^{-5} + (0{,}05/0{,}04) [100{,}00 - 100{,}00 * (1 + 0{,}04)^{-5}] = \$ 104{,}45$

n	Dividendos	Renta efectiva	Diferencia	Valor final
0				$ 104,45
1	$ 5,00	$ 4,18	$ 0,82	$ 103,63
2	$ 5,00	$ 4,15	$ 0,85	$ 102,78
3	$ 5,00	$ 4,11	$ 0,89	$ 101,89
4	$ 5,00	$ 4,08	$ 0,92	$ 100,96
5	$ 5,00	$ 4,04	$ 0,96	$ 100,00

$P = C (i – i') * a_{n\ i'}$

$P = 100{,}00 (0{,}05 - 0{,}04) [1- (1+ 0{,}04)^{-5}) / 0{,}04]$

$P = \$ 4{,}45$

Depreciación de activos

Enunciados

1. Determinar la amortización anual por todos los métodos que conozca construyendo los cuadros respectivos (cuando corresponda) para el siguiente caso:

   Valor de compra: $ 1.000.000,00

   Vida útil: 3 años

   Valor residual: $ 100.000,00

   Tasa de interés: 8%

   Producción estimada: 600.000 unidades

   Producción del ejercicio: 200.000 unidades

   Para el caso de horas de trabajo: K = 21.000

   En el año: 7000 horas

2. Determinar la vida media de los siguientes activos:

Bien amortizable	Costo	Valor Residual	Vida Probable
Un torno	$ 20.000,00	$ 2.500,00	10 años
Un edificio	$ 500.000,00	$ 0,00	50 años
Instalaciones	$ 100.000,00	$ 17.500,00	20 años

   Utilizar:

   A. Método directo

   B. Método de interés compuesto, con una tasa de 12% anual.

3. Una cantera produce $ 500.000,00 por año durante 15 años.

Se solicita el valor a pagar sabiendo que el comprador espera obtener el 7,50% anual y el fondo de amortización devenga el 8% anual.

Resoluciones

PRIMERO

Depreciación de activos

Datos:

Valor de compra: C = $ 1.000.000,00

Vida útil, en años: n = 10

Valor residual: VR = $ 100.000,00

Vida útil en horas de trabajo: k = 21.000

Horas de trabajo en el año: h = 2.100

Vida útil en unidades: j = 600.000

Unidades producidas en el año: m = 20.000

Tasa de amortización: z = 10,00%

Tasa de interés activa: i = 8,00%

Tasa de interés pasiva: i' = 4,50%

Métodos proporcionales

Directo o línea recta

Amortización = (C - VR) / n

Amortización anual = $ 90.000,00

Del Servicio

Amortización según horas trabajadas: (C - VR) * h/k =

= (1.000.000,00 – 100.000,00) * (21.000/2100) = $ 90.000,00

Del Rendimiento

Amortización s/ unidades producidas: (C - VR) * m/j =

= (1.000.000,00 - 100.000,00) * (600.000/20.000) = $ 30.000,00

Métodos de reducción uniforme

Método del tanto por ciento fijo sobre saldos

1 - Valor residual

Valor residual = Sn = Rn = $C (1 - i)^n$

Valor residual = Sn = Rn = $ 348.678,44

2 - Vida útil

Vida útil = n = ln (Rn/C) / ln (1 - i)

Vida útil = n = ln (348.678,44 /1.000.000,00) / ln (1 - 0,08)

Vida útil = n = ln 0,348678 /ln 0,92

ln = 0,34867844 = -1,053605157

ln = 0,90000000 = -0,105360516

Vida útil = n = 10,00

3 - Tasa de amortización

Tasa de amortización = z =$1 - (R /C)^{1/n}$

Tasa de amortización = z =10,00%

Cuadro de marcha

Años	Valor inicial	Amortización	Valor Final
0			$ 1.000.000,00
1	$ 1.000.000,00	$ 100.000,00	$ 900.000,00
2	$ 900.000,00	$ 90.000,00	$ 810.000,00
3	$ 810.000,00	$ 81.000,00	$ 729.000,00
4	$ 729.000,00	$ 72.900,00	$ 656.100,00
5	$ 656.100,00	$ 65.610,00	$ 590.490,00
6	$ 590.490,00	$ 59.049,00	$ 531.441,00
7	$ 531.441,00	$ 53.144,10	$ 478.296,90
8	$ 478.296,90	$ 47.829,69	$ 430.467,21
9	$ 430.467,21	$ 43.046,72	$ 387.420,49
10	$ 387.420,49	$ 38.742,05	$ 348.678,44

Método de los números dígitos

K = suma de los dígitos

Y = n.° de años de vida útil que restan

Cuota = (C - VR) * Y/K

Y = 55

K	Importe
1	$ 118.422,10
2	$ 106.579,89
3	$ 94.737,68
4	$ 82.895,47
5	$ 71.053,26
6	$ 59.211,05
7	$ 47.368,84
8	$ 35.526,63
9	$ 23.684,42
10	$ 1.842,21
Total amortizado	**$ 651.321,56**

Comprobación

Valor del bien = $ 1.000.000,00

Memos el total amortizado = $ 651.321,56

Valor residual = $ 348.678,44

Métodos de interés compuesto

Método de las anualidades

Precio del bien = $ 1.000.000,00

Interés a cargar al bien = $C\ [(1 + i)^n - 1]$ = $ 1.158.925,00

Valor Residual: $ 100.000,00

Total a amortizar: $ 2.058.925,00

Tasa de interés pasiva = 4,5000%

Cuota de amortización = $[(C\ (1 + i)^n - R_n]\ S_{in'}^{-1}$

Cuota unitaria de amortización = 0,081378822

Cuota de ahorro total =$ 167.552,89

Cuadro de marcha

Cuota	Importe	Sujeto a interés	Interés	Total
0				-
1	$ 167.552,89	-	-	$ 167.552,89
2	$ 167.552,89	$ 167.552,89	$ 7.539,88	$ 342.645,66
3	$ 167.552,89	$ 342.645,66	$ 15.419,05	$ 525.617,61
4	$ 167.552,89	$ 525.617,61	$ 23.652,79	$ 716.823,29
5	$ 167.552,89	$ 716.823,29	$ 32.257,05	$ 916.633,23
6	$ 167.552,89	$ 916.633,23	$ 41.248,50	$ 1.125.434,61
7	$ 167.552,89	$ 1.125.434,61	$ 50.644,56	$ 1.343.632,06
8	$ 167.552,89	$ 1.343.632,06	$ 60.463,44	$ 1.571.648,39
9	$ 167.552,89	$ 1.571.648,39	$ 70.724,18	$ 1.809.925,46
10	$ 167.552,89	$ 1.809.925,46	$ 81.446,65	$ 2.058.925,00

Método del fondo amortizante

Cuota de amortización = (C - R) $S_{in'}^{-1}$

Total a amortizar = $ 900.000,00

Tasa de interés pasiva = 4,5000%

Cuota unitaria de amortización = 0,081378822

Cuota total de ahorro = $ 73.240,94

Cuadro de marcha

Cuota	Importe	Sujeto a interés	Interés	Total
0	-			-
1	$ 73.240,94	-	-	$ 73.240,94
2	$ 73.240,94	$ 73.240,94	$ 3.295,84	$ 149.777,72
3	$ 73.240,94	$ 149.777,72	$ 6.740,00	$ 229.758,66
4	$ 73.240,94	$ 229.758,66	$ 10.339,14	$ 313.338,74
5	$ 73.240,94	$ 313.338,74	$ 14.100,24	$ 400.679,92
6	$ 73.240,94	$ 400.679,92	$ 18.030,60	$ 491.951,46
7	$ 73.240,94	$ 491.951,46	$ 22.137,82	$ 587.330,21
8	$ 73.240,94	$ 587.330,21	$ 26.429,86	$ 687.001,01
9	$ 73.240,94	$ 687.001,01	$ 30.915,05	$ 791.157,00
10	$ 73.240,94	$ 791.157,00	$ 35.602,06	$ 900.000,00

SEGUNDO - VIDA MEDIA DE UN ACTIVO

Detalle	Valores			Vida Útil	Amortización anual "S"
	Compra	Residual	A amortizar "U"		
Un torno	$ 20.000,00	$ 2.500,00	$ 17.500,00	10	$ 1.750,00
Un edificio	$ 500.000,00	-	$ 500.000,00	50	$ 10.000,00
Instalaciones	$ 100.000,00	$ 17.500,00	$ 82.500,00	20	$ 4.125,00
Totales:	**$ 620.000,00**	**$ 20.000,00**	**$ 600.000,00**		**$ 15.875,00**

Tasa a utilizar: 12,00%

n = ln [(S + U i) / S] / ln (1 + i)

(S + U i) / S = 2,70

$(1 + i) = 1{,}1200$

$n = 8{,}77$ años

Tercero - Valuación de bienes extinguibles

Capital a invertir: C

Renta deseada: i

Tasa de interés pasiva: i'

Suma de la producción periódica: M

Vida útil, en años: n

Cuota unitaria de amortización = $M / (i + S_{in'}^{-1})$

Suma a invertir = $ 4.471.090,36

BIBLIOGRAFÍA

Apreda, Rodolfo (1984). *Curso de Matemática Financiera en un contexto inflacionario*. Buenos Aires: Editorial Club de Estudio.

Baca Urbina, Gabriel (2003). *Fundamentos de Ingeniería Económica*. Mexico: Mc. Graw Hill.

Berlinsky, David (2007). *Ascenso Infinito*. 1ra edición en Argentina, Buenos Aires: Editorial Debate.

Brealey, Richard; Myers, Stewart y Marcus, Alan (1996). *Principios de Dirección Financiera*. Mexico: Mc. Graw Hill.

Bula, Clotilde A. (1937). *Elementos de Matemática Financiera*. Rosario, Facultad de Ciencias Matemáticas, Fisico-Quimicas y Naturales aplicadas a la Industria, Universidad Nacional del Litoral

Biondo, Gustavo Sergio (2013), *Colaterales Agrícolas: los Warrants como instrumento para la financiación con garantías sobre propia producción*, Tesis de Magister en Economía Agraria y Administración Rural, Universidad Nacional del Sur, Biblioteca Central.

Biondo, Gustavo Sergio (2019), *Prolegómenos al Valor del Dinero en el Tiempo*. Buenos Aires, Editorial Buyatti

Castegnaro, Aída Beatríz (2006). *Curso de Cálculo Financiero*. 1ra edición, Buenos Aires: La Ley.

Garcia, Jaime (2008). *Matemáticas Financieras con ecuaciones de diferencia finita*, 5ta edición, Bogotá: Pearson Educación de Colombia Ltda.

Gianeschi, Mario A. (2005). *Curso de Matemática Financiera*. 2da edición, Buenos Aires: Macchi Grupo Editor.

Gomez Mur, Luis (1950). *Lecciones de Algebra Financiera*. 3ra edición, Barcelona: Casa Editorial Bosch.

Heussler, Ernest (h) y Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. 8va edición, México: A. Simon y Schuster Company.

Hoffmann, Laurence D. y Bradley, Gerald L. (1998). *Cálculo para Administración*. Economía y Ciencias Sociales, 6ta edición, Santa Fe de Bogotá: Mc Graw-Hill, Inc. Interamericana.

Instituto Argentino de Mercado de Capitales (2010). *Mercado de Capitales, Manual para no especialistas*. Buenos Aires: Temas Grupo Editorial.

López Dumrauf, Guillermo (2004). *Cálculo Financiero Aplicado (Un Enfoque Profesional),* Buenos Aires: La Ley.

Paulus, John Allen (2009). *Un Matemático Invierte en la Bolsa*, 3° edición, Barcelona, Tusquets Editores S.A.

Quirelli, Blanca (1997). *La Valorización Dinámica de Capitales*. Santa Fe, Argentina, Secretaría de Posgrado de la Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional del Litorial.

Tajani, Miguel (1968). *Matemática Financiera*. 8va edición, Buenos Aires: Cesarini Hnos. Editores.

Santandreu, Pol (1996). *Matemática Financiera*. Barcelona: Ediciones Gestión 2000.

Weston, J. y Brigham, E. (1994). *Fundamentos de Administración Financiera*. Mexico: Mc. Graw Hill.

Yasukawa, Alberto Motoyuki (2000) *Matemática Financiera*. Córdoba: Despeignes Editora.