

# Puntos de Lagrange

ALEJANDRO MONTOYA RUIZ  
DARIO ALEXANDER PENAGOS

Junio de 2024

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. ¿Que son los puntos de Lagrange?</b>	<b>3</b>
2.1. ¿Cual es su importancia? . . . . .	3
<b>3. Historia y conceptos relacionados</b>	<b>3</b>
3.1. Limitaciones de las Leyes de Kepler . . . . .	4
3.2. Sistema Sol-Tierra . . . . .	4
<b>4. Cálculo de los puntos de lagrange</b>	<b>5</b>
4.1. Cálculo de la energía potencial gravitacional . . . . .	5
4.2. Encontrando posiciones de equilibrio . . . . .	7
4.2.1. Puntos $L_1$ , $L_2$ y $L_3$ . . . . .	7
4.2.2. Puntos $L_4$ y $L_5$ . . . . .	9

# 1. Introducción

En este trabajo, se desarrollará en profundidad el concepto de los Puntos de Lagrange, conocidos también como puntos de equilibrio o puntos de libración. Estos puntos son posiciones específicas en el espacio donde un objeto de masa despreciable puede permanecer estacionario en relación con dos cuerpos más grandes en órbita. Se dará una breve explicación sobre qué son estos puntos, su importancia en la mecánica celeste y quiénes fueron los matemáticos que los descubrieron. Posteriormente, se presentará una explicación matemática detallada para su demostración y se utilizará Python para la graficación de estos puntos.

## 2. ¿Que son los puntos de Lagrange?

Los puntos de Lagrange, también conocidos como puntos de libración o puntos de equilibrio, son posiciones en el espacio donde un objeto pequeño puede mantenerse estacionario respecto a dos cuerpos más grandes que están en órbita uno alrededor del otro, debido a la combinación de las fuerzas gravitacionales y centrífugas. Estos puntos fueron nombrados en honor al matemático Joseph-Louis Lagrange, quien los estudió en el siglo XVIII.

### 2.1. ¿Cual es su importancia?

Los puntos de Lagrange son de gran importancia en la astro-dinámica y la planificación de misiones espaciales, ya que permiten colocar satélites y otras sondas en posiciones fijas o casi fijas relativas a dos cuerpos celestes, con un gasto mínimo de combustible para mantener la posición.

## 3. Historia y conceptos relacionados

Todo comienza en el año 1750, cuando Leonhard Euler descubrió los tres primeros puntos de Lagrange (L1, L2 y L3), que son colineales. Luego, en 1772, el matemático Joseph-Louis Lagrange, mientras investigaba el problema de los tres cuerpos, encontró dos puntos adicionales (L4 y L5). Lagrange buscaba simplificar el cálculo de las interacciones gravitatorias entre múltiples cuerpos, ya que la mecánica newtoniana se complicaba mucho con más de dos cuerpos, debido a la necesidad de considerar todas las interacciones gravitatorias entre cada objeto en cada punto de su trayectoria.

Lagrange propuso una nueva forma de calcular trayectorias utilizando el principio de minimizar la acción en el tiempo, lo que se obtiene restando la energía potencial de la energía cinética. Esto llevó al desarrollo de la mecánica lagrangiana, una reformulación de la mecánica clásica de Newton.

Aplicando su nueva teoría, Lagrange planteó la existencia de un tercer cuerpo de masa despreciable que podría orbitar dos cuerpos más grandes en órbita cuasi circular. En este sistema, encontró cinco puntos específicos donde este tercer cuerpo experimentaría fuerza cero.



Figura 1: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

### 3.1. Limitaciones de las Leyes de Kepler

Tanto la Tierra como el Sol ejercen fuerzas gravitacionales entre sí, lo que significa que ambos cuerpos afectan mutuamente sus movimientos. Esto resulta en que, aunque el Sol causa mareas en la Tierra, la Tierra también genera pequeñas perturbaciones en el movimiento del Sol. En el sistema formado por el Sol y la Tierra, ambos cuerpos orbitan alrededor de un punto común conocido como centro de masas o baricentro, que está situado cerca del centro del Sol debido a la gran diferencia de masa entre ellos. La influencia gravitacional del Sol es mucho mayor debido a su enorme masa comparada con la de la Tierra. Por otro lado, la masa de un satélite artificial es tan pequeña en comparación con la del Sol y la Tierra que no tiene un efecto significativo en el baricentro del sistema Sol-Tierra-satélite.

Las leyes de Kepler proporcionan una descripción sencilla del comportamiento de dos cuerpos que orbitan entre sí. Sin embargo, cuando se consideran las interacciones de más de dos cuerpos, como ocurre en el sistema solar, estas leyes se vuelven insuficientes. Incluso al considerar solo tres cuerpos, como el Sol, la Tierra y un satélite artificial, las predicciones se complican. Por ejemplo, un satélite situado en la línea entre el Sol y la Tierra debería tener un periodo orbital menor a un año si está más cerca del Sol. Pero si dicho satélite se encuentra a una distancia de 1.5 millones de kilómetros de la Tierra, en el punto conocido como L1, la atracción gravitacional de la Tierra reduce la atracción del Sol, resultando en que el satélite tenga el mismo periodo orbital que la Tierra. Así, una menor distancia al Sol no necesariamente implica un periodo orbital menor.

### 3.2. Sistema Sol-Tierra

En un sistema de dos cuerpos, como la Tierra y el Sol, existen cinco puntos de Lagrange, designados como  $L_1$  a  $L_5$ . Cada uno de estos puntos tiene características y ubicaciones específicas:

1.  $L_1$ : Está entre las dos masas grandes, Sol y Tierra en la recta que las une. Es el más intuitivo de los puntos de Lagrange, aquel en que las atracciones opuestas de los dos cuerpos mayores se compensan. Es útil para misiones espaciales que requieren una vista continua del Sol, como los observatorios solares ya que los objetos situados aquí son eclipsados por la Tierra o la Luna.
2.  $L_2$ : Este punto también se encuentra en la línea que une a los dos cuerpos principales, pero más allá del cuerpo más distante. En el sistema Tierra-Sol,  $L_2$  está más allá de la Tierra, en dirección opuesta al Sol. En él la atracción gravitatoria del Sol y la Tierra compensa la fuerza centrífuga causada por un cuerpo de menor tamaño, debido a esto, es un lugar ideal para telescopios espaciales, como el Telescopio Espacial James Webb, ya que ofrece un entorno estable y protegido de la radiación solar directa.
3.  $L_3$ : Este punto está también en la línea que une a los dos cuerpos principales, pero más allá del Sol (en el lado opuesto). es decir, a diferencia de  $L_2$  este se encuentra **más cerca** del Sol que de la propia Tierra. Además este se encuentra en la órbita de la Tierra, lo que hace que sea difícil de alcanzar y mantener

4.  $L_4$  y  $L_5$ : Estos puntos están en los vértices de dos triángulos equiláteros que tienen como base la línea que une a los dos cuerpos principales. En el sistema Tierra-Sol,  $L_4$  precede a la Tierra en su órbita alrededor del Sol, y  $L_5$  la sigue. Estos puntos son **estables** debido a la influencia combinada de la gravedad y la fuerza centrífuga, y pueden contener cúmulos de polvo y asteroides, conocidos como troyanos.

## 4. Cálculo de los puntos de lagrange

En esta sección del texto, calcularemos las posiciones de los cinco puntos de lagrange existentes en el sistema tierra-luna. Procedemos de la siguiente manera:

### 4.1. Cálculo de la energía potencial gravitacional

Comenzamos introduciendo nuestro sistema de coordenadas: El origen de nuestro sistema de coordenadas será el centro de masa del sistema tierra-luna. Además, el eje  $x$  pasará por los centros de masa de la tierra y la luna, y el eje  $y$  será, naturalmente, perpendicular al eje  $x$ . Entonces, la posición de una masa  $m$  sería como se indica en la siguiente figura.

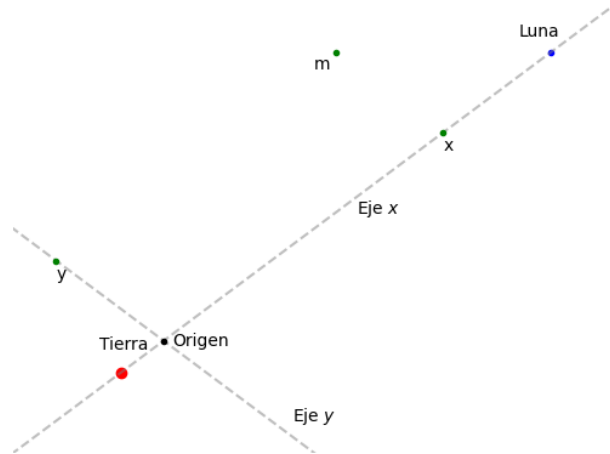


Figura 2: Masa  $m$  en nuestro sistema de coordenadas

Por supuesto, debido a la rotación del sistema tierra-luna, este sistema de referencia sería no-inercial. Por lo tanto, es posible que una masa se quede estacionaria en este sistema de referencia inercial incluso cuando la suma de todas las fuerzas sobre dicha masa es diferente de cero. (Esto sucede cuando la fuerza centrífuga, la cual no es perceptible en este sistema de coordenadas, cancela la suma de las fuerzas gravitacionales.)

Es en este sistema de coordenadas que procedemos a calcular la energía potencial, tanto la gravitacional, como la asociada a la fuerza centrífuga que está experimentando la masa en cuestión. Ahora bien, la energía potencial gravitacional de un cuerpo con masa  $m$  que está a distancia  $d_L$  de la luna y distancia  $d_T$  de la tierra sería igual a  $-G\frac{M_T m}{d_T} - G\frac{M_L m}{d_L}$ , (donde  $M_T$  y  $M_L$  son las masas de la tierra y la luna, respectivamente). Entonces, si la posición de  $m$  en nuestro sistema de coordenadas está dada por  $(x, y)$ , y la posición de la tierra está

dada por  $(x_T, y_T)$ , tenemos que  $d_T = \sqrt{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2}$ . Sin embargo, en el sistema de coordenadas que hemos escogido,  $y_T = 0$ . Por lo tanto, la expresión anterior se reduce a:  $d_T = \sqrt{(x - x_T)^2 + y^2}$ . El mismo razonamiento nos lleva a que  $d_L = \sqrt{(x - x_L)^2 + y^2}$ . Por lo tanto, la energía potencial gravitacional de  $m$  está dada por  $-G(\frac{M_T m}{\sqrt{(x - x_T)^2 + y^2}} + \frac{M_L m}{\sqrt{(x - x_L)^2 + y^2}})$ . Por otro lado, una partícula situada a una distancia  $r$  del eje de rotación experimenta una fuerza centrífuga  $m\omega^2 r$ . Esta se puede tratar como una fuerza conservativa a la cual está asociada la energía potencial  $m - \omega^2 \frac{r^2}{2}$ . Claramente, en nuestro ejemplo  $r^2 = x^2 + y^2$ . entonces, la energía potencial total de  $m$  estaría dado por:

$$U(x, y) = -G(\frac{M_T m}{\sqrt{(x - x_T)^2 + y^2}} + \frac{M_L m}{\sqrt{(x - x_L)^2 + y^2}}) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

Para simplificar la representación de la función, queremos una función que acepte sus parámetros en unidades de la separación entre la tierra y la luna. Entonces llamamos:  $X = \frac{x}{x_L + x_T}$ ,  $Y = \frac{y}{x_L + x_T}$ ,  $\alpha = \frac{x_T}{x_T + x_L}$  (donde  $x_L + x_T$  es la distancia entre la tierra y la luna.) Por lo tanto, podemos reescribir la función anterior como:

$$U(X, Y) = -G(\frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_T m}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}} + \frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_L m}{\sqrt{(X + \alpha - 1)^2 + Y^2}}) - \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2)(x_L + x_T)^2$$

Para el sistema tierra-luna, tenemos que  $\omega \approx 2,67$  rad/s. Además,  $\alpha \approx 0,0121$ . Entonces, graficando la función anterior obtenemos el siguiente resultado:

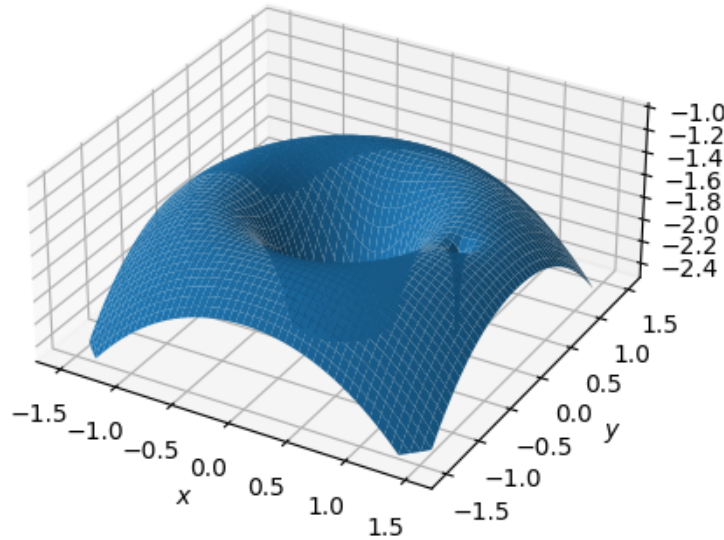


Figura 3: Energía potencial de cuerpo en el sistema tierra-luna

Como podemos ver en la figura 3, la energía potencial tiene dos singularidades, en las posiciones de la tierra y de la luna, en donde la energía potencial tiende a  $-\infty$ . Sin embargo, por fuera de estos dos puntos, la función que da la energía potencial es analítica.

## 4.2. Encontrando posiciones de equilibrio

Ahora bien, sabemos que la fuerza que experimenta un objeto en órbita será proporcional al gradiente de  $U$ . Es decir  $\vec{F} \propto \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial X}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial Y}\hat{j}$ . Por lo tanto, para encontrar los puntos de equilibrio, necesitamos encontrar los puntos en que  $\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial Y} = 0$ . Esto lo haremos utilizando métodos numéricos.

### 4.2.1. Puntos $L_1$ , $L_2$ y $L_3$

Los puntos  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  se encuentran todos sobre el eje  $x$  en nuestro sistema de coordenadas (es decir, la línea que pasa por la luna y la tierra). Por lo tanto, para encontrarlos, comenzaremos observando el comportamiento de  $U(X, Y)$  cuando  $Y = 0$ . Es fácil ver que la función

$$U(X, Y) = -G\left(\frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_T m}{\sqrt{(X - \alpha)^2 + Y^2}} + \frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_L m}{\sqrt{(X + \alpha - 1)^2 + Y^2}}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2)(x_L + x_T)^2$$

Es par respecto al parámetro  $Y$  (es decir que, para todo  $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ , tenemos  $U(X, Y) = U(X, -Y)$ ). Esto ocurre debido a que en la función  $U$ , la variable  $Y$  siempre aparece de la forma  $Y^2$ . Debido a la paridad de  $U(X, Y)$ , se sigue que, Para todo  $(X, Y)$  distinto de  $(0, 0)$ ,  $\frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y) = 0$ . Esto nos facilita mucho el cálculo de los puntos de equilibrio, ya que únicamente necesitamos encontrar los valores de  $X$  para los que la función  $\frac{\partial U(X, 0)}{\partial X} = -G\left(\frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_T m}{X - \alpha} + \frac{1}{x_T + x_L} \frac{M_L m}{X + \alpha - 1}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2 X^2(x_L + x_T)^2$  es igual a 0. En nuestro caso, utilizamos el método del punto intermedio para encontrar estos puntos, los cuales tienen el valor de  $-1,005$ ,  $0,837$  y  $1,156$ . en la siguiente gráfica podemos ver que estos puntos son, en efecto, los puntos en que se maximiza la función  $F(X, 0)$ :

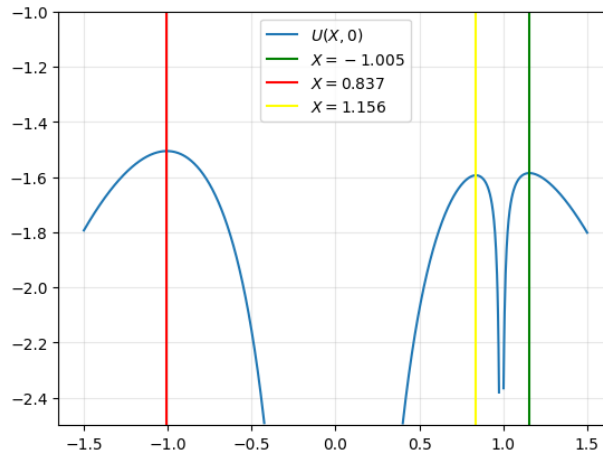
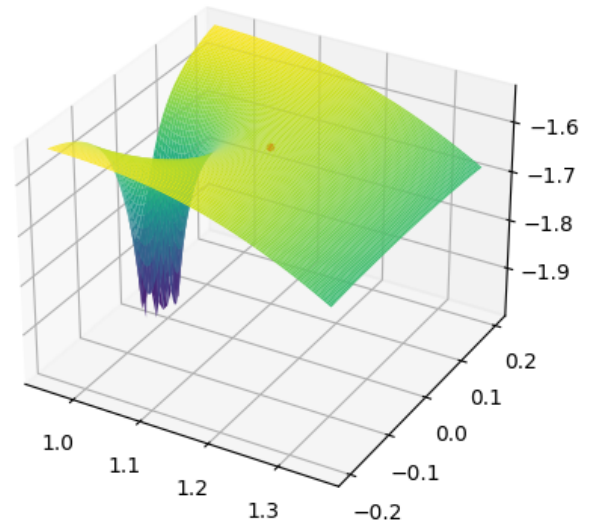
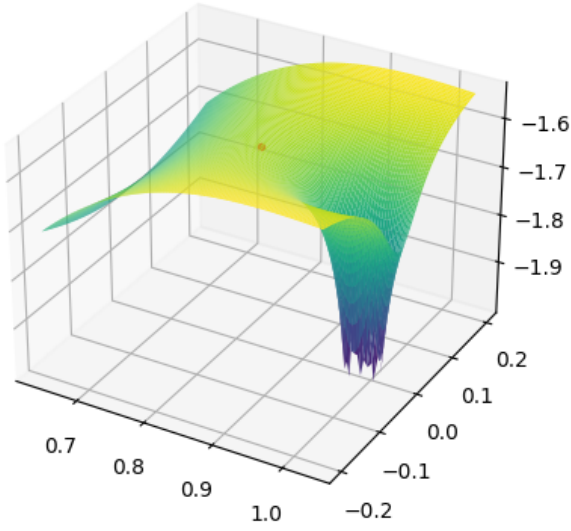


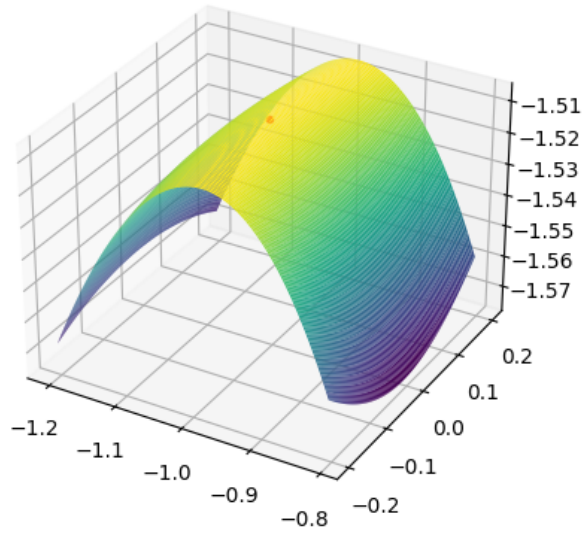
Figura 4: Energía potencial  $U$  con sus máximos locales

Por lo tanto, hemos encontrado los primeros tres puntos de Lagrange,  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ , los cuales en nuestro sistema de coordenadas y con las unidades que escogimos tienen las coordenadas  $(0,836, 0)$ ,  $(1,156, 0)$  y  $(-1,005, 0)$  respectivamente.





(a) Energía potencial en las proximidades de  $L_1$  (b) Energía potencial en las proximidades de  $L_2$



(c) Energía potencial en las proximidades de  $L_3$

Figura 5: Representación de la energía potencial en  $L_1$ ,  $L_2$ , y  $L_3$

#### 4.2.2. Puntos $L_4$ y $L_5$

Los puntos  $L_4$  y  $L_5$  tienen la característica de que son simétricas respecto al eje  $x$ . Por lo tanto, utilizando la ecuación  $\tilde{\mathbf{F}} = -\frac{\partial V}{\partial X}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial Y}\hat{\mathbf{j}}$  y considerando  $Y \neq 0$ , se puede encontrar estos dos puntos. Ya que, cuando las dos derivadas parciales sean cero simultáneamente significa que hemos encontrado  $L_4$  o  $L_5$ .

Lo anterior, se puede lograr utilizando métodos computacionales que nos permite hallar las raíces, es decir, encontrar los valores para los cuales el sistema de ecuaciones es igual a cero, donde al suponer un punto inicial  $(x,y)$  encuentra la raíz más cercana, el otro punto, se halla simplemente cambiando el punto inicial a  $(x,-y)$ .

Las dos raíces encontradas tienen los valores  $X = 1/2 - \alpha$  y  $Y = \pm\sqrt{3}/2$ .

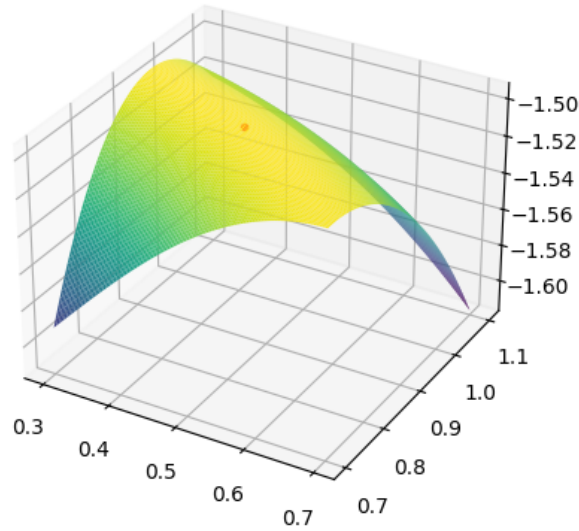


Figura 6: Energía potencial en las proximidades de  $L_4$