Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université de Carthage

Ecole Polytechnique de Tunisie

وزارة التعليـم العالي و البحث العلمي
جامعـة قرطاج
المدرسـة التونسية للتقنيات

Rapport de Compte rendu

TP théorie de commande

Travail élaboré par
Daoud Aymen
Dhaouadi Amira

Travail encadré par
M.karim bouaffoura et M.Naceur belhadj Braiek

Année Universitaire : 2021-2022

Rue Elkhawarezmi BP 743 La Marsa 2078
Tel: 71 774 611 -- 71 774 699   Fax: 71 748 843
Site Web: www.ept.rnu.tn

نهج الخوارزمي ص.ب 743 المرسى 2078
الهاتف: 611 774 71 -- 699 774 71 الفاكس: 843 748 71
موقع الواب: www.ept.rnu.tn

Remerciements

Au terme de ce projet j'adresse mes remerciements à M.Naceur belhadj braiek et M.karim bouaffoura pour leur encadrement.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Présentation du système étudié **4**

3 Modèle mathématique du système **6**
- 3.1 Modèle mécanique du drone 6
- 3.2 Les paramétres de modele et ses valeurs 9
- 3.3 Modélisation électro-mécanique des moteurs 10
- 3.4 Fonction de Transfert en boucle ouvert 12

4 Simulation du modèle originel et du modèle simplifié **13**
- 4.1 Simulation sur Simulink par schéma de bloc originel 13
- 4.2 Simulation sur Simulink par schéma de bloc simplifié 13

5 Commande PID (P, PI ou PID) du système et simulation du système commandé **14**
- 5.1 Fonction de transfert en boucle Fermé 15
- 5.2 Gain critique 15
- 5.3 Commande P 17
- 5.4 Commande PD 17
- 5.5 Commande PID 18

6 Analyse et commande du système dans l'espace d'état **20**
- 6.1 Répresentation d'état 20
- 6.2 Stabilité 21
- 6.3 Commandabilité 22
- 6.4 Observabilité 22
- 6.5 Commande par retour d'état 22

7 Commande numérique RST du système **27**
- 7.1 Modèle numérique 27
- 7.2 Commande RST et simulation 28

8 Interprétation des différentes structures de commande **33**

9 Conclusion **33**

1 Introduction

Les mini-drones sont des véhicules aériens de petite taille, sans pilote humain à bord de l'appareil. Ils furent initialement développés pour des besoins militaires an d'accomplir des missions de surveillance, de renseignement ou de combat, avant d'être ensuite utilisés pour des applications civiles telles que la surveillance de mouvement de foule ou de trac routier. Il existe plusieurs variétés de mini-drones, mais presque tous ont les points communs suivants :

• ils sont petits (< 1 m), légers (< 2 kg) et peu onéreux ;

• ils peuvent accomplir de nombreuses tâches de manière autonome (eectuer un vol stationnaire, suivre une trajectoire prédénie, etc.) ;

• un pilote non-spécialiste peut les contrôler à travers des ordres de haut niveau (aller vers la gauche, monter d'une hauteur de 1 mètre, atterrir, faire demi-tour, etc.) ;

• ils doivent être capables de voler dans différents environnements : à l'intérieur ou à l'extérieur, en présence de vent, d'obstacles, etc. Une configuration de mini-drone en particulier a connu un succès grandissant depuis plus de 10 ans. Il s'agit d'un drone possédant 4 hélices, d'où son nom de quadrotor ou quadrirotor. Ce type de mini-drone est étudié dans de nombreuses universités ou écoles d'ingénieurs et est même vendu au grand public comme un jeu pour l'extérieur ou l'intérieur (un exemple est donné sur la gure 2). On considère dans la suite ce type de mini-drone qui a comme avantage, parmi d'autres, de pouvoir être modélisé et contrôlé automatiquement de manière relativement simple.

2 Présentation du système étudié

Un quadrirotor est constitué d'un corps principal mis en mouvement par 4 hélices entraînées chacune par un moteur électrique. Tous les composants électroniques du drone, dont les 4 moteurs, sont alimentés par une batterie Lithium Polymère. La carte électronique embarquée à bord du quadrirotor traite les informations des différents capteurs et élabore la commande des 4 variateurs des moteurs en fonction de la consigne à suivre, définie par l'utilisateur et transmise au drone par liaison Wi-Fi. Le drone est équipé de plusieurs capteurs, à fonctionnalités bien différentes : un capteur à ultrasons situé sous le drone et pointant vers le sol, un accéléromètre tri-axe (mesurant

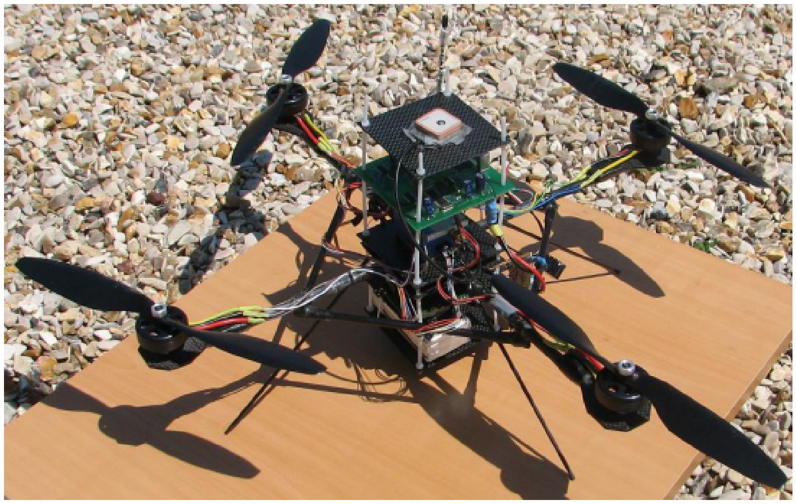


FIGURE 1 – Prototype étudié dans ce projet

suivant trois directions orthogonales de l'espace), un gyromètre tri-axe, une antenne GPS, un magnétomètre tri-axe et deux caméras pointant l'une vers l'avant du drone et l'autre vers le sol.

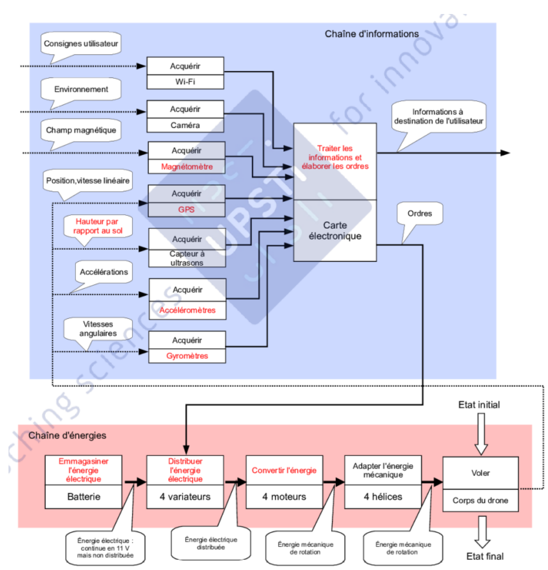


FIGURE 2 – Prototype étudié dans ce projet

Notre objectif dans ce mini-projet est d'etudier le cap de drone ,c'est a dire , modeliser mathematiquement le systéme et assurer son analyse et les differents types de commande .

3 Modèle mathématique du système

L'objectif de cette partie est de modéliser le quadrirotor en exploitant les équations de dynamique du drone et les équations électro-mécaniques des 4 moteurs. Ce modèle est indispensable pour concevoir les algorithmes de pilotage de haut niveau qui seront développés dans les parties suivantes.

3.1 Modèle mécanique du drone

Un schéma simplié du quadrirotor est donné sur la Figure 7. Les différents paramètres nécessaires pour la modélisation mécanique du drone sont décrits ci-après.

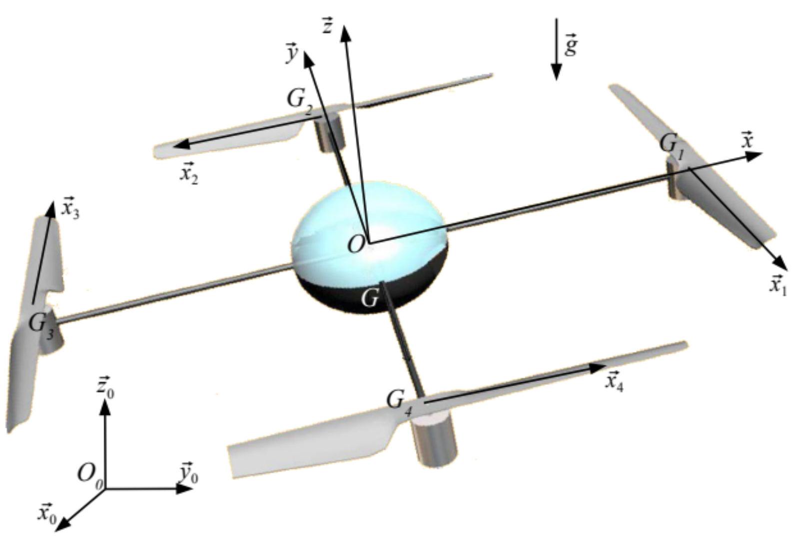


FIGURE 3 – Schéma simplifié du quadrirotor

•Le mouvement du corps S par rapport au sol S0 est donné par le torseur cinématique

$\{\mathcal{V}(S_0/S)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}(S_0/S) \\ \overrightarrow{V}(G_0/S) \end{array} \right\}_G$ ou $\overrightarrow{\Omega}(S_0/S) = p\overrightarrow{x} + q\overrightarrow{y} + r\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{V}(S_0/S) = u\overrightarrow{x} + v\overrightarrow{y} + w\overrightarrow{z}$

• Chaque hélice est en liaison pivot d'axe $(Gi, \vec{z})$ avec le corps du drone S. On pose $\theta_i = (\vec{x}, \vec{x_i}) = (\vec{y}, \vec{y_i})$ pour$i \in 1, 2, 3, 4$. On note alors $\overrightarrow{\omega}_{S_i/S} = \epsilon_i \omega_i \overrightarrow{z}$ la vitesse angulaire de l'hélice S_i par rapport à S , avec ω_i la vitesse angulaire strictement positive de chaque hélice et $\epsilon_i = \pm 1$ en fonction du sens de rotation de chaque hélice (compte tenu du type de pas de l'hélice).

•La masse d'une hélice Si est $m_i = m$ (supposée identique pour les 4 hélices).

•La masse du corps S est notée m_s.

• les actions électromagnétiques intérieures aux moteurs produisant des couples sur chaque rotor lié à une hélice $\overrightarrow{\Gamma}_{S_i/S} = \epsilon_i \Gamma_i \overrightarrow{z}$, où le couple Γ_i est toujours positif.

•moment cinétique en G_i de S_i par rapport à S_0

$$\overrightarrow{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = \begin{cases} A_i p \cos^2\theta_i + B_i p \sin^2\theta_i + (A_i - B_i) q \sin\theta_i \cos\theta_i \\ A_i q \sin^2\theta_i + B_i q \cos^2\theta_i + (A_i - B_i) p \cos\theta_i \sin\theta_i \\ C_i(r + \varepsilon_i \omega_i) \end{cases}$$

•Son moyenne temporelle sur une période T_i

$\langle \overrightarrow{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle = I_r p \overrightarrow{x} + I_r q \overrightarrow{y} + J_r (r + \varepsilon_i \omega_i) \overrightarrow{z}$ **avec** $I_r = \frac{A_i + B_i}{2}$ **et** $J_r = C_i$.

•En isolant quadrirotor en déduit 6 équations scalaires projetées sur la base du repère R :

$I\dot{p} - Iqr + (Jr + Jr \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \omega_i) q = al(\omega_2^2 - \omega_4^2)$
$I\dot{q} + Ipr - (Jr + Jr \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \omega_i) p = al(\omega_3^2 - \omega_1^2)$
$J\dot{r} + Jr \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \dot{\omega}_i = -b \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \omega_i^2$
$\dot{u} - rv + rq = g_1$
$\dot{v} + ru + rp = g_2$
$\dot{w} - uq + vp = g_3 + \frac{a}{M} \sum_{i=1}^{4} \omega_i^2$

avec l'accélération de la pesanteur est :

$$\overrightarrow{a}(G, E/S_0) = \dot{u}\overrightarrow{x} + \dot{v}\overrightarrow{y} + \dot{w}\overrightarrow{z} + u(-q\overrightarrow{z} + r\overrightarrow{y}) + v(p\overrightarrow{z} - r\overrightarrow{x}) + r(-p\overrightarrow{y} + q\overrightarrow{x})$$

•En isolant chaque hélice i soumise à : l'action de l'air ,le pesenteur, au couple de moteur Γ_i et l'action du liaison Pivot.
Le théoreme du moment dynamique appliqué en G_i dans le référentiel galiléen en projection selon $\overrightarrow{z}$ donne :

$$\overrightarrow{\delta}(G_i,S_i/S_0)\cdot\overrightarrow{z}=\varepsilon_i\Gamma_i+M_i$$

Or $\overrightarrow{\delta}(G_i,S_i/S_0)\cdot\overrightarrow{z}=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma}(G_i,S_i/S_0)\cdot\overrightarrow{z})=J_r(\varepsilon_i\dot{\omega}_i+\dot{r})$
En effet, $(\overrightarrow{\sigma}(G_i,S_i/S_0)\cdot\frac{d\overrightarrow{z}}{dt}_{S_0}=0)$
Ainsi $J_r(\varepsilon_i\dot{\omega}_i+\dot{r})=\varepsilon_i\Gamma_i-b\varepsilon_i{\omega_i}^2$

⇒Ces équations scalaires définies aux deux questions précédentes modélisent le comportement du drone. Ces équations étant **non-linéaires**, il est souhaitable de les linéariser an de simplifierer l'élaboration des lois de contrôle du drone.
. Cette approximation est justifiée par le fait que l'on s'intéresse dans cette étude à un comportement du quadrirotor proche d'un vol stationnaire. En pratique, **la linéarisation** de ces équations donne des résultats expérimentaux très satisfaisants même lorsque le drone se déplace à une vitesse raisonnable. Pour cela, on suppose donc par la suite que l'on se place autour de la configuration de vol stationnaire et que
• $\omega=\bar{\omega}+\tilde{\omega_i}o\tilde{\omega_i}$ est la variation de vitesse angulaire autour du point d'équilibre $\bar{\omega},\frac{\tilde{\omega_i}}{\bar{\omega}}$étant un infiniment petit d'ordre 1 (positif ou négatif).
•On pose de la même manière que pour les vitesses de rotation des hélices : $\Gamma_i=\bar{\Gamma}_i+\tilde{\Gamma}_i$, où $\tilde{\Gamma}_i$est la variation de couple moteur (inniment petit d'ordre 1 devant Γ_i) autour de Γ_i , couple moteur nécessaire pour assurer le vol stationnaire et autour duquel se fait la linéarisation des équations.
• les quantités u, v, w, p, q, r sont faibles et considérées comme des infiniment petits d'ordre 1 (devant la vitesse des pales)
Afin de caractériser l'orientation du drone dans l'espace, une paramétrisation usuelle est l'utilisation des angles où ψ est appelé l'angle de lacet, θ l'angle de roulis et φ l'angle de tangage tel que :

$$u=\cos(\overline{\psi})\dot{x}+\sin(\overline{\psi})\dot{y}$$
$$v=-\sin(\overline{\psi})\dot{x}+\cos(\overline{\psi})\dot{y}$$
$$w=\dot{z}$$

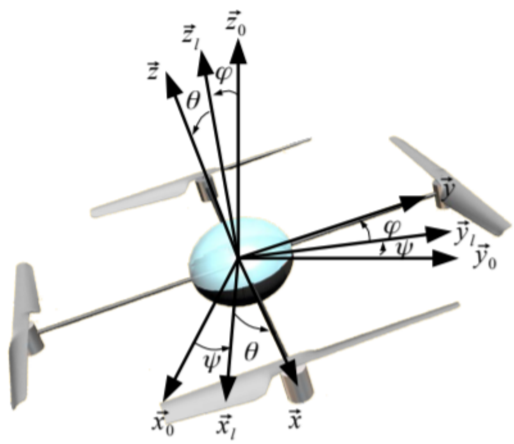


FIGURE 4 – Paramétrisation de l'orientation du drone dans l'espace

En soustrayant les équations de chaque héliceS_i

$$(J - 4Jr)\dot{r} = -\sum_{i=1}^{4} \epsilon_i (Jr\dot{\tilde{\omega}} + 2b\bar{w}\tilde{w}_i) \tag{1}$$

3.2 Les paramétres de modele et ses valeurs

$$Rm = 0.6V$$

$$\omega = 375 rad.s - 1$$

$$U = 6V$$

$$K_m = 10^{-2}$$

$$L_m = 4010^{-6}$$

$$b = 0.00317410^{-4}$$

$$Jr = 3.410^{-5} kg^{m} 2^{s1)}$$

$$J = 1kg.m^2 s^1$$

3.3 Modélisation électro-mécanique des moteurs

Pour trouver cette équation : (J - 4Jr) =-$\sum_{i=1}^{4}\epsilon_i(Jr\dot{\omega}+2b\bar{w}w_i)$

En soustrayant les équations de chaque héliceS_i
de l'equation de moment suivant z ,il vient :

$$(J-4J_r)\dot{(r)} = -\sum_{i=1}^{4}\epsilon_i\Gamma_i$$

De méme ,en soustrayant les équations d'hélice 3 et 1 ,on obtient :

$$J_r(\dot{\omega_3}-\omega_1) = \Gamma_3-\Gamma_1\dot{-}2b^-(\omega_3-\omega_1)$$

et de méme ,en soustrayant les équations d'hélice 4 et 2 ,on obtient :

$$J_r(\dot{\omega_2}-\dot{\omega_4}) = \Gamma_2-\Gamma_4-2b\bar{\omega}(\omega_2-\omega_4)$$

En additionnant les équations d'hélice de 3 et 1 et l'hélice 4 et 2 ,on obtient :

$$J_r\sum_{i=1}^{4}\omega_i = \sum_{i=1}^{4}\Gamma_{i2}b\bar{\omega}\sum_{i=1}^{4}\omega_i$$

on multiplie cette equation par ϵ_i et on remplace $\sum_{i=1}^{4}\epsilon_i\Gamma_i$ par son expression dans (*) ,on obtient :

$$(J-4J_r)\dot{r} = -\sum\epsilon(J_r\dot{\omega_i}+2b\bar{\omega}\omega_i)$$

Les équations qui caractérise le mouvement de lacet sont :

$$\dot{\psi} = r$$

$$(J-4J_r)\dot{r} = -\sum_{i=1}^{i=4}\varepsilon_i\left(J_r\dot{\widetilde{\omega}}_i+2b\overline{\omega}\widetilde{\omega}_i\right)$$

$$J_r\dot{\widetilde{\omega}}_i = (\widetilde{u}_i-K_m\widetilde{\omega}_i)\frac{K_m}{R_m}-2b\overline{\omega}\widetilde{\omega}_i$$

On a deja montrer :

$$(J-4J_r)\dot{r} = -\sum\epsilon(J_r\dot{\omega_i}+2b\bar{\omega}\omega_i)$$

or on a :

$$\omega = \sum\epsilon\omega_i$$

donc

$$(J-4J_r)\dot{r} = -J_r\dot{\omega} - 2b\bar{\omega}\omega(eq1)$$

Chaque hélice est montée directement sur le rotor d'un petit moteur à courant continu dont les caractéristiques sont données en annexe. Tous les moteurs sont supposés identiques. Les équations simpliées qui caractérisent le comportement dynamique et électrique des moteurs sont les suivantes
d'aprés une étude sur le moteur du drone , on trouve le systéme d'equation :

$$\begin{gathered} u = R_m I + L_m \frac{dI}{dt} + K_m\omega \\ \Gamma = K_m I \\ Jr\dot{\omega} = \Gamma - b\omega^2 \end{gathered}$$

où i est la vitesse angulaire de l'hélice, u_i la tension d'alimentation du moteur, $\Gamma_i lecouplemoteur$,R$_m$ la résistance interne, Lm l'inductance et K_m la constante de couple (Jr et b sont des constantes caractérisant.
En linéarisant les equations autour d'un point stationnaire :

$$u = \frac{R_m}{K_m}\Gamma + \frac{L_m}{K_m}\Gamma + K_m\omega(eq2)$$

$$\Gamma = J_r\dot{\omega} + 2b\bar{\omega}(eq3)$$

On remplace (eq 3) trouveé dans (eq 2) , on obtient :

$$J_r\dot{\omega} + \frac{K_m}{R_m}\omega + 2b\bar{\omega}\omega = \frac{K_m}{R_m}u$$

On détermine maintenant les transformation de laplace des expression trouvées :

$$(J-4J_r)sr = -(J_r s + 2b\bar{\omega})\omega(eq4)$$

$$J_r s + \frac{K_m}{R_m} + 2b\bar{\omega}\omega = \frac{K_m}{R_m}U$$

$\Rightarrow$

$$\omega = \frac{K_m}{R_m}\frac{1}{J_r s + \frac{K_m}{R_m}2b\bar{\omega}}U$$

et on a :

$$r = p\psi$$

On remplace w et r dans (eq 4) , on trouve la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{\psi}{U} = \frac{K_0(1+\tau_1 s)}{s^2(1+\tau_2 s)}$$

avec

$$K_0 = \frac{K_m}{R_m(J-4J_r)} \frac{2b\bar{\omega}}{\frac{K_m^2}{R_m} + 2b\bar{\omega}}$$

$$\tau_1 = \frac{J_r}{2b\bar{\omega}}$$

$$\tau_2 = \frac{J_r}{\frac{K_m^2}{R_m} + 2b\bar{\omega}}$$

NB : On a trouvé un systéme linéaire , on n ' a pas besoin de faire la linéarisation autour d'un point d'équilibre et simplifier le modéle

3.4 Fonction de Transfert en boucle ouvert

$$H(s) = \frac{K_0(1+\tau_1 s)}{s^2(1+\tau_2 s)}$$

avec :

$$\tau_1 = 0.1428$$

$$\tau_2 = 0.084$$

$$K_0 = 0.023$$

4 Simulation du modèle originel et du modèle simplifié

4.1 Simulation sur Simulink par schéma de bloc originel

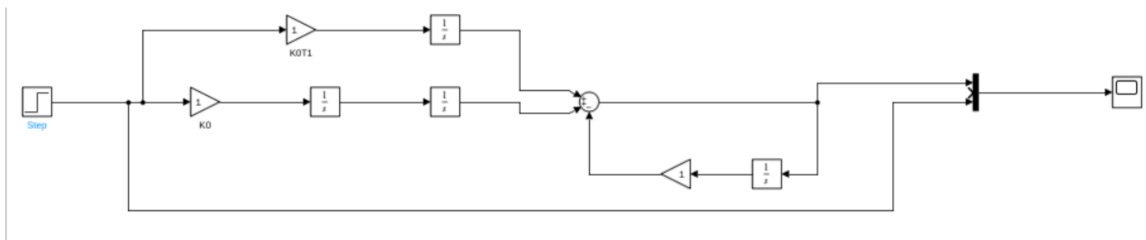


FIGURE 5 – Schéma de Bloc priginel

4.2 Simulation sur Simulink par schéma de bloc simplifié

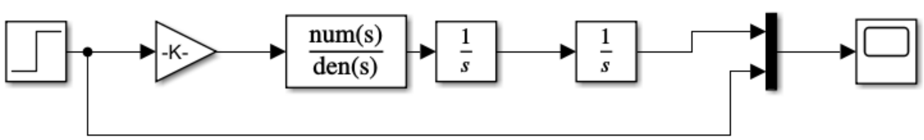


FIGURE 6 – Schéma de Bloc simplifié

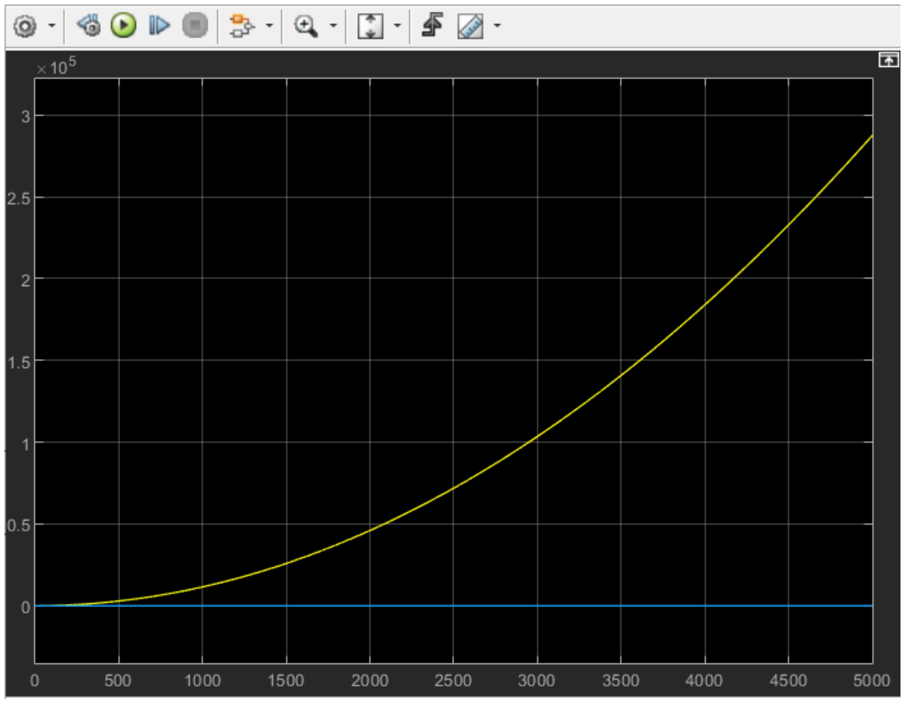


FIGURE 7 – Réponse des deux systéme entre 0 et 10s

⇒ Le systéme est instable en boucle fermé

5 Commande PID (P, PI ou PID) du système et simulation du système commandé

L'objectif de cette partie est de contrôler l'assiette du quadrirotor, c'est-à-dire de contrôler l'angle de roulis θ et l'angle de tangage φ du drone. En particulier, on souhaite pouvoir stabiliser le quadrirotor à l'horizontale pour obtenir un vol stationnaire, c'est-à-dire atteindre un angle de roulis de référence θ_{ref} et angle de tangage de référence φ_{ref} de 0°. Pour ce faire, seules les mesures inertielles sont exploitées

5.1 Fonction de transfert en boucle Fermé

$$H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1 + H_{BO}}$$
$$= \frac{\frac{K_0}{\tau_2}(1 + \tau_1 s)}{s^3 + \frac{s^2}{\tau_1} + \frac{\tau_1 K_0 s}{\tau_2} + \frac{K_0}{\tau_2}}$$

avec :

$$\tau_1 = 0.1428$$
$$\tau_2 = 0.084$$
$$K_0 = 0.023$$
$$H_{BF} = \frac{0.27(1 + 0.1428s)}{s^3 + 7s^2 + 0.04s + 0.2738}$$

5.2 Gain critique

Pour prérégler un systéme bouclé suivant la méthode Ziegler-Nichols Ziegler : Nichols ont proposé deux approches expérimentales destinées à fixer rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler, alors que la deuxième exige d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité. , Alors ,il faut tout d'abord determiner le gain et temps critique.
Régler Ki = Kd = 0 puis on va Trouver Kp qui met le système en oscillation.
Voici le schéma similunik utilisé pour trouver le gain et la periode critique :

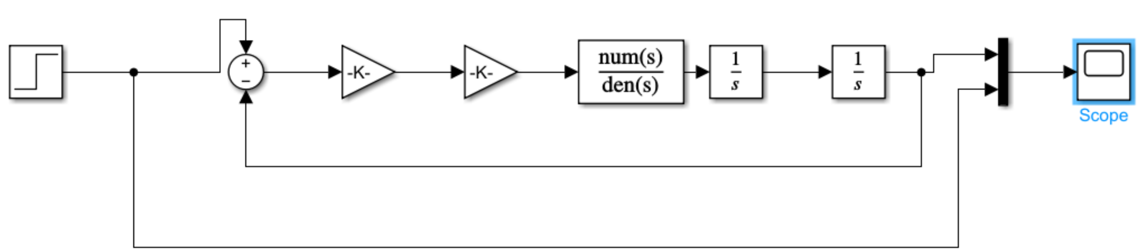


Figure 8 – Schéma de systéme en boucle fermé

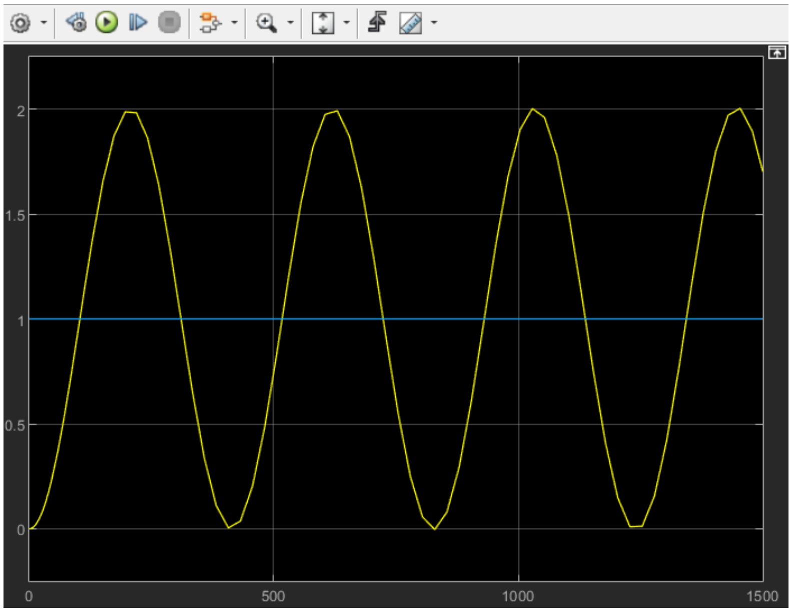


FIGURE 9 – Réponse de systéme en Gain critique

On a trouvé alors :

$$K_u = 0.01$$

$$T_u = 500s$$

on utilise ce tabeau pour determiner les paramétres des correcteurs : P , PD , PID :

Méthode de Ziegler-Nichols[1]					
Type de contrôle	K_p	T_i	T_d	K_i	K_d
P	$0.5K_u$	-	-	-	-
PI	$0.45K_u$	$T_u/1.2$	-	$0.54K_u/T_u$	-
PD	$0.8K_u$	-	$T_u/8$	-	$K_uT_u/10$
PID[2]	$0.6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$	$1.2K_u/T_u$	$3K_uT_u/40$

FIGURE 10 – Tableau de Ziegler-Nicholes

5.3 Commande P

D'aprés le tableau Ziegler-Nichols :

$$K_p = 0.5K_u$$

A.N :

$$K_p = 0.005$$

5.4 Commande PD

D'aprés le tableau Ziegler-Nichols :

$$K_p = 0.8K_u$$

$$K_d = \frac{T_u K_u}{10}$$

A.N :

$$K_p = 0.008$$

$$K_d = 0.5$$

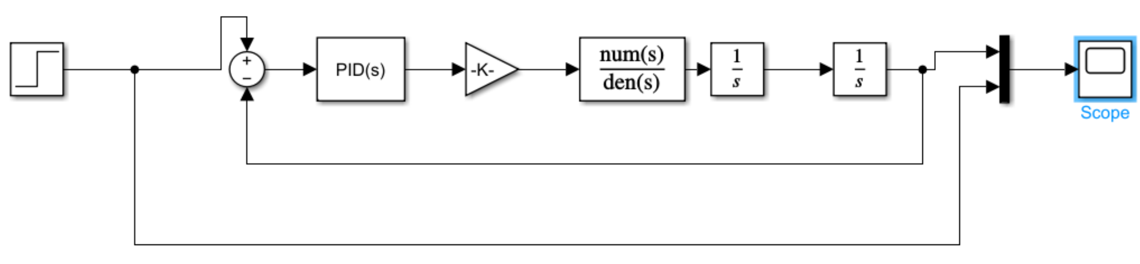


FIGURE 11 – Schéma de correcteur PD

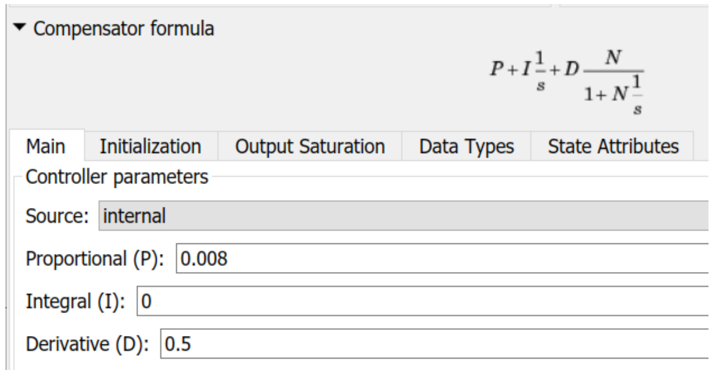


FIGURE 12 – paramétre correcteur PD

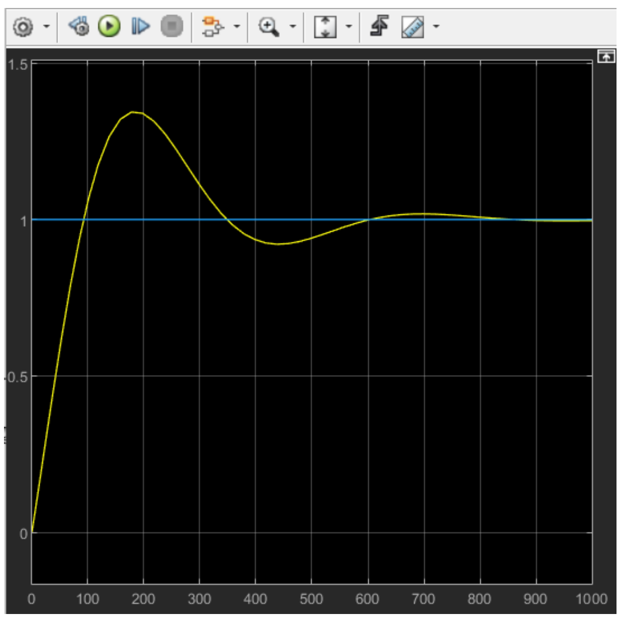


FIGURE 13 – reponse de correcteur de PD

5.5 Commande PID

Finalement nous allons utiliser un correcteur proportionnel, int´egral et d´eriv´e, de la forme suivante : D'aprés le tableau Ziegler-Nichols :

$$K_p = 0.6K_u$$

$$K_i = \frac{1.2K_u}{T_u}$$

$$K_d = \frac{3K_uT_u}{40}$$

A.N :

$$K_p = 0.006$$

$$K_i = 0.000024$$

$$K_d = 0.375$$

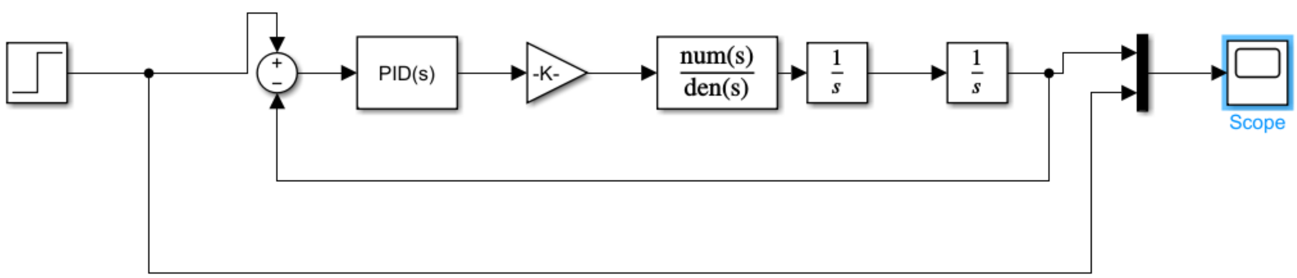


FIGURE 14 – Schéma de correcteur PID

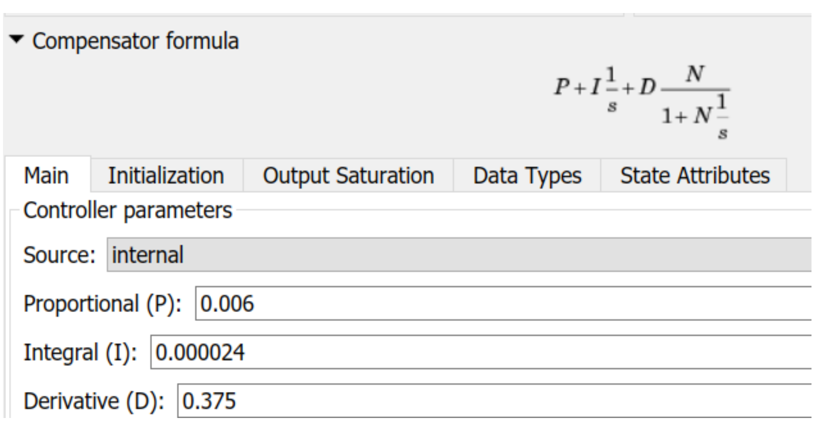


FIGURE 15 – Schéma de paramétre de correcteur PID

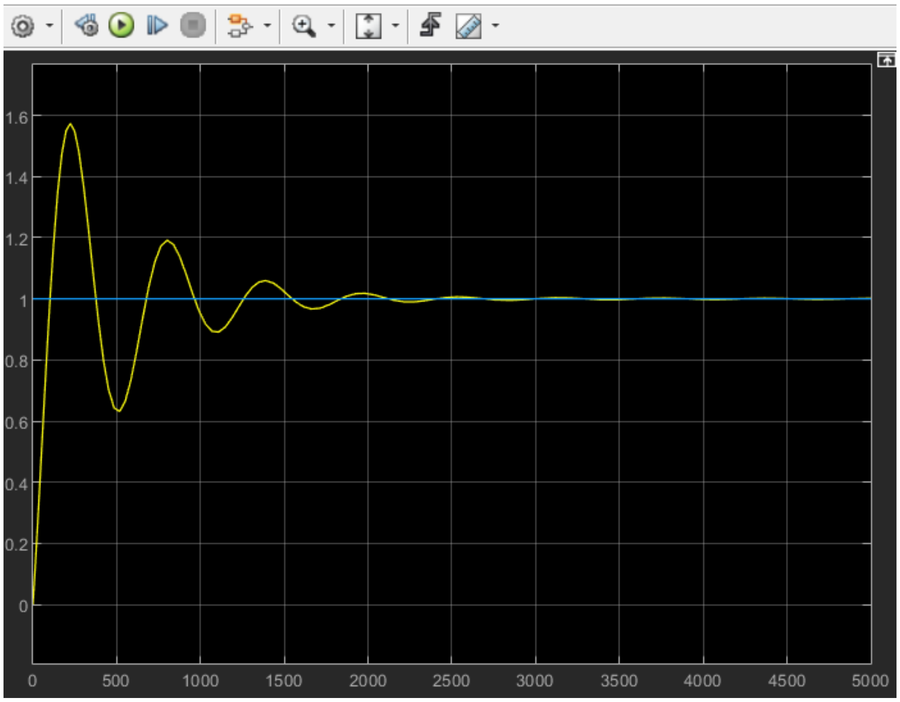


FIGURE 16 – Réponse du correcteur PID

NB : On a remarqué que notre systéme posséde deux integrateur , donc on n'a pas besoin de correcteur PI.

6 Analyse et commande du système dans l'espace d'état

6.1 Répresentation d'état

On a :

$$H_{BF} = \frac{0.27(1 + 0.1428s)}{s^3 + 7s^2 + 0.04s + 0.2738}$$

la fonction d'état est :

$$\dot{X} = AX + B\psi_{ref}$$

$$\psi = CX$$

Le modéle commandable : A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2738 & -0.04 & -7 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0.27 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}$$

Le modéle modal : A = $\begin{pmatrix} -0.000063216 & 0.197775 & 0 \\ -0.197775 & -0.000063216 & 1 \\ 0 & 0 & -6.999878 \end{pmatrix}$,
B = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 0.73 & -0.04 & 0.023 \end{pmatrix}$$

6.2 Stabilité

On calcul les poles de systéme : Dénumerateur :

$$s^3 + 7s^2 + 0.04s + 0.2738$$

$$s_1 = -6.999878$$

$$s_2 = -0.000063216 - 0.197775i$$

$$s_3 = -0.000063216 + 0.197775i$$

ou bien , on peut deteminer les valeurs propres de A :

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0.2738 & 0.04 & \lambda + 7 \end{vmatrix}$$

Les poles sont :

$$\lambda_1 = -6.999878$$

$$\lambda_2 = -0.000063216 - 0.197775i$$

$$\lambda_3 = -0.000063216 + 0.197775i$$

Les poles sont a partie réelle negative ,donc le systéme est stable

6.3 Commandabilité

On étudie alors la commandabilité : $C_1 = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & 48.96 \end{pmatrix}$

$$det(C_1) = 1 \neq 0$$

donc le systéme cap de drone est Commandable.

6.4 Observabilité

On peut aussi étudier l'observabilité : $O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} 0.27 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0.27 & 0.04 \\ -0.010952 & -0.0016 & -0.01 \end{pmatrix}$$

$$det(O) = -0.000729243 \neq 0$$

Donc notre systéme est observable.

6.5 Commande par retour d'état

la fonction d'état est :

$$\dot{X} = AX + B\psi_{ref}$$

$$\psi = CX$$

Soit ϕ_{ref} une consigne(angle de reférence) la loi du commande est : $U = KX + N\phi_{ref}$

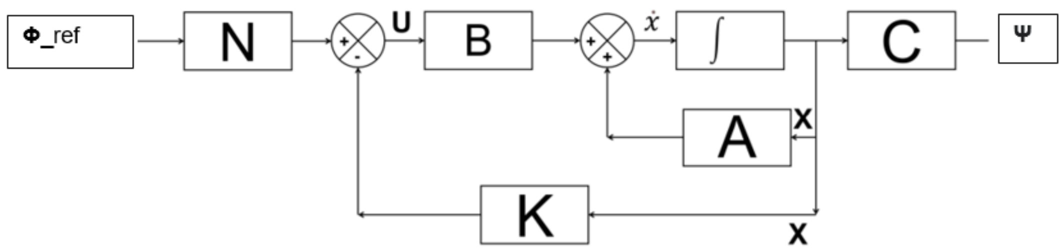


FIGURE 17 – Schéma de systéme avec retour d'état

Le systeme muni de la commande s'´ecrit

$$\dot{X} = (A - BK)X + BN\phi_r ef$$

La matrice en B.F est :

$$A_f = A - BK$$

avec K = [k1 k2 k3]

$$P(\lambda) = det(\lambda I(A - BK))$$

Nous allons utiliser la fonction tf2ss (qui sert ‘a convertir une fonction de transfert ‘a entrée unique en temps continu ou en temps discret en une représentation d'espace d'´etats ´equivalente), cette fonction prend comme param‘etres les vecteur qui repr´esentent le nom´enateur et la d´enom´enateur de la fonction de trensfert et nous donne comme sortie les A , B ,C et D les param‘etres de la fonction d'état.

$$A = \begin{pmatrix} -11.9048 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.0391 & 0.2738 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Code :

```
b = [0.0032844 0.023] ;
a = [0.084 1 0 0];
[A,B,C,D]=tf2ss(b,a)
ob=obsv(A,C)
Ct=ctrb(A,B)
a1=rank(ob)
b1=rank(Ct)
```

```
A =

  -11.9048         0         0
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0


B =

     1
     0
     0


C =

         0    0.0391    0.2738


D =

     0
```

```
ob =

         0    0.0391    0.2738
    0.0391    0.2738         0
   -0.1917         0         0


Ct =

    1.0000  -11.9048  141.7234
         0    1.0000  -11.9048
         0         0    1.0000


a1 =

     3


b1 =

     3
```

Pour déterminer le vecteur K nous allons utiliser la méthode place pr ´ed´efini dans mathlab. Elle prend comme paramétre A , B et un vecteur noté BF-Poles qui présent le poles du polynome caracteristique. la résultat est :

$$K = \begin{pmatrix} -4.9048 & 0.04 & 0.2738 \end{pmatrix}$$

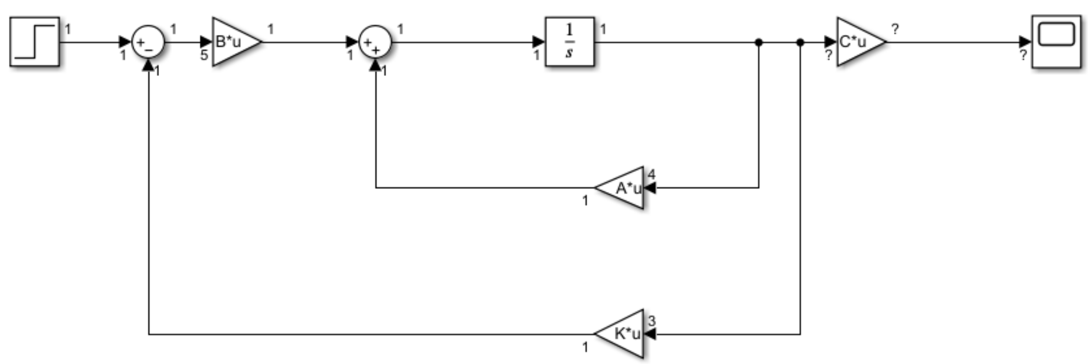
```
BF_poles =[-6.99987 -0.00006321+0.197775j -0.00006321-0.197775j]
K= place(A,B,BF_poles)
```

```
BF_poles =

  -6.9999 + 0.0000i  -0.0001 + 0.1978i  -0.0001 - 0.1978i



K =

   -4.9048    0.0400    0.2738
```

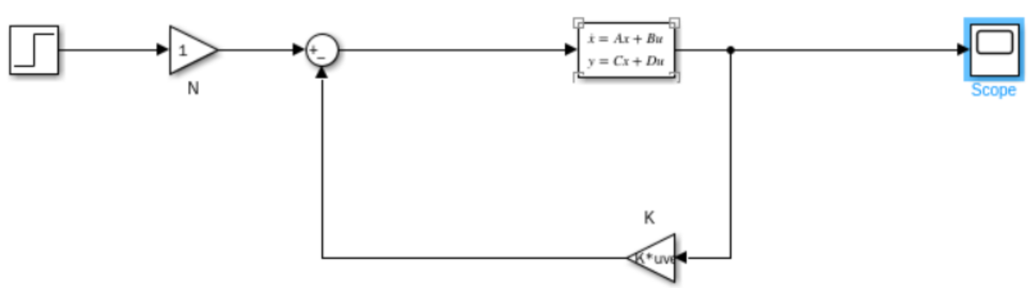
Le gain de précompensation N permettant de garantir au systéme un gain statique unitaire est donnée par :

```
N=-1*inv(C*inv(A-B*K)*B)

N =

    1.0000

fx >>
```

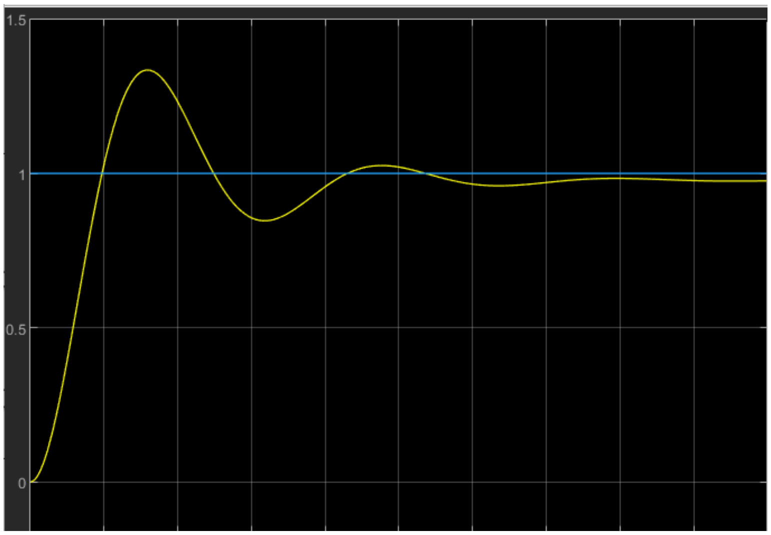
Simulation



ou bien d'une maniére plus simplifiée :

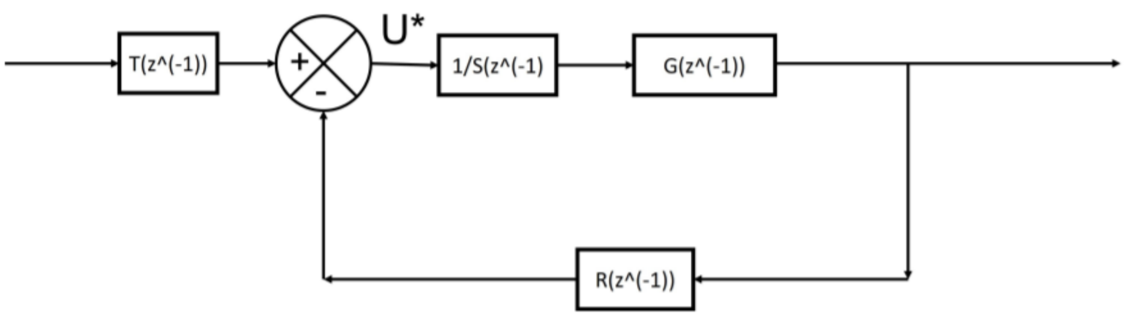


Le résultat :



7 Commande numérique RST du système

Le schéma de la commande RST est le suivant :



7.1 Modèle numérique

On va déterminer le transformé en Z de la fonction de transfert en boucle fermé : H(p) en utilisant le mathlab (avec Te = 1) est

$$H_{BF} = \frac{0.27(1 + 0.1428s)}{s^3 + 7s^2 + 0.04s + 0.2738}$$

```
H = tf([0.038556 0.023],[0.084 1 0 0 0]);
s = tf([1 -1],[1 0], 1);
hd = c2d(H,1)
hd2 =hd*s
```

```
hd2 =

  0.01933 z^4 + 0.001383 z^3 - 0.03749 z^2 + 0.01652 z + 0.0002583
  -----------------------------------------------------------------
              z^5 - 3 z^4 + 3 z^3 - z^2 + 6.758e-06 z

Sample time: 1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Alors $G(z^{-1}) = z^{-1} \frac{0.0002583z^{-4}+0.01652z^{-3}+0.03749z^{-2}+0.001338z^{-1}+0.01933}{1-3z^{-1}+33z^{-2}-2z^{-3}+6.758\times10^{-6}z^{-4}}$

7.2 Commande RST et simulation

Dans cette sous partie ,on va determiner les polynomes :

$$R(z^{-1})$$

$$S(z^{-1})$$

Le polynome caracteristique :

$$P(z^-1) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})$$

$$avec : d = 1, n_A = 4, n_B = 5$$

D'aprés le theoreme de Bizout les degrés des polynomes sont :

$$n_p < n_A + n_B + d - 1 = 4 + 4 + 1 - 1 = 8$$

$$n_S = n_B + d - 1 = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$n_R = n_A - 1 = 4 - 1 = 3$$

prenant :

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2}$$

avec :

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\omega_n = 3rads^{-1}$$

On a donc :

$$p_1 = \exp -\omega_n \exp i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = \exp -\omega_n \exp -i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

d'ou :

$$P(z^{-1}) = 1 - 0.136z^-1 + 0.015z^{-2}$$

$$S(z^-1) = 1 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2} + s_3z^{-3} + s_4z^{-4}$$

$$R(z^-1) = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + r_3z^{-3}$$

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})$$

On pose l'ecriture matriciel suivante :

$$AX = B$$

avec :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Tout calcul fait avec ce code :

```
AA=[1,0,0,0,0,0.01933,0,0,0;
    -3,-1,0,0,0,0,0,0,0;
     3,-3,1,0,0,0.020668,0,0,0;
    -2,3,-3,1,0,0.0374,0.001338,0.01933,0;
     0.000006758,-2,3,1,0.01652,0.0374,0.001338,0.01933,0;
     0.000006788,0,-2,3,-3,0.0002583,0.01652,0.0374,0.001338;
     0,0,0.000006758,-2,3,0,0.0002583,0.016,0.03749;
     0,0,0,0.000006758,-2,0,0.01652,0.01652,0;
     0,0,0,0,0.000006758,0,0,0,0.0002583]
Y=[-0.136 0.015 0 0 0 0 0 0 ];
A=[1,-3,3,0.0000006578] ;
B=[0.01933 0.001338 0.03479 0.01652 0.0002583 ];
P=poly(Y)
P=transpose(P)
P(6)=0;
X=inv(AA)*P
S=[X(1) X(2) X(3) X(4)]
R=[X(5) X(6) X(7) X(8)]
T=6.62*transpose(P)*0.7
```

Le résultat :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.0004 \\ 0.0003 \\ 0.0072 \\ 0.0079 \\ 0.0601 \\ 1.5755 \\ -0.6165 \\ -0.0002 \end{pmatrix}$$

L'execution :

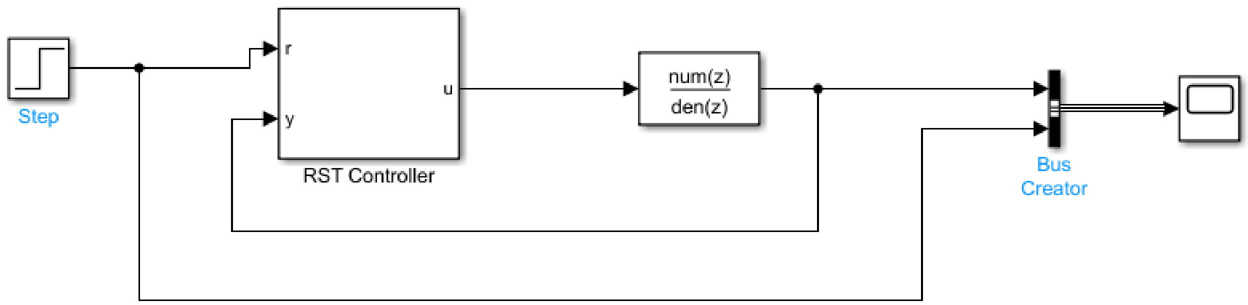
```
   1.0e+03 *

   -0.0002
    0.0004
    0.0003
    0.0072
    0.0079
    0.0601
    1.5755
   -0.6165
   -0.0002


S =

   -0.1620    0.3649    0.3363    7.1505


R =

   1.0e+03 *

    0.0079    0.0601    1.5755   -0.6165


T =

    4.6340    0.5607   -0.0095         0         0         0         0         0
```

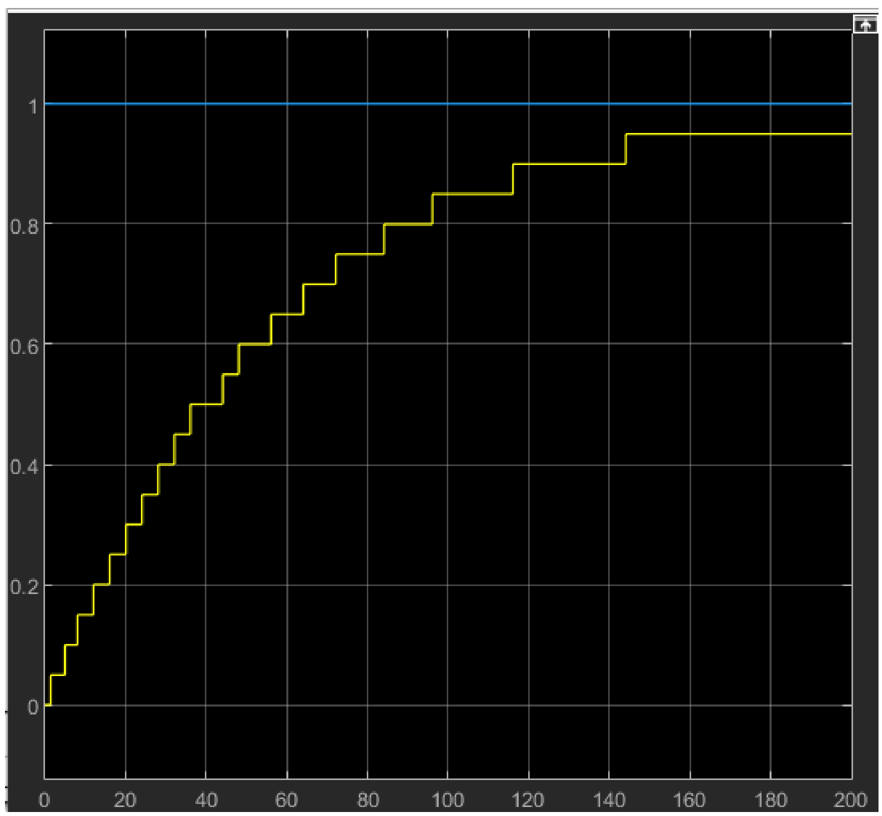
Pour avoir une réponse pile la fonction de transfert du systéme en bou-clefermée doit étre un polynome de degré minimal :

On prend :

$$T(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{B(1)}$$

La simulation sur mathlab est :





8 Interprétation des différentes structures de commande

La comparaison entre les correcteurs se résume dans ce tableau :

	Stabilité	Erreur statique	Temps de réponse (seconde)	Dépassement
PID	stable	0	150	null
Retour d'etat	stable	≈ 0	25	null
RST	stable	0	350	null

9 Conclusion

On peut conclure que les points forts de la commande PID sont : P : permet d'assurer une action instantané ,I : Annule l'errerur statique ,D : caractérisé par une action dynamique ,il permet d'améliorer la rapidité et il apporte une effet stabilisant. Mais , les méthodes les plus classiques de réglage de régulateurs PID (comme celles de Ziegler ont l'inconvénient de conduire à de trop grands dépassements sur une réponse à l'échelon et surtout de mal prendre en considération le problème de robustesse.Ce qui concerne La commande de retour d'état ,on trouve que la matrice de retour offre des degrés de liberté pour imposer un comportement dynamique au systéme et il permet de stabiliser le systéme s'il est instable en boucle ouvert. Et pour la commande RST ,il n'y a pas de restriction sur le retard du procédé il n'y a pas de restriction sur les zéros du procédé, car la méthode ne les compense pas ; ils peuvent être stables ou instables.