I – Introduction

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire (hermitien) $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de V.

a) Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de V s'écrivant sous la forme $\mathbf{x} = \sum_i x_i\,\mathbf{e}_i + \mathbf{y}$ où $\mathbf{y}$ est orthogonal à tous les $\mathbf{e}_i$.

En calculant le produit scalaire de $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{e}_i$, montrer que $x_i = \dfrac{\langle\,\mathbf{e}_i\,|\,\mathbf{x}\,\rangle}{\|\mathbf{e}_i\|^2}$.

b) Que devient cette formule dans le cas particulier où la famille est orthonormée ?

c) Expliquer comment retrouver facilement a) à partir de b).

Exercice 2

On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.

a) Quel est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$?

b) Calculer la projection de $\mathbf{w} = (1, 2, 3, 4)$ sur le plan $\mathcal{P}$ engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

- en écrivant $\operatorname{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{w}) = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$ et résolvant un système d'équations linéaires 2×2 ;
- en fabriquant une base orthogonale de $\mathcal{P}$ et utilisant la formule de projection orthogonale.

Exercice 3

Soient $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. En supposant que les x_i ne sont pas tous égaux, montrer que les coefficients a et b qui minimisent la quantité

$$\Delta(a, b) = \|\mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1}\|^2 \qquad \text{où} \qquad \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$$

sont donnés par

$$a = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

a) en interprétant la question comme un problème de projection orthogonale sur le plan engendré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{1}$;

b) en déterminant les points critiques de la fonction de 2 variables $\Delta(a, b)$.

Exercice 4

Considérons l'espace vectoriel $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ des fonctions continues $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

a) Vérifier que la formule suivante définit un produit hermitien sur V :

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\, y(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Vérifier que les fonctions $x(t) = 1$, $y(t) = \sin t$ et $z(t) = \cos t$ sont deux à deux orthogonales.

Forment-elles une famille orthonormée ?